

Tensores e Invariantes

Tensor de tensiones. Se define como tensor a un ente matemático que es independiente del sistema de referencia. Las constantes son tensores de orden cero y los vectores son tensores de orden 1. La figura 1 presenta las componentes positivas de tensión normal y tangencial que actúan en un elemento diferencial de suelo.

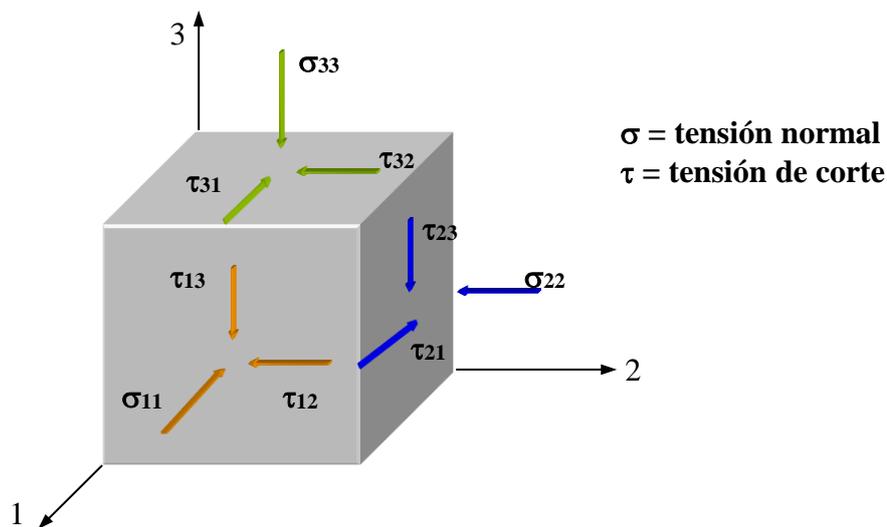


Figura 1: Convención de tensiones en un elemento diferencial de suelo.

El estado de tensiones general esquematizado arriba se puede expresar a través del tensor de tensiones,

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para un dado estado de tensiones, el tensor T_{σ} se puede dividir en dos componentes, definiendo los tensores *hidrostático* y *de desvío*, donde $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} - p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} \quad (2)$$

Utilizando la notación del delta de Kronecker, la ecuación 2 se puede expresar como en (3), donde S_{ij} representa el tensor de desvío.

$$T_{\sigma} = p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (3)$$

Invariantes del tensor de tensiones. Vamos a obtener los invariantes a partir de la traza del tensor, de acuerdo con las siguientes definiciones:

$$J_1 = tr(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (4)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} tr(\sigma)^2 \quad (5)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} tr(\sigma)^3 \quad (6)$$

Los invariantes del tensor de tensiones de desvío son definidos como:

$$J_{1D} = tr(S) = 0 \quad (7)$$

$$J_{2D} = \frac{1}{2} tr(S)^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2S_{12}^2 + 2S_{23}^2 + 2S_{13}^2] \quad (8)$$

$$J_{3D} = \frac{1}{3} tr(S)^3 = J_3 - \frac{2}{3} J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3 \quad (9)$$

Tensor de Deformaciones. El tensor de deformaciones se puede obtener por analogía con el tensor de tensiones, substituyendo σ por ε , y $\frac{1}{2}\gamma$ por τ . Luego, tenemos

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

También el tensor T_ε puede expresarse como sumatoria de un tensor *hidrostático* y otro *de desvío*,

$$T_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij} + E_{ij} \quad (11)$$

donde $\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ es la deformación volumétrica. Así,

$$T_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Invariantes del tensor de deformaciones. Obtenidos a partir de la traza del propio tensor de deformaciones,

$$I_1 = tr(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_v \quad (13)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} tr(I)^2 \quad (14)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} tr(I)^3 \quad (15)$$

Planos y Espacios de tensiones

Planos y tensiones octaédricas. Los planos octaédricos son determinados por aplicación de la condición de que los cosenos de los ángulos formados con las direcciones principales σ_1 , σ_2 , σ_3 , son iguales en valor absoluto. Existen ocho planos que cumplen esta condición, llamados por ese motivo planos octaédricos (figura 2).

La tensión normal actuante en estos planos es calculada como

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}J_1 \quad (16)$$

Y la tensión tangencial (de corte) octaédrica es

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2\right] = \sqrt{\frac{2}{3}J_{2D}} \quad (17)$$

