Trabajo Práctico 5

Ecuaciones diferenciales - Material adicional

(*) Aplicación: edificio sacudido por un sismo [1]

Supongamos que un edificio de varios pisos se puede modelizar como una colección de masas unidas entre sí de forma elástica, tales que la planta baja del mismo ocupa una posición x_0 que está fija, digamos $x_0 = 0$. Si un movimiento sísmico sacude al edificio, cada piso sufrirá un desplazamiento horizontal; llamaremos x_1 al desplazamiento con respecto a la vertical que experimenta el primer piso, x_2 al que experimenta el segundo piso, etc. Suponemos que el i-ésimo piso del edificio tiene una masa m_i y que los pisos sucesivos están conectaddos por un conector elástico cuyo efecto se asemeja al de un resorte. El acero usado en las estructuras es un material elástico, de manera que cada conector proporciona una fuerza de restauración cuando los pisos se encuentran desplazados con respecto a los demás. Suponemos que la ley de Hooke es válida, con constante de proporcionalidad k_i entre el i-ésimo y el $(i+1)$-ésimo piso. Es decir que la fuerza restauradora entre esos dos pisos es

$$F = k_i(x_{i+1} - x_i),$$

donde $x_{i+1} - x_i$ es el desplazamiento del $(i+1)$-ésimo piso con respecto al i-ésimo. También suponemos una reacción similar entre el primer piso y el suelo, con constante k_0. La figura 1 muestra un modelo del edificio, mientras que la figura 2 muestra las fuerzas que actúan en el i-ésimo piso.

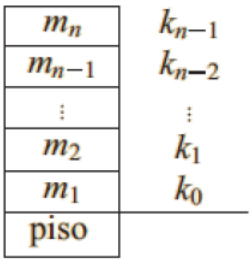

FIGURA 1 Pisos del edificio

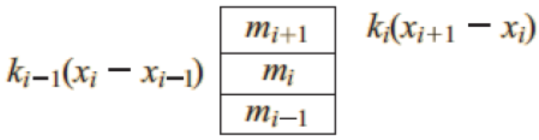

FIGURA 2 Fuerzas en el i-ésimo piso

Aplicando la segunda ley de Newton a cada piso del edificio, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales (que es homogéneo)

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ m_n \dfrac{d^2x_n}{dt^2} &= -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{cases} \tag{1}$$

Como ejemplo, si el edificio tiene 2 pisos, cada uno con masa $m = 5000kg$ y cada fuerza de restauración es constante y su valor es $k = 10000kg/s^2$, entonces el sistema es:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} &= -4x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} &= 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{2}$$

[1] Problema tomado del libro Zill, D.G. y Wright, W.S. (2015). *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera.* (8° ed.). Cengage Learning.

Este, como muchos otros problemas de la ingeniería, se modeliza por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas. Para resolver algunos de ellos se puede proceder como se muestra en la siguiente sección (recuerde que este contenido no es obligatorio).

(*) Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Expresión matricial de un sistema

Si llamamos a las funciones (incógnitas) $x_1(t)$, $x_2(t), ..., x_n(t)$, $a_{11}(t)$, $a_{12}(t), ..., a_{nn}(t)$ a los coeficientes y $f_1(t)$, $f_2(t), ..., f_n(t)$ a los términos independientes y todas estas funciones son continuas en un intervalo común I, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{array}\right. \tag{3}$$

se puede escribir como

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}, \tag{4}$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

1. *a*) Escriba en la forma (4) los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = 3x_1 + 5x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 - 7x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{array}\right.$$

b) Escriba en la forma (3) los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) + \begin{pmatrix} t-4 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

c) Compruebe que en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, los vectores $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

d) Compruebe que en el intervalo $(-\infty,+\infty)$, los vectores $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \\ -\cos(t) - \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

Independencia lineal de soluciones

Para establecer la independencia lineal (LI) en un intervalo I de un conjunto de vectores de funciones, soluciones de un sistema, se analiza el Wronskiano de dicho conjunto de vectores:

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

y se prueba que es no nulo en I:

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n) \neq 0 \quad \text{para toda } x \in I.$$

2. Verifique que las soluciones $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ del sistema estudiado en el ejercicio 1*c* son LI en $\mathbb{R}$.

