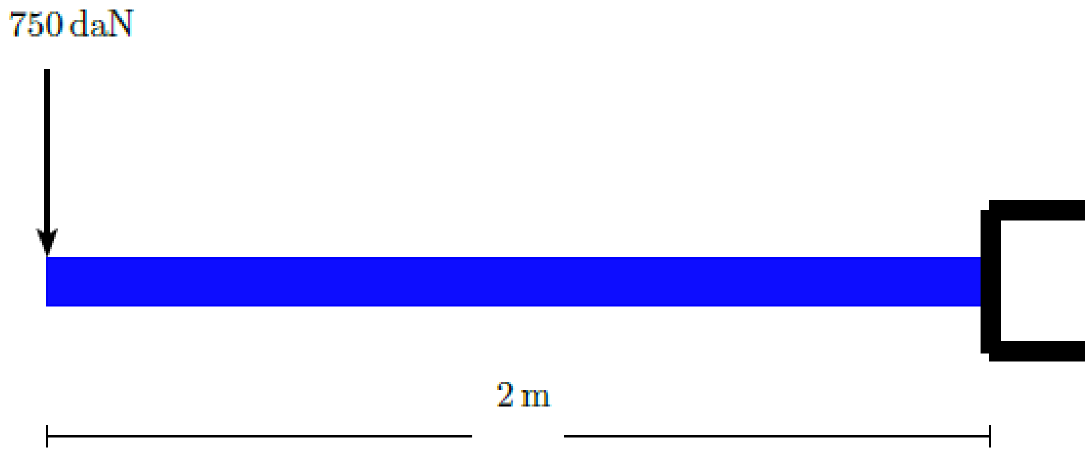
ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

1 - ESFUERZO CORTANTE y MOMENTO FLECTOR

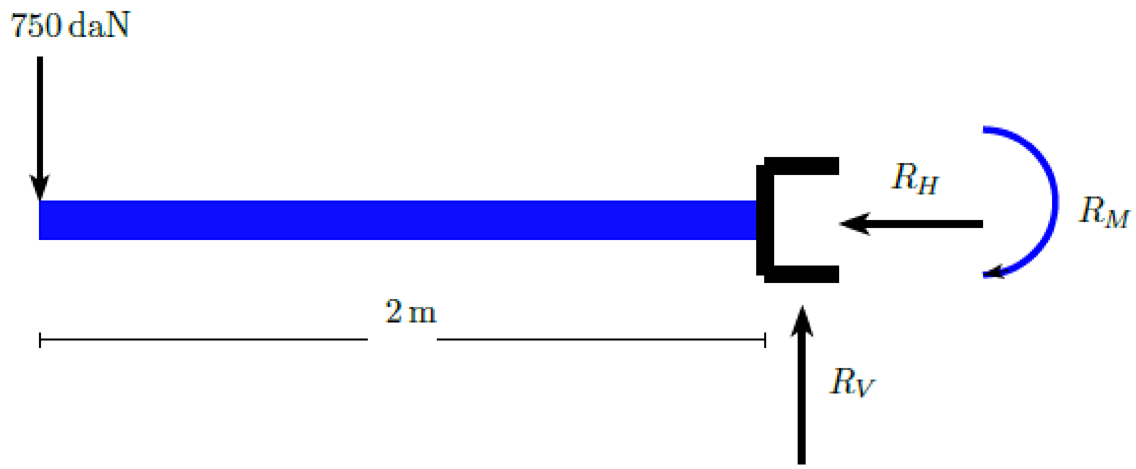
El objetivo de esta sección es presentar a partir del análisis de algunos ejemplos especialmente simples las nociones de *esfuerzo cortante* y *momento flector* en cada sección de una viga sometida a un sistema de cargas.

1.1- Las reacciones que equilibran una viga empotrada

Comenzaremos considerando una viga de 2 m de longitud empotrada en su extremo derecho, que soporta en su extremo izquierdo una carga de 750 daN, como se muestra en la figura.



Supondremos que el empotramiento es capaz de producir las reacciones necesarias para que todo esté en equilibrio. Es decir, el empotramiento está ejerciendo sobre la barra una fuerza horizontal R_H y una fuerza vertical R_V que compensan las fuerzas aplicadas sobre la barra, y un momento R_M que evita que la fuerza aplicada en el extremo haga girar la barra en sentido antihorario.



La reacción horizontal R_H es fácil de calcular: como las fuerzas aplicadas tienen componente nula en la dirección horizontal la reacción horizontal es nula.
La reacción vertical R_V debe equilibrar la carga de 750 daN, por lo que R_V = 750 daN.
Asignamos a R_V signo positivo porque su sentido tiene que ser hacia arriba (+Y).
Por último, el momento respecto al punto en que está el empotramiento de la fuerza aplicada sobre la barra es:

$$M_I = -750\ daN \times 2m = -1500\ daNm$$

Recordemos que el momento, o torque, de una fuerza respecto a un punto es igual al producto del módulo de la fuerza por la mínima distancia del punto a la línea de aplicación de la fuerza (brazo de palanca).
Se han asignado además signo negativo a este momento, porque tiene a hacer girar la pieza en sentido antihorario respecto al punto de referencia, que para nosotros es el punto en que está el empotramiento.
Para que la barra esté en equilibrio la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas sobre ella debe ser nula, de modo que:

$$-1500\ daNm + R_M = 0$$

de donde despejamos:

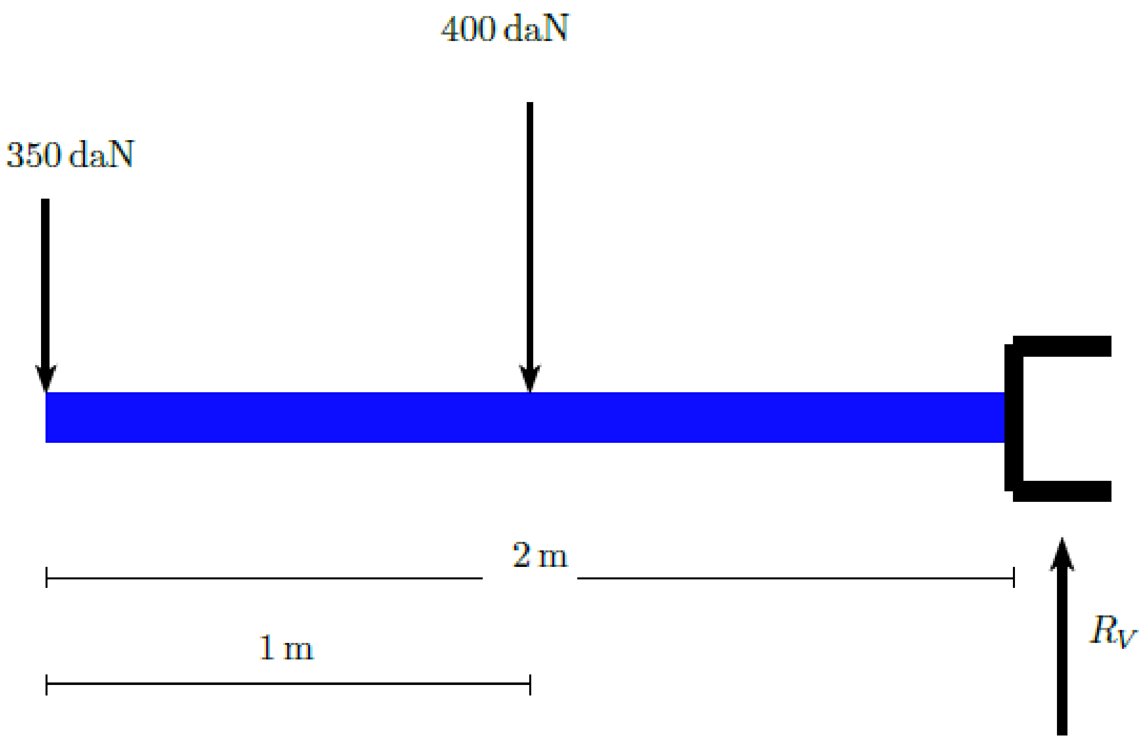
$$R_M = 1500\ daNm$$

Vemos entonces que cuando el sistema de cargas es conocido, la condición de que toda la barra esté en equilibrio permite determinar completamente la resultante y el momento del sistema de fuerzas que el empotramiento ejerce sobre la pieza:

$$R_H = 0\ daN$$
$$R_V = 750\ daN$$
$$R_M = 1500\ daNm$$

1.2- Convenciones de signos para fuerzas y momentos.
Vale la pena resumir aquí las convenciones de signos que usaremos para las fuerzas y momentos:
1. Consideraremos las fuerzas horizontales positivas cuando su sentido es el sentido positivo del eje Ox, hacia la derecha del observador (+X).
2. Consideraremos las fuerzas verticales positivas cuando su sentido es el sentido positivo del eje Oy, hacia arriba (+Y).
3. Consideraremos positivo el momento de una fuerza respecto a un punto cuando la fuerza tienda a producir alrededor del punto un giro en sentido horario. Cuando la tendencia al giro sea en sentido antihorario asignaremos al momento signo negativo.

Ejemplo: Vamos a considerar ahora una modificación de la situación anterior, en la que la fuerza de 750 daN se distribuye en una fuerza de 350 daN aplicada en el extremo y otra de 400 daN en el punto medio de la barra (figura).



No prestaremos atención a la reacción horizontal R_H, porque no hay cargas aplicadas en el sentido horizontal.

La condición de equilibrio implica que la resultante de las componentes verticales de todas las fuerzas aplicadas debe ser nula. Teniendo en cuenta que las cargas están aplicadas en el sentido al que hemos asignado signo negativo, la ecuación que describe el equilibrio es:

$$- \quad 350 \text{ daN} - 400 \text{ daN} + R_V = 0$$

Despejamos:

$$R_V = 750 \text{ daN}$$

El resultado no es para nada sorprendente. Dado que solo hemos redistribuido el mismo total de carga, la componente vertical de la reacción es igual a la del primer ejemplo.

La ecuación de equilibrio de los momentos respecto al empotramiento para los momentos es:

$$-350 \text{ daN} \times 2\text{m} - 400 \text{ daN} \times 1\text{m} + R_M = 0$$

Haciendo las cuentas y despejando R_M resulta:

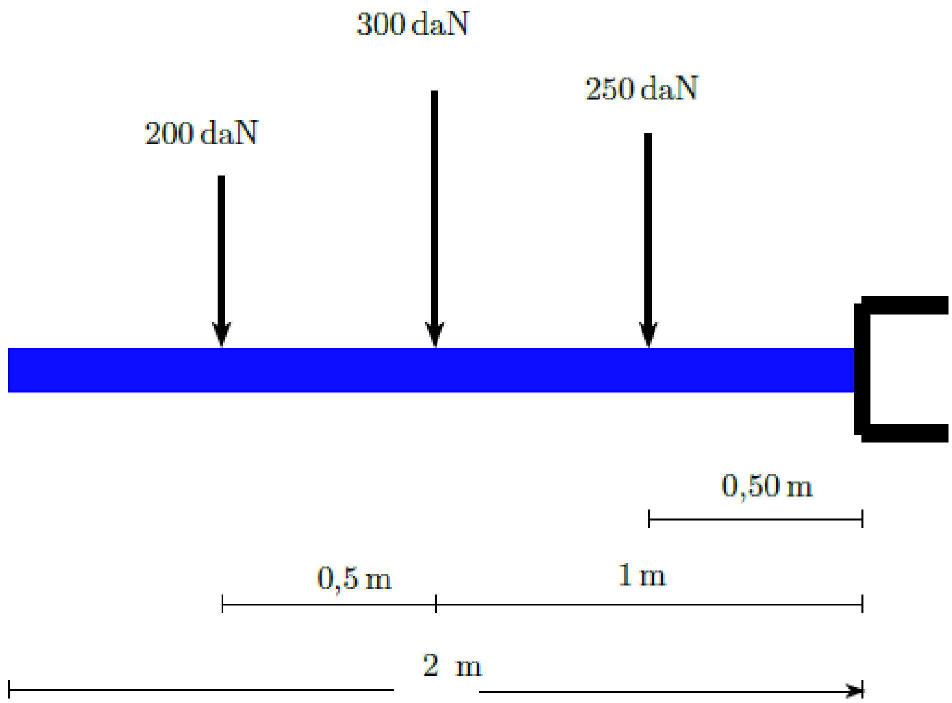
$$R_M = 1100 \text{ daNm}$$

El momento en el empotramiento es menor que el que habíamos encontrado para la situación en que toda la carga estaba apoyada en el extremo.

ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

Observación: La experiencia seguramente indique que es más fácil doblar una varilla haciendo fuerza lejos del punto en que está sujeta. Es una situación típica cuando se quiere quebrar una rama: buscamos poner la mano lo más lejos posible del pie que sujeta la rama y la misma fuerza que puede quebrar una rama larga no logra hacerlo con una rama corta. En el ejemplo, acercar parte de la carga al punto del empotramiento produjo una disminución del momento flector en el empotramiento.

Ejercicio: Calcular las reacciones en el empotramiento para una barra de 2 metros de longitud sometida al esquema de cargas que se representa en la figura.



1.3- Solicitaciones al interior de la pieza

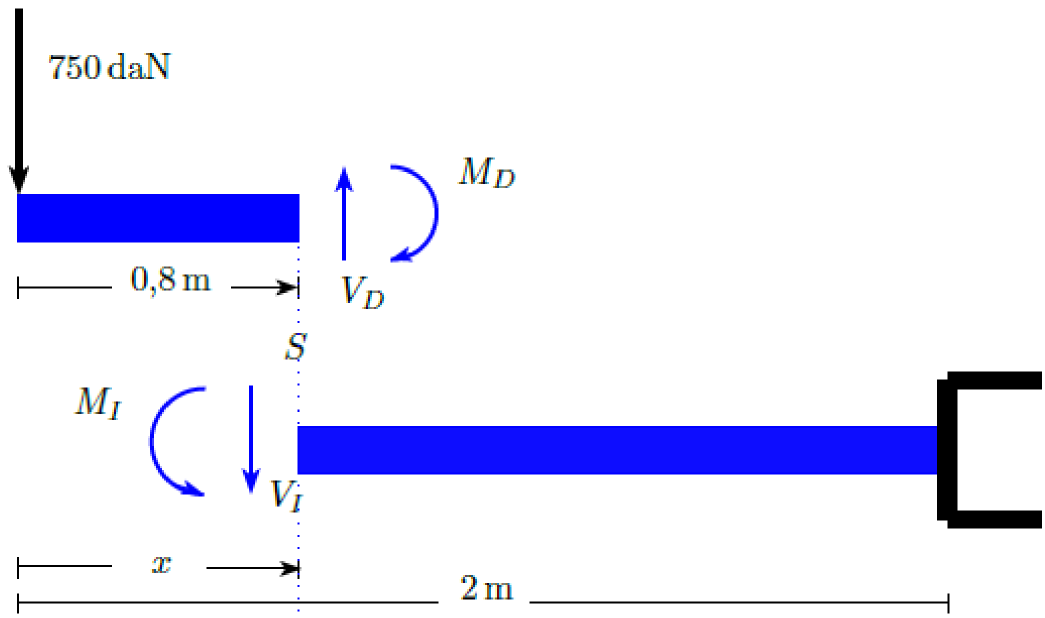
Necesitaremos analizar cómo se distribuyen los esfuerzos al interior de las piezas, en particular, al interior de las barras que estamos considerando. Ya consideramos el equilibrio de toda la barra, y el análisis del equilibrio nos permitió calcular las reacciones en el empotramiento.

Ahora vamos a aislar un tramo de la barra para calcular los esfuerzos que se trasmiten al resto de la barra a través de la sección que separa ese tramo del resto de la pieza.

El primer ejemplo hace este análisis para el primer tramo de 80 cm de la barra de la figura y permitirá analizar los esfuerzos que se transmiten a través de la sección que está a una distancia de 80 cm del extremo y 120 cm del empotramiento.