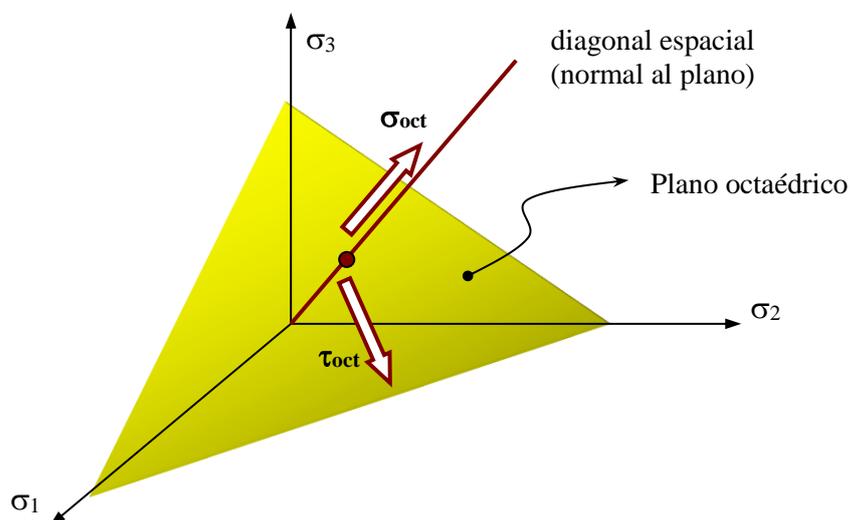


Figura 2: Uno de los ocho planos octaédricos y sus tensiones octaédricas actuantes.

Espacio de tensiones. El espacio Cartesiano definido por los ejes de las tensiones principales σ_1 , σ_2 , σ_3 es conocido como *espacio de las tensiones principales* o *espacio de Westergaard*, donde son representados planos relevantes para el análisis de las trayectorias de tensión (ver figura 3). Un plano importante contenido en este espacio es el *plano triaxial*, o *plano de Rendulic*, definido por la condición $\sigma_2 = \sigma_3$, propia de los ensayos triaxiales convencionales. En este plano, son descritas todas las trayectorias de tensión llevadas a cabo en estos ensayos. Otro plano relevante es el *octaédrico* cuya normal es paralela a la diagonal principal del espacio de tensiones ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Particularmente, el plano octaédrico que pasa por el origen, denominado *plano π* ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$), es utilizado como plano de proyección en el estudio de las trayectorias de tensión espaciales.

Trayectorias de tensión. La figura 3 presenta las trayectorias de tensión mas utilizadas en ensayos geotécnicos, las cuales se detallan abajo:

- Trayectorias contenidas en el plano triaxial:

CH: Compresión hidrostática ($\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$).

CTC: Compresión triaxial convencional ($\Delta\sigma_1 > 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$).

RTC: Compresión triaxial reducida ($\Delta\sigma_1 = 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 < 0$).

CTE: Extensión triaxial convencional ($\Delta\sigma_1 = 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 > 0$).

RTE: Extensión triaxial reducida ($\Delta\sigma_1 < 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$).

- Trayectorias contenidas en el plano octaédrico:

CS: corte simple ($\Delta\sigma_2 = 0, \Delta\sigma_1 = -\Delta\sigma_3$).

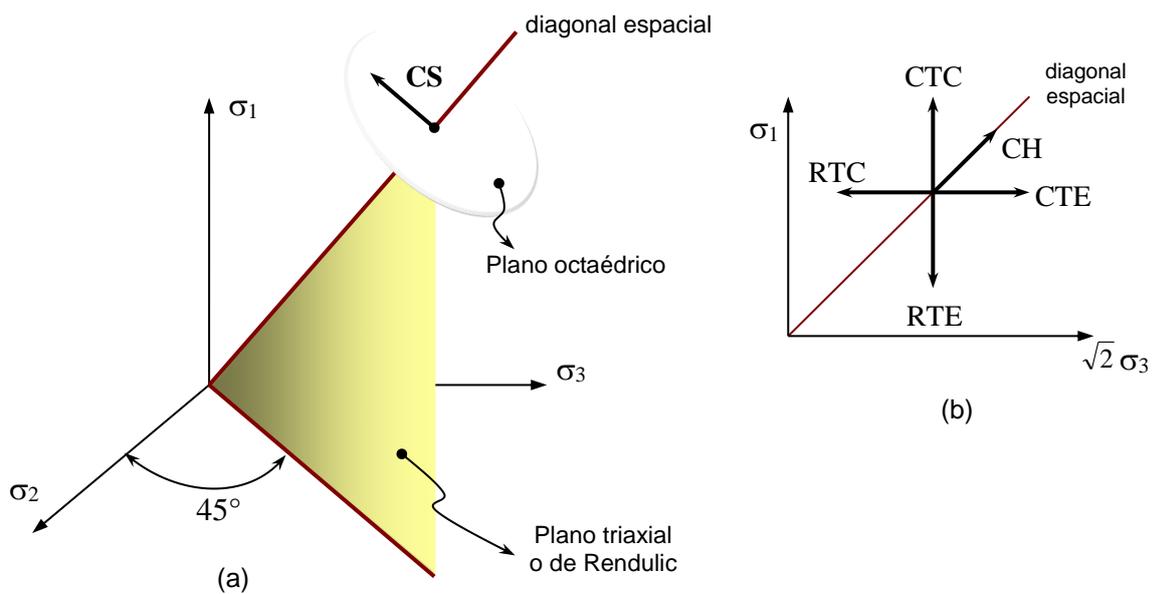


Figura 3: Espacio de tensiones: a) Espacio de Westergaard, plano triaxial y octaédrico; b) Trayectorias de tensión en el plano triaxial.