UNIDADES, CANTIDADES FÍSICAS Y VECTORES

1

? Ser capaz de predecir la trayectoria de una tormenta eléctrica resulta esencial para reducir al mínimo los posibles daños a las propiedades y a las vidas humanas. Si la tormenta eléctrica se desplaza a 20 km/h en una dirección de 53° al noreste, ¿qué tan lejos hacia el norte se desplazará la tormenta eléctrica en una hora?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cuáles son las tres cantidades fundamentales de la física y cuáles son las unidades que los físicos utilizan para medirlas.
- Cómo manejar cifras significativas en sus cálculos.
- La diferencia entre escalares y vectores, y cómo sumar y restar vectores gráficamente.
- Qué son las componentes de un vector y cómo se utilizan para realizar cálculos.
- Qué son los vectores unitarios y cómo se utilizan con las componentes para describir vectores.
- Dos formas de multiplicar vectores.

La física es una de las ciencias más fundamentales. Los científicos de todas las disciplinas utilizan las ideas de la física, como los químicos que estudian la estructura de las moléculas, los paleontólogos que intentan reconstruir la forma de andar de los dinosaurios, y los climatólogos que estudian cómo las actividades humanas afectan la atmósfera y los océanos. Asimismo, la física es la base de toda la ingeniería y la tecnología. Ningún ingeniero podría diseñar un televisor de pantalla plana, una nave espacial interplanetaria o ni siquiera una mejor trampa para ratones, sin antes haber comprendido las leyes básicas de la física.

El estudio de la física también es una aventura. Usted la encontrará desafiante, a veces frustrante y en ocasiones dolorosa; sin embargo, con frecuencia le brindará abundantes beneficios y satisfacciones. Si alguna vez se ha preguntado por qué el cielo es azul, cómo viajan las ondas de radio por el espacio, o cómo un satélite permanece en órbita, encontrará las respuestas en la física básica. Sobre todo, apreciará la física como un logro sobresaliente del intelecto humano en su afán por entender nuestro mundo y a la humanidad misma.

En este capítulo inicial repasaremos algunos conceptos importantes que necesitaremos en nuestro estudio. Comentaremos la naturaleza de la física teórica y el uso de modelos idealizados para representar sistemas físicos. Presentaremos los sistemas de unidades que se emplean para especificar cantidades físicas y analizaremos la forma de describir la exactitud de un número. Estudiaremos ejemplos de problemas que no tienen (o para los que no nos interesa obtener) una respuesta exacta, pero cuyas estimaciones resultan útiles e interesantes. Por último, examinaremos varios aspectos de los vectores y del álgebra vectorial que necesitaremos para describir y analizar cantidades físicas, como velocidad y fuerza, que tienen dirección además de magnitud.

1.1 La naturaleza de la física

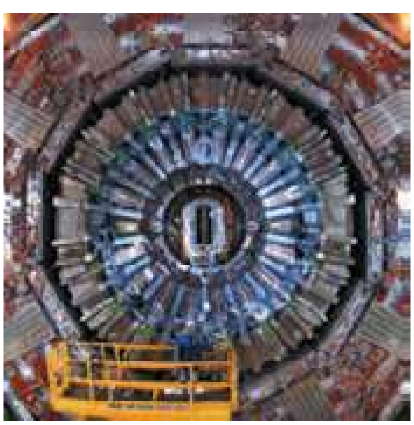
La física es una ciencia *experimental*. Los físicos observan los fenómenos naturales e intentan encontrar los patrones que los describen. Tales patrones se denominan teorías físicas o, si están muy bien establecidos y se usan ampliamente, leyes o principios físicos.

CUIDADO **Significado de la palabra "teoría"** Decir que una idea es una teoría *no* implica que se trate de una divagación o de un concepto no comprobado. Más bien, una teoría es una explicación de fenómenos naturales basada en observaciones y en los principios fundamentales aceptados. Un ejemplo es la bien establecida teoría de la evolución biológica, que es el resultado de extensas investigaciones y observaciones de varias generaciones de biólogos.

1.1 Dos laboratorios de investigación. *a*) Según la leyenda, Galileo estudió el movimiento de cuerpos en caída libre soltándolos desde la Torre Inclinada de Pisa, Italia. Se dice que también estudió el movimiento de los péndulos observando la oscilación del candelabro de la catedral ubicada junto a la torre. *b*) El Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por las siglas de Large Hadron Collider) en Ginebra, Suiza, el acelerador de partículas más grande del mundo, se usa para explorar las partículas más pequeñas y fundamentales de la materia. La fotografía muestra una parte de uno de los detectores del LHC (observe al trabajador sobre la plataforma amarilla).

a)

b)



Para desarrollar una teoría en su campo de estudio, el físico debe aprender a hacer las preguntas adecuadas, a diseñar experimentos para tratar de contestarlas y a deducir conclusiones apropiadas de los resultados. La figura 1.1 muestra dos famosas instalaciones experimentales usadas para realizar experimentos físicos.

Cuenta la leyenda que Galileo Galilei (1564-1642) dejó caer objetos ligeros y pesados desde la Torre Inclinada de Pisa (figura 1.1*a*) para averiguar si sus velocidades de caída eran iguales o diferentes. Al examinar los resultados de sus experimentos (que en realidad fueron mucho más complejos de lo que cuenta la leyenda), dio el salto inductivo al principio, o la teoría, de que la aceleración de un cuerpo que cae es independiente de su peso.

El desarrollo de teorías físicas como la de Galileo a menudo es un proceso indirecto, con callejones sin salida, suposiciones erróneas y el abandono de teorías infructuosas en favor de otras más promisorias. La física no es una mera colección de hechos y principios; también es el *proceso* que nos lleva a los principios generales que describen el comportamiento del universo físico.

Ninguna teoría se considera como la verdad final o definitiva. Siempre existe la posibilidad de que nuevas observaciones obliguen a modificarla o desecharla. Inherente en las teorías físicas, se encuentra el hecho de que podemos demostrar su falsedad encontrando comportamientos que no sean congruentes con ellas, pero nunca podremos comprobar que una teoría siempre es correcta.

Volviendo con Galileo, supongamos que dejamos caer una pluma y una bala de cañón. Sin duda, *no* caen a la misma velocidad. Esto no significa que Galileo estuviera equivocado, sino que su teoría estaba incompleta. Si soltamos tales objetos *en un vacío* para eliminar los efectos del aire, sí caerán a la misma velocidad. La teoría de Galileo tiene un **intervalo de validez**: solo es válida para objetos cuyo peso es mucho mayor que la fuerza ejercida por el aire (debido a la resistencia y a la flotabilidad del objeto). Los objetos como las plumas y los paracaídas evidentemente se salen del intervalo.

A menudo un nuevo avance en física extiende el intervalo de validez de un principio. Las leyes de Newton acerca del movimiento y la gravitación extendieron ampliamente, medio siglo después, el análisis de la caída de los cuerpos que hizo Galileo.

1.2 Cómo resolver problemas en física

En algún punto de sus estudios, casi todos los estudiantes de física sienten que, aunque entienden los conceptos, simplemente no pueden resolver los problemas. Sin embargo, en física, *entender* verdaderamente un concepto es lo mismo que saber aplicarlo a diversos problemas. Aprender a resolver problemas es absolutamente indispensable; es imposible *saber* física sin poder *hacer* física.

¿Cómo aprendemos a resolver problemas de física? En todos los capítulos de este libro, usted encontrará *Estrategias para resolver problemas* que sugieren técnicas para plantear y resolver problemas con eficiencia y exactitud. Después de cada *Estrategia para resolver problemas* hay uno o más *Ejemplos* resueltos que muestran esas técnicas en acción. (Las *Estrategias para resolver problemas* también ayudan a evitar algunas técnicas *incorrectas* que quizás usted se sienta tentado a usar). Además, encontrará ejemplos adicionales que no están asociados con una *Estrategia específica para resolver problemas*. Además, al final de cada capítulo se encuentra un *Problema práctico* que usa más de un concepto clave del capítulo. Recomendamos al lector estudiar detenidamente esas estrategias y ejemplos, y resolver estos últimos por su cuenta.

Se utilizan diferentes técnicas para resolver distintos tipos de problemas, y por ello este libro ofrece docenas de *Estrategias para resolver problemas*. No obstante, sea cual fuere el tipo de problema, hay ciertos pasos básicos que se deben seguir siempre. (Esos mismos pasos son igualmente útiles en problemas de matemáticas, ingeniería, química y muchos otros campos). En este libro, hemos organizado los pasos en cuatro etapas para la resolución de un problema.

Todas las *Estrategias para resolver problemas* y los *Ejemplos* del libro seguirán esos cuatro pasos. (En algunos casos, se agruparán los primeros dos o tres pasos). Le recomendamos seguir los mismos pasos al resolver problemas por su cuenta.

Estrategia para resolver problemas 1.1 Cómo resolver problemas de física

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Use el planteamiento del problema para decidir qué ideas de la física son relevantes. Identifique las **incógnitas** del problema, es decir, las cantidades cuyos valores está tratando de obtener, como la rapidez con que un proyectil choca contra el suelo, la intensidad del sonido producido por una sirena, o el tamaño de una imagen formada por una lente. Identifique las variables conocidas, establecidas o implicadas en el problema. Este paso es fundamental ya sea que la meta consista en obtener una expresión matemática o un valor numérico.

PLANTEAR *el problema:* Con base en los conceptos que haya identificado y en las variables conocidas e incógnitas, seleccione las ecuaciones que usará para resolver el problema y decida cómo las empleará. Asegúrese de que las variables e incógnitas que ha identificado correspondan exactamente a las que se encuentran en las ecuaciones. Si es necesario, trace un bosquejo de la situación descrita en el problema. (Para elaborar los diagramas le serán útiles el papel cuadriculado, una regla graduada, un transportador y un compás). Estime lo mejor que pueda cuáles serán sus resultados y, si es pertinente, pronostique cuál será el comportamiento físico del sistema. Los ejemplos resueltos en este libro incluyen sugerencias acerca de cómo hacer este tipo de estimaciones y pronósticos. Si esto parece complicado, no se preocupe, ¡usted mejorará con la práctica!

EJECUTAR *la solución:* En este paso, se "hacen las cuentas". Estudie los ejemplos resueltos para ver lo que implica este paso.

EVALUAR *la respuesta:* Compare la respuesta con su estimación y, si hay alguna discrepancia, revise su procedimiento. Si su respuesta es una expresión algebraica, asegúrese de que representa realmente lo que pasaría si sus variables se consideran con valores extremos. Para referencias futuras, tome nota de cualquier respuesta que represente una cantidad de particular importancia. Pregúntese cómo podría contestar una versión más general o más difícil del problema que acaba de resolver.

Modelos idealizados

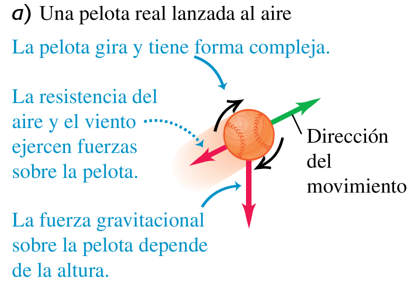
Cotidianamente usamos la palabra "modelo" para designar una réplica en miniatura, digamos, de un ferrocarril, o para referirnos a una persona que exhibe ropa (o que se exhibe sin ella). En física, un **modelo** es una versión simplificada de un sistema físico demasiado complejo como para analizarse con todos sus pormenores.

Por ejemplo, supongamos que nos interesa analizar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada al aire (figura 1.2*a*). ¿Qué tan complicado es el problema? La pelota no es perfectamente esférica (tiene costuras) y gira conforme viaja por el aire. El viento y la resistencia del aire afectan su movimiento, el peso de la pelota varía un poco al cambiar su distancia con respecto al centro de la Tierra, etcétera. Si tratamos de considerar todo esto, la complejidad del análisis nos abrumará. En vez de ello, creamos una versión simplificada del problema. Omitimos el tamaño y la forma de la pelota representándola como un objeto puntual o una **partícula**. Ignoramos la resistencia del aire como si la pelota se moviera en el vacío, y suponemos que su peso es constante. Ahora ya tenemos un problema manejable (figura 1.2*b*). Analizaremos este modelo con detalle en el capítulo 3.

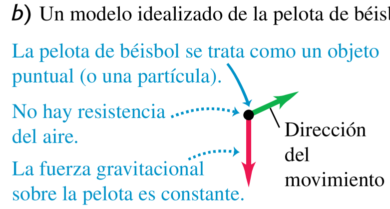
Para crear un modelo idealizado del sistema, debemos pasar por alto algunos efectos menores, pero debemos ser cuidadosos de no omitir demasiado. Si ignoramos totalmente los efectos de la gravedad, nuestro modelo pronosticaría que si lanzamos la pelota hacia arriba, esta se desplazaría en línea recta hasta desaparecer en el espacio. Un modelo útil es el que simplifica un problema lo suficiente para hacerlo manejable, pero sin omitir sus características esenciales.

1.2 Para simplificar el análisis de *a*) una pelota de béisbol lanzada al aire, usamos *b*) un modelo idealizado.

a) Una pelota real lanzada al aire



b) Un modelo idealizado de la pelota de béisbol



Al usar un modelo para predecir el comportamiento de un sistema, la validez de la predicción está limitada por la validez del modelo. Por ejemplo, la predicción de Galileo con respecto a la caída de los cuerpos (véase la sección 1.1) corresponde a un modelo idealizado que no incluye los efectos de la resistencia del aire. El modelo funciona bastante bien para una bala de cañón, aunque no tan bien para una pluma.

Los modelos idealizados desempeñan un papel primordial en este libro. Intente ubicarlos al estudiar las teorías físicas y sus aplicaciones a problemas específicos.

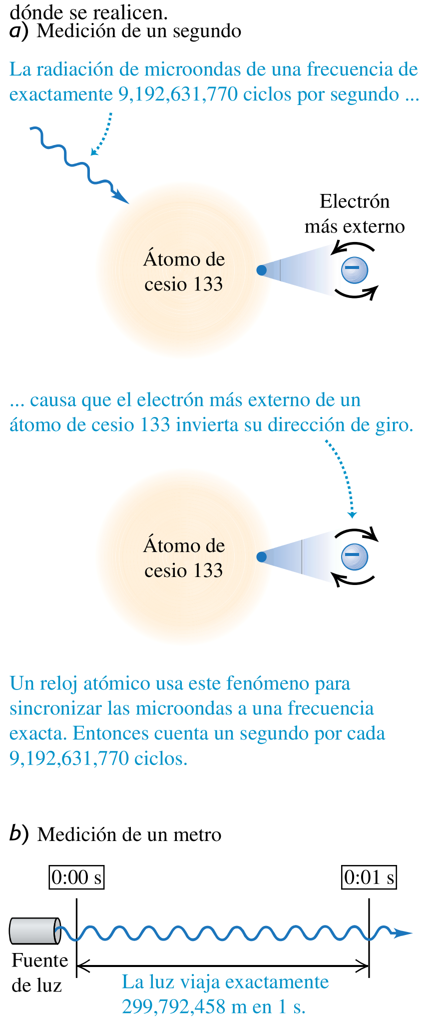
1.3 Estándares y unidades

Como vimos en la sección 1.1, la física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones, cuyos resultados suelen describirse con números. Un número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico es una **cantidad física**. Dos cantidades físicas que lo describen a usted son, por ejemplo, su peso y estatura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que podemos definirlas solo describiendo la forma de medirlas; es decir, con una **definición operativa**. Dos ejemplos son la medición de una distancia con una regla, o un lapso de tiempo con un cronómetro. En otros casos, definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades *medibles*. Así, podríamos definir la rapidez promedio de un objeto en movimiento, como la distancia recorrida (medida con una regla) dividida entre el tiempo de recorrido (medido con un cronómetro).

Al medir una cantidad, siempre la comparamos con un estándar de referencia. Si decimos que un Ferrari 458 Italia tiene una longitud de 4.53 m, queremos decir que es 4.53 veces más largo que una vara de cierto tamaño, que por definición mide 1 m de largo. Dicho estándar define una **unidad** de la cantidad. El metro es una unidad de distancia; y el segundo es una unidad de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; describir una distancia simplemente como “4.53” no tendría significado.

Las mediciones exactas y confiables requieren unidades inmutables que los observadores puedan volver a utilizar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros en todo el mundo se denomina comúnmente “sistema métrico”, aunque, desde 1960, su nombre oficial es **Sistema Internacional** o **SI** (la abreviatura proviene de su nombre francés, *Système International*). En el apéndice A se presenta una lista de todas las unidades del SI y se definen las fundamentales.

1.3 Mediciones usadas para determinar *a*) la duración de un segundo y *b*) la longitud de un metro. Estas mediciones son útiles para el establecimiento de estándares porque proporcionan los mismos resultados sin importar dónde se realicen.



Tiempo

De 1889 a 1967, la unidad de tiempo se definió como cierta fracción del día solar medio (el tiempo promedio entre llegadas sucesivas del Sol al cenit). El estándar actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Al bombardearse con microondas de cierta frecuencia exacta, el átomo de cesio sufre una transición entre dichos estados. Un **segundo** (que se abrevia como s) se define como el tiempo que tardan 9,192,631,770 ciclos de esta radiación de microondas (figura 1.3*a*).

Longitud

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, utilizando la longitud de onda de la luz anaranjada-roja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. Usando este estándar de longitud, se comprobó que la rapidez de la luz en el vacío es de 299,792,458 m/s. En noviembre de 1983, el estándar de longitud se modificó otra vez, de manera que se *definió* que la rapidez de la luz en el vacío es exactamente igual a 299,792,458 m/s. Así, la nueva definición de

metro (que se abrevia m) es la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299,792,458 segundos (figura 1.3*b*). Este es un estándar de longitud mucho más preciso que el basado en una longitud de onda de la luz.

Masa

El estándar de masa, el **kilogramo** (que se abrevia kg), se define como la masa de un cilindro de una aleación de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París (figura 1.4). Un estándar atómico de masa sería más fundamental; sin embargo, en la actualidad no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica. El *gramo* (que no es una unidad fundamental) es igual a 0.001 kilogramos.

1.4 El objeto de metal encerrado cuidadosamente dentro de estos envases de cristal es el kilogramo estándar internacional.

Prefijos de unidades

Una vez definidas las unidades fundamentales, es fácil introducir unidades más grandes y más pequeñas para las mismas cantidades físicas. En el sistema métrico, estas otras unidades están relacionadas con las fundamentales (o, en el caso de la masa, con el gramo) por múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$. Así, un kilómetro (1 km) equivale a 1000 metros, y un centímetro (1 cm) es $\frac{1}{100}$ de un metro. Es común expresar los múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$ en notación exponencial: $1000 = 10^3$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, etcétera. Con esta notación, $1\text{ km} = 10^3\text{ m}$ y $1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$.

Los nombres de las unidades adicionales se obtienen agregando un **prefijo** al nombre de la unidad fundamental. Por ejemplo, el prefijo "kilo", abreviado k, siempre indica una unidad 1000 veces mayor; así

$$\begin{aligned} &1 \text{ kilómetro} = 1\text{ km} = 10^3 \text{ metros} = 10^3\text{ m} \\ &1 \text{ kilogramo} = 1\text{ kg} = 10^3 \text{ gramos} = 10^3\text{ g} \\ &1 \text{ kilowatt} = 1\text{ kW} = 10^3 \text{ watts} = 10^3\text{ W} \end{aligned}$$

Una tabla en la segunda de forros de este libro muestra los prefijos estándar del SI, con sus significados y abreviaturas.

La tabla 1.1 presenta algunos ejemplos del uso de múltiplos de 10 y sus prefijos con las unidades de longitud, masa y tiempo. La figura 1.5 muestra cómo se usan estos prefijos para describir distancias tanto grandes como pequeñas.

El sistema británico

Por último, mencionamos el sistema británico de unidades que se usa solo en Estados Unidos y unos cuantos países más; aunque en la mayoría de estos se está reemplazando por el SI. En la actualidad, las unidades británicas se definen oficialmente en términos de las unidades del SI de la siguiente manera:

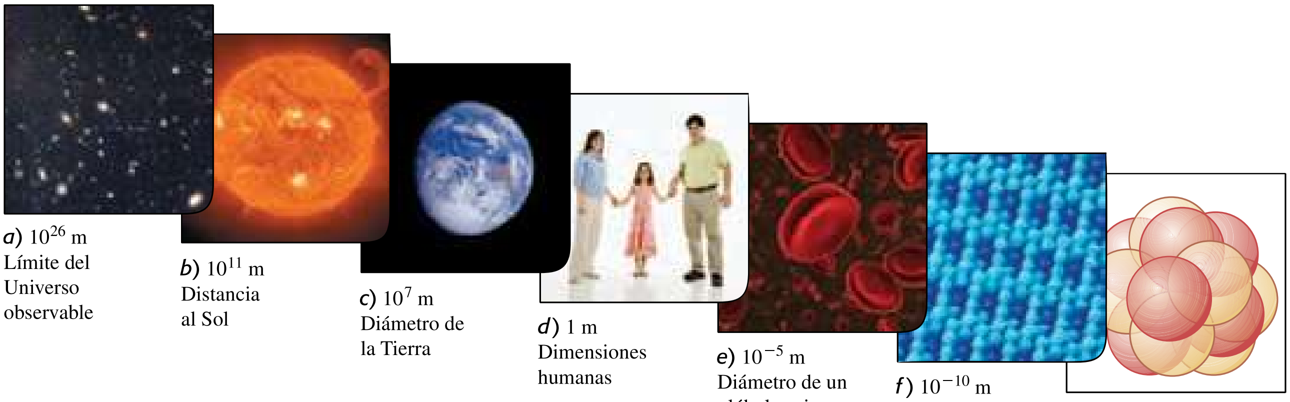
Longitud: 1 pulgada = 2.54 cm (exactamente)

Fuerza: 1 libra = 4.448221615260 newtons (exactamente)

Tabla 1.1 Algunas unidades de longitud, masa y tiempo

Longitud	Masa	Tiempo
1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m (unas cuantas veces el tamaño del átomo más grande)	1 microgramo = 1 μg = 10^{-6} g = 10^{-9} kg (masa de una partícula pequeña de polvo)	1 nanosegundo = 1 ns = 10^{-9} s (tiempo en que la luz recorre 0.3 m)
1 micrómetro = 1 μm = 10^{-6} m (tamaño de algunas bacterias y células vivas)	1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (masa de un grano de sal)	1 microsegundo = 1 μs = 10^{-6} s (tiempo en que la estación espacial recorre 8 mm)
1 milímetro = 1 mm = 10^{-3} m (diámetro del punto de un bolígrafo)	1 gramo = 1 g = 10^{-3} kg (masa de un clip de papeles)	1 milisegundo = 1 ms = 10^{-3} s (tiempo en que el sonido viaja 0.35 m)
1 centímetro = 1 cm = 10^{-2} m (diámetro del dedo meñique)		
1 kilómetro = 1 km = 10^3 m (un paseo de 10 minutos caminando)		

1.5 Algunas longitudes representativas en el Universo. *f*) es la imagen de un microscopio de barrido de efecto túnel de átomos sobre la superficie de un cristal; *g*) es una concepción artística.



a) 10^{26} m
Límite del Universo observable

b) 10^{11} m
Distancia al Sol

c) 10^{7} m
Diámetro de la Tierra

d) 1 m
Dimensiones humanas

e) 10^{-5} m
Diámetro de un glóbulo rojo

f) 10^{-10} m
Radio de un átomo

g) 10^{-14} m
Radio de un núcleo atómico

1.6 Muchos objetos comunes usan unidades tanto del SI como británicas. Un ejemplo es este velocímetro de un automóvil fabricado en Estados Unidos, que indica la rapidez tanto en kilómetros por hora (escala interior) como en millas por hora (escala exterior).

El newton, que se abrevia N, es la unidad de fuerza en el SI. La unidad británica de tiempo es el segundo, que se define igual que en el SI. En física, las unidades británicas se emplean solo en mecánica y termodinámica; no hay un sistema británico de unidades eléctricas.

En este libro usaremos unidades del SI en todos los ejemplos y problemas; no obstante, en ocasiones daremos equivalencias aproximadas en unidades británicas. Al resolver problemas con unidades del SI, usted puede hacer la conversión a las aproximaciones correspondientes del sistema británico, si le resultan más conocidas (figura 1.6). Sin embargo, debe tratar de *pensar* en unidades del SI la mayoría de las veces.

1.4 Consistencia y conversiones de unidades

Usamos ecuaciones para expresar las relaciones entre cantidades físicas representadas por símbolos algebraicos. Cada símbolo algebraico denota siempre tanto un número como una unidad. Por ejemplo, d podría representar una distancia de 10 m, t un tiempo de 5 s y v una rapidez de 2 m/s.

Toda ecuación siempre debe ser **dimensionalmente consistente**. No podemos sumar manzanas y automóviles; solo podemos sumar o igualar dos términos si tienen las mismas unidades. Por ejemplo, si un cuerpo que viaja con rapidez constante v recorre una distancia d en un tiempo t, estas cantidades están relacionadas por la ecuación

$$d = vt$$

Si d se mide en metros, entonces el producto vt también debe expresarse en metros. Con los números anteriores como ejemplo, escribimos

$$10\text{ m} = \left(2\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right)(5\,\cancel{\text{s}})$$

Como la unidad 1/s del lado derecho de la ecuación cancela la unidad s, el producto está en metros, como debe ser. En los cálculos, las unidades se tratan igual que los símbolos algebraicos con respecto a la multiplicación y la división.

CUIDADO **En los cálculos utilice siempre unidades** Cuando un problema requiere de cálculos con números y unidades, *siempre* escriba los números con las unidades correctas durante todo el cálculo, como en el ejemplo anterior. Esto es muy útil, pues ayuda a verificar los cálculos. Si en alguna etapa del cálculo, una ecuación o expresión tiene unidades inconsistentes, usted ha cometido un error en alguna parte. En este libro *siempre* indicaremos las unidades en todos los cálculos, y recomendamos con insistencia al lector hacer lo mismo al resolver los problemas.

Estrategia para resolver problemas 1.2 Solución de problemas de física

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* En general, lo mejor es usar las unidades fundamentales del SI (longitudes en metros, masas en kilogramos y tiempo en segundos) en todos los problemas. Si la respuesta se debe dar en otras unidades (kilómetros, gramos u horas, por ejemplo), espere hasta el final para efectuar la conversión.

PLANTEAR *el problema* y **EJECUTAR** *la solución:* Las unidades se multiplican y se dividen igual que los símbolos algebraicos ordinarios. Esto facilita la conversión de una cantidad de un grupo de unidades a otro: exprese la misma cantidad física en dos unidades distintas y forme una igualdad.

Por ejemplo, cuando decimos que 1 min = 60 s, no queremos decir que el número 1 sea igual al número 60, sino que 1 min representa el mismo intervalo de tiempo que 60 s. Por ello, el cociente (1 min)/(60 s) es igual a 1, lo mismo que su recíproco (60 s)/(1 min). Podemos multiplicar una cantidad por cualquiera de estos factores (conocidos como *multiplicadores unitarios*), sin alterar el significado físico de la misma. Por ejemplo, para obtener el número de segundos en 3 min, escribimos

$$3\text{ min} = (3\ \cancel{\text{min}})\left(\frac{60\text{ s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right) = 180\text{ s}$$

EVALUAR *la respuesta:* Si convertimos las unidades correctamente, se eliminarán las unidades no deseadas, como en el ejemplo anterior. Si hubiéramos multiplicado 3 min por (1 min)/(60 s), el resultado habría sido un absurdo $\frac{1}{20}$ min^2/s. Para asegurarse de convertir adecuadamente las unidades, usted debe incluirlas en *todas* las etapas del cálculo.

Por último, verifique si la respuesta es lógica. Por ejemplo, el resultado 3 min = 180 s es razonable porque el segundo es más pequeño que el minuto, por lo que habrá más segundos que minutos en el mismo intervalo de tiempo.

Ejemplo 1.1 Conversión de unidades de rapidez

El récord mundial de rapidez terrestre es de 763.0 mi/h, establecido por Andy Green el 15 de octubre de 1997 en el automóvil con motor a reacción *Thrust SSC*. Exprese esta rapidez en metros/segundo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Queremos convertir las unidades de rapidez de mi/h a m/s. Por lo tanto, debemos encontrar multiplicadores unitarios que relacionen: **i.** millas con metros y **ii.** horas con segundos. En el apéndice E (o en la segunda de forros de este libro) se encuentran las igualdades 1 mi = 1.609 km, 1 km = 1000 m y 1 h = 3600 s. Para garantizar que se realicen todas las cancelaciones deseadas, la conversión se plantea como sigue:

$$\begin{aligned}763.0\text{ mi/h} &= \left(763.0\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{1.609\ \cancel{\text{km}}}{1\ \cancel{\text{mi}}}\right)\left(\frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\right)\\ &= 341.0\text{ m/s}\end{aligned}$$

EVALUAR: Green estableció el primer récord de rapidez terrestre supersónica (la rapidez del sonido a través del aire es de aproximadamente 340 m/s). Este ejemplo muestra una útil regla práctica: la rapidez expresada en m/s es un poco menor que la mitad del valor en mi/h, y un poco menor que la tercera parte del valor expresado en km/h. Por ejemplo, la rapidez habitual en una carretera es aproximadamente de 30 m/s = 67 mi/h = 108 km/h, y la rapidez típica de una caminata es aproximadamente de 1.4 m/s = 3.1 mi/h = 5.0 km/h.

Ejemplo 1.2 Conversión de unidades de volumen

El diamante tallado más grande del mundo es la Primera Estrella de África (montado en el cetro real británico y guardado en la Torre de Londres). Su volumen es de 1.84 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es su volumen en centímetros cúbicos? ¿Y en metros cúbicos?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Aquí vamos a convertir las unidades de volumen de pulgadas cúbicas (in^3) tanto a centímetros cúbicos (cm^3) como a metros cúbicos (m^3). En el apéndice E se encuentra la igualdad 1 in = 2.540 cm, a partir de la cual se obtiene que $1\text{ in}^3 = (2.54\text{ cm})^3$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}1.84\text{ in}^3 &= (1.84\text{ in}^3)\left(\frac{2.54\text{ cm}}{1\text{ in}}\right)^3\\ &= (1.84)(2.54)^3\frac{\cancel{\text{in}^3}\ \text{cm}^3}{\cancel{\text{in}^3}} = 30.2\text{ cm}^3\end{aligned}$$

En el apéndice F también encontramos que 1 m = 100 cm, de modo que

$$\begin{aligned}30.2\text{ cm}^3 &= (30.2\text{ cm}^3)\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)^3\\ &= (30.2)\left(\frac{1}{100}\right)^3\frac{\cancel{\text{cm}^3}\ \text{m}^3}{\cancel{\text{cm}^3}} = 30.2\times10^{-6}\text{ m}^3\\ &= 3.02\times10^{-5}\text{ m}^3\end{aligned}$$

EVALUAR: Siguiendo el patrón de estas conversiones, se puede ver que $1\text{ in}^3 \approx 16\text{ cm}^3$ y que $1\text{ m}^3 \approx 60{,}000\text{ in}^3$. Estas conversiones unitarias aproximadas serán útiles en referencias futuras.

1.5 Incertidumbre y cifras significativas

1.7 Este espectacular percance se debió a un error porcentual muy pequeño: recorrer unos cuantos metros de más, en un viaje de cientos de miles de metros.

Tabla 1.2 Uso de cifras significativas

Multiplicación o división:
El resultado no debe tener más cifras significativas que el número inicial con menos cifras significativas:

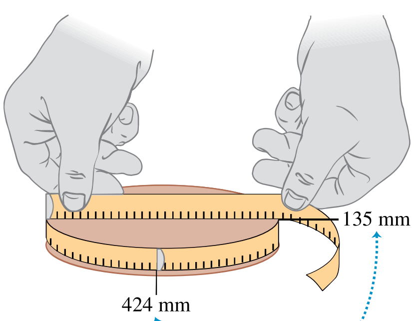
$$\frac{0.745 \times 2.2}{3.885} = 0.42$$

$$1.32578 \times 10^{7} \times 4.11 \times 10^{-3} = 5.45 \times 10^{4}$$

Suma o resta:
El número de cifras significativas se determina por el número inicial con mayor incertidumbre (es decir, el menor número de dígitos a la derecha del punto decimal):

$$27.153 + 138.2 - 11.74 = 153.6$$

1.8 Obtención del valor de π a partir de la circunferencia y el diámetro de un círculo.



Las mediciones siempre implican incertidumbre. Si medimos el espesor de la portada de una edición con cubierta dura de este libro con una regla común, la medición solo será confiable al milímetro más cercano, y el resultado será de 3 mm. Sería *erróneo* dar este resultado como 3.00 mm; dadas las limitaciones del instrumento de medición, no se sabría si el espesor real es de 3.00 mm, 2.85 mm o 3.11 mm. Pero si se usa un micrómetro, un instrumento que mide distancias de forma confiable al 0.01 mm más cercano, el resultado será 2.91 mm. La diferencia entre estas dos mediciones radica en su **incertidumbre**. La medida con micrómetro tiene menor incertidumbre y es más exacta. La incertidumbre también se llama **error**, porque indica la máxima diferencia probable entre el valor medido y el real. La incertidumbre o el error de un valor medido depende de la técnica de medición empleada.

A menudo indicamos la **exactitud** de un valor medido (es decir qué tanto creemos que se acerca al valor real) escribiendo el número, el símbolo $\pm$ y un segundo número que indica la incertidumbre de la medición. Si el diámetro de una varilla de acero se expresa como 56.47 ± 0.02 mm, esto implica que es poco probable que el valor real sea menor que 56.45 mm o mayor que 56.49 mm. En una notación abreviada de uso común, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los números entre paréntesis indican la incertidumbre de los dígitos finales del número principal.

También podemos expresar la exactitud en términos del **error fraccionario** o **error de aproximación** máximo probable (también llamado *incertidumbre fraccionaria* o *porcentaje de incertidumbre*). Un resistor rotulado como de "47 ohms $\pm$ 10%" probablemente tiene una resistencia real que difiere de 47 ohms en menos del 10% de 47 ohms, esto es, unos 5 ohms. Es probable que la resistencia esté entre 42 y 52 ohms. En el caso del diámetro de la varilla antes citada, el error fraccionario es de (0.02 mm)/(56.47 mm), que es aproximadamente 0.0004; el error porcentual es de (0.0004)(100%), o bien, de 0.04%. Incluso errores de aproximación muy pequeños llegan a ser muy significativos (figura 1.7).

En muchos casos, no se da explícitamente la incertidumbre de un número, sino que se indica con el número de dígitos informativos, o **cifras significativas**, en el valor medido. Nosotros dimos el espesor de la portada del libro como 2.91 mm, que tiene tres cifras significativas. Con esto queremos decir que los dos primeros dígitos son correctos, pero el tercero es incierto. El último dígito está en la posición de las centésimas, así que la incertidumbre sería de 0.01 mm. Dos valores con el *mismo* número de cifras significativas pueden tener *diferente* incertidumbre; una distancia expresada como 137 km también tiene tres cifras significativas, pero la incertidumbre es aproximadamente de 1 km.

Cuando usamos números con incertidumbre para calcular otros números, el resultado también es incierto. Al multiplicar o dividir números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el factor con menos cifras significativas. Por ejemplo, $3.1416 \times 2.34 \times 0.58 = 4.3$. Cuando sumamos y restamos números, lo que importa es la ubicación del punto decimal, no el número de cifras significativas. Por ejemplo, $123.62 + 8.9 = 132.5$. Aunque 123.62 tiene una incertidumbre aproximada de 0.01, la de 8.9 sería de 0.1, así que la suma debe tener esta misma incertidumbre (0.1) y escribirse como 132.5, no como 132.52. La tabla 1.2 resume las reglas para las cifras significativas.

Como una aplicación de estas ideas, suponga que quiere verificar el valor de π, la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. El valor verdadero de esta razón considerando hasta 10 dígitos es 3.141592654. Para probar esto, dibuje un círculo grande, y mida el diámetro y la circunferencia al milímetro más cercano: obtendrá los valores de 424 mm y 135 mm (figura 1.8), los cuales dividirá con su calculadora (424 mm)/(135 mm) para obtener 3.140740741. Esto parecería no coincidir con el valor real de π, pero tenga en cuenta que cada una de sus mediciones tiene tres cifras significativas, de manera que su valor medido de π solo puede tener tres cifras significativas y debería darse simplemente como 3.14. Dentro del límite de tres cifras significativas, este valor sí coincide con el valor verdadero.

En los ejemplos y problemas de este libro, por lo regular daremos valores numéricos con tres cifras significativas, así que sus respuestas no deberán tener más de tres cifras significativas. (En el mundo real, muchos números incluso tienen una exactitud menor. Un velocímetro de automóvil, por ejemplo, únicamente suele tener dos cifras significativas). Incluso si usted realiza operaciones con una calculadora que despliega 10 dígitos, sería erróneo dar una respuesta de 10 dígitos, porque falsea la exactitud del resultado. Siempre redondee su respuesta final conservando solamente el número correcto de cifras significativas o, si hay duda, una más cuando mucho. En el ejemplo 1.1 habría sido erróneo dar la respuesta como 341.01861 m/s. Observe que, al reducir una respuesta así al número apropiado de cifras significativas, debemos *redondear*, no *eliminarlas*. La calculadora indica que 525 m/311 m es 1.688102894; con tres cifras significativas, esto es 1.69, no 1.68.

Al calcular con números muy grandes o muy pequeños, es mucho más fácil indicar las cifras significativas usando **notación científica**, también llamada **notación de potencias de 10**. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente de 384,000,000 m, pero esta forma del número no da idea de cuántas cifras significativas tiene. En vez de ello, recorremos el punto decimal ocho lugares a la izquierda (lo que equivale a dividir entre 10^8) y multiplicamos por 10^8. Es decir,

$$384{,}000{,}000 \text{ m} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

De esta forma, es evidente que tenemos tres cifras significativas. El número 4.00×10^{-7} también tiene tres cifras significativas, aunque dos de ellas sean ceros. En notación científica, se acostumbra expresar la cantidad como un número entre 1 y 10 multiplicado por la potencia adecuada de 10.

Cuando aparecen un entero o una fracción en una ecuación general, tratamos ese número como si no tuviera incertidumbre. Por ejemplo, en la ecuación $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$, que es la ecuación (2.13) del capítulo 2, el coeficiente 2 es *exactamente* 2. Podríamos pensar que este coeficiente tiene un número infinito de cifras significativas (2.000000…). Lo mismo ocurre con el exponente 2 en v_x^2 y v_{0x}^2.

Por último, cabe señalar que **precisión** no es lo mismo que *exactitud*. Un reloj digital barato que indica la hora como 10:35:17 A.M. es muy *preciso* (la hora se da con segundos); pero si el reloj está atrasado varios minutos, este valor no es *muy exacto*. Por otro lado, el reloj de nuestro abuelo puede ser muy exacto (es decir, da la hora correcta) pero, si no tiene segundero, no será muy preciso. Una medición de gran calidad, es *tanto* precisa *como* exacta.

Ejemplo 1.3 Cifras significativas al multiplicar

La energía E en reposo de un objeto con masa m en reposo está dada por la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$, donde c es la rapidez de la luz en el vacío. Calcule E (con tres cifras significativas) para un electrón con $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. La unidad del SI para E es el joule (J); 1 J = 1 kg·m²/s².

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la energía E. Nos dan el valor de la masa m; en la sección 1.3 (o en el apéndice F) vemos que la rapidez de la luz es $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s.

EJECUTAR: Si sustituimos los valores de m y c en la ecuación de Einstein, tenemos

$$\begin{aligned} E &= (9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(2.99792458 \times 10^8\text{ m/s})^2 \\ &= (9.11)(2.99792458)^2(10^{-31})(10^8)^2\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= (81.87659678)(10^{[-31+(2\times 8)]})\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 8.187659678 \times 10^{-14}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Puesto que el valor de m se dio con solo tres cifras significativas, debemos redondear esto a

$$E = 8.19 \times 10^{-14}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 8.19 \times 10^{-14}\text{ J}$$

EVALUAR: Mientras que la energía en reposo contenida en un electrón parecería ridículamente pequeña, en la escala atómica es enorme. Comparemos nuestra respuesta con 10^{-19} J, que es la energía que un solo átomo gana o pierde durante una reacción química común: ¡la energía en reposo de un electrón es aproximadamente 1,000,000 de veces mayor! (Analizaremos el significado de la energía en reposo en el capítulo 37, en el volumen 2).

Evalúe su comprensión de la sección 1.5 La densidad de un material es igual a su masa dividida entre su volumen. ¿Qué densidad (en kg/m^3) tiene una roca de masa igual a 1.80 kg y cuyo volumen es $6.0 \times 10^{-4}\ m^3$? **i.** $3 \times 10^3\ kg/m^3$; **ii.** $3.0 \times 10^3\ kg/m^3$; **iii.** $3.00 \times 10^3\ kg/m^3$; **iv.** $3.000 \times 10^3\ kg/m^3$; **v.** cualquiera de estas respuestas; todas son matemáticamente equivalentes.

1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

MasteringPHYSICS

PhET: Estimation

Hemos destacado la importancia de conocer la exactitud de los números que representan cantidades físicas. No obstante, a menudo incluso la estimación muy burda de una cantidad puede darnos información útil. A veces sabemos cómo calcular cierta cantidad, pero tenemos que estimar los datos necesarios para el cálculo. O bien, el cálculo podría ser demasiado complicado para efectuarse con exactitud, así que lo aproximamos. En ambos casos, nuestro resultado es una estimación, pero puede ser útil aun si tiene un factor de incertidumbre de dos, 10 o más. Con frecuencia, tales cálculos se denominan **estimaciones de orden de magnitud**. El gran físico nuclear italo-estadounidense Enrico Fermi (1901-1954) los llamaba "cálculos aproximados".

Los ejercicios 1.16 a 1.25 del final de este capítulo son del tipo de estimación u orden de magnitud. La mayoría requiere estimar los datos de entrada necesarios. No intente consultar muchos datos; estímelos tan bien como pueda. Aun cuando difieran por un factor de 10, los resultados serán útiles e interesantes.

Ejemplo 1.4 Estimación de orden de magnitud

Suponga que usted escribe una novela de aventuras, donde el héroe huye a otro país con mil millones de dólares en oro en la maleta. ¿Puede alguien llevar tanto oro? ¿Cabría tanto oro en una maleta?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El oro se vende a unos \$400 la onza. (El precio varió entre \$200 y \$1000 más o menos durante la década pasada). Una onza equivale a unos 30 gramos; será bueno recordarlo. De modo que \$10 en oro tienen una masa de $\frac{1}{40}$ onza, o aproximadamente un gramo. Así que mil millones (10^9) de dólares en oro son cien millones (10^8) de gramos o cien mil (10^5) kilogramos, que corresponden a un peso en unidades británicas de aproximadamente 200,000 lb, o 100 toneladas. ¡Ningún héroe podría cargar tanto peso en una maleta!

¿Cuál es el *volumen* de este oro en términos burdos? La densidad del oro es mucho mayor que la del agua ($1\ g/cm^3$) o $1000\ kg/m^3$; si su densidad es 10 veces la del agua, esta cantidad de oro tendría un volumen de $10\ m^3$, muchas veces el volumen de una maleta.

EVALUAR: Es evidente que hay que rescribir la novela. Pruebe el cálculo ahora con una maleta llena de diamantes de cinco quilates (1 gramo), cada uno de los cuales vale \$100,000. ¿Funcionaría?

Evalúe su comprensión de la sección 1.6 ¿Podría estimar el número de dientes que hay en todas las bocas de su campus universitario (estudiantes, empleados y profesores)? (*Sugerencia:* ¿Cuántos dientes tiene usted en su boca? Cuéntelos).

Aplicación Temperatura escalar, viento vectorial
Esta estación meteorológica mide la temperatura, una cantidad escalar que puede ser positiva o negativa (digamos, +20°C o −5°C), pero no tiene dirección. También mide la velocidad del viento, la cual es una cantidad vectorial que tiene tanto magnitud como dirección (por ejemplo, 15 km/h hacia el este).

1.7 Vectores y suma de vectores

Algunas cantidades físicas, como el tiempo, la temperatura, la masa y la densidad se pueden describir completamente con un solo número y una unidad. No obstante, en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una *dirección* y no pueden describirse con un solo número. Un ejemplo sencillo es el desplazamiento de un avión: debemos indicar no solo qué tan rápidamente se desplaza, sino también en qué dirección. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*. Otro ejemplo es la *fuerza*, que en física es un empuje o un tirón aplicado a un cuerpo. Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no solo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja sobre un cuerpo.

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** incluye tanto una **magnitud** (la cual indica “qué tanto” o “qué tan grande”) como una dirección en el espacio. Los cálculos que combinan cantidades escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias. Por ejemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg, o 4×2 s = 8 s. No obstante, la combinación de vectores requiere un conjunto diferente de operaciones.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que simplemente es un cambio en la posición de un objeto. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos establecer no solo qué tan lejos se mueve el objeto, sino también en qué dirección. Caminar 3 km al norte desde nuestra casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

Con frecuencia representamos una cantidad vectorial, como el desplazamiento, con una sola letra, como $\vec{A}$ en la figura 1.9*a*. En este libro siempre simbolizaremos los vectores con ***letras negritas y cursivas con una flecha arriba***, como recordatorio de que las cantidades vectoriales tienen propiedades diferentes de las que manifiestan las cantidades escalares; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección. Los símbolos manuscritos de los vectores *siempre* se escriben con una flecha arriba. Si no distingue entre cantidades vectoriales y escalares en su notación, probablemente tampoco lo hará en su mente, y se confundirá.

Al *dibujar* un vector, siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y la dirección de la línea es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por el objeto sea curva (figura 1.9*b*). Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si el objeto llegara a P_2 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería *cero* (figura 1.9*c*).

Si dos vectores tienen la misma dirección, son **paralelos**; si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección, son *iguales*, sea cual fuere su ubicación en el espacio. El vector $\vec{A}\,'$ de P_3 a P_4 en la figura 1.10 tiene igual longitud y dirección que el vector $\vec{A}$ de P_1 a P_2. Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos. Escribimos esto como $\vec{A}\,' \mathbf{=} \vec{A}$ en la figura 1.10, usando un signo igual en negritas para resaltar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares. Dos vectores son iguales solo si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección.

Sin embargo, el vector $\vec{B}$ de la figura 1.10 no es igual a $\vec{A}$ porque su dirección es *opuesta*. Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la misma magnitud que el original, pero con la dirección *opuesta*. El negativo de $\vec{A}$ se representa con $\mathbf{-}\vec{A}$, y usamos un signo menos en negritas para destacar el carácter vectorial de las cantidades. Si $\vec{A}$ es de 87 m y apunta al sur, entonces $\mathbf{-}\vec{A}$ es de 87 m y apunta al norte. Así, la relación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la figura 1.10 puede escribirse como $\vec{A} \mathbf{=} \mathbf{-}\vec{B}$ o $\vec{B} \mathbf{=} \mathbf{-}\vec{A}$. Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen direcciones opuestas, independientemente de que sus magnitudes sean iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.

Frecuentemente representamos la *magnitud* de una cantidad vectorial (su longitud, en el caso de un vector desplazamiento) con la misma letra que usamos para el vector, pero en *cursiva normal sin* la flecha arriba. Una notación alternativa es el símbolo vectorial encerrado entre barras verticales en ambos lados:

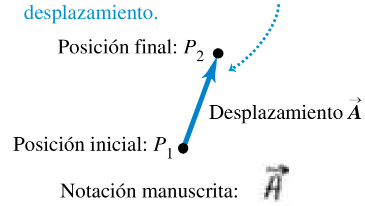
$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = A = |\vec{A}| \qquad (1.1)$$

La magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y *siempre es positiva*. Cabe señalar también que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de tipo distinto. ¡La expresión “$\vec{A}$ = 6 m” es tan absurda como “2 naranjas = 3 manzanas”!

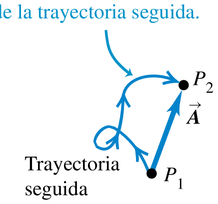
Al dibujar diagramas con vectores, normalmente usamos una escala similar a la escala de los mapas. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm de largo en un diagrama; y un desplazamiento de 10 km, con un vector de 2 cm. En un diagrama de vectores de velocidad, un vector que tiene 1 cm

1.9 Desplazamiento como una cantidad vectorial. Un desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido desde el punto inicial hasta el punto final, aunque la trayectoria sea curva.

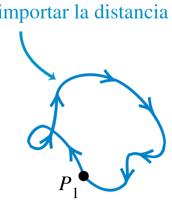
a) Un desplazamiento se representa con una flecha que apunta en la dirección del desplazamiento.



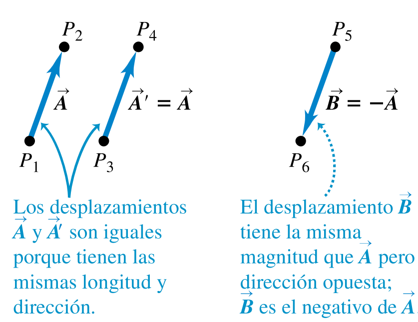
b) El desplazamiento depende solo de las posiciones inicial y final, no de la trayectoria seguida.



c) El desplazamiento total de un viaje redondo es 0, sin importar la distancia recorrida.

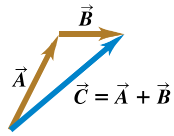


1.10 Significado de vectores que tienen la misma magnitud, y la misma dirección o dirección opuesta.

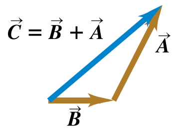


1.11 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en *b*), el orden no importa en la suma de vectores, ya que esta es conmutativa.

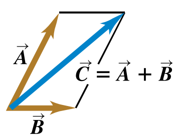
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



b) Al invertir el orden de la suma se obtiene el mismo resultado.



c) También podemos sumarlos construyendo un paralelogramo.



de longitud podría representar una velocidad cuya magnitud es de 5 m/s. Entonces, una velocidad de 20 m/s se representaría con un vector de 4 cm de largo.

Suma y resta de vectores

Suponga que una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{A}$ seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$. El resultado final es el mismo como si la partícula hubiera partido del mismo punto y experimentado un solo desplazamiento $\vec{C}$ (figura 1.11*a*). Llamamos a $\vec{C}$ **suma vectorial**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación simbólicamente como

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.2}$$

El signo más en negritas destaca que sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como $2 + 3 = 5$. Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o *punta*, del *primer* vector (figura 1.11*a*).

Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$ el resultado será el mismo (figura 1.11*b*) ya que se cumple la propiedad conmutativa. Entonces,

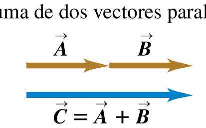
$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.3}$$

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. En otras palabras, la suma de vectores sigue la ley conmutativa.

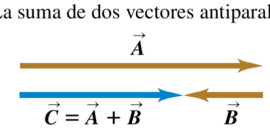
La figura 1.11*c* muestra otra representación de la suma vectorial: si dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto, el vector $\vec{C}$ es la diagonal de un paralelogramo construido con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como dos lados adyacentes.

1.12 *a*) Solo cuando dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes: $C = A + B$. *b*) Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la *diferencia* de sus magnitudes: $C = |A - B|$.

a) La suma de dos vectores paralelos



b) La suma de dos vectores antiparalelos



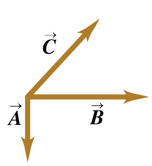
CUIDADO **Magnitudes en la suma de vectores** Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces la magnitud C debería ser igual a la magnitud A más la magnitud B. En general, tal conclusión es *errónea*; para los vectores de la figura 1.11 es evidente que $C < A + B$. La magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y también del ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (véase el problema 1.90). Solo en el caso especial en que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean *paralelos*, la magnitud de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es igual a la suma de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (figura 1.12*a*). En cambio, cuando los vectores son *antiparalelos* (figura 1.12*b*), la magnitud de $\vec{C}$ es la *diferencia* de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si usted tiene el cuidado de distinguir entre cantidades escalares y vectoriales, evitará cometer errores en relación con la magnitud de una suma vectorial.

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar vectorialmente la resultante al tercero, y así sucesivamente. La figura 1.13*a* muestra tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. En la figura 1.13*b*, se suman primero $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para obtener la suma vectorial $\vec{D}$; luego se suman los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la misma forma para obtener la resultante $\vec{R}$:

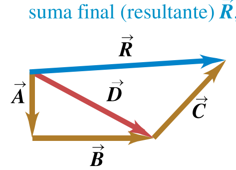
$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

1.13 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

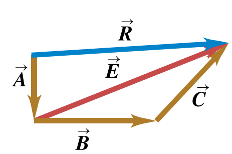
a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...



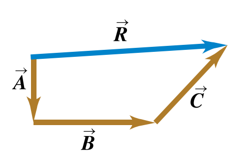
b) podríamos sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para encontrar $\vec{D}$ y luego sumar $\vec{C}$ a $\vec{D}$ para obtener la suma final (resultante) $\vec{R}$, ...



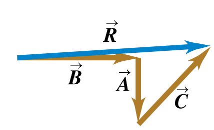
c) o podríamos sumar $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{E}$ y después sumar $\vec{A}$ a $\vec{E}$ para calcular $\vec{R}$, ...



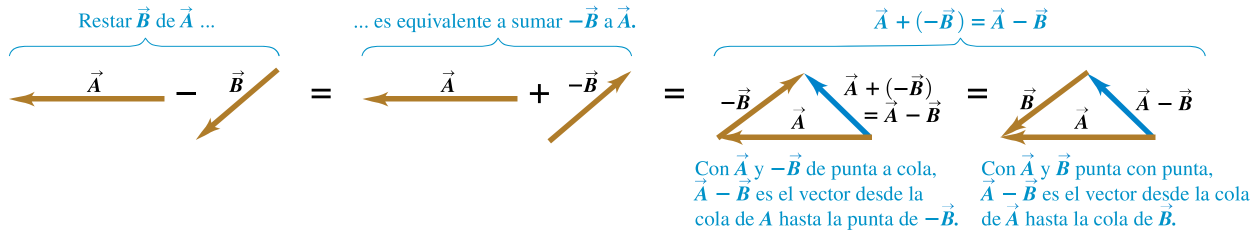
d) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{R}$ directamente ...



e) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en cualquier otro orden y aun así obtener $\vec{R}$.



1.14 Para construir la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$, puede colocar ya sea la cola de $-\vec{B}$ en la punta de $\vec{A}$ o bien, colocar los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta.



Como alternativa, podemos sumar primero $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener el vector $\vec{E}$ (figura 1.13*c*), y luego sumar $\vec{A}$ y $\vec{E}$ para obtener $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

No necesitamos dibujar los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$; basta con dibujar los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en sucesión, con la cola de cada uno en la punta del vector anterior. La suma vectorial $\vec{R}$ va de la cola del primer vector a la punta del último vector (figura 1.13*d*). El orden no importa; la figura 1.13*e* muestra un orden distinto, y el lector puede intentar otros. Vemos así que la suma de vectores obedece la ley asociativa.

Así como sumamos vectores, también podemos *restarlos*. Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta. Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.4}$$

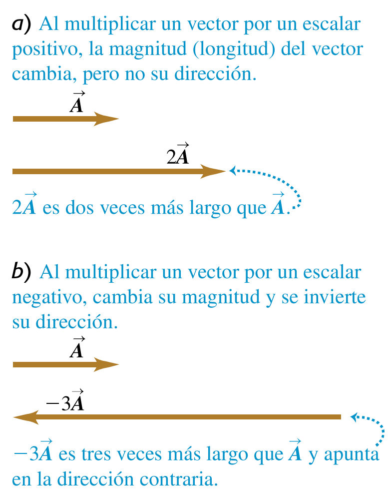
La figura 1.14 muestra un ejemplo de resta de vectores.

Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, se puede multiplicar por una cantidad escalar (un número ordinario). El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que $\vec{A}$ pero dos veces más largo; esto equivale a sumar $\vec{A}$ a sí mismo (figura 1.15*a*). En general, cuando un vector $\vec{A}$ se multiplica por un escalar c, el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de c multiplicado por la magnitud del vector $\vec{A}$). Si c es positivo, $c\vec{A}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$; si c es negativo, $c\vec{A}$ tiene la dirección opuesta a la de $\vec{A}$. Así, $3\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$, pero $-3\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$ (figura 1.15*b*).

El escalar que multiplica un vector también puede ser una cantidad física. Por ejemplo, es posible que el lector conozca la relación $\vec{F} = m\vec{a}$; la fuerza neta $\vec{F}$ (una cantidad vectorial) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa m del cuerpo (una cantidad escalar) y su aceleración $\vec{a}$ (una cantidad vectorial). La dirección de $\vec{F}$ es la misma que la de $\vec{a}$ porque m es positiva, y la magnitud de $\vec{F}$ es igual a la masa m (que es positiva) multiplicada por la magnitud de $\vec{a}$. La unidad de fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de aceleración.

MasteringPHYSICS
PhET: Vector Addition

1.15 Multiplicación de un vector *a*) por un escalar positivo y *b*) por un escalar negativo.



Ejemplo 1.5 Suma de dos vectores en ángulos rectos

Un esquiador de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

SOLUCIÓN

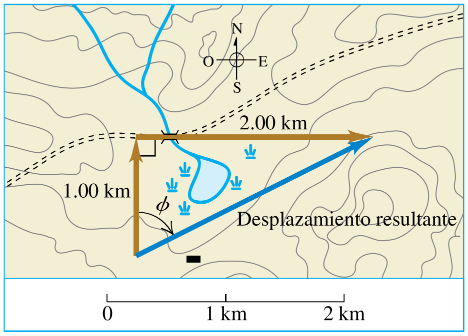
IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema implica combinar dos desplazamientos en ángulos rectos uno del otro. En este caso, las cantidades vectoriales se suman resolviendo un triángulo rectángulo, lo cual podemos hacer usando el teorema de Pitágoras y trigonometría básica. Las incógnitas son la distancia en línea recta y la dirección del esquiador con respecto a su punto de partida. La figura 1.16 es un diagrama a escala de los dos desplazamientos del esquiador y el desplazamiento neto resultante. Describimos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega fi). El desplazamiento parece ser de aproximadamente 2.4 km y la medición con un transportador indica que ϕ es aproximadamente igual a 63°.

EJECUTAR: La distancia del punto inicial al punto final es igual a la longitud de la hipotenusa:

$$\sqrt{(1.00 \text{ km})^2 + (2.00 \text{ km})^2} = 2.24 \text{ km}$$

Continúa

1.16 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí.



El ángulo ϕ se obtiene con un poco de trigonometría (del apéndice B):

$$\tan \phi = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{2.00\ \text{km}}{1.00\ \text{km}}$$

$$\phi = 63.4°$$

Podemos describir la dirección como 63.4° al este del norte o 90° − 63.4° = 26.6° al norte del este.

EVALUAR: Nuestras respuestas (2.24 km y $\phi = 63.4°$) están cerca de nuestras predicciones. En el caso más general de la suma de dos vectores que *no* están en ángulos rectos, se puede usar la ley de los cosenos en lugar del teorema de Pitágoras, y usar la ley de los senos para obtener el ángulo correspondiente a ϕ de este ejemplo. (Estas funciones trigonométricas se encuentran en el apéndice B). En la sección 1.8 veremos más técnicas de suma de vectores.

Evalúe su comprensión de la sección 1.7 Dos vectores de desplazamiento, $\vec{S}$ y $\vec{T}$, tienen magnitudes $S = 3$ m y $T = 4$ m. ¿Cuál de los siguientes resultados podría ser la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{S} - \vec{T}$? (Puede haber más de una respuesta correcta). **i.** 9 m; **ii.** 7 m; **iii.** 5 m; **iv.** 1 m; **v.** 0 m; **vi.** −1 m.

1.8 Componentes de vectores

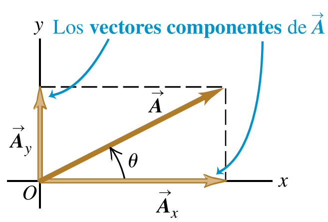
En la sección 1.7 sumamos vectores usando un diagrama a escala y las propiedades de los triángulos rectángulos. Al medir un diagrama se obtiene solo una exactitud muy limitada, y los cálculos con triángulos rectángulos funcionan únicamente cuando los dos vectores son perpendiculares. De modo que necesitamos entonces un método sencillo pero general para sumar vectores; este se conoce como el método de *componentes*.

Para definir las componentes de un vector $\vec{A}$, partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (figura 1.17*a*) y luego dibujamos el vector con su cola en O, el origen del sistema coordenado. Podemos representar cualquier vector en el plano xy como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y. Estos dos vectores se identifican como $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en la figura 1.17*a*; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$, y su suma vectorial es igual a $\vec{A}$. Simbólicamente,

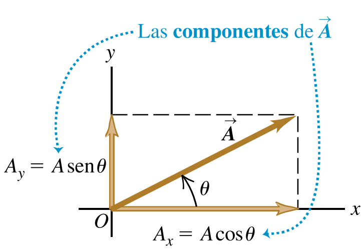
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \tag{1.5}$$

1.17 Representación de un vector $\vec{A}$ en términos de *a*) los vectores componentes $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ y *b*) las componentes A_x y A_y (en este caso, ambas son positivas).

a)



b)



Puesto que cada vector componente se encuentra a lo largo de un eje de coordenadas, solo necesitamos un número para describirlo. Cuando el vector componente $\vec{A}_x$ apunta hacia la dirección x positiva, definimos el número A_x como la magnitud de $\vec{A}_x$. Cuando el vector componente $\vec{A}_x$ apunta en la dirección x negativa, definimos el número A_x como el negativo de dicha magnitud (la magnitud de una cantidad vectorial en sí misma nunca es negativa). Definimos el número A_y del mismo modo. Los dos números A_x y A_y son las **componentes** de $\vec{A}$ (figura 1.17*b*).

CUIDADO **Las componentes no son vectores** Las componentes A_x y A_y de un vector $\vec{A}$ son tan solo números: *no* son vectores. Por ello, las simbolizamos con letra cursiva normal *sin* flecha arriba, en vez de la letra cursiva negrita con flecha que está reservada para los vectores.

Podemos calcular las componentes del vector $\vec{A}$ si conocemos la magnitud A y su dirección. Describiremos la dirección de un vector por su ángulo en relación con una dirección de referencia, que en la figura 1.17*b* es el eje x positivo, y el ángulo entre el vector $\vec{A}$ y el eje x positivo es θ (la letra griega theta).

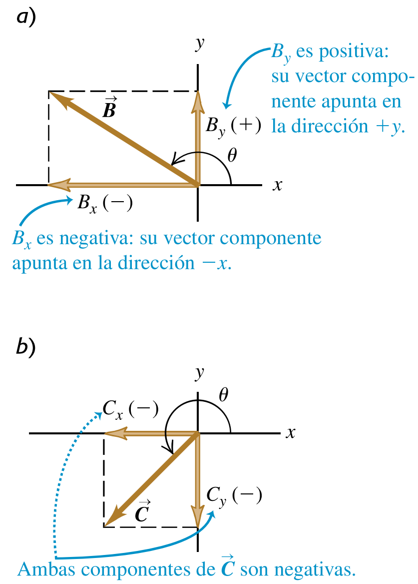
Imagine que, originalmente, el vector $\vec{A}$ está sobre el eje $+x$ y que luego usted lo hace girar hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 1.17*b*. Si la rotación es del eje $+x$ hacia el eje $+y$, como indica la figura 1.17*b*, entonces θ es *positivo*; si la rotación es del eje $+x$ al eje $-y$, entonces θ es *negativo*. Por lo tanto, el eje $+y$ está a un ángulo de 90°, el eje $-x$ está a 180° y el eje $-y$ está a 270° (o $-90°$). Si medimos θ de esta manera, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$
$$A_x = A\cos\theta \quad \text{y} \quad A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{1.6}$$
(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

En la figura 1.17*b*, A_x y A_y son positivas. Esto es congruente con las ecuaciones (1.6); θ está en el primer cuadrante (entre 0° y 90°) y tanto el coseno como el seno de un ángulo en este cuadrante son positivos. En cambio, en la figura 1.18*a*, la componente B_x es negativa. Esto también es congruente con las ecuaciones (1.6); el coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo. La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante). En la figura 1.18*b*, tanto C_x como C_y son negativas (cos θ y sen θ son negativos en el tercer cuadrante).

CUIDADO **Relación entre la magnitud de un vector y la dirección de sus componentes** Las ecuaciones (1.6) son correctas *solamente* si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo, como se describe aquí. Si el ángulo del vector se da desde otra dirección de referencia, o se utiliza otro sentido de rotación, las relaciones son distintas. ¡Tenga cuidado! El ejemplo 1.6 ilustra este aspecto.

1.18 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.



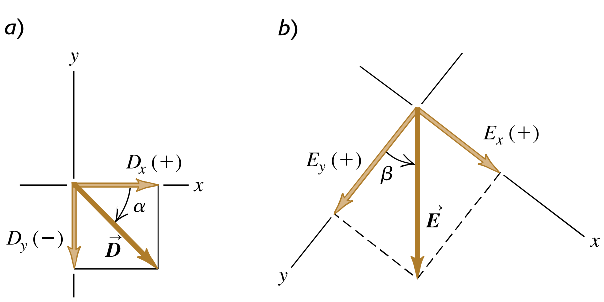
Ejemplo 1.6 Cálculo de componentes

a) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{D}$ en la figura 1.19*a*? La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45°$. *b*) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{E}$ en la figura 1.19*b*? La magnitud del vector es $E = 4.50$ m y el ángulo $\beta = 37.0°$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos usar las ecuaciones (1.6) para calcular las componentes de estos vectores, pero debemos tener cuidado, porque ninguno de los ángulos α o β de la figura 1.19 está medido del eje $+x$ al eje $+y$. A partir de la figura estimamos que las longitudes de las componentes en el inciso *a*) son aproximadamente de 2 m, y las del inciso *b*) son de 3 y 4 m. Los signos de las componentes están indicados en la figura.

1.19 Cálculo de las componentes x y y de vectores.



EJECUTAR: *a*) El ángulo entre $\vec{D}$ y el eje x positivo es α (la letra griega alfa), medido hacia el eje y *negativo*. Por lo tanto, en las ecuaciones (1.6) debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45°$. Entonces obtenemos

$$D_x = D\cos\theta = (3.00\text{ m})(\cos(-45°)) = +2.1\text{ m}$$
$$D_y = D\operatorname{sen}\theta = (3.00\text{ m})(\operatorname{sen}(-45°)) = -2.1\text{ m}$$

Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45°$ en las ecuaciones (1.6), habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.

b) El eje x y el eje y forman ángulos rectos en la figura 1.19*b*, de modo que no importa que no se encuentren en posición horizontal y vertical, respectivamente. Pero para usar las ecuaciones (1.6), debemos usar el ángulo $\theta = 90.0° - \beta = 90.0° - 37.0° = 53.0°$. Luego, obtenemos

$$E_x = E\cos 53.0° = (4.50\text{ m})(\cos 53.0°) = +2.71\text{ m}$$
$$E_y = E\operatorname{sen} 53.0° = (4.50\text{ m})(\operatorname{sen} 53.0°) = +3.59\text{ m}$$

EVALUAR: Las respuestas en ambos incisos están cerca de nuestras predicciones. Sin embargo, pregúntese esto: ¿por qué las respuestas del inciso *a*) tienen solo dos cifras significativas?

Cálculos de vectores usando componentes

Utilizar componentes hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores. Veamos tres ejemplos importantes.

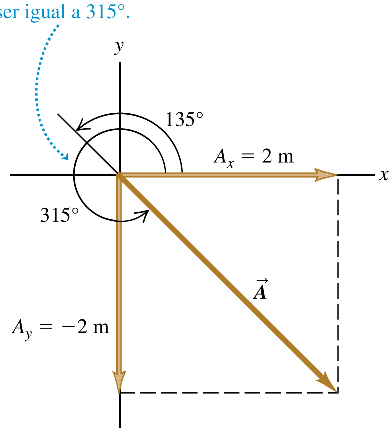
1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes. Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes x y y. Las ecuaciones (1.6) indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 1.17*b*, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (1.7)$$

(Siempre tomamos la raíz positiva). La ecuación (1.7) es válida para cualesquiera de los ejes x y y, siempre y cuando sean perpendiculares entre sí. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ como un ángulo positivo desde el eje $+x$ hacia el eje $+y$ (como en la figura 1.17*b*), entonces

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\frac{A_y}{A_x} \qquad (1.8)$$

Siempre usaremos la notación arctan para la función tangente inversa. También suele usarse la notación $\tan^{-1}$, y una calculadora podría tener una tecla INV o 2ND para usarse con la tecla TAN.



1.20 Diagrama de vectores que indica los signos de sus componentes x y y.

CUIDADO **Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes** Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones (1.8) para obtener θ: dos ángulos cualesquiera que difieran 180° tienen la misma tangente. Suponga que $A_x = 2$ m y $A_y = -2$ m como en la figura 1.20; entonces, $\tan\theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente -1: 135° y 315° (o bien, $-45°$). Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el cuarto cuadrante; así que $\theta = 315°$ (o bien, $-45°$) es el valor correcto. La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan $\arctan(-1) = -45°$. En este caso es lo correcto, pero si tuviéramos $A_x = -2$ m y $A_y = 2$ m, entonces el ángulo correcto sería 135°. Asimismo, si A_x y A_y son negativas, la tangente es positiva, por lo que el ángulo estará en el tercer cuadrante. *Siempre* debe hacerse un dibujo, como la figura 1.20, para verificar cuál de las dos posibilidades es la correcta.

2. Multiplicación de un vector por un escalar. Si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por un escalar c, cada componente del producto $\vec{D} = c\vec{A}$ es el producto de c por la componente correspondiente de $\vec{A}$:

$$D_x = cA_x \qquad D_y = cA_y \qquad (\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A}) \qquad (1.9)$$

Por ejemplo, la ecuación (1.9) indica que cada componente del vector $2\vec{A}$ es dos veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$, de manera que $2\vec{A}$ está en la misma dirección que $\vec{A}$ pero tiene el doble de magnitud. Cada componente del vector $-3\vec{A}$ es tres veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$ pero tiene el signo contrario, así que $-3\vec{A}$ está en la dirección opuesta de $\vec{A}$ y su magnitud es tres veces mayor. Por lo tanto, las ecuaciones (1.9) son congruentes con nuestro estudio de la sección 1.7 en relación con la multiplicación de un vector por un escalar (véase la figura 1.15).

3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores. La figura 1.21 muestra dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su resultante $\vec{R}$, junto con las componentes x y y de los tres vectores. En el diagrama se observa que la componente R_x de la resultante es simplemente la suma $(A_x + B_x)$ de las componentes x de los vectores que se están sumando. Lo mismo sucede con las componentes y. En símbolos,

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y \qquad (\text{componentes de } \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}) \tag{1.10}$$

La figura 1.21 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x, A_y, B_x y B_y son positivas. Dibuje diagramas adicionales para verificar que las ecuaciones (1.10) son válidas *sin* importar el signo de las componentes de $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Si conocemos las componentes de dos vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$, cualesquiera usando las ecuaciones (1.6), podríamos calcular las componentes de la resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$. Luego, si necesitamos la magnitud y la dirección de $\vec{\boldsymbol{R}}$, las obtendremos de las ecuaciones (1.7) y (1.8), cambiando las A por las R.

Podemos ampliar este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores. Si $\vec{\boldsymbol{R}}$ es la suma vectorial de $\vec{\boldsymbol{A}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$, $\vec{\boldsymbol{C}}$, $\vec{\boldsymbol{D}}$, $\vec{\boldsymbol{E}}$, . . . , entonces, las componentes de $\vec{\boldsymbol{R}}$ son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \cdots \\ R_y &= A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \cdots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Solo hemos hablado de vectores que están en el plano xy; no obstante, el método de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Podemos introducir un eje z perpendicular al plano xy; entonces, en general, un vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ tiene componentes A_x, A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

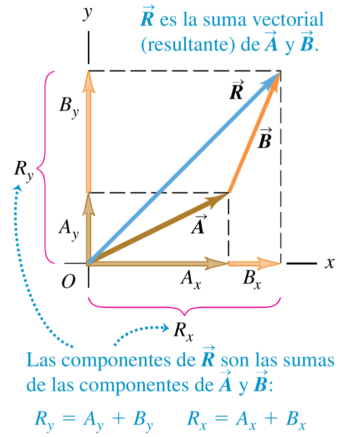
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.12}$$

Siempre tomamos la raíz positiva. Además, las ecuaciones (1.11) para las componentes de la suma vectorial $\vec{\boldsymbol{R}}$ tienen un elemento adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \cdots$$

Nos hemos enfocado en la suma de vectores de *desplazamiento*, pero el método es aplicable a todas las cantidades vectoriales. Cuando estudiemos el concepto de fuerza en el capítulo 4, veremos que las fuerzas son vectores que obedecen las mismas reglas de la suma vectorial que se aplican al desplazamiento.

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ usando componentes.



Estrategia para resolver problemas 1.3 Suma de vectores

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Determine cuál es la incógnita. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas.