Ejemplo: Aislaremos los primeros 0,8 metros de la barra para analizar su equilibrio bajo la acción de las siguientes fuerzas aplicadas sobre él: en el extremo izquierdo actúa la carga de 750 daN; en el extremo derecho hay un sistema de fuerzas que el tramo a la derecha de la sección S ubicada a 0,8 m del extremo ejerce sobre el tramo que estamos analizando.

Igual que hicimos antes con las reacciones, este sistema de fuerzas puede resumirse en una resultante horizontal H_D, una resultante vertical V_D y un momento flector resultante M_D.



Utilizamos el subíndice D para enfatizar que son los esfuerzos que el tramo de la derecha ejerce sobre el de la izquierda.
La componente H_D es nula porque no hay fuerzas horizontales aplicadas, de modo que a través de la sección S no puede transmitirse ninguna fuerza neta en el sentido horizontal.
La componente vertical V_D debe satisfacer la condición de equilibrio:

$$-750 \text{ daN} + V_D = 0$$

de la que podemos despejar:

$$V_D = 750 \text{ daN}$$

El equilibrio de los momentos implica:

$$-750 \text{ daN} \times 0{,}8 \text{ m} + M_D = 0$$

por lo que:

$$M_D = 600 \text{ daNm}$$

La condición de equilibrio sumada a nuestra capacidad de abstraer cualquier porción de materia del resto del universo nos ha permitido determinar las resultantes de los esfuerzos que se trasmiten de un tramo a otro de la viga a través de la sección S.
Así como hay un esfuerzo que el tramo a la derecha de la sección S trasmite sobre el que está a la izquierda, hay esfuerzos que el tramo a la derecha trasmite sobre el tramo a la izquierda.
Podemos caracterizar el efecto total de estos esfuerzos por una resultante horizontal H_I, una resultante V_I y un momento neto M_I.

ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

El principio de acción y reacción implica que las fuerzas que el tramo izquierdo hace sobre el derecho son exactamente las opuestas a las que el derecho hace sobre el izquierdo.
Por lo tanto:

$$V_I = -V_D$$
$$M_I = -M_D$$

Hay una ecuación análoga para las resultantes horizontales, pero no la escribimos porque a partir de este momento nos vamos a desentender de los esfuerzos horizontales, porque trabajaremos con cargas que solo tienen componentes no nulas en la dirección vertical.
A continuación, enfocaremos nuestra atención en las resultantes izquierda que hemos dado en llamar V_I y M_I.

Definición: Esfuerzo cortante y momento flector
***1. El esfuerzo cortante, V_I, en la sección* S *de una barra es la resultante de los esfuerzos verticales que el tramo de la barra a la izquierda de* S *trasmite al tramo de la barra a la derecha de* S.**
***2. El momento flector, M_I, en la sección* S *de una barra es el momento respecto al centro de la sección* S *resultante de los esfuerzos que el tramo de la barra a la izquierda de* S *trasmite al tramo de la barra a la derecha de* S.**

Notación para los esfuerzo cortante y momento flector
Dado que de las dos posibles resultantes de esfuerzos verticales V_I y V_D vamos a considerar solo V_I, en lo sucesivos este será el símbolo adoptado para el esfuerzo de corte en la sección S, es decir, escribiremos V_I para designar el esfuerzo cortante. Análogamente, indicaremos con M_I el momento flector en S.
Tanto el esfuerzo cortante como el momento flector están referido a una sección de la pieza, S, por lo que es conveniente incluir en la notación la referencia a la sección. La manera usual de hacerlo es identificar la sección por una coordenada x que determina su ubicación en la barra y referirse al esfuerzo cortante y el momento flector en la sección que ocupa la posición x como $V_I(x)$ y $M_I(x)$ respectivamente.
En el ejemplo que estamos considerando introducimos una coordenada x que mide en metros la distancias desde el extremo de la barra, por lo que la sección que hemos considerado corresponde a $x = 0{,}8$ m.
Ejemplo: Vamos a terminar ahora los cálculos que comenzamos en el ejemplo anterior, poniéndolos en el contexto que introdujimos a través de la definición anterior y empleando la notación de la observación.
De acuerdo con la ecuación el esfuerzo cortante $V_I(0{,}8)$ es igual al opuesto $-V_D$ de los esfuerzos que el tramo de la derecha descarga sobre el de la izquierda, algo que escribimos como:

$$V_I(0{,}8) = -V_D$$

Usando la ecuación de equilibrio obtenemos:

$$-750 - V_I\,(0{,}8) = 0$$

de la que inmediatamente despejamos:

$$V_I\,(0{,}8) = -750 \text{ daN}$$

El esfuerzo cortante $V_I\,(0, 8)$ en x = 0,8 m es exactamente igual a la carga aplicada en el tramo a la izquierda de x = 0,8 m de ese punto.
Un análisis similar puede hacerse para los momentos.
El momento $M_I\,(0{,}8)$ es igual al opuesto $-M_D$ del momento neto que el tramo de la derecha ejerce sobre el de la izquierda, de modo que:

$$M_I\,(0{,}8) = -M_D$$

Combinamos las ecuaciones obtenemos:

$$-600 \text{ daN} - M_I\,(0{,}8) = 0$$

que implica:

$$M_I\,(0{,}8) = -600 \text{ daNm}$$

Podemos hacer una observación similar a la que cierra nuestro cálculo del cortante $V_I\,(0{,}8)$: el momento en 0,8 m es exactamente igual al momento respecto a x = 0,8 m de las cargas aplicadas en el tramo a la izquierda de x = 0,8 m.

1.4- El cálculo del esfuerzo cortante V_I (x) y el momento flector M_I (x)

Las observaciones que cierran los cálculos del esfuerzo cortante y el momento flector para x = 0,8 m en el ejemplo anterior responden a algo completamente general: al aislar el tramo de la viga que está a la izquierda de una cierta sección S y concentrarnos en los esfuerzos que se trasmiten a través de S, encontramos que la única forma de equilibrar las cargas que recibe el tramo a la izquierda de S es descargarlas hacia la derecha a través de S.
Esta observación es el núcleo conceptual de la prueba de la siguiente proposición.

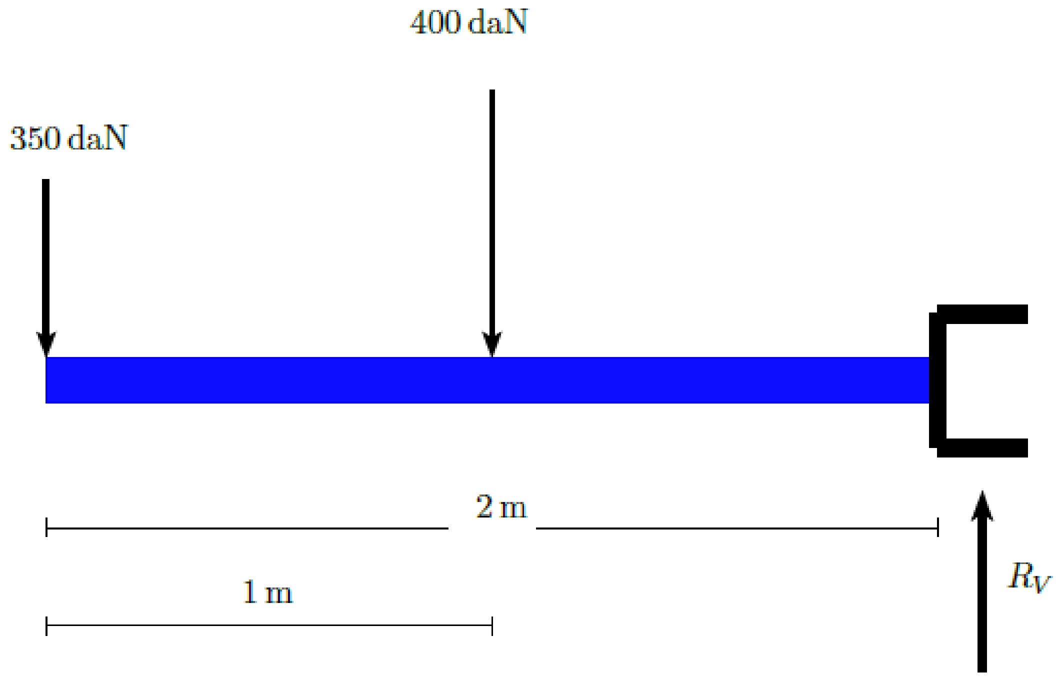
Proposición

***Consideremos la sección* S *de una viga ubicada en la posición definida por la coordenada* x. *Entonces el esfuerzo cortante* V_I (x) *es igual a la resultante de todos los esfuerzos verticales aplicados sobre la viga a la izquierda de* x.**
***El momento flector* M_I (x) *es igual a la suma de los momentos respecto a* x *de todas las cargas aplicadas a la izquierda de* x.**

Esta proposición nos permite calcular esfuerzos cortantes y momentos flectores simplemente evaluando resultantes de sistemas de fuerzas aplicados sobre la parte de la barra que nos interese aislar.

ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

Ejemplo: En este ejemplo vamos a calcular los valores V_I (0,5), M_I (0,5), V_I (1,5) y M_I (1,5) de los esfuerzo cortante y momento flector a 0,5 m y a un 1,5 m del extremo de la viga, para la viga del ejemplo visto anteriormente.



A la izquierda de x = 0,5 m solo está aplicada la carga de 350 daN en el extremo.
Tenemos entonces que:

$$V_I\,(0{,}5) = -\,350 \text{ daN}$$

El signo de menos es porque la carga actúa en el sentido negativo de la dirección vertical (-Y).
Para el cálculo del momento debemos tener en cuenta la distancia de 0,5 m que hay entre la sección en la que estamos trabajando y el punto de aplicación de la carga.
El resultado es:

$$M_I\,(0{,}5) = -\,350 \text{ daN} \times 0{,}5\text{m} = -\,175 \text{ daNm}$$

El cálculo para x = 1,5 m requiere considerar las dos cargas aplicadas sobre la barra.
El esfuerzo cortante es:

$$V_I\,(1{,}5) = -\,350 \text{ daN} - 400 \text{ daN} = -\,750 \text{ daN}$$

la suma de ambas cargas.

El cálculo del momento requiere considerar para cada una de ellas la distancia de la sección en x = 1,5 m al punto de aplicación de cada carga:

$$M_I\,(1{,}5) = -\,350 \text{ daN} \times (1{,}5 - 0) \text{ m} - 400 \text{ daN} \times (1{,}5 - 1) \text{ m} = -\,725 \text{ daNm}$$

En el cálculo hemos hecho explícito que la distancia de la sección al punto de aplicación es la diferencia entre la coordenada de la sección y el punto en que está aplicada cada fuerza.

Ejemplo: En este ejemplo vamos a generalizar lo que hicimos en el anterior, calculando los valores de los cortantes $V_I(x)$ y $M_I(x)$ para un punto genérico de la viga del ejemplo anterior. Para los valores de x entre 0 m y 1 m solo tendremos que considerar la carga de 350 daN aplicada en el extremo de la viga. Cuando x esté entre 1 m y 2 m la sección en x debe transmitir hacia la derecha los esfuerzos resultantes de ambas cargas.
Tenemos entonces que:

$$V_I(x) = -350 \text{ daN}; \ 0 < x < 1$$

Para el momento resulta:

$$M_I(x) = -350 \text{ daN} \times (x - 0) \text{ m} = -350\, x \text{ daNm}; \ 0 < x < 1$$

Cuando pasamos al otro intervalo encontramos:

$$V_I(x) = -350 \text{ daN} - 400 \text{ daN} = -750 \text{ daN}; \ 1 < x < 2$$

y

$$M_I(x) = -350 \text{ daN} \times (x - 0) \text{ m} - 400 \text{ daN} \times (x - 1) \text{ m} = -750\, x + 400 \text{ daNm}$$

En resumen, las fórmulas para el cortante $V_I(x)$ son:

$$V_I(x) = -350; \ 0 < x < 1$$
$$V_I(x) = -750; \ 1 < x < 2$$

y para el momento flector $M_I(x)$ son:

$$M_I(x) = -350\, x; \ 0 < x < 1$$
$$M_I(x) = -750\, x + 400; \ 1 < x < 2$$

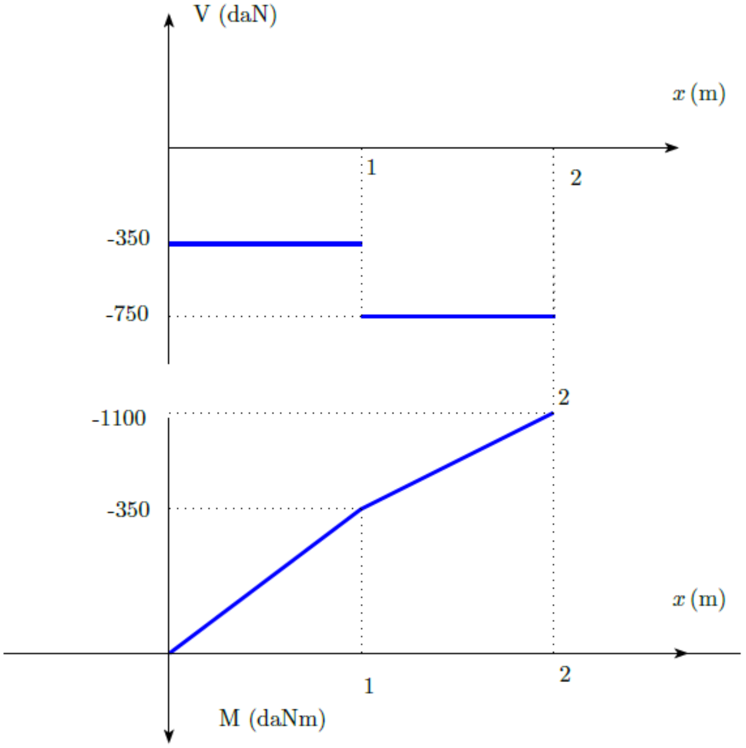
No hemos puesto las unidades en las fórmulas, pero hemos seguido el uso que será habitual en el resto del curso, las longitudes se expresaran en metros, las fuerzas en decanewton (daN) y los momentos en decanewton×metro (daNm), a menos que se explicite lo contrario.

ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

En la figura graficamos las funciones $V_I(x)$ y $M_I(x)$.

diagrama de esfuerzo cortante

diagrama de momento flector



Estos gráficos son lo que se llaman ***diagrama de esfuerzo cortante, o de corte,*** y ***diagrama de momento flector.***
El diagrama de momento flector está dibujado con la peculiaridad de que el sentido negativo del eje vertical se representa hacia arriba. Con esta convención, el diagrama de momentos genera un dibujo que cualitativamente reproduce las deformaciones que tendrá la viga al someterse a la carga que originó el diagrama y explicita de qué lado de la viga estarán las fibras traccionadas. Dado que los materiales de construcción no resisten del mismo modo las tracciones que las compresiones, es importante para el diseño distinguir una situación de la otra.

Observación: No hemos definido el esfuerzo cortante y el momento flector en los puntos de aplicación de las cargas.
Para el momento flector podríamos hacerlo, porque la carga puntual aplicada en un punto tiene momento nulo respecto a ese punto y no genera ninguna discontinuidad en las fórmulas ni en el gráfico.
Las fórmulas y gráficos de los esfuerzos cortante sí exhiben un punto de discontinuidad, que genera cierta ambigüedad para la definición del cortante en el punto en que está aplicada la carga. Lo habitual es adoptar como valor el de mayor valor absoluto, porque es el que pone en evidencia los esfuerzos a los que estará sometida la pieza en ese punto. Esto todavía tiene el problema de decidir qué hacer cuando hay un valor negativo y otro positivo con igual valor absoluto. La matemática resuelve este problema con una convención ligeramente diferente.
La realidad es que no es demasiado importante tener una definición del esfuerzo cortante en esos puntos así que nos limitaremos a dar fórmulas para los cortantes fuera de los puntos de aplicación de cargas puntuales.

