Análisis Matemático II

TP4b: Ejercicio 4

4. Calcule el área de la superficie dada por:

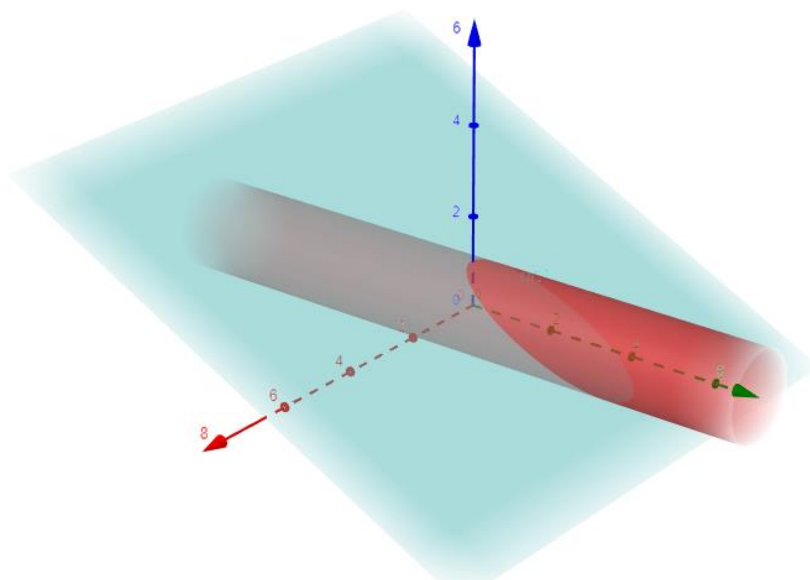
   a) la porción del plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 1$

   b) La porción de cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, entre los planos $z = 2$ y $z = 6$.

   c) La porción de paraboloide: $z = 2 - x^2 - y^2$, cortado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   d) La porción inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Primero graficamos la superficie. Vemos que, al cortar el plano con un cilindro, la superficie resultante es una elipse.



Recordemos que parametrizar una superficie suave y orientable consiste en elegir dos parámetros que permitan expresar el vector posición de cada punto de la superficie de manera biunívoca, es decir, que para cada par de valores de los parámetros se obtenga sólo un punto de la superficie. Existen infinitas maneras de parametrizar una superficie.

El vector posición de una superficie general parametrizada por u, v tiene la forma:

$$\vec{r}(u.v) = (x(u.v); y(u,v); z(u.v))$$

$$a \leq u \leq b$$

$$c \leq v \leq d$$

Las coordenadas del vector posición entre el origen y cada punto de la superficie, serán funciones de los parámetros que elijamos.

Debemos encontrar la parametrización "natural" de la superficie, es decir, aquella que nos permita representarla con parámetros que varíen entre valores constantes. Veremos que una adecuada parametrización permitirá facilitar el cálculo de integrales.

En este caso, veamos qué pasa si elegimos a **x** y **z** como parámetros; el vector posición resulta:

$$\vec{r}(x,z) = (x; 2-2z; z)$$

$$-\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}$$

$$-1 \leq z \leq 1$$

Si bien es una parametrización válida, vemos que los extremos de integración del parámetro x no son constantes.

Veamos qué pasa si elegimos la parametrización en coordenadas polares sobre el plano x-z:

$$\vec{r}(r,\theta) = (rcos\theta; 2-2rsen\theta; rsen\theta)$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ahora sí, la parametrización es más conveniente para calcular la integral de superficie.

Las derivadas parciales del vector posición resultan:

$$\vec{r}_r(r,\theta) = (cos\theta; -2sen\theta; sen\theta)$$

$$\vec{r}_\theta(r,\theta) = (-rsen\theta; -2rcos\theta; rcos\theta)$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{r}_r \; x \; \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos\theta & -2sen\theta & sen\theta \\ -rsen\theta & -2rcos\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = (0; -r; -2r)$$