Solución general de un sistema homogéneo

Si $\mathbf{X}_1, \quad \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n$ son un conjunto fundamental de soluciones del sistema dado, en un intervalo I, entonces la solución general del sistema en I se puede expresar como

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

donde $c_1, \cdots, c_n$ son constantes arbitrarias.

3. Exprese la solución general del sistema homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X},$$

presentado en el ejercicio 1*c*.

4. Demuestre que la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

en $\mathbb{R}$ es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Búsqueda de soluciones: n autovalores distintos

Se puede probar que si $\mathbf{K}$ es un autovector asociado al autovalor λ de la matriz A, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ es una solución del sistema homogéneo

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}. \tag{5}$$

Así, si A tiene n autovalores distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, se podrá encontrar n autovectores LI asociados a ellos, $\mathbf{K}_1, \cdots, \mathbf{K}_n$; de esta manera, la solución del sistema (5) será

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}.$$

5. Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

6. Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

7. Resuelva el sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

(*) Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

(*) Ecuaciones de Cauchy-Euler

Una ecuación de Cauchy-Euler es una ecuación diferencial con coeficientes no constantes, pero de una forma especial:

$$a_nx^n\frac{d^(n)y}{dx^n} + \cdots + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x).$$

Una ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden es

$$ax^2y''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x).$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se procede, en general, hallando primero una solución complementaria y, luego, aplicando variación de parámetros. Una ecuación de Cauchy-Euler homogénea de segundo orden es

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0. \tag{6}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse **para valores positivos de** x haciendo la sustitución $t = \ln(x)$ (o $x = e^t$) y asumiendo que la función $y(x)$ es, en realidad, una función compuesta: $z(t(x))$; la sustitución se hace de manera que quede todo en términos de la variable (intermedia) t. Es decir que podemos llamar $t = \ln(x)$ y $z(t(x)) = y(x)$ y, aplicando la regla de la cadena, obtenemos las derivadas de primero y segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x) &= \frac{d(z\circ t)}{dx}(x) = \frac{dz}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x) = \frac{dz}{dt}(t(x))\frac{1}{x} \\ \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= \frac{d^2(z\circ t)}{dx^2}(x) = \frac{d^2z}{dt^2}(t(x))\frac{dt}{dx}(x)\frac{1}{x} + \frac{dz}{dt}(t(x))\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{d^2z}{dt^2}(t(x))\frac{1}{x^2} - \frac{dz}{dt}(t(x))\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(\frac{d^2z}{dt^2}(t(x)) - \frac{dz}{dt}(t(x))\right)\frac{1}{x^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Para obtener (7) se ha aplicado la regla de la cadena dentro de la derivada de un producto.

Sustituyendo las derivadas obtenidas en una ecuación como (6) y haciendo las cancelaciones del caso, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&ax^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}(t(x)) - \frac{dz}{dt}(t(x))\right)\frac{1}{x^2} + bx\frac{dz}{dt}(t(x))\frac{1}{x} + cz(t(x)) = 0\\
&a(z''(t) - z'(t)) + bz'(t) + cz(t) = 0\\
&az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = 0
\end{aligned}
$$

que es una ecuación con coeficientes constantes. Una vez que se ha hallado la solución $z(t)$ de esta EDO, se busca $y(x) = z(\ln(x))$.

8. En cada caso, determine la solución general para la ecuación de Euler dada. Suponga $x > 0$.

   a) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

   b) $x^2y'' - 6y = 0$.

   c) $4x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$.

   d) $x^2y'' + xy' = 0$.

9. En cada caso, resuelva el problema de valor incial solicitado:

   a) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, y(1) = 1, y'(1) = -1$.

   b) $x^2y'' - xy' + y = 0, y(1) = 1, y'(1) = -1$.

(*) Soluciones en series de potencias

Se propone una solución de la EDO dada, como una función expresada en una serie de potencias: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Se deriva esta expresión las veces que sea necesario y se sustituye en la EDO. Finalmente se busca los coeficientes c_n para que la serie satisfaga la EDO.

10. Para cada ecuación diferencial, use series de potencias para obtener la solución general:

    a) $y' + 2xy = 0$.

    b) $y'' + y = 0$.

    c) $y'' + 2y = 0$.

    d) $2y'' + xy' + y = 0$.