Observación: El esfuerzo cortante $V_I(x)$ y el momento flector $M_I(x)$ llegan a x = 2 m con un valor contrario al de las reacciones en el empotramiento. Este hecho es una expresión de que el equilibrio de la viga requiere que las reacciones en el empotramiento compensen los esfuerzos que la sección en x = 2 m transmite hacia los anclajes.
Si al calcular un diagrama de esfuerzo cortante o momento flector no se observa esta relación con las reacciones, es señal de que hay algún error en alguna parte.

Verificaciones
El ejemplo generaliza los cálculos del ejemplo anterior. Por lo tanto, las fórmulas para el esfuerzo cortante y el momento flector deberían reproducir los valores que ya teníamos al evaluarse en x = 0,5 m y x = 1,5 m. Para los valores del cortante una simple inspección muestra que así es.
Para el momento calculamos:

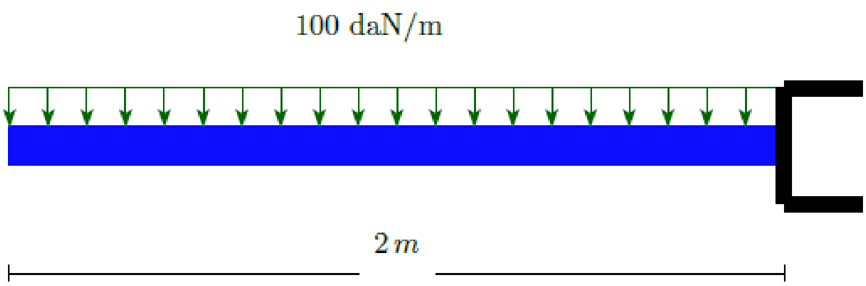
$$M_I(0{,}5) = -350 \times 0{,}5 = -175 \text{ daNm}$$
$$M_I(1{,}5) = -750 \times 1{,}5 + 400 = -725 \text{ daNm}$$

Ambos concuerdan con lo que habíamos calculado antes.

2- ESFUERZO CORTANTE
2.1- Caso de cargas distribuidas
Las nociones de esfuerzo cortante y el momento flector que discutimos anteriormente pueden aplicarse en presencia de cargas distribuidas o de una combinación de cargas distribuidas y cargas puntuales. Aquí discutiremos cómo calcular el esfuerzo cortante.
Comenzaremos con el caso más sencillo, cuando las cargas que soporta una ménsula están uniformemente distribuidas, o al menos uniformemente distribuidas sobre partes de la ménsula.

2.2- Esfuerzo Cortante en una ménsula sometida a cargas distribuida constantes
En nuestro dos primeros ejemplos analizaremos una carga distribuida constante y una carga distribuida constante a trozos sobre una ménsula. En esta situación sencilla reconoceremos que el esfuerzo cortante puede calcularse como una suma de las cargas distribuidas, hecho que se generaliza a cargas cualesquiera.

Ejemplo: La viga de la figura tiene 2 metros de longitud, está empotrada en su extremo derecho y soporta una carga distribuida constante de 100 daN/m.



ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

En esta situación, no hay ninguna carga concentrada en ningún punto, pero la carga sobre cada tramo de la viga es proporcional a la longitud. Cada tramo de un metro está cargado con 100 daN, entre el extremo izquierdo de la viga y el punto que está a 30 cm del extremo izquierdo hay una carga de:

$$0{,}3 \text{ m} \times 100 \text{ daN/m} = 30 \text{ daN}$$

En general, si un tramo de la viga tiene longitud l, medida en metros, estará recibiendo una carga de $100 \times l$ daN. Un tramo de 1,5 m recibe una carga total de 150 daN, un tramo de 0,5 m recibe 50 daN y uno de 25 cm recibe 25 daN.
Luego de esta discusión estamos en condiciones de determinar el esfuerzo cortante en una sección cualquiera de la viga. Para identificar las secciones utilizaremos una coordenada x, que mide en metros la distancia de cada sección al extremo izquierdo de la barra.
Escogeremos x = 0, 8 m y determinaremos el esfuerzo cortante V_I (0,8) en ese punto.
El esfuerzo cortante en V_I (0,8) es igual al total de las cargas verticales sobre la barra en el tramo entre x = 0 m y x = 0,8 m.
Este tramo tiene una longitud de 0,8 m, por lo que:

$$V_I\,(0{,}8) = -100 \text{ daN/m} \times 0{,}8\text{m} = -\,80 \text{ daN}$$

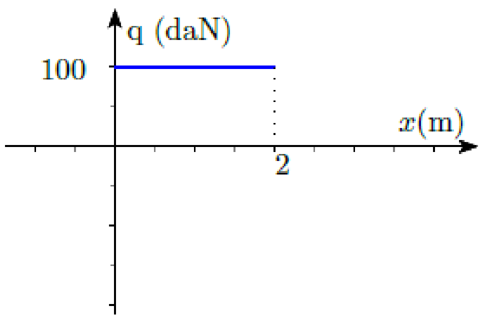
El signo de menos es porque la carga actúa hacia abajo, el sentido negativo del eje vertical (-Y).

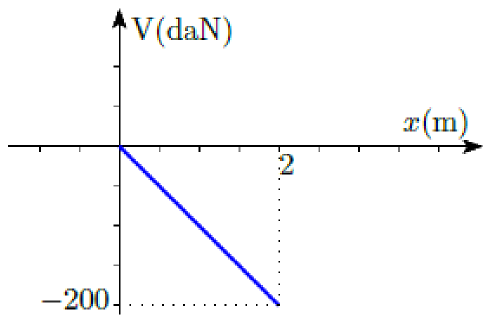
Ejercicio: Calcular V_I (0,1), el esfuerzo cortante en x = 0 m, 1 m, a diez centímetros de distancia del extremo izquierdo de la viga, y V_I (1,5), el esfuerzo cortante a 1,5 m de distancia.
El cálculo del cortante V_I (x) para una sección cualquiera con $0 \leq x < 2$ no reviste ninguna dificultad adicional: el tramo de barra entre 0 y x tiene longitud x, por lo que el cortante es:

$$V_I\,(x) = -\,100 \text{ daN/m} \times x = -\,100\,x \text{ daN}$$

Como era previsible, el esfuerzo cortante va variando con x.

En las figuras aparecen los gráficos de la densidad de carga q(x) y el esfuerzo cortante $V_I(x)$ para este ejemplo.





ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

La fórmula $V_I(x) = -100 \times x$ responde al hecho de que el total de carga en cada tramo de la barra es igual al producto:

intensidad de la carga distribuida × longitud del tramo

$$V_I(x) = q(x) \times x$$

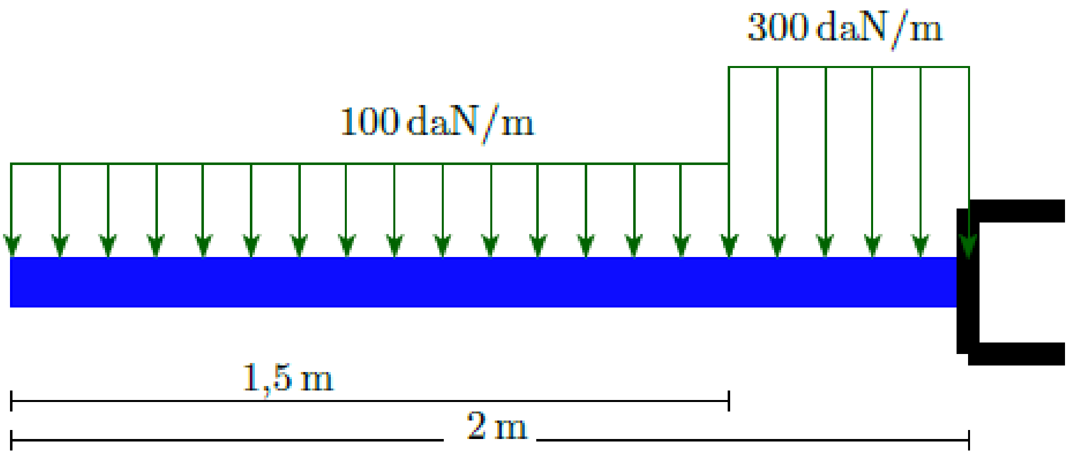
y a la convención de signos para los sentidos de las fuerzas.

Para cada x el cortante V_I (x) coincide con el opuesto del área encerrada bajo el gráfico de la figura entre 0 y x.
Por lo tanto podemos escribir:

$$V_I(x) = -\int_0^x 100\, dx$$

Hay que efectuar la suma para realiza entonces la tarea de acumular el total de las cargas aplicadas en ese tramo y sustituye, para este caso continuo, la operación de sumar que se utiliza para calcular la resultante de varias cargas puntuales.

Ejemplo: Introduciremos una ligera variación a la situación que estudiamos en el ejemplo anterior.
Supondremos la viga cargada con una carga distribuida *q(x)* que tiene un valor constante de 100 daN/m en el primer 1,5 m de la barra y de 300 daN/m en el último tramo de 0,5 m.



El cortante $V_I(x)$ para $1{,}5 \leq x < 2$ es igual al total de carga acumulada entre 0 y x.
Debemos contar el primer tramo, que tiene una carga total de 100 daN/m $\times$ 1,5 m = 150 daN.
A este valor hay que sumarle lo que aporta el tramo entre 1,5 m y x, que es:

$$300 \text{ daN/m} \times (x - 1{,}5) \text{ m} = 300\,x - 450 \text{ daN}$$

El esfuerzo cortante en el tramo que estamos considerando es entonces igual al opuesto de la suma de estas dos contribuciones, de modo que:

$$V_I(x) = -(150 + 300x - 450) = -300x + 300 \text{ daN};\ 1{,}5 \leq x < 2$$

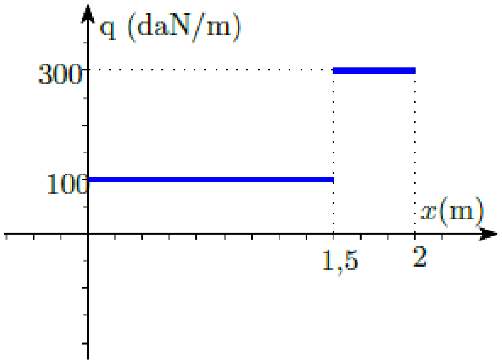
Ejercicio: Calcular para $0 \leq x \leq 1{,}5$ el esfuerzo cortante.
En resumen las fórmulas para la distribución de carga q(x) es:

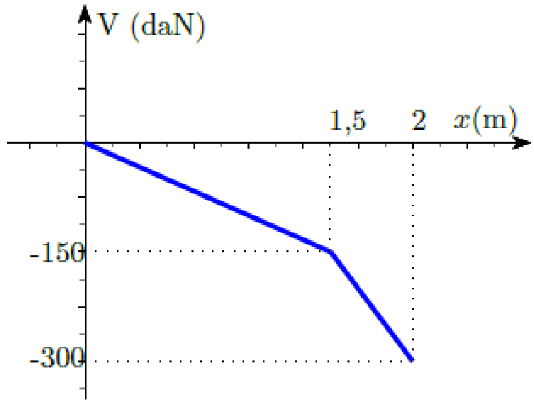
$$q(x) = 100 \text{ daN/m};\ 0 \leq x < 1{,}5$$
$$q(x) = 300 \text{ daN/m};\ 1{,}5 \leq x < 2$$

Y para el esfuerzo cortante $V_I(x)$ será:

$$V_I(x) = -100x \text{ daN};\ 0 \leq x \leq 1{,}5$$
$$V_I(x) = -300x + 300 \text{ daN};\ 1{,}5 \leq x < 2$$

Los gráficos de la carga y el esfuerzo cortante se muestran en la figura.





Encontramos nuevamente que podemos expresar el esfuerzo cortante como el opuesto de la integral de la carga, en la forma:

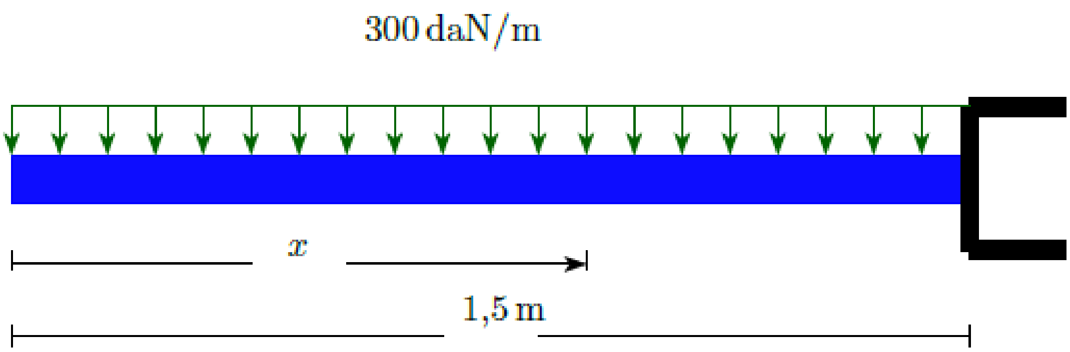
$$V_I(x) = -\int_0^x q(s)\, ds$$

Esta fórmula es una expresión de que el esfuerzo cortante es igual a la resultante de las componentes verticales aplicadas a la izquierda de la sección en x. Nuevamente, hay que realizar la operación de suma que permite calcular resultantes en los casos discretos en que hay fuerzas puntuales aplicadas.

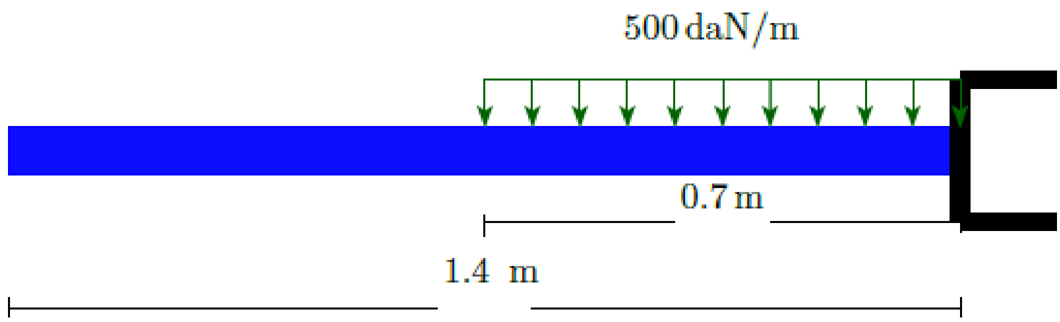
Ejercicios propuestos

1- Para la viga de la figura, hallar.

1. el cortante $V_I(x)$ en x = 0, 5.
2. el cortante $V_I(x)$, para cada $x \in (0; 1, 5)$.
3. verificar que la fórmula hallada en el punto 2. predice correctamente el valor hallado en 1.



