Análisis Matemático II

TP5: Ejercicio 2

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

   a) $2y' + y = 0$; $y = e^{-x/2}$

   b) $y' + 20y = 24$; $y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$

   c) $(y - x)y' = y - x + 8$; $y = x + 4\sqrt{x+2}$

A diferencia de una ecuación numérica, en la que su solución puede ser uno o más números reales, en una ecuación diferencial, la solución general, si existe, es una familia de funciones.

Una función es solución de una ecuación diferencial, si al reemplazar dicha función y sus derivadas correspondientes en la ecuación, se verifica la igualdad.

a) Calculamos la derivada de la función solución $y = e^{-\frac{x}{2}}$

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Ahora reemplazamos la función y su derivada y´ en la ecuación diferencial:

$$2y' + y = 0$$

$$2(-1/2)e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

Podemos observar que la solución satisface la ecuación diferencial.

Para obtener el intervalo solución, debemos calcular el dominio de la función y de su derivada. En este caso, ambas funciones (y e y´) están definidas para todo $\mathbb{R}$, por lo que el intervalo solución resulta:

$$I = (-\infty; +\infty)$$

b) Calculamos la derivada de la función $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20x}$

$$y' = -\frac{6}{5}(-20)e^{-20x} = 24e^{-20x}$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$y' + 20y = 24$$

$$24e^{-20x} + 20(6/5 - 6/5\,e^{-20x}) = 24$$

$$24e^{-20x} + 24 - 24e^{-20x} = 24$$

Para obtener el intervalo solución, debemos calcular el dominio de la función y de su derivada. Al igual que en el caso anterior, ambas funciones (y e y´) están definidas para todo $\mathbb{R}$, por lo que el intervalo solución resulta:

$$I = (-\infty; +\infty)$$

c) Calculamos la derivada de la función y:

$$y = x + 4\sqrt{x+2}$$

$$y´ = 1 + 4\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$y´ = 1 + \frac{2}{\sqrt{x+2}}$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$(y - x)y´ = y - x + 8$$

$$4\sqrt{x+2}(1 + \frac{2}{\sqrt{x+2}}) = x + 4\sqrt{x+2} - x + 8$$

$$4\sqrt{x+2} + 8 = 4\sqrt{x+2} + 8$$

Vemos que las funciones y e y´ satisfacen la ecuación diferencial.

Como se explicó anteriormente, para determinar el intervalo solución de una ecuación diferencial, debemos observar el dominio de la función y de las derivadas presentes en la ecuación diferencial. En este caso, vemos que el dominio de y es $[-2; +\infty)$. Mientras que el dominio de y´ es $(-2; +\infty)$.

Por lo tanto nos quedamos con la intersección de ambos conjuntos:

$$I = (-2; +\infty)$$