El módulo del producto vectorial resulta

$$\|\vec{r}_r \; x \; \vec{r}_\theta\| = \sqrt{5}r$$

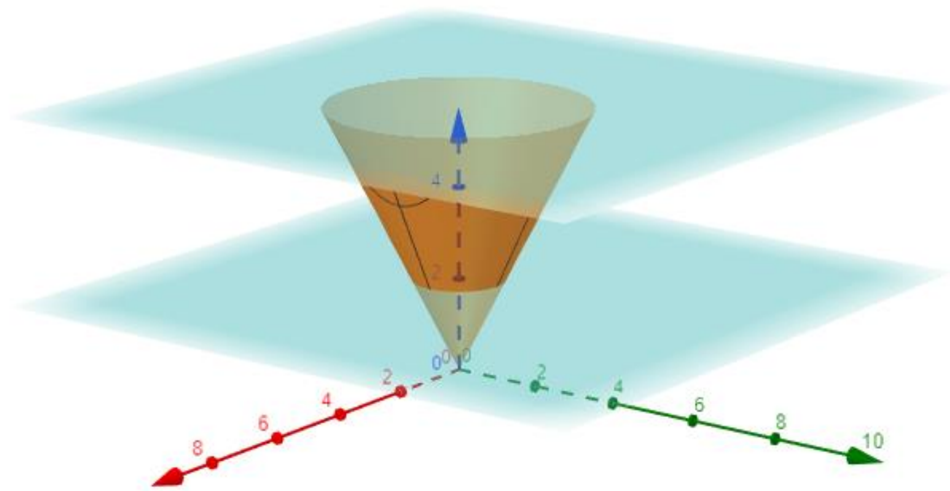
Recordemos la forma general para calcular el área de una superficie parametrizada por los parámetros u, v:

$$A = \iint_S d\sigma = \int_c^d \int_a^b \|\vec{r}_u \; x \; \vec{r}_v\| \, dudv$$

Expresamos la integral para obtener el área de la elipse:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{5}r \, drd\theta = \sqrt{5}\pi$$

b) Debemos encontrar una parametrización adecuada que represente el área del cono entre los planos z=2 y z=6.



En este caso nos conviene usar coordenadas polares en el plano x-y.

Para encontrar los radios de intersección entre el cono y los planos, igualamos las expresiones, es decir:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$r = 1$$

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 6$$

$$r = 3$$

Ahora sí, escribimos la parametrización en coordenadas polares con los extremos del parámetro r calculados anteriormente:

$$\vec{r}(r, \theta) = (rcos\theta; rsen\theta; 2r)$$

$$1 \leq r \leq 3$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Las derivadas parciales del vector posición resultan:

$$\vec{r}_r(r, \theta) = (cos\theta; sen\theta; 2)$$

$$\vec{r}_\theta(r, \theta) = (-rsen\theta; rcos\theta; 0)$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{r}_r \, x \, \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos\theta & sen\theta & 2 \\ -rsen\theta & rcos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-2rcos\theta; -2rsen\theta; r)$$

El módulo del producto vectorial resulta

$$\|\vec{r}_r \; x \; \vec{r}_\theta\| = \sqrt{5}r$$

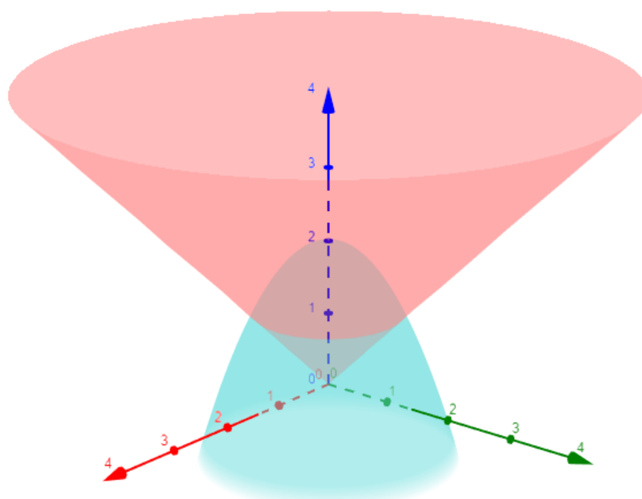
La forma general para calcular el área de una superficie parametrizada por los parámetros u, v:

$$A = \iint_S d\sigma = \int_c^d \int_a^b \|\vec{r}_u \; x \; \vec{r}_v\| \, dudv$$

Expresamos la integral para obtener el área de la superficie:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \sqrt{5}r \, drd\theta = 8\sqrt{5}\pi$$

c) Debemos calcular el área del paraboloide que queda por encima del cono.



Nuevamente conviene parametrizar utilizando coordenadas polares en el plano x-y. Para ello, primero encontremos el radio de intersección entre las dos superficies:

$$z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - r^2$$

$$z = r$$

Igualamos ambas expresiones:

$$2 - r^2 = r$$

Resolvemos la ecuación cuadrática en r:

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$r = 1 \quad y \quad r = -2$$

Descartamos la solución negativa y concluimos que el radio de intersección es r = 1.

Planteamos la parametrización:

$$\vec{r}(r,\theta) = (rcos\theta; rsen\theta; 2 - r^2)$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Las derivadas parciales del vector posición resultan:

$$\vec{r}_r(r,\theta) = (cos\theta; sen\theta; -2r)$$

$$\vec{r}_\theta(r,\theta) = (-rsen\theta; rcos\theta; 0)$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{r}_r \; x \; \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos\theta & sen\theta & -2r \\ -rsen\theta & rcos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2cos\theta; 2r^2sen\theta; r)$$

El módulo del producto vectorial resulta

$$\|\vec{r}_r \; x \; \vec{r}_\theta\| = r\sqrt{4r^2+1}$$

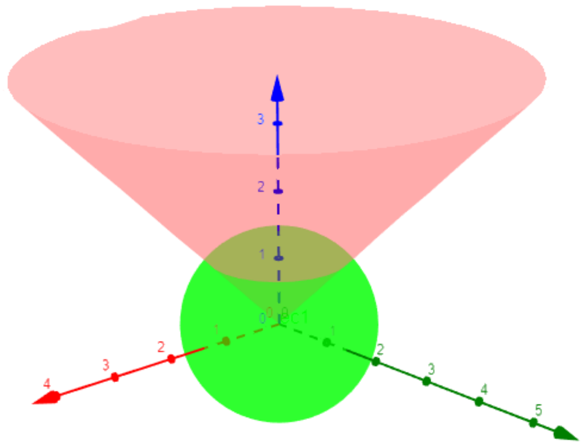
La forma general para calcular el área de una superficie parametrizada por los parámetros u, v:

$$A = \iint_S d\sigma = \int_c^d\int_a^b \|\vec{r}_u \; x \; \vec{r}_v\| \, dudv$$

Expresamos la integral para obtener el área de la superficie:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1} \, drd\theta = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

d) Debemos calcular el área del sector de esfera que queda por debajo del cono.



En este caso nos conviene parametrizar en coordenadas esféricas. La coordenada ρ (rho) es igual a 1 en toda la integración, por lo cual tomaremos como parámetros las coordenadas φ y θ. Se puede ver fácilmente que θ varía entre 0 y 2π. Veamos cómo calcular el intervalo de variación de φ.

Debemos encontrar el radio de intersección entre la esfera y el cono:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$r^2 + z^2 = 2 \text{ (esfera en cilíndricas)}$$

$$z = r \text{ (cono en cilíndricas)}$$

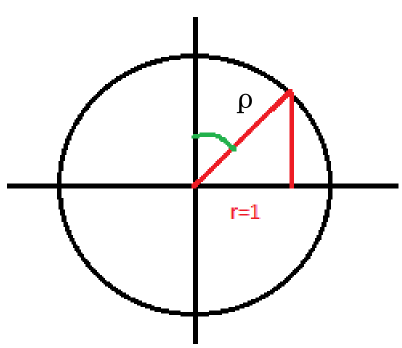
Reemplazamos la ecuación del cono en la esfera:

$$2r^2 = 2$$

Resolvemos la ecuación cuadrática en r:

$$r = \pm 1$$

Descartamos el valor negativo, y planteamos trigonometría para encontrar el extremo inferior de φ:



Como ρ=$\sqrt{2}$ y r=1, el ángulo φ es 45°.

Planteamos la parametrización:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (\sqrt{2}\, sen\varphi\; cos\theta; \sqrt{2}\, sen\varphi\; sen\theta; \sqrt{2}\, cos\varphi)$$

$$\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Las derivadas parciales del vector posición resultan:

$$\vec{r}_\varphi(r,\theta) = (\sqrt{2}\, cos\varphi\; cos\theta; \sqrt{2}\, cos\varphi\; sen\theta; -\sqrt{2}\, sen\varphi)$$

$$\vec{r}_\theta(r,\theta) = (-\sqrt{2}\, sen\varphi\; sen\theta; \sqrt{2}\, sen\varphi\; cos\theta; 0)$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{r}_r\; x\; \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{2}\, cos\varphi\; cos\theta & \sqrt{2}\, cos\varphi\; sen\theta & -\sqrt{2}\, sen\varphi \\ -\sqrt{2}\, sen\varphi\; sen\theta & \sqrt{2}\, sen\varphi\; cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_r\; x\; \vec{r}_\theta = (2\, sen^2\varphi\; cos\theta; 2\, sen^2\varphi\; sen\theta; 2\, sen\varphi\; cos\varphi)$$

El módulo del producto vectorial resulta

$$\|\vec{r}_r\; x\; \vec{r}_\theta\| = 2sen\varphi\sqrt{\;sen^2\varphi + \;cos^2\varphi} = 2sen\varphi$$

La forma general para calcular el área de una superficie parametrizada por los parámetros u, v:

$$A = \iint_S d\sigma = \int_c^d\int_a^b \|\vec{r}_u\; x\; \vec{r}_v\|\, dudv$$

Expresamos la integral para obtener el área de la superficie:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2sen\varphi\;\; d\varphi d\theta = 4\pi(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$$