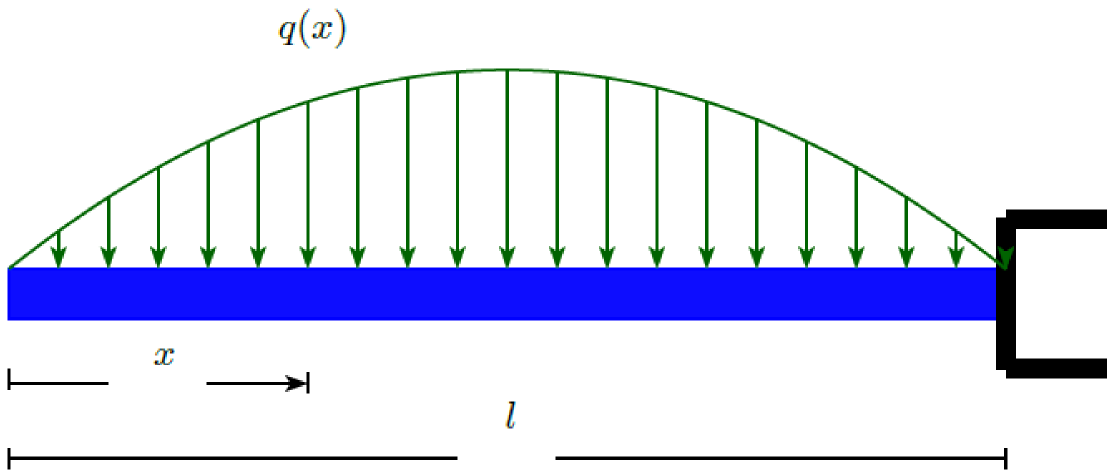
2- Para la barra de la figura calcular:
1. el cortante en el punto medio.
2. el cortante $V_I(x)$ para cada x en el intervalo (1,4; 2).
3. la componente vertical R_V de la reacción en el empotramiento.
Graficar el esfuerzo cortante.



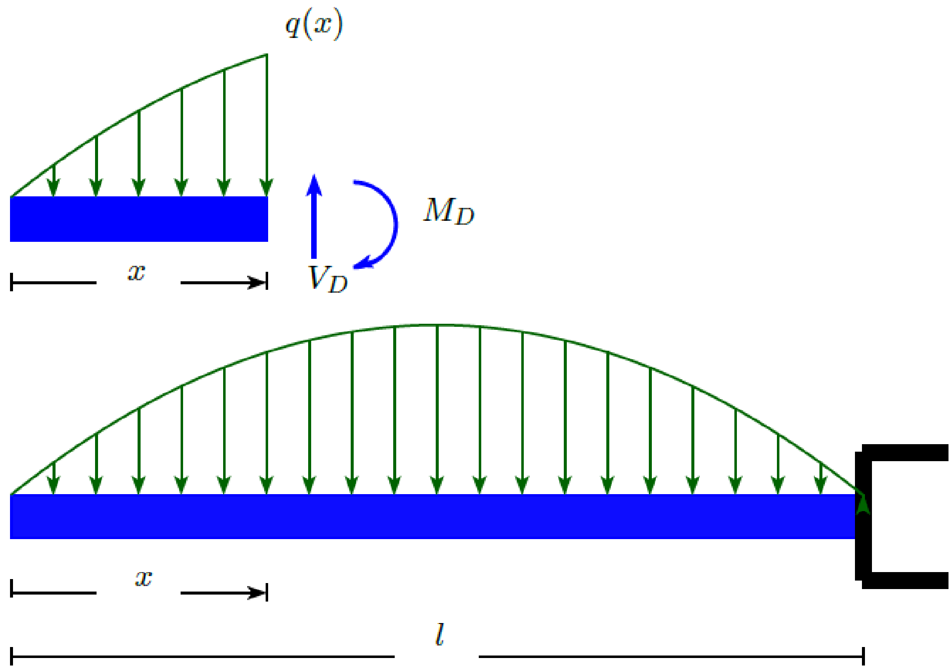
3- Una viga de 1,20 m de longitud empotrada en su extremo de la derecha soporta en sus primeros 40 cm (contados desde su extremo izquierdo) una carga distribuida de 300 da/m y en sus último 80 cm una carga distribuida de 500 daN/m.
1. Calcular el cortante en x = 0, 4 m y x = 0, 8 m.
2. Calcular el cortante para cada $x \in (0, 1, 2)$.
3. Hacer los gráficos de la carga aplicada q(x) y el cortante $V_I(x)$.
4. Hallar la componente vertical R_V de la reacción en el empotramiento.

2.3- Cargas distribuidas
Cuando una carga se distribuye sobre una estructura no tiene por qué hacerlo de manera uniforme. Por ejemplo, cuando estamos de pie, nuestro peso se distribuye sobre la planta de los pies, generando una cierta presión sobre el suelo. Esta presión varía de un punto a otro, e incluso podemos modificarla intencionalmente balanceándonos ligeramente o modificando la configuración de los pies o las piernas. Este comentario general se aplica también a las descargas sobre vigas.
Un tramo de viga de cierta longitud (que mediremos en metros) recibirá una cierta carga (que mediremos en Newton) que cambiará de un tramo a otro, pero no será necesariamente proporcional a la longitud del tramo. Si la variable x identifica cada punto de la viga, la

distribución de carga quedará caracterizada entonces por una función *q(x)*, que tendrá unidad de fuerza/distancia, que, en general, ya no será constante.
El ejemplo de una persona de pie sobre el suelo puede adaptarse para pensar en una situación de este tipo: imaginémonos acostados sobre una viga. Nuestro peso no se distribuirá uniformemente sobre los diferentes tramos de la viga (de hecho, raramente se distribuye uniformemente: tanto las sensaciones de nuestro cuerpo tendido como la huella irregular que dejamos en la arena luego de estar tumbados un rato nos lo advierten), y además podemos elegir que se distribuya de diferentes maneras, empujando aquí y allá con distintas partes del cuerpo.
Trabajaremos entonces con una viga de cualquier longitud l empotrada en su extremo derecho, y una carga distribuida que en el punto x (donde x mide la distancia en metros desde el extremo izquierdo de la viga) toma el valor *q(x)*.



La figura muestra una ménsula sometida a una carga distribuida variable, que tiene mayor intensidad hacia el centro de la viga. Supondremos que el empotramiento es capaz de producir las reacciones que compensan la carga sobre la viga, de modo que todo permanezca en equilibrio. En esta situación, podemos repetir el análisis que presentamos en la sección anterior para estudiar el esfuerzo cortante $V_I(x)$, es decir, el esfuerzo vertical que el tramo de la viga entre el extremo izquierdo y la sección ubicada en x descarga sobre el tramo de la viga a la derecha de x.
La figura muestra el tramo de la izquierda separado del resto, para poner en evidencia que su relación con el de la derecha genera un sistema de fuerzas que puede resumirse en una componente vertical, una componente horizontal y un momento.



Sobre el tramo de la izquierda actúan la densidad de carga q(x), un esfuerzo vertical $V_D(x)$ que el tramo de la derecha ejerce sobre él (que evita que la densidad de carga desplace el tramo [0, x] hacia abajo) y un momento flector $M_D(x)$ (que evita que la viga se doble en x, girando en sentido antihorario alrededor de ese punto).

Como no hay cargas horizontales aplicadas la resultante de los esfuerzos horizontales en x debe ser nula.

El equilibrio de fuerzas en la dirección vertical implica que la suma $-Q(x) + V_D(x)$ debe ser nula.

Esto es:

$$-Q(x) + V_D(x) = 0$$

Si tenemos en cuenta además que el principio de acción y reacción implica que:

$$V_I(x) = -V_D(x)$$

y expresamos la carga total Q(x) como la suma:

$$Q(x) = \int_0^x q(s)ds$$

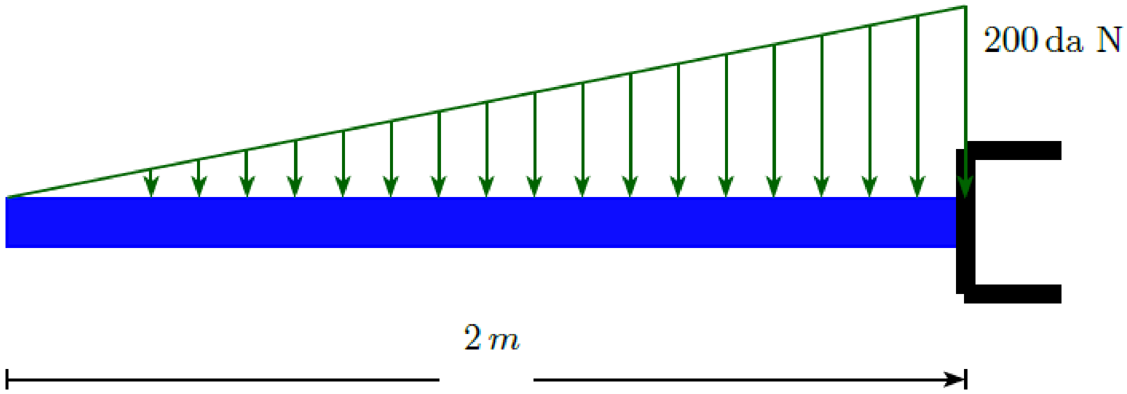
encontramos que el esfuerzo cortante en x es:

$$V_I(X) = -Q(x) = -\int_0^x q(s)\,ds$$

Observación: Si en vez de una carga distribuida tuviéramos muchas cargas puntuales en el intervalo [0, x], tendríamos que sumarlas para hallar su resultante.

Observemos también la relación entre la función q(x) que caracteriza una distribución de carga y la carga que soporta cada tramo de viga. Si q(x) es constante, la carga que soporta cada tramo es proporcional a su longitud. Cuando q(x) no es constante, tramos de viga de igual longitud pueden soportar cargas diferentes.

Ejemplo: Consideraremos la viga de 2 m de longitud, con la distribución de carga triangular q(x) = 100 x daN/m que se muestra en la figura.



La carga total que soporta la viga es:

$$Q = \int_0^2 q(x)\,dx = \int_0^2 100\,x\,dx = 100\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 100\,(2)daN$$

Esta integral es igual al área de un triángulo de base igual a 2 m y altura 200 daN/m, de modo que:

$$Q = (2\text{ m} \times 200\text{ daN/m}) / 2 = 200\text{ daN}$$

Este valor debe ser también el valor de R_V, la componente vertical de la reacción en el apoyo, que debe equilibrar Q.
Con el mismo tipo de argumentos podemos calcular el cortante en cualquier punto.
Por ejemplo, el cortante en x = 0,5 m es:

$$V_I(0{,}5) = -\int_0^{0{,}5} q(x)\,dx = -\int_0^{0{,}5} 100\,x\,dx$$

El signo de menos aparece ahora porque el cortante $V_I(x)$ es el esfuerzo que el tramo de la barra a la izquierda de x descarga sobre el tramo a la derecha, no la reacción que lo equilibra. La integral es ahora el área de un triángulo de base igual a 0,5 m y altura:

$$q\,(0{,}5) = 100 \times 0{,}5\text{ daN/m} = 50\text{ daN/m}$$

de modo que:

$$V_I\,(0{,}5) = -\,(0{,}5\text{ m} \times 50\text{ daN/m}) / 2 = 12{,}5\text{ daN}$$

El caso de un valor genérico de *x* entre 0 m y 2 m se calcula con las mismas ideas:

$$V_I(0{,}5) = -\int_0^x q(s)\,ds = -\int_0^x 100\,s\,ds$$

Es el área de un triángulo de base *x* m y altura:

$$q(x) = 100\ x$$

Por lo tanto:

$$V_I(x) = -(x \times 100\,x)/2 = 50\,x^2$$

Observemos que cuando x se aproxima a 2 m el esfuerzo cortante aproxima a – 200 daN. Esto es consistente el valor que habíamos encontrado antes para la reacción R_V.

Ejemplo: Una viga de 6 m de longitud empotrada en su extremo derecho soporta una carga distribuida:

$$q(x) = 800 - 100\,x - |400 - 100\,x| \text{ daN/m}$$

donde x es la distancia al punto izquierdo de la viga, medida en metros.
Calcular el esfuerzo cortante en los puntos $x = 1$ m, $x = 2$ m, $x = 3$ m, $x = 4$ m, $x = 5$ m y la reacción en el empotramiento (ubicado en $x = 6$ m).
Para graficar la carga distribuida q(*x*) comenzaremos por buscar fórmulas lineales, sin el valor absoluto que aparece en su definición.
Sabemos que:

$$|400 - 100\ x| = 400 - 100\ x;\ 400 - 100\ x \geq 0$$
$$|400 - 100\ x| = -(400 - 100\ x);\ 400 - 100\ x \leq 0$$

La condición $400 - 100\ x \geq 0$ es equivalente a $x \leq 4$.
Análogamente, $400 - 100\ x \leq 0$ cuando $x \geq 4$.
Por lo tanto:

$$|400 - 100\ x| = 400 - 100\ x;\ x \leq 4$$
$$|400 - 100\ x| = -400 + 100\ x;\ x \geq 4$$

Sustituyendo estas expresiones en la definición de q(x) y haciendo los cálculos obtenemos:

$$q(x) = 400;\ x \leq 4$$
$$q(x) = 1200 - 200\ x;\ x \geq 4$$

Es conveniente verificar antes de seguir adelante.
Evaluamos:

$$q\,(4) = 800 - 100 \times 4 - |400 - 100 \times 4| = 400 \text{ daN/m}$$

valor que está en acuerdo con el que las dos fórmulas predicen:

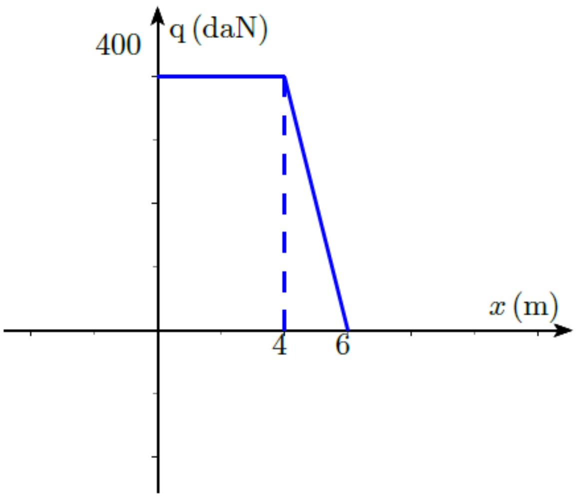
La primera directamente devuelve la constante 400 en todo el intervalo [0, 4].
La segunda es:

$$1200 - 200 \times 4 = 400$$

Completamos la verificación calculando q(0), que da 400 daN/m.
La segunda fórmula sugiere que q(x) debe anularse en x = 6 m.
Evaluamos allí:

$$q\,(6) = 800 - 100 \times 6 - |400 - 100 \times 6| = 200 - |-200| = 200 - 200 = 0 \text{ daN/m}$$

Dada la forma que tiene q(x), la coincidencia de estos tres valores nos permite estar seguros de que hemos calculado correctamente las fórmulas para q(x).
Con esta información, procedemos a graficar q(x).



