# Ejercicio 56

Pide usar la fórmula de Taylor para obtener aporximaciones cuadráticas y cúbicas cerca del origen de una función de dos variables.
Recordemos que si $f$ tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en $(0,0)$, entonces el polinomio de segundo grado de Taylor en $(0,0)$ es:

$$P_2(x,y) = f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)+\frac{1}{2!}(x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)) \tag{1}$$

Y la aproximación de $f(x,y)$ con $P_2(x,y)$ se llama *aproximación cuadrática* de $f$ centrada en $(0,0)$.
Si $f$ tiene derivadas parciales continuas de hasta tercer orden en $(0,0)$, entonces el polinomio de tercer grado de Taylor en $(0,0)$ es:

$$\begin{gathered} P_3(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{1}{2!}(x^2f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) \\ +y^2f_{yy}(0,0)) + \frac{1}{3!}(x^3f_{xxx}(0,0) + 3x^2yf_{xxy}(0,0) + 3xy^2f_{xyy}(0,0) + +y^3f_{yyy}(0,0)) \end{gathered} \tag{2}$$

Y la aproximación de $f(x,y)$ con $P_3(x,y)$ se llama *aproximación cúbica* de $f$ centrada en $(0,0)$.
En este caso,

$$f(x,y) = xe^y \tag{3}$$

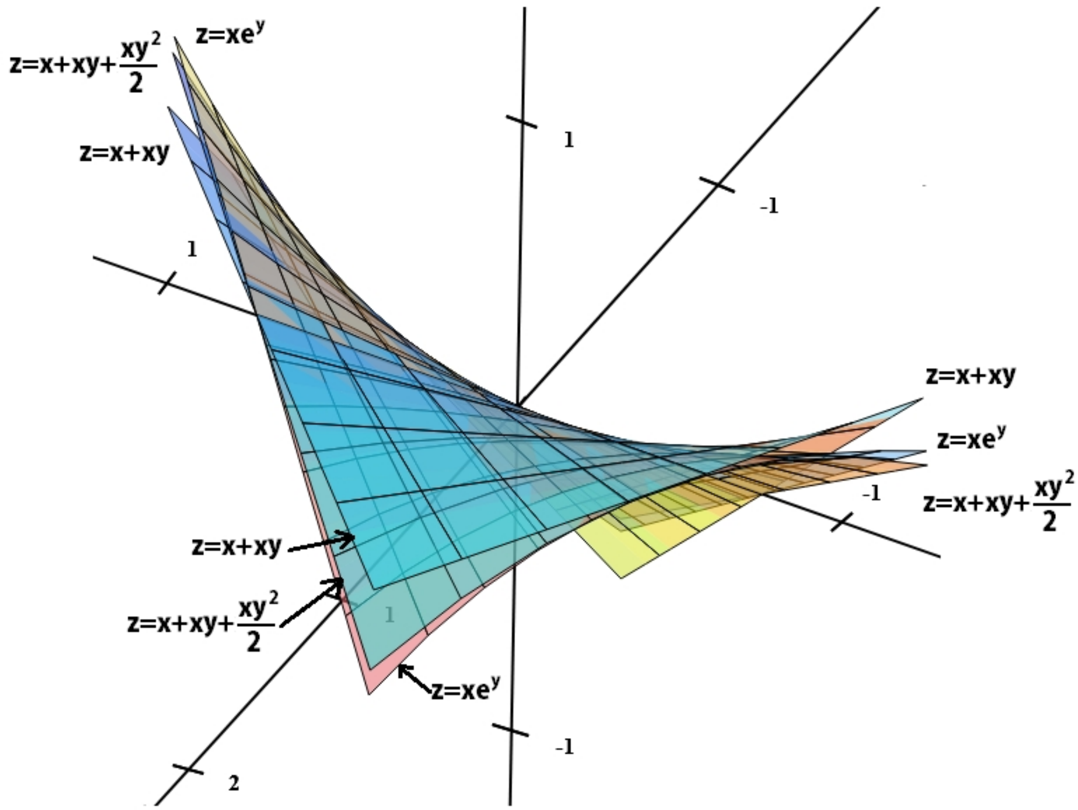
Por lo que la Ec. (1) queda:

$$P_2(x,y) = 0 + x\cdot 1 + y \cdot 0 + \frac{1}{2}(x^2 \cdot 0 + 2xy \cdot 1 + y^2 \cdot 0) = x + xy \tag{4}$$

Y la Ec. (2):

$$P_3(x,y) = x + xy + \frac{1}{6}(x^3 \cdot 0 + 3x^2y \cdot 0 + 3xy^2 \cdot 1 + y^3 \cdot 0) = x + xy + \frac{1}{2}xy^2 \tag{5}$$

La Ec. (5), como tiene potencias más altas que la Ec. (4), es una mejor aproximación de la fución en torno de $(0,0)$, tal como puede verse si se superpone la gráfica de $f(x,y)$ con las de $P_2(x,y)$ y $P_3(x,y)$ (Fig.1).



z=xe^y
z=x+xy+xy^2/2
z=x+xy
1
1
-1
z=x+xy
z=xe^y
-1
z=x+xy+xy^2/2
z=x+xy
z=x+xy+xy^2/2
1
z=xe^y
-1
2


Figure 1: