1. Ejercicio 60, TP 2

Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$. La placa incluyendo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en el plano (x, y) es $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine las temperaturas en los puntos más caliente y más frío de la placa.

Resolución: dividimos el problema en dos partes, primero encontramos los posibles puntos donde alcanza extremos la función T en el interior de la región $(x^2 + y^2 < 1)$ y luego encontramos los del borde $(x^2 + y^2 = 1)$.

Para encontrar los del interior vemos que por ser T polinómica es diferenciable y por lo tanto donde alcance extremos su gradiente se anula, luego:

$$\nabla T(x, y) = (2x - 1, 4y) = (0, 0)$$

y obtenemos el punto $P_1(1/2, 0)$

Para la encontrar los puntos en la frontera parametricamos la curva como $r(t) = (cos(t), sen(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, y componiendo obtenemos:

$$w(t) = (T \circ r)(t) = cos^2(t) + 2sen^2(t) - cos(t)$$

derivando tenemos:

$$\frac{dw}{dt} = sen(t)(2cos(t) + 1)$$

e igualando a 0 obtenemos que $t = 0, \pi, 2\pi/3, 4\pi/3$.

Reemplazando estos valores de t en $r(t)$ obtenemos los siguientes puntos: $P_2(1, 0)$, $P_3(-1, 0)$, $P_4(-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $P_5(-1/2, -\sqrt{3}/2)$

Evaluando los 5 puntos encontrados en T vemos que $T(P_1) = -1/4$, $T(P_2) = 0$, $T(P_3) = 2$, $T(P_4) = 2,25$ y $T(P_5) = 2,25$.

Por lo tanto T alcanza mínimo en P_1 y es $-1/4$ y alcanza máximo en P_4 y P_5 y es $2,25$.