Sabemos que para $1 \leq x < 2$ se satisface:

$$V_I(x) = \int_0^x q(s)ds$$

Para x = 1 m la integral es igual al área de un rectángulo de base 1 m y altura 400 daN/m, de modo que:

$$V_I\,(1) = -\,Q\,(1) = \int_0^1 400\;dx = 400\;|x|\,_0^1 \text{ daN} = 400 \text{ daN}$$

Para x = 2 m, 3 m y 4 m la situación es análoga, y los valores del cortante son:

$$V_I\,(2) = -\,2 \times 400 = -\,800 \text{ daN/m}$$
$$V_I\,(3) = -\,3 \times 400 = -\,1200 \text{ daN/m}$$
$$V_I\,(4) = -\,4 \times 400 = -1600 \text{ daN/m}$$

Para x = 5 m hay que sumar a los 1600 daN acumulados entre 0 m y 4 m el efecto de la carga en el tramo de viga entre x = 4 m y x = 5 m.
Esto es:

$Q\,(5) = 1600 \text{ daN} + \int_4^5 q(x)\,dx = 1600 \text{ daN} + (5-4)\text{m} \times [\frac{(400+200)}{2}] \text{ daN/m} = 1900 \text{ daN}.$
Concluimos que:

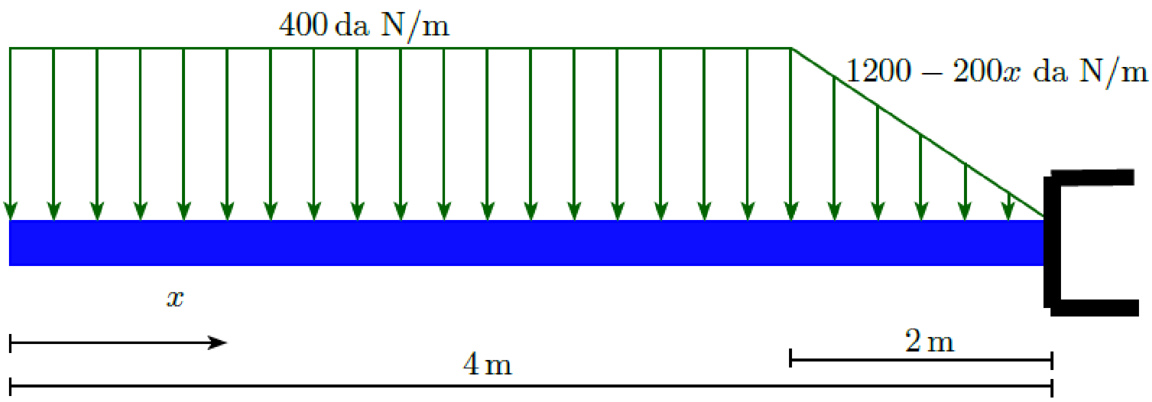
$$V_I\,(5) = -\,1900 \text{ daN}$$

La reacción vertical en el empotramiento debe compensar todo el efecto de la distribución de carga, por lo que tenemos:

$$R_V = \int_0^6 q(x)\,dx$$

Recordemos que en este caso no aparece el signo de menos que afecta a los cortantes, porque la reacción es la fuerza que el empotramiento (a la derecha de la viga) ejerce sobre la viga que está a su izquierda.
El esfuerzo cortante $V_I(x)$ es la fuerza vertical que la parte de la viga a la izquierda de x ejerce sobre la parte a la derecha, que es exactamente la opuesta de la reacción de la derecha sobre la izquierda, de ahí el cambio de signo.
La estrategia de calculó para evaluar R_V es similar a la que empleamos a la hora de calcular V_I (5) y consiste en descomponer la suma en dos tramos:

$$R_V = \int_0^4 q(x)\,dx + \int_4^6 q(x)\,dx = 4 \text{ m} \times 400 \text{ daN/m} + [(6-4) \text{ m} \times 400 \text{ daN/m}] / 2$$
$$= 2000 \text{ daN}$$



Podemos pasar ahora al cálculo del cortante $V_I\,(x)$ con x variable.
Para $x \leq 4$ es una generalización inmediata de los casos particulares que aparecen en la fórmula: la suma que hay que calcular para evaluar $Q(x)$ corresponde al área de un rectángulo de base x m y altura 400 daN.
Por lo tanto:

$$V_I\,(x) = -\,Q(x) = -\int_0^x 400\,ds = -\,400\,x;\ x \leq 4$$

Para $x \geq 4$ volvemos a utilizar la estrategia de escribir la suma como la suma hasta 4, más la suma entre 4 y x.
Para esta segunda suma, es necesario usar que la altura del trapecio que está sobre x es:

$$q(x) = \int_4^6 400\,s\,ds = 400\,[\frac{s^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{[400\,(6-4)\,]}{2} = 1200 - 200\,x;\ x \in [4, 6]$$

y generalizar adecuadamente la fórmula.

El resultado en daN es:

$$Q(x) = 1600 + (x - 4) \times (400 + 1200 - 200\,x) / 2;\ x \leq 4$$

Luego de operar, y tener en cuenta que $V_I\,(x)$ es el opuesto de $Q(x)$, concluimos:

$$V_I\,(x) = 100\ x^2 - 1200\,x + 1600;\ 4 \leq x \leq 6$$

Observación: Tenemos información para verificar la fórmula anterior, porque ya hemos calculado los esfuerzos cortantes en 4 m y 5 m y la reacción en el empotramiento.
La fórmula predice el valor:

$$V\,(4) = 100 \times 42 - 1200 \times 4 + 1600 = -1600 \text{ daN}$$

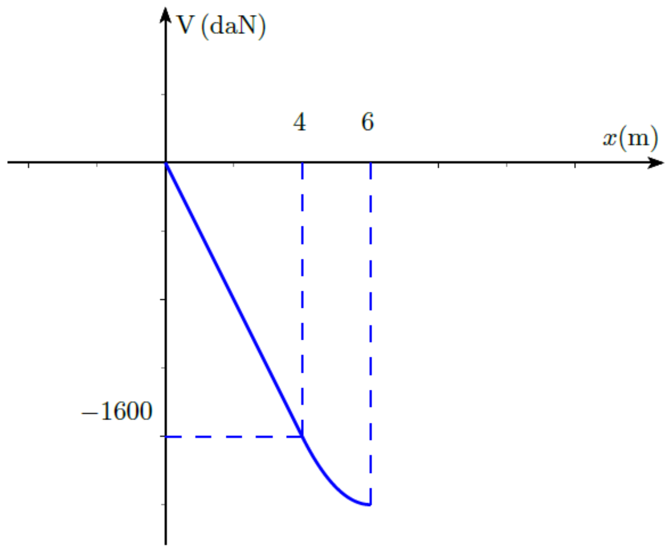
que es correcto.

Ejercicios propuestos
1- Completar la verificación cuando $x = 5$ m y $x = 6$ m.
En conclusión:

$$V_I\,(x) = -\,400\,x;\ x \leq 4$$
$$V_I\,(x) = 100\,x^2 - 1200\,x + 1600;\ x \geq 4$$

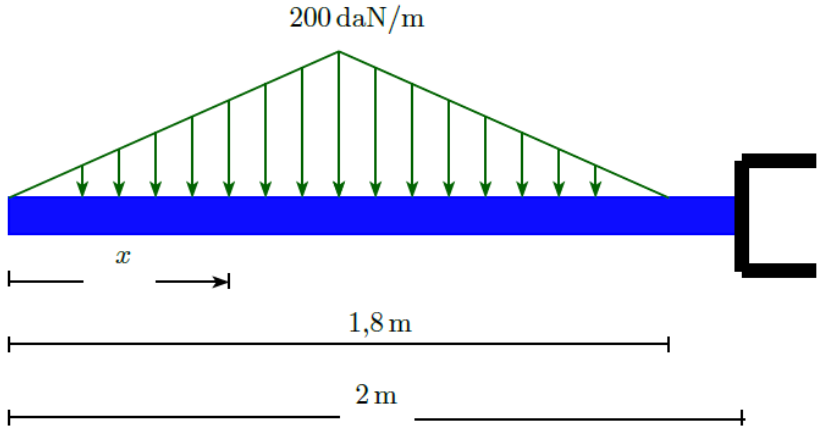
donde $V_I\,(x)$ está expresado en daN.

La figura muestra el gráfico de $V_I\,(x)$.



Tal como es de prever, el punto más exigido de la estructura es el que está en el empotramiento.
Observemos además que en $x = 4$ m la curva es suave: no aparece en el gráfico una discontinuidad ni un punto anguloso.

2- La viga de la figura está empotrada en sus extremos de la derecha y soporta una carga distribuida triangular, como se muestra en la figura. Hallar el valor del cortante en el punto de la viga que está a 1,80 m de su extremo izquierdo.



A. 0 daN
B. -180 daN
C. -200 daN
D. -324 daN

2.4- Cargas distribuidas y cargas puntuales
En nuestro primer ejemplo de cálculo de esfuerzos cortantes se estudió el esfuerzo cortante de una viga sometida a una carga puntual.
En nuestro segundo ejemplo la viga soportaba dos cargas puntuales, pero en lo conceptual no se modificaba la definición de momento flector ni del esfuerzo cortante: también podemos hallarlo como la resultante de las cargas aplicadas sobre la pieza a la izquierda del a sección.
El mismo sentido tiene la fórmula:

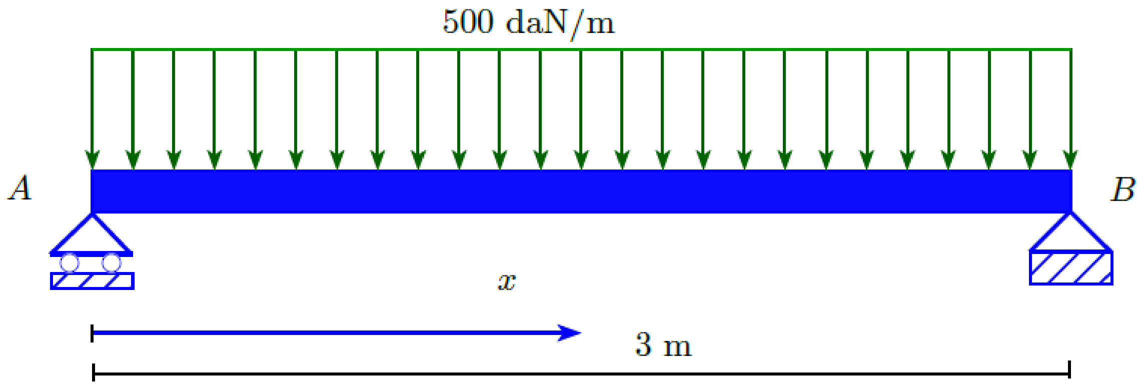
$$V_I(x) = -\int_0^x q(s)\, ds$$

La integral acumula el efecto de toda la carga, distribuida o no, en el intervalo [0, *x*].
Cuando la carga sobre la pieza se modela como una superposición de cargas puntuales y distribuidas, el esfuerzo cortante en una sección x también se calcula como la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la izquierda de *x*. Simplemente hay que sumar todas las cargas puntuales, calcular las distribuidas y luego sumar ambas cosas.

Ejemplo: Una situación bastante típica es la de una viga apoyada en sus extremos que soporta una carga distribuida constante.
En la figura se presenta esta situación para una viga de 3 m que soporta una carga:

$$q(x) = 500 \text{ daN/m};\ 0 \le x \le 3$$

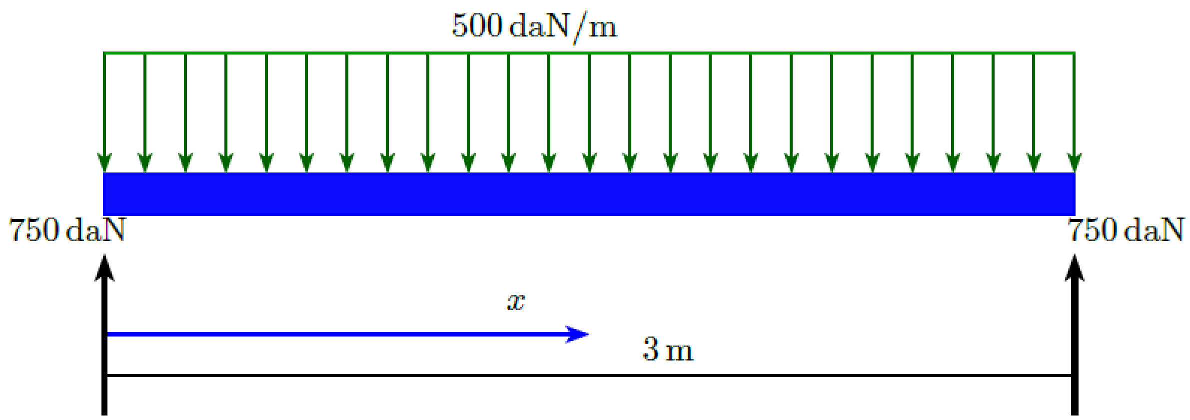
ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR



La carga total es de:

$$500 \text{ daN/m} \times 3\text{m} = 1500 \text{ daN}$$

La simetría de la situación implica que en cada apoyo habrá una reacción vertical de 750 daN. Abstrayendo los apoyos y sustituyéndolos por las fuerzas puntuales con las que estamos modelando su acción sobre la viga, el esquema de fuerzas al que está sometida la pieza se muestra en la figura.



El esfuerzo cortante $V_I(x)$ se calcula para cada $0 < x < 3$ como la resultante de las cargas aplicadas a la izquierda de x.

Por lo tanto:

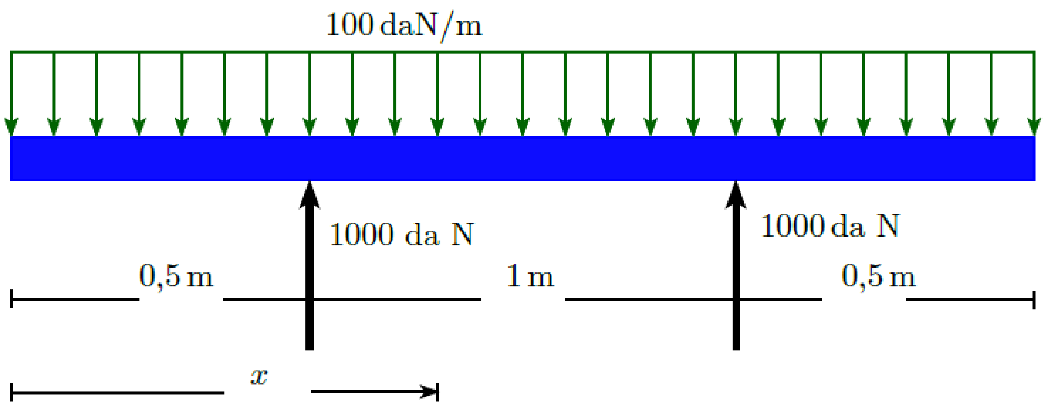
$$V_I(x) = 750 - 500\, x \text{ daN}$$

Ejercicios propuestos

1- Calcular el cortante y dibujar el diagrama de cortantes para una viga de longitud cualquiera l cargada en su punto medio con una fuerza puntual de módulo Q.

2- Repetir el cálculo para la misma viga, cuando además de la fuerza puntual de módulo Q soporta una carga distribuida constante $q(x)$.

3- La pieza de la figura tiene una longitud de 2 m, está en equilibrio bajo la acción de una carga distribuida constante de 100 daN/m y las dos fuerzas de 1000 daN que actúan a 0,5 m de cada uno de sus extremos.



Dibujar los diagramas de esfuerzo cortante.

4- Considerar una viga de 2 m de longitud empotrada en su extremo derecho y sometida a una carga vertical distribuida $q(x) = 200\ (200 - x)$ daN/m y a una carga puntual Q de 300 daN en su punto medio.

Calcular la reacción vertical R_V en el empotramiento y el cortante $V_I\ (x)$ para $0 \le x < 1$ y para $1 < x < 2$.

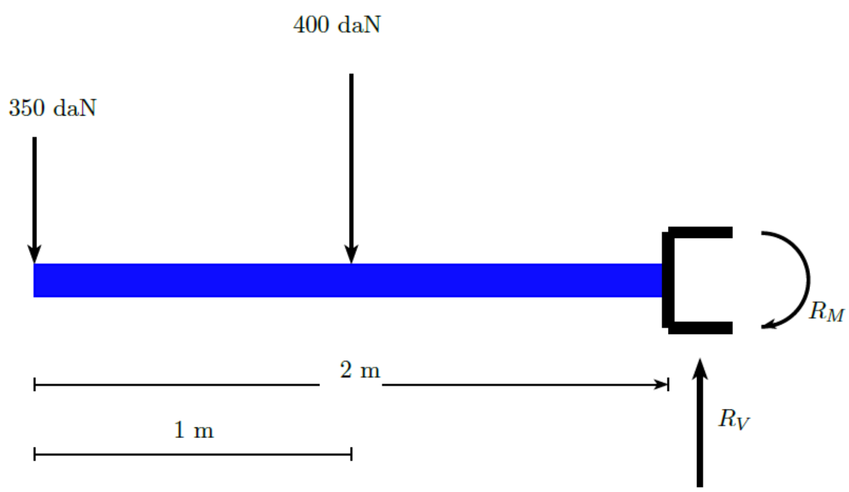
3- MOMENTO FLECTOR: EXPRESIÓN INTEGRAL

En esta sección vamos a analizar cómo calcular el momento flector en cada punto de una barra sometida a cargas distribuidas, o a una combinación de cargas puntuales y cargas distribuidas.

