Ejercicio 34

La función que se pide derivar es una función compuesta por lo que hay más de una función involucrada: $f(x,y,z)$, $\mathbf{r}(r,s)$ y $w = fo\mathbf{r}$. La derivada de w con respecto a r se puede hallar de dos formas:

- La primera es lograr una expresión de w en términos de r y s y calcular la derivada parcial w_r como hicimos en el ejercicio 20a. Nos dicen que:

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2 \tag{1}$$

  y que:

$$x = r - s,\ y = cos(r+s),\ z = sen(r+s) \tag{2}$$

  Es decir que $\mathbf{r}(r,s) = (x(r,s), y(r,s), z(r,s))$. Si reemplazamos las Ecs. (2) en (1) tenemos la función compuesta w:

$$w(r,s) = (r - s + cos(r+s) + sen(r+s))^2 \tag{3}$$

  y la derivada parcial de w con respecto a r queda:

$$\frac{\partial w(r,s)}{\partial r} = 2(r-s+cos(r+s)+sen(r+s))(1-sen(r+s)+cos(r+s)) \tag{4}$$

- La segunda opción, es usar la regla de la cadena para dos variables independientes y tres variables intermedias. En este caso sería :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{5}$$

  Calculando las derivadas, la ecuación de arriba queda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= [2(x+y+z)]\,[1] + [2(x+y+z)]\,[-sen(r+s)] + [2(x+y+z)]\,[cos(r+s)] \\ &= 2(x+y+z)(1 - sen(r+s) + cos(r+s)) \qquad (6)\end{aligned}$$

  Reemplazando (2) en (6) se tiene :

$$\frac{\partial w(r,s)}{\partial r} = 2(r-s+cos(r+s)+sen(r+s))(1-sen(r+s)+cos(r+s)) \tag{7}$$

  Fíjense que la expresión (7) es la misma que habíamos encontrado en (4).

Lo único que falta para concluir el ejercicio, es evaluar la derivada parcial en $r = 1$ y $s = -1$:

$$\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=1,s=-1} = 12 \tag{8}$$