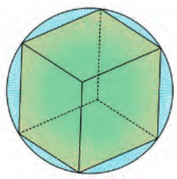
TRABAJO PRÁCTICO 2 - EJERCICIO 63

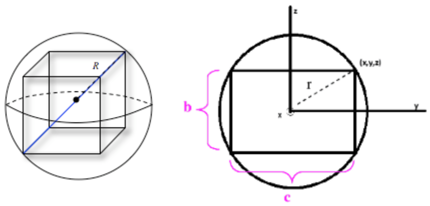
63) Obtenga las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que puede inscribirse dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Solución: En este problema debemos ubicar una caja dentro de una esfera, algo como la siguiente imagen...



Por simetría, buscaremos dentro de las cajas con centro en el origen de coordenadas y caras paralelas a los planos coordenados.

Para que el volumen de la caja sea máximo, los vértices de la caja estarán sobre la esfera, es decir que los vértices tendrán una distancia al origen de 2 unidades (radio de la esfera). Si identificamos las coordenadas de un vértice de esta caja en el primer octante, digamos (x, y, z), podemos notar que cada arista de la caja medirá el doble de la coordenada correspondiente.



En la segunda imagen vemos el eje x de frente.

Así, el volumen de la caja será

$$V(x, y, z) = 2x\, 2y\, 2z.$$

Para asegurarnos que la caja sea una caja (y no sea una figura plana ni un segmento ni un punto) nos aseguraremos que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$; además, para que la caja esté dentro de la esfera, las coordenadas del vértice en el primer octante deben cumplir

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4. \tag{1}$$

Esto nos permite despejar:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

pero cuidado: al hacer este despeje estamos **eligiendo** $z \geq 0$ aunque en realidad puede ser negativo también. Con esta elección conveniente (en la que $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$), el volumen se puede hallar como

$$V(x, y) = 2x\, 2y\, 2\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 8xy\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Ahora procedemos de la manera habitual: hallamos los puntos críticos igualando $\nabla V = (0, 0)$ y luego, aplicando el criterio de la derivada segunda, verificamos que hayamos hallado un máximo, como se deseaba. Por razones de orden, busco todas las derivadas que necesitaré en este momento.

$$V_x(x,y) = 8y\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{8x^2y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$
$$V_y(x,y) = 8x\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{8xy^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$
$$V_{xx}(x,y) = \frac{-8xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \left(\frac{16xy\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{-8x^3y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2} \right)$$
$$V_{yy}(x,y) = \frac{-8xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \left(\frac{16xy\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{-8xy^3}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2} \right)$$
$$V_{xy}(x,y) = 8\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{8y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \frac{8x^2\sqrt{4-x^2-y^2} + \frac{8x^2y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2}$$

Búsqueda de puntos críticos: igualamos el vector gradiente al vector nulo y resolvemos el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} 8y\sqrt{4-x^2-y^2} - \dfrac{8x^2y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 0 \\ \\ 8x\sqrt{4-x^2-y^2} - \dfrac{8xy^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 0 \end{array} \right.$$

$$8y\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{8x^2y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow y\sqrt{4-x^2-y^2} = \frac{x^2y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad (2)$$
$$8x\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{8xy^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow x\sqrt{4-x^2-y^2} = \frac{xy^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad (3)$$

Por ser $x \neq 0$ y $y \neq 0$, podemos simplificar sus apariciones en (2) y en (3) para obtener:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4-x^2-y^2 = x^2 \\ 4-x^2-y^2 = y^2 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema obtenemos: $x^2 = \frac{4}{3}$, $y^2 = \frac{4}{3}$. (Y, de (1), $z^2 = \frac{4}{3}$.) Observamos que tenemos cuatro puntos críticos:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

De ellos sólo considero el de coordenadas positivas, ya que los otros serán determinados por éste. Conclusión: considero un solo punto crítico. Evaluamos el hessiano:

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= V_{xx}(x,y)V_{yy}(x,y) - V_{xy}^2(x,y)\\
&= \left(\frac{-8xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \left(\frac{16xy\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{-8x^3y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2}\right)\right)\\
&\quad \left(\frac{-8xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \left(\frac{16xy\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{-8xy^3}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2}\right)\right)\\
&\quad - \left(8\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{8y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \frac{8x^2\sqrt{4-x^2-y^2} + \frac{8x^2y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

en este punto:

$$H\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 32^2 > 0;$$

y, para terminar, evaluamos V_{xx} en este punto:

$$V_{xx}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{64}{\sqrt{3}} < 0$$

y concluimos que $V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{64}{3\sqrt{3}}$ es el volumen máximo.