Es una cuestión importante para el diseño de estructuras, porque una evaluación adecuada de los esfuerzos debidos a los momentos flectores suele ser crítica para dimensionar adecuadamente cada una de sus piezas.

Para encontrar la fórmula adecuada para calcular los momentos flectores en presencia de cargas distribuidas vamos a revisitar un ejemplo y compararlo con la situación en que la misma viga debe soportar la misma carga, pero uniformemente distribuida.

Ejemplo: Anteriormente se había estudiado una viga de 2 m que sostenía dos cargas puntuales, como se muestra en la figura.



En esa situación, podríamos calcular la reacción vertical en el empotramiento hallando la resultante R_V de las fuerzas verticales que actúan sobre la viga.
Este cálculo se reduce a la suma:

$$R_V = -350 \text{ daN} - 400 \text{ daN} = -750 \text{ daN}$$

La condición de equilibrio implica que la suma de la reacción y la resultante vertical debe ser nula.
Por lo tanto:

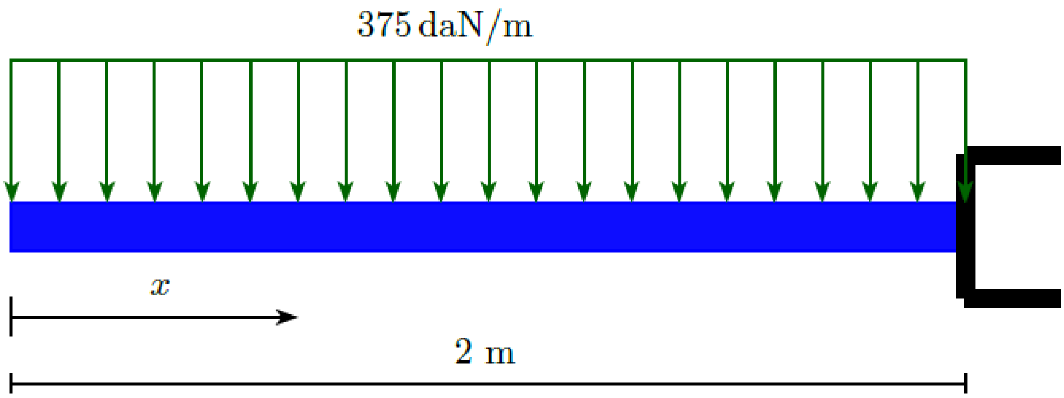
$$R_V = 750 \text{ daN}$$

El cálculo del momento que ejerce el empotramiento sobre la barra es conceptualmente similar.
El momento total que ejercen las fuerzas sobre el punto del empotramiento, en el que la coordenada x es igual a 2 m, es:

$$M_I = -350 \text{ daN} \times 2\text{m} - 400 \text{ daN} \times 1\text{m}$$

Por lo tanto, el momento con el que reacciona el empotramiento es M_R = 1100 daNm.

Veamos ahora el caso de la viga bajo una carga distribuida, tal como se muestra en la figura.



En este caso la resultante de los esfuerzos verticales sobre la viga se puede calcular por medio de la integral:

$$R_I = \int_0^2 375\, dx = [375\, x|\,_0^2 = 750 \text{ daN}$$

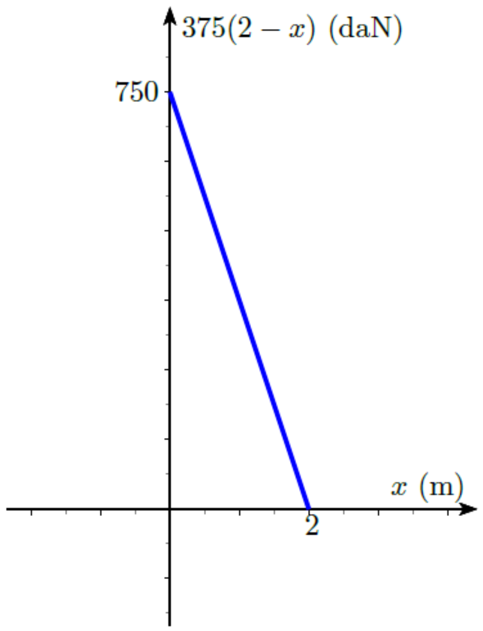
que nos permite evaluar el efecto acumulado de la carga distribuida continua: la integración hace en este caso el papel de la suma.

Para calcular el momento respecto al punto del empotramiento la situación es análoga: en el caso continuo una integral sustituirá a la suma.
La contribución al momento respecto al punto $x = 2$ m de la carga ubicada en un punto x es proporcional al producto:

$$-375 \text{ x } (2 - x)$$

Esto es, el producto de la distancia del punto x al empotramiento $(2 - x)$, por la intensidad que tiene la distribución de carga en el punto x (375 daN/m). El signo es negativo porque la carga tiene a producir un giro en sentido antihorario.
El momento flector total se obtiene sumando y asignando el signo correcto.

$$M_I = \int_0^2 375\ (2 - x)\ dx = 375\ \left[2x - \frac{x^2}{2}\right|_0^2 = [187{,}5\ x^2\Big|_0^2 = 750 \text{ daNm}$$



En la figura hemos graficado del momento flector. De ella se deduce que el momento flector es igual al área de un triángulo de base 2 m y altura 750 daN.
Entonces:

$$M_I = -(750 \times 2) / 2 = -750 \text{ daNm}$$

La reacción R_M del empotramiento debe compensar este momento.

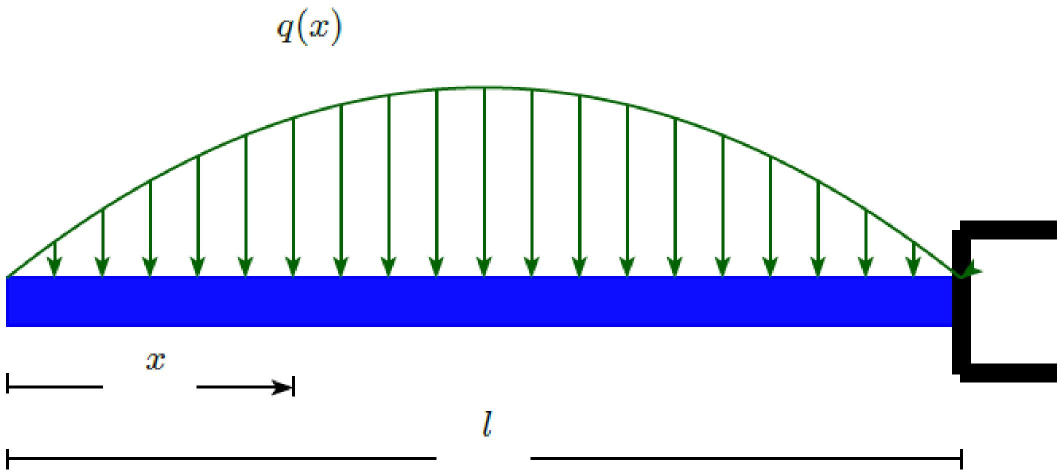
Por lo tanto:

$$R_I = \int_0^2 (2 - x)\ 375\ dx = 375\ \left[2\,x - \frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 375\ (4 - 2) = 750 \text{ daN}$$

Observemos que el momento total arroja un valor menor que el que corresponde a las dos fuerzas puntuales.
Este efecto era previsible, ya que cuando pasamos de las cargas puntuales a las distribuidas "acercamos" la carga al empotramiento.
El valor del momento de la carga distribuida es igual al que tendría una carga puntual de 750 daN, la resultante de toda la carga distribuida, ubicada en el punto medio de viga.

Este punto medio es justamente el centro geométrico de la distribución, que para distribuciones uniformes coincide con el ***baricentro*** **o** ***centro de masas*** de la distribución. Notemos que, idealmente, una única fuerza vertical de 750 daN actuando en el punto medio de la viga, podría equilibrar toda la distribución de carga.

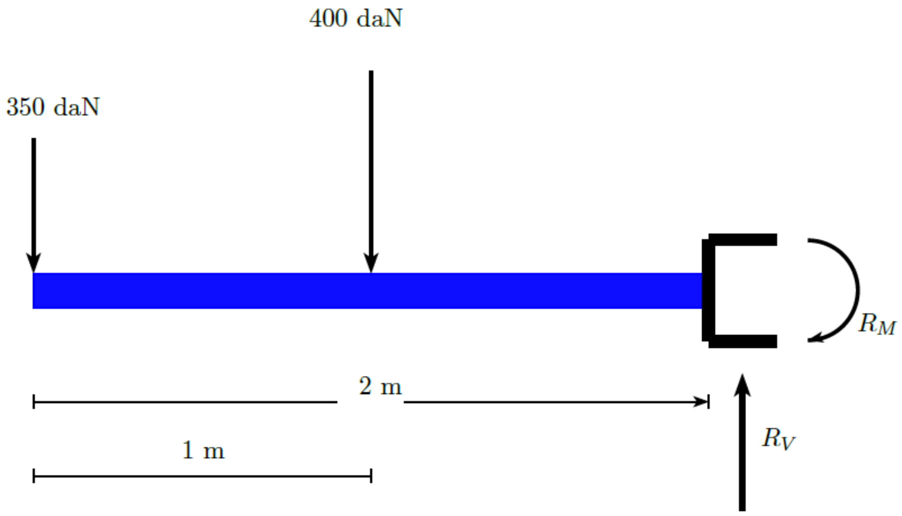
La situación que presentamos en el ejemplo se generaliza para una ménsula de longitud l sometida a una distribución de carga q(x) cualquiera.



El momento R_M que ejercen las reacciones en el apoyo, el empotramiento, debe ser:

$$R_M = \int_0^l q(x)(l-x)\,dx$$

La suma es el opuesto del momento respecto al punto $x = l$ m de toda la distribución de carga q(x).
La integral también puede emplearse para calcular el momento flector $M_I\,(x)$ en cada punto de la viga.
Antes de pasar al caso continuo, recordemos la expresión de los momentos flectores $M_I\,(x)$ para la viga con dos cargas puntuales que aparece en la figura.



$$M_I\,(x) = -\,350\,x \text{ daNm};\ 0 \le x \le 1$$

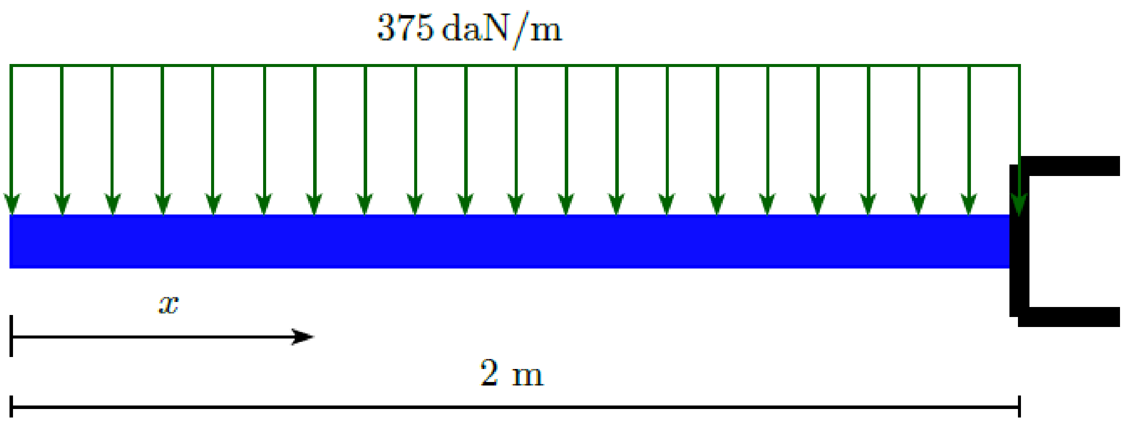
$$M_I\,(x) = -\,350\,x - 400\,(x - 1) \text{ daNm};\ 1 \le x < 2$$

La longitud está expresada en m y los momentos en daNm.
La forma en que está escrita destaca la contribución de cada fuerza puntual al total del momento flector $M_I\,(x)$ respecto del empotramiento.
Si se desean expresiones fáciles de manejar, tan concisas como sea posible, un poco de aritmética básica las transforma en:

$$M_I\,(x) = -\,350\,x;\ 0 \le x \le 1$$

$$M_I\,(x) = -\,750\,x + 400;\ 1 \le x < 2$$

Ejemplo: Calcularemos ahora los momentos flectores $M_I\,(x)$ para la viga de la figura.

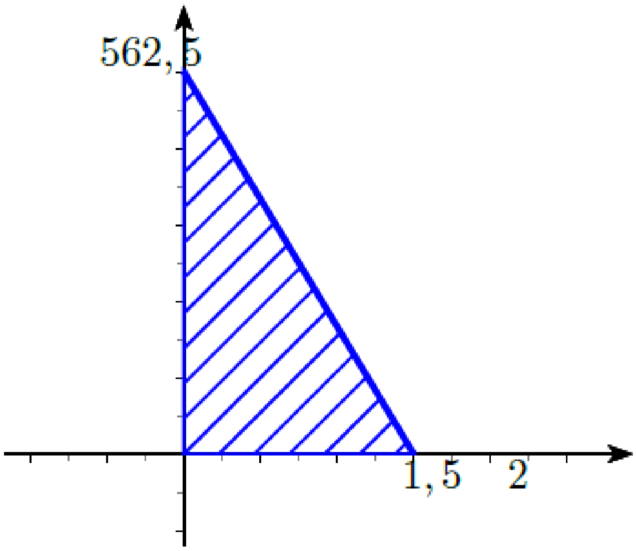


Para empezar vamos a elegir un punto de la viga, por ejemplo el que corresponde a $x = 1{,}5$ m para calcular allí el momento flector.
Ya habíamos visto que el momento flector en 1,5 m es exactamente igual al momento respecto a 1,5 m de todas las cargas aplicadas a la izquierda de 1,5 m.
Por lo tanto:

$$M_I(1{,}5) = -\int_0^{1{,}5} 375\,(1{,}5 - x)dx = 375\,[1{,}5\,x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1{,}5}$$

$$= 375\,[1{,}5\,x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1{,}5} = 375\left(1{,}5 \text{ x } 1{,}5 - \frac{1{,}5^2}{2}\right) = -\,421{,}875 \text{ daNm}$$

El gráfico de la carga q(x) aparece en la figura.



