Análisis Matemático II

TP2: Ejercicio 43

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La función es continua en (0,0) si:

1) $f(0,0)$ existe
2) $lím_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe
3) $lím_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

Sabemos por definición que f (0,0)=0

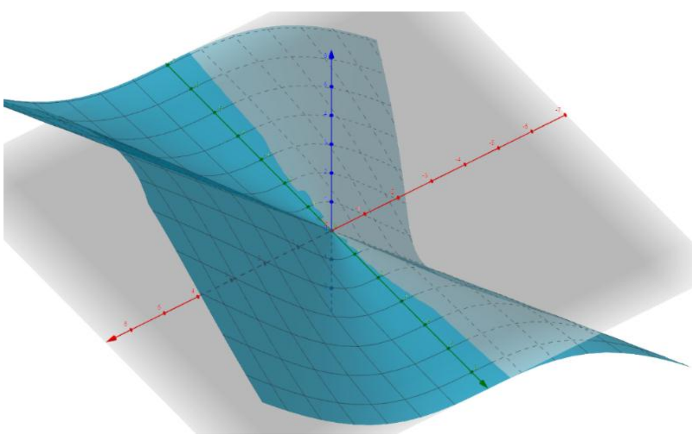
Para calcular el límite vamos a utilizar coordenadas polares:

Cuando (x, y) tiende a (0,0), en coordenadas polares (r, Ɵ) tiende a (0, Ɵ).

Ya que en polares el origen es el punto r =0 para todo Ɵ.

$$lím_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=lím_{(r,\theta)\to(0,\theta)}\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2}=lím_{(r,\theta)\to(0,\theta)} r\cos^3\theta=0$$

Además si graficamos la función, vemos que los valores de f tienden a cero cuando consideramos puntos del dominio que se aproximan al origen.



Calculemos las derivadas parciales de esta función en (0,0). Dado que la función está definida por partes, no podemos usar las reglas de derivación y tenemos que recurrir a la definición:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=lím_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$ Siempre que el límite exista.

Calculemos los términos del límite anterior por separado para $(x_0, y_0)= (0, 0)$:

$$f(x_0+h, y_0) = f(h,0) = \frac{h^3}{h^2+0^2} = h$$

$$f(x_0, y_0) = f(0,0) = 0$$

Reemplazando en la definición de derivada parcial de f con respecto a x en (0, 0):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = lím_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

Del mismo modo, calculamos la derivada parcial de f con respecto a y en (0, 0):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = lím_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Siempre que el límite exista.

Calculemos los términos del límite anterior por separado para $(x_0, y_0)= (0, 0)$:

$$f(x_0, y_0+h) = f(0,h) = \frac{0}{0^2+h^2} = 0$$

$$f(x_0, y_0) = f(0,0) = 0$$

Reemplazando en la definición de derivada parcial con respecto a y:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = lím_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Finalmente obtenemos

$$\left.f_x\right|_{(0,0)} = 1$$

$$\left.f_y\right|_{(0,0)} = 0$$

Hasta acá podemos concluir que la función es continua en el origen y sus derivadas parciales están definidas en dicho punto.

Ahora veamos por qué la función no es diferenciable en el origen.

Como sugiere la ayuda, lo encaramos por el lado de la derivada direccional.

Sabemos, por definición, que la derivada direccional de f en el punto P_0 (x_0,y_0) en la dirección del vector unitario u=(u1,u2) es el número:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{u,P_0} = lím_{s\to 0} \frac{f(x_0+su_1, y_0+su_2) - f(x_0,y_0)}{s}$$ Siempre que el límite exista.

También sabemos que existe un **teorema** que establece que si una función es diferenciable en un punto, la derivada direccional en CUALQUIER dirección dada por un vector unitario u, se puede calcular como el producto escalar entre el vector gradiente (evaluado en el punto en cuestión) y el vector unitario:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{u,P_0} = (\nabla f)_{P0} \cdot \hat{u}$$

Para probar que la función no es diferenciable, vamos a recurrir al contra recíproco del teorema anterior, es decir:

Si una función no es diferenciable, entonces para algún vector unitario u: $\left.\frac{df}{ds}\right|_{u,P_0} \neq (\nabla f)_{P0} \cdot \hat{u}$

Eligiendo el vector unitario

$$\hat{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Podemos verificar por definición que:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{u,P_0} = lím_{s\to 0} \frac{f(x_0+s\frac{\sqrt{2}}{2}, y_0+s\frac{\sqrt{2}}{2}) - f(x_0,y_0)}{s}$$

Calculemos los términos del límite anterior:

$$f(x_0+s\frac{\sqrt{2}}{2}, y_0+s\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(s\frac{\sqrt{2}}{2}, s\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{s^3.(\sqrt{2}/2)^3}{s^2(1/2+1/2)} = s(\sqrt{2}/2)^3$$

$$f(x_0, y_0) = f(0,0) = 0$$

Reemplazando en el límite:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{u,P_0} = lím_{s\to 0} \frac{s(\sqrt{2}/2)^3 - 0}{s} = (\sqrt{2}/2)^3 = (\sqrt{2^2 2}/8) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ahora calculemos el producto punto entre el gradiente de f en P_0 y el versor **u**:

$$(\nabla f)_{P0} = (1,0) \qquad \hat{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\left(\nabla f\right)_{P0} \cdot \hat{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vemos que

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{u,P_0} \neq \left(\nabla f\right)_{P0} \cdot \hat{u}$$

Porque

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto podemos concluir que f no es diferenciable en el origen. En este punto vale aclarar que el valor correcto de la derivada direccional es el obtenido por definición y no el que resulta de calcular el producto escalar.