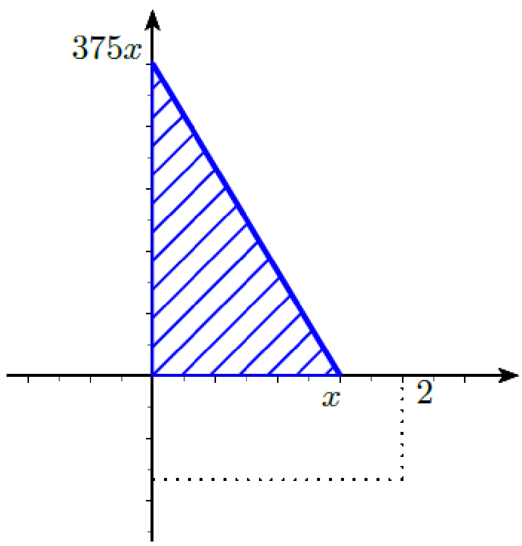
Podemos también evaluando el área encerrada bajo el gráfico y asignando luego el signo de menos que corresponde al sentido antihorario del momento que ejercen estas fuerzas, encontramos:

$$M_I\,(1{,}5) = -\,(1{,}5 \times 562{,}5)\,/\,2 = -\,421{,}875 \text{ daNm}$$

El cálculo del momento flector en 1,5 m no tiene nada de especial.
La generalización a un punto x cualquiera sobre la viga es:

$$M_I(x) = -\int_0^x 375\,(x - s)\,ds;\ 0 \leq x \leq 2$$

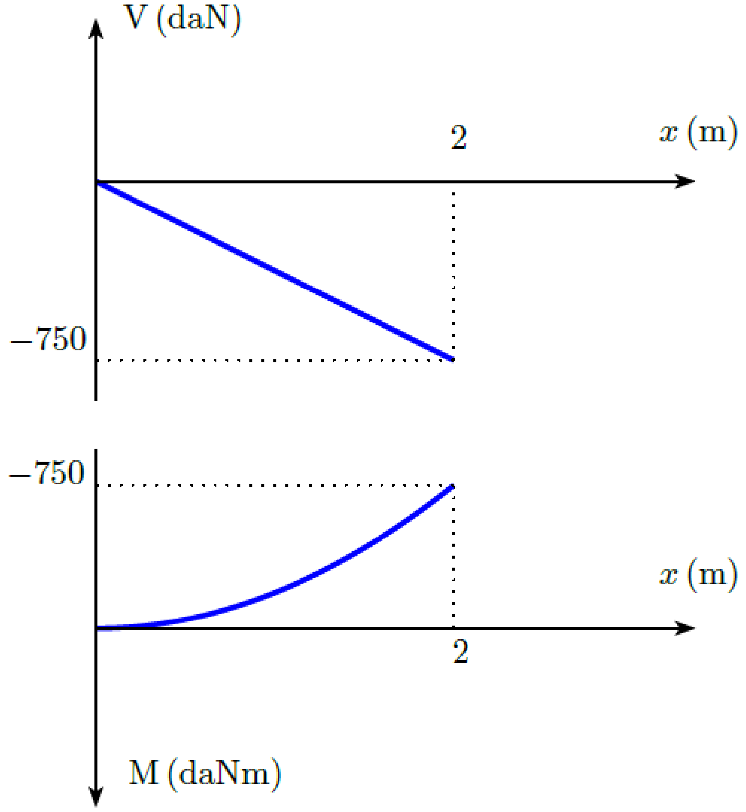
El cambio de nombre en la variable dentro de la integral se debe a la decisión de usar x para designar al punto en el que estamos calculando el momento flector.
El gráfico de la carga q(x) = - 375 (x - s) aparece en la figura.



El momento $M_I\,(x)$ es entonces la superficie del triángulo de base x y altura $375\ x$:

$$M_I(x) = -\frac{375\ x\ .\ x}{2} = -187\ x^2;\ 0 \le x \le 2$$

En la figura aparecen los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la viga que estamos considerando.



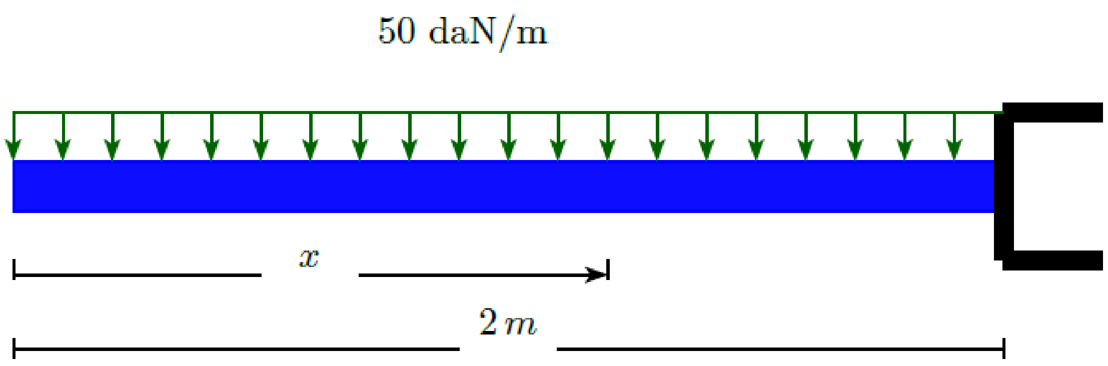
Hemos mantenido la convención habitual de dibujar el eje de momentos con el sentido negativo del eje hacia arriba. De este modo el gráfico queda dibujado del lado de la barra en que el material está sufriendo tracciones.

El cálculo del momento flector en presencia de cargas distribuidas cualesquiera generalizan lo que hemos hecho en este ejemplo, de una manera análoga a la que la fórmula generaliza el cálculo de la reacción.
El momento flector para un punto *x* genérico de una ménsula de longitud l sometida a una carga distribuida *q(x)* es:

$$M_I(x) = -\int_0^x (x-s)\ q(s)\ ds;\ 0 \le x \le l$$

Esta fórmula también puede verse como una versión continua de las fórmulas para cargas puntuales. La estructura básica del cálculo es la misma, pero la integral sustituye a las sumas.

Ejemplo: Analizaremos la reacción en el empotramiento y el momento flector que una carga distribuida produce sobre una barra de dos metros de longitud.
Consideraremos una carga distribuida uniforme de 50 daN/m.



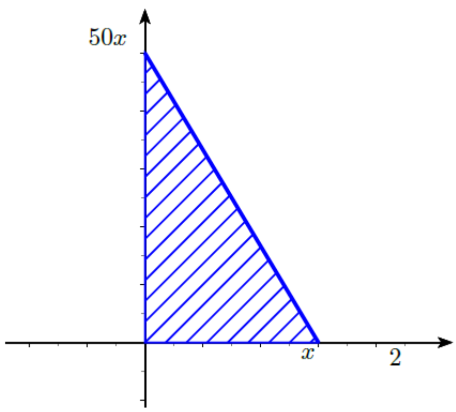
El valor del momento flectorde toda la carga respecto al punto $x = 2$ m es:

$$-\int_0^2 50\,(2-s)\,ds = -\int_0^2 (100-50\,s)\,ds = -[100\,s - 50\frac{s^2}{2}\Big|_0^2 = -100 \text{ daNm}$$

El valor de la carga en función de x para el sistema de referencia adoptado (figura) es:

$$q(x) = 50\,(2-x)$$

La gráfica de q(x) es la siguiente:



El gráfico de q(x) =100 – 50 x entre $x = 0$ m y $x = 2$ m delimita sobre el eje horizontal un triángulo de altura 100 y base 2, de modo que su área es 100. El resultado es − 100 daNm. El momento resultante, M_R, de las reacciones en el empotramiento debe compensar este momento, por lo que:

$$M_R = 100 \text{ daNm}$$

El momento flector para una sección cualquiera a una distancia x es:

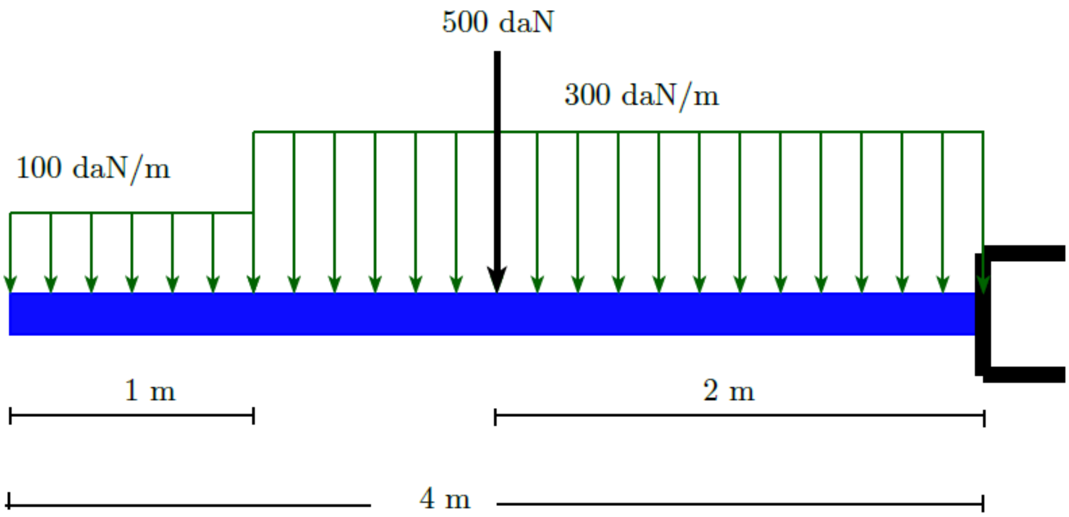
$$M_I(x) = -\int_0^x 50\,(x-s)ds = -\int_0^x (50\,x - 50\,s)ds = 50[x\,s - \frac{s^2}{2}\Big|_0^x = 25\,x^2$$

En la figura representamos el gráfico de 50 x –50 s entre $x = 0$ y s = x.
Delimita sobre el eje horizontal un triángulo de altura 50 x y base x, cuya área es 25 x^2.
El resultado para el momento flector es entonces:

$$M_I(x) = -25\,x^2 \text{ daNm}$$

Observemos que cuando x se aproxima a 2 m el momento $M_I(x)$ aproxima a −100 daNm, lo que es consistente con el cálculo que habíamos hecho para determinar el momento de las reacciones en el anclaje.

Ejercicio: Consideremos una barra de 4 m de longitud empotrada en su extremo derecho, sometida en su primer metro a una carga distribuida constante de 100 daN/m, entre el primer metro y su extremo derecho a una carga distribuida constante de 300 daN/m y a una carga puntual de 500 daN en su punto medio, como se muestra en la figura.



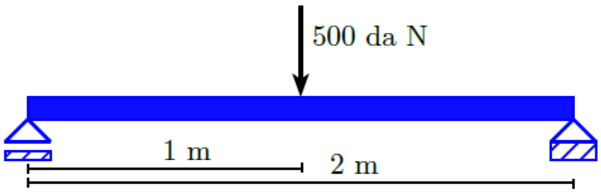
Calcular las reacciones en el empotramiento, los esfuerzos cortantes $V_I(x)$ y los momentos flectores $M_I(x)$ y dibujar los diagramas correspondientes.

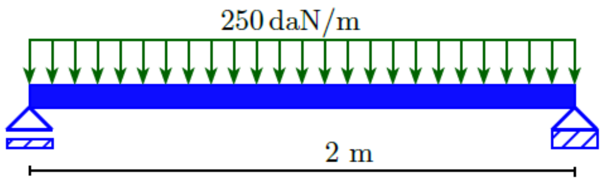
4- VIGAS APOYADAS, CARGAS DISTRIBUIDAS Y PUNTUALES

ESFUERZO de CORTE y MOMENTO FLECTOR

Hasta ahora hemos considerado fundamentalmente ménsulas empotradas en su extremo derecho, situación que de algún modo simplifica el cálculo de cortantes y momentos porque las reacciones del anclaje están a la derecha de todas las secciones y no afectan el cálculo.
En esta sección vamos a considerar vigas apoyadas, en los que al menos una de las reacciones sí interviene en el cálculo.
Esto nos hará resolver dos tipos de tareas nuevas: calcular todas las reacciones antes de pasar a hacer los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores y sistemáticamente manejar situaciones en las que se combinan cargas puntuales con cargas distribuidas.

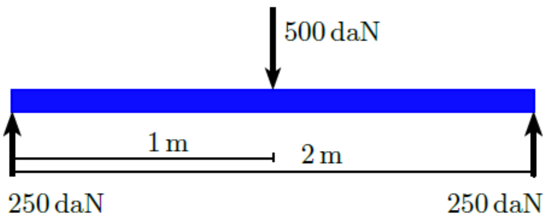
Ejemplo: La situación más sencilla que podemos imaginar para una viga apoyada que está sometida a algún tipo de carga es la de una viga que soporta una carga puntual en su punto medio, o una carga distribuida uniforme en toda su longitud, como en las figuras siguientes.

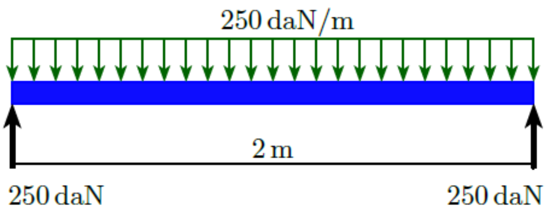




En este caso, la simetría de la situación implica que la viga quedara equilibrada si en cada apoyo aparece una reacción vertical de 250 daN.

En las figuras siguientes aparece la misma viga, pero hemos sustituido los apoyos por sus reacciones, para poner en evidencia el sistema de fuerzas bajo el cual la viga está equilibrada.





Una vez que conocemos todas las fuerzas aplicadas, podemos calcular los esfuerzos cortantes y momentos flectores, y representar los correspondientes diagramas.
Lo hacemos para el caso de la viga con la carga puntual.

$$V_I(x) = 250 \text{ daN};\ 0 < x < 1$$

$$V_I(x) = 250 \text{ daN} - 500 \text{ daN} = -250 \text{ daN};\ 1 < x < 2$$

Para cualquier valor de x entre 0 m y 1 m la única fuerza aplicada a la izquierda de la sección en x es la reacción en el apoyo de la izquierda, que tiene respecto a la sección en x un momento de:

$$250\, x \text{ daNm}$$

Cuando x está entre 1 m y 2 m deja a su izquierda tanto la reacción en el apoyo como la carga aplicada en el punto medio.

El momento de este sistema de fuerzas respecto a x es:

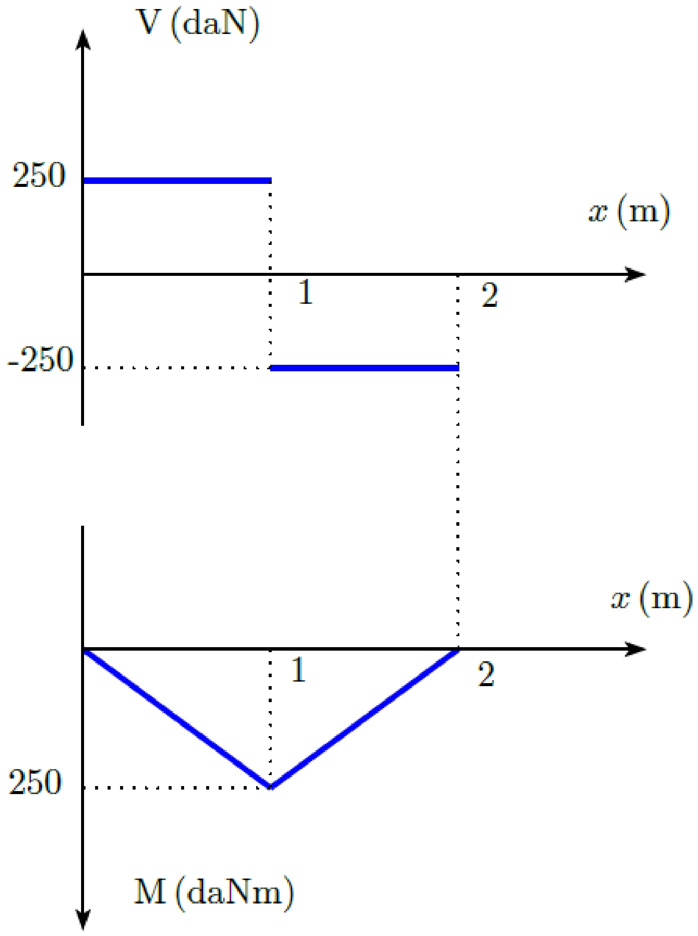
$$250\,x - 500\,(x - 1) = -\,250\,x + 500 \text{ daNm.}$$

En resumen, el momento flector $M_I(x)$ en cada punto de la viga es:

$$M_I(x) = 250\,x;\ 0 < x < 1$$

$$M_I(x) = -\,250\,x + 500;\ 1 < x < 2$$

Los diagramas de cortantes y momentos para esta viga aparecen en la figura.

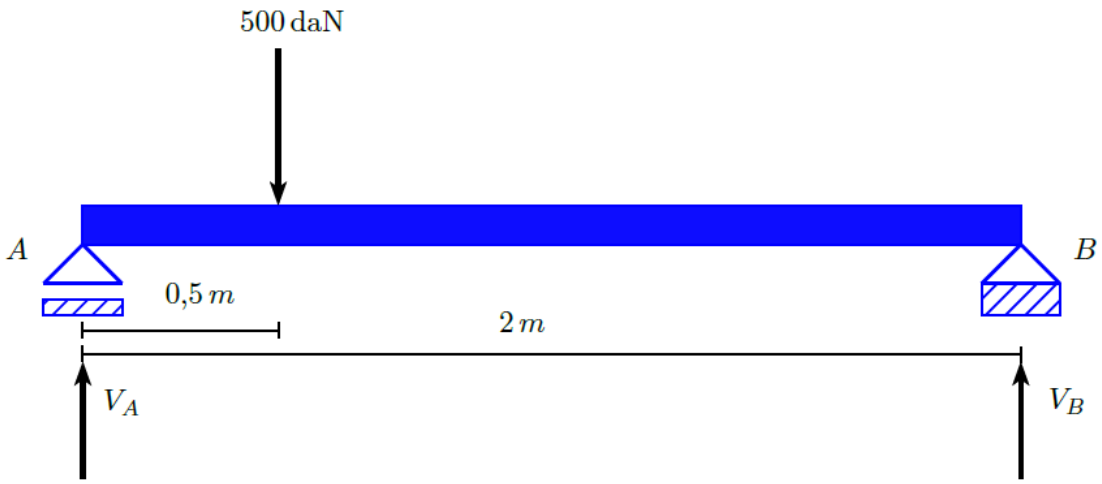


Verificación

Observemos que el valor con el que el cortante $V_I(x)$ llega a $x = 2$ m es justamente el contrario al de la reacción en el apoyo.
También para el momento $M_I(x)$ observamos algo similar: el momento flector aproxima a 0 daNm a medida que x aproxima a 2 m.
La razón es que el apoyo es un tipo de vínculo que cuya reacción tiene momento nulo respecto al punto de apoyo.

Por lo tanto, para que la viga esté equilibrada es necesario que el momento flector en la sección sobre el apoyo sea nulo. Esta relación se traduce también en los gráficos: si se siguen las gráficas y los valores de las reacciones, en $x = 2$ m el dibujo debe terminar sobre el eje. En el caso del momento $M_I\,(x)$ esto es ya evidente en el gráfico del momento; para el cortante, en $x = 2$ m, tenemos que "subir" desde el gráfico del cortante 250 daN con la reacción en el apoyo.

Ejemplo: Cuando la carga sobre la viga no es simétrica, entonces descarga de manera diferente sobre los apoyos. En este ejemplo analizaremos la misma viga de 2 m del ejemplo anterior, pero con la carga ubicada a 50 cm del apoyo izquierdo, como se muestra en la figura.



Los apoyos reaccionaran con fuerzas verticales V_A y V_B, de las que esperamos que V_A tenga un módulo mayor. El valor preciso de V_A y V_B puede calcularse a partir de la condición de equilibrio global de la viga, aplicada al momento de todo el sistema de fuerzas que actúa sobre ella: la suma de los momentos respecto a cualquier punto de todas las fuerzas aplicadas sobre la viga tiene que ser nula.
Planteamos el equilibrio de momentos respecto al punto A:

$$0 \times V_A + 0{,}5 \times 500 - 2 \times V_B = 0$$

De allí despejamos:

$$V_B = 125 \text{ daN}$$

La ecuación de equilibrio de momentos respecto a B es:

$$2 \times V_A - 1{,}5 \times 500 + 0 \times V_B = 0$$

Esta igualdad nos permite determinar:

$$V_A = 375 \text{ daN.}$$

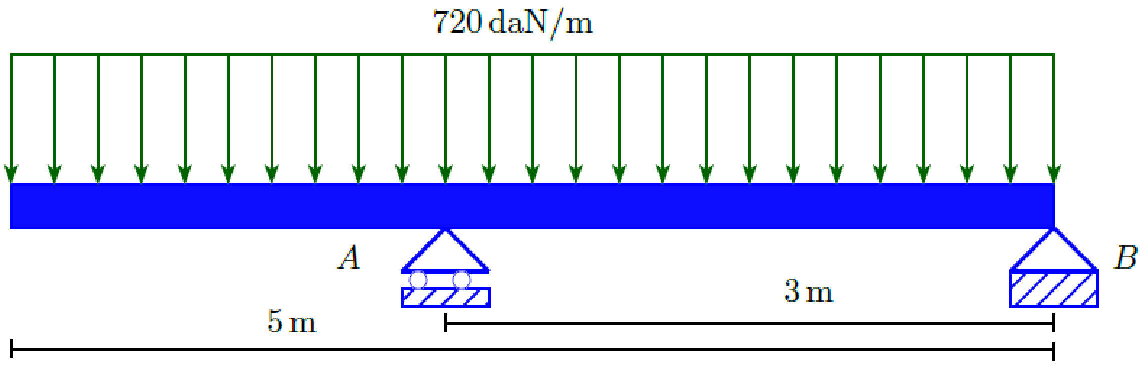
Todavía podemos verificar que estos valores de V_A y V_B aseguran el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical.

Debe verificarse:

$$V_A + V_B = 500 \text{ daN}$$

que es la condición para que las reacciones equilibren a las cargas.

Ejemplo: Vamos a calcular los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la viga de la figura.



Los anclajes pueden equilibrar las cargas con dos fuerzas verticales V_A y V_B.
La carga total que soporta la viga es igual a:

$$720 \text{ daN/m} \times 5 \text{ m} = 3600 \text{ daN}$$

La condición de equilibrio requiere que la resultante de fuerzas en la dirección vertical sea nula.
Por lo tanto:

$$V_A + V_B = 3600 \text{ daN}$$

Esta única ecuación no basta para determinar las reacciones. Además de tener una resultante nula, el conjunto de todas las fuerzas aplicadas debe tener un momento nulo respecto a cualquier punto del espacio. Si no fuera así, harían girar la barra. Esta nueva condición permite calcular completamente las reacciones.
La mejor forma de usarla es plantear el equilibrio de momentos respecto a los puntos A y B en que están los anclajes.
Para medir longitudes usaremos una coordenada *x* con origen en el extremo izquierdo de la viga.
El momento total de la distribución de carga respecto al punto A es:

$$M_I = \int_0^5 -720\,(2-x)dx = -720\,[2\,x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = -1800\,daN$$

El momento de la reacción V_A es nulo, porque pasa por el punto A.
El momento, respecto del punto A, de la reacción desconocida V_B en B es: $-V_B$ x 3m
Por lo tanto:

$$-3V_B + 1800 = 0$$

de donde despejamos:

$$V_B = 600 \text{ daN}$$

Los cálculos del momento respecto al punto B arrojan un momento:

$$M_I = \int_0^5 -720\,(5-x)dx = \; 720\,[5\,x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = -\,9000\;daN$$

respecto al punto B para toda la carga distribuida.
El momento de la reacción en A es V_A x 3m.
La condición de equilibrio implica:

$$3V_A - 9000 = 0$$

por lo que:

$$V_A = 3000 \text{ daN}$$

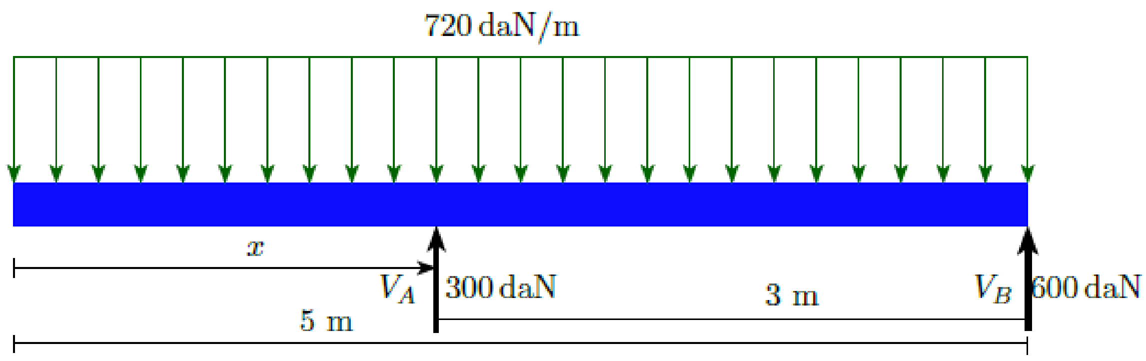
Luego de calcular directamente las dos reacciones a partir de la condición de equilibrio de momentos respecto a los dos apoyos, todavía podemos verificar que la suma:

$$V_A + V_B = 600 + 3000 = 3600 \text{ daN}$$

Observación
1- Recomendamos calcular reacciones en los apoyos siguiendo el procedimiento que acabamos de emplear y dejando para verificación la condición de que la resultante de las fuerzas verticales debe ser cero.
Con este procedimiento cada reacción puede calcularse directamente a partir de los datos y además tenemos una ecuación sencilla para verificar los resultados.

2- Los momentos de toda la distribución de fuerzas respecto a los anclajes son iguales a los de una única carga puntual de 3600 daN ubicada en el punto x = 2,5 m que es el punto medio de la distribución de carga.

Verificar
Ahora que conocemos todas las cargas aplicadas sobre la viga, sabemos que la pieza está en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas que aparece en la figura.



A la viga no le importa demasiado si las cargas que recibe se deben a lo que pusimos sobre ella o a lo que el resto de la estructura tiene que hacer para aguantarla, de modo que a los efectos del cálculo de las solicitaciones tanto cargas como reacciones se tratan igual.

El esfuerzo cortante $V_I(x)$ será entonces igual a la resultante de todas las fuerzas que aparecen a la izquierda de la sección x, independientemente de que sean cargas o reacciones.
El momento $M_I(x)$ será el momento total respecto a x de todo ese mismo sistema de fuerzas.
Para calcular esfuerzos cortantes hay que calcular integrales de funciones constantes, y tener cuidado de sumar la reacción en el anclaje A (x = 2 m) cuando x es mayor que 2 m.
El resultado es:

$$V_I(x) = -720\,x;\ 0 \le x < 2$$

$$V_I(x) = -720\,x + 3000;\ 2 < x < 5$$

Observemos que cuando x se aproxima a 5 m el esfuerzo cortante se aproxima al valor − 600 daN, que es justamente el esfuerzo que la reacción V_B está compensando.

Los momentos son un poco más laboriosos, al menos con el abordaje de cálculo por medio de integrales.
Mientras $x \le 2$ m las únicas fuerzas a la izquierda de x que tienen momento no nulo respecto a la sección x provienen de la carga distribuida.
Por lo tanto:

$$M_I(x) = \int_0^x 720\,(2 - s)ds = 720\ \left[x\,s - \frac{s^2}{2}\right|_0^x = -360\,x^2; 0 \le x \le 2$$

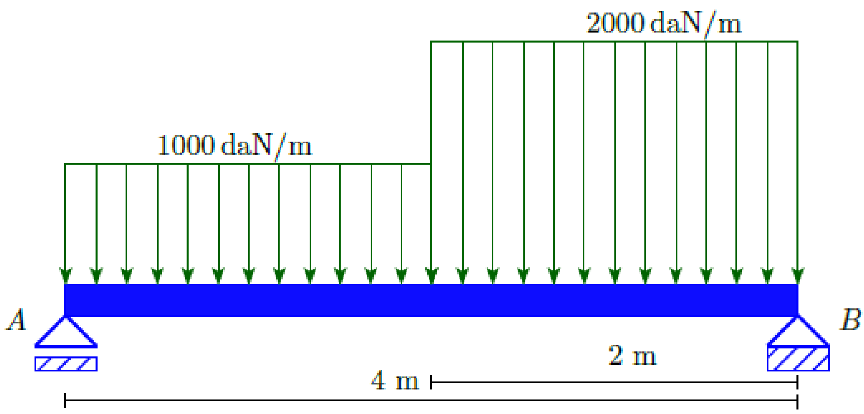
A la derecha de x = 2 m ya hay que tomar en cuenta el momento adicional que aporta V_A respecto a la sección en x, de modo que:

$$M_I(x) = \int_0^x 720\,(x - s)ds + 3000\,(x-2) = -360\,x^2 + 3000\,(x-2); 2 \le x \le 5$$

Observemos que cuando x se aproxima a 5 m el momento flector $M_I(x)$ se aproxima a 0 m, lo que es consistente con el hecho de que el apoyo en B no puede absorber ningún momento flector.

Ejercicios propuestos

1- Calcular el momento flector y dibujar el diagrama de momento flector para una viga de longitud cualquiera l cargada en su punto medio con una fuerza puntual de módulo Q.
2- Repetir el cálculo para la misma viga, cuando además de la fuerza puntual de módulo Q soporta una carga distribuida constante q(x).
3- Calcular los cortantes y momentos flectores y dibujar los diagramas de cortantes y momentos para la viga de la figura, de 4 m de longitud, apoyada en sus extremos, que soporta en sus primeros dos metros una carga distribuida de 1000 daN/m y en sus segundos dos metros una carga distribuida de 2000 daN/m.



4- Calcular los cortantes y momentos flectores y dibujar los diagramas de cortantes y momentos para la viga de la figura, de 4 m de longitud, apoyada en su extremo izquierdo A y en el punto B ubicado a 3 m de A, cuando la viga soporta el sistema de cargas de la figura.

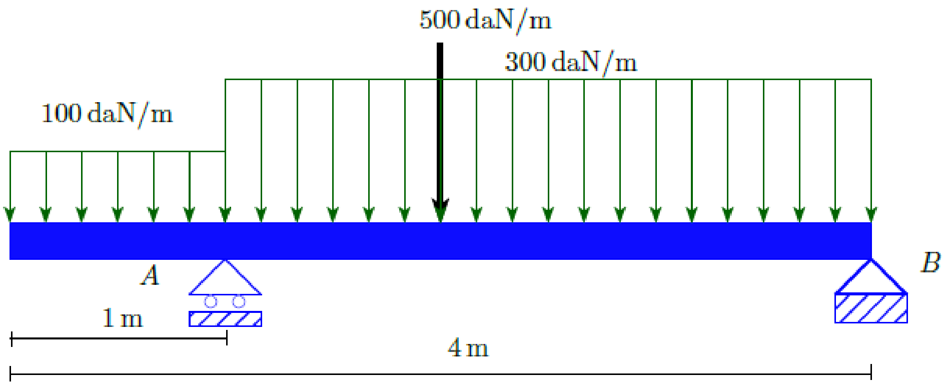
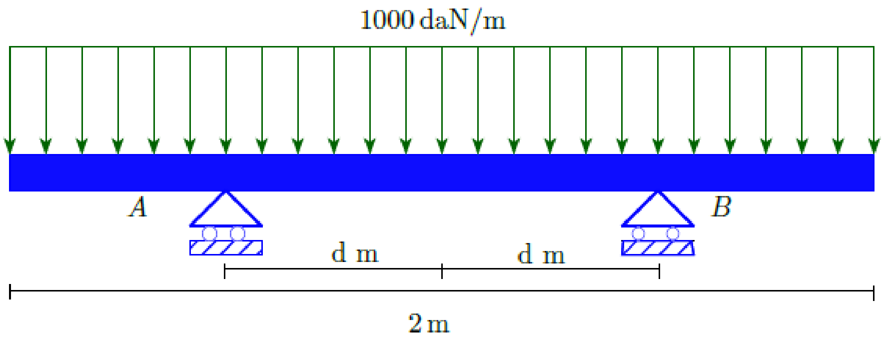


Figura 2.87

5- Calcular las reacciones en los apoyos, los cortantes $V_I(x)$ y los momentos flectores $M_I(x)$ y dibujar los diagramas de cortantes y momentos.

6- Una viga de 2 m de longitud soporta una carga distribuida constante de 1000 daN/m en toda su longitud. Está apoyada en dos puntos A y B simétrico respecto a su centro, a una distancia d del centro de la viga, tal como se muestra en la figura.



Determinar el valor de d que hace que el máxima módulo del momento flector en la viga sea tan bajo como sea posible.