PLANTEAR *el problema:* Dibuje los vectores que va a sumar y los ejes de coordenadas adecuados. Coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primer vector, y así sucesivamente. Trace la suma vectorial $\vec{\boldsymbol{R}}$ desde la cola del primer vector (en el origen) hasta la punta del último. Use su dibujo para estimar la magnitud y la dirección de $\vec{\boldsymbol{R}}$. Elija las herramientas matemáticas que usará para realizar el cálculo completo: las ecuaciones (1.6) para obtener las componentes de los vectores dados y, si es necesario, las ecuaciones (1.11) para obtener las componentes de la suma vectorial, las ecuaciones (1.12) para determinar su magnitud, y las ecuaciones (1.8) para conocer su dirección.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes x y y de cada vector y anote los resultados en una tabla, como en el ejemplo 1.7 que se presenta a continuación. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ, medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes están dadas por las ecuaciones 1.6:
$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,\text{sen}\,\theta$$
Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra dirección de referencia, conviértalos en ángulos medidos desde el eje $+x$ como en el ejemplo 1.6.
2. Sume algebraicamente las componentes x, incluyendo los signos, para obtener R_x, la componente x de la resultante. Haga lo mismo con las componentes y para obtener R_y. Véase el ejemplo 1.7.
3. Calcule la magnitud de R y la dirección θ de la resultante usando las ecuaciones (1.7) y (1.8):
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que la magnitud y dirección de la suma vectorial concuerden con las estimaciones que hizo a partir de su dibujo. El valor de θ obtenido con una calculadora puede tener un error de 180°; el dibujo indicará el valor correcto.

Ejemplo 1.7 Suma de vectores usando sus componentes

Tres participantes en un concurso de TV están colocados en el centro de un campo plano grande. A cada uno se le proporciona una regla graduada de un metro, un compás, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

$\vec{A}$: 72.4 m, 32.0° al este del norte

$\vec{B}$: 57.3 m, 36.0° al sur del oeste

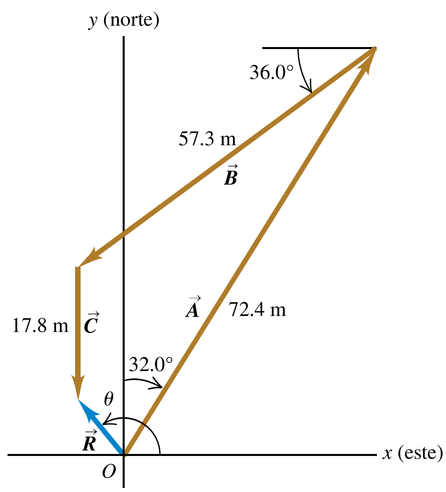
$\vec{C}$: 17.8 m al sur

Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, el ganador *calcula* primero a dónde debe ir. ¿Qué calculó?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El objetivo es encontrar la suma (resultante) de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma de vectores. La situación se muestra en la figura 1.22. Elegimos el eje $+x$ como el este, y el eje $+y$ como el norte. Podemos estimar en el diagrama que la resultante $\vec{R}$ mide aproximadamente unos 10 m, 40° al oeste del norte (lo cual corresponde a $\theta \approx 130°$).

1.22 Tres desplazamientos sucesivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.



EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje $+x$ al eje $+y$, son $(90.0° - 32.0°) = 58.0°$, $(180.0° + 36.0°) = 216.0°$ y $270.0°$, respectivamente. Ahora podemos usar las ecuaciones (1.6), para obtener las componentes de $\vec{A}$:

$$A_x = A \cos \theta_A = (72.4 \text{ m})(\cos 58.0°) = 38.37 \text{ m}$$

$$A_y = A \text{ sen } \theta_A = (72.4 \text{ m})(\text{sen } 58.0°) = 61.40 \text{ m}$$

Hemos conservado una cifra significativa extra en las componentes; esperaremos hasta el final para redondear al número correcto de cifras significativas. La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, su suma y los demás cálculos.

Distancia	Ángulo	Componente *x*	Componente *y*
$A = 72.4$ m	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3$ m	216.0°	−46.36 m	−33.68 m
$C = 17.8$ m	270.0°	0.00 m	−17.80 m
		$R_x = -7.99$ m	$R_y = 9.92$ m

$$R = \sqrt{(-7.99 \text{ m})^2 + (9.92 \text{ m})^2} = 12.7 \text{ m}$$

$$\theta = \arctan \frac{9.92 \text{ m}}{-7.99 \text{ m}} = -51°$$

La comparación con la figura 1.22 indica que el ángulo calculado es completamente diferente por 180º. El valor correcto es $\theta = 180° - 51 = 129°$, o bien, 39° al oeste del norte.

EVALUAR: Los valores que calculamos para R y θ concuerdan con nuestras estimaciones. Observe cómo el diagrama de la figura 1.22 facilitó la eliminación del error de 180° en la dirección de la resultante.

Ejemplo 1.8 Suma vectorial sencilla en tres dimensiones

Un avión despega y viaja 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

SOLUCIÓN

Sea el eje $+x$ el este, el eje $+y$ el norte y el eje $+z$ hacia arriba. Entonces, las componentes del desplazamiento del avión son $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km; la ecuación (1.12) da la magnitud del desplazamiento

$$A = \sqrt{(-10.4 \text{ km})^2 + (8.7 \text{ km})^2 + (2.1 \text{ km})^2} = 13.7 \text{ km}$$

Evalúe su comprensión de la sección 1.8 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano *xy*. *a*) ¿Es posible que $\vec{A}$ tenga la misma magnitud que $\vec{B}$ pero componentes diferentes? *b*) ¿Es posible que $\vec{A}$ tenga las mismas componentes que $\vec{B}$ pero una magnitud diferente?

1.9 Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en *direccionar*, es decir, señalar una dirección en el espacio. Los vectores unitarios proporcionan una notación conveniente para muchas expresiones que implican componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo o "sombrero" (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría ser 1 o alguna otra.

En un sistema de coordenadas *x*-*y* podemos definir un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje +*x* y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección del eje +*y* (figura 1.23*a*). Así, podemos expresar la relación entre los vectores componentes y las componentes, descrita al principio de la sección 1.8, como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{A}_x &= A_x\hat{\imath}\\ \vec{A}_y &= A_y\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.13}$$

De forma similar, escribimos un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.14}$$

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son ecuaciones vectoriales; cada término, como $A_x\hat{\imath}$, es una cantidad vectorial (figura 1.23*b*).

Usando vectores unitarios, podemos expresar la resultante $\vec{R}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}\\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B}\\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath})\\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}\\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.15}$$

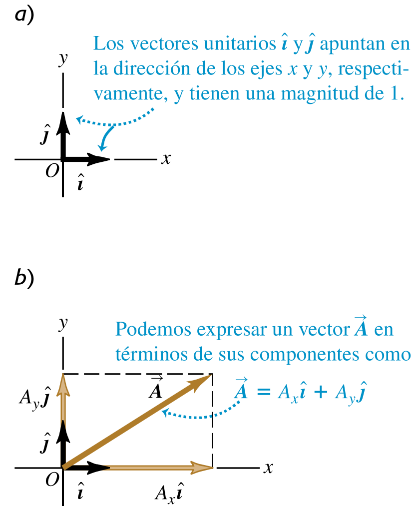
La ecuación (1.15) replantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial, en vez de dos ecuaciones de componentes.

Si no todos los vectores están en el plano *xy*, necesitamos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje +*z* (figura 1.24). Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se convierten en

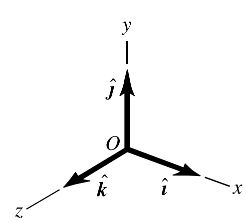
$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}\\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}\end{aligned} \tag{1.17}$$

1.23 *a*) Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. *b*) Expresión de un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes.



1.24 Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.



Ejemplo 1.9 Uso de vectores unitarios

Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6.00\,\hat{\imath} + 3.00\,\hat{\jmath} - 1.00\,\hat{k})\text{ m} \quad \text{y}$$

$$\vec{E} = (4.00\,\hat{\imath} - 5.00\,\hat{\jmath} + 8.00\,\hat{k})\text{ m}$$

obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Multiplicamos el vector $\vec{D}$ por 2 (un escalar) y luego restamos el vector $\vec{E}$ del resultado, para obtener el vector $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$. La ecuación (1.9) indica que para multiplicar $\vec{D}$ por 2, se multiplica cada una de sus componentes por 2. Después, se usa la ecuación (1.17) para efectuar la resta; recuerde de la sección 1.7 que restar un vector es lo mismo que sumar el negativo de ese vector.

EJECUTAR: Tenemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 2(6.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} - 1.00\hat{k})\text{ m} - (4.00\hat{\imath} - 5.00\hat{\jmath} + 8.00\hat{k})\text{ m}\\ &= [(12.00 - 4.00)\hat{\imath} + (6.00 + 5.00)\hat{\jmath} + (-2.00 - 8.00)\hat{k}]\text{ m}\\ &= (8.00\hat{\imath} + 11.00\hat{\jmath} - 10.00\hat{k})\text{ m}\end{aligned}$$

De la ecuación (1.12), la magnitud de $\vec{F}$ es

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\\ &= \sqrt{(8.00\text{ m})^2 + (11.00\text{ m})^2 + (-10.00\text{ m})^2}\\ &= 16.9\text{ m}\end{aligned}$$

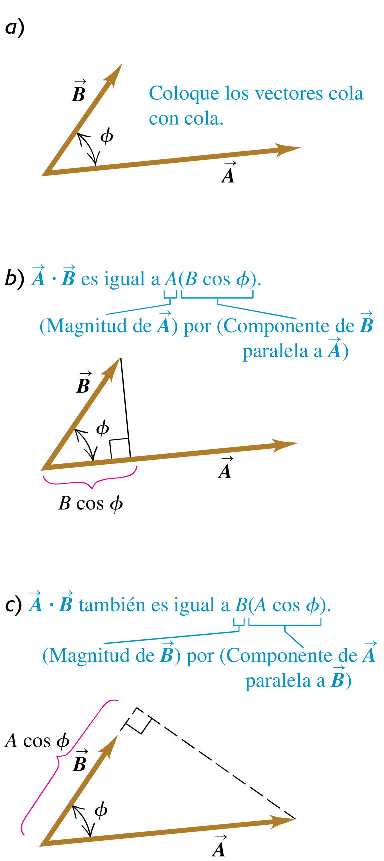
EVALUAR: Nuestra respuesta es del mismo orden de magnitud que las componentes más grandes implicadas en la suma. No esperaríamos que nuestra respuesta fuera mucho mayor que esto, pero podría ser mucho más pequeña.

Evalúe su comprensión de la sección 1.9 Coloque en orden de magnitud los siguientes vectores, donde el vector más grande sea el primero. **i.** $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; **ii.** $\vec{B} = (-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; **iii.** $\vec{C} = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; **iv.** $\vec{D} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ m.

MP

1.10 Productos de vectores

1.25 Cálculo del producto escalar de dos vectores, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$.



Hemos visto cómo la suma de vectores es consecuencia natural de combinar desplazamientos, y veremos lo útil que resulta en el cálculo de muchas otras cantidades vectoriales. También podemos expresar muchas relaciones físicas usando *productos* de vectores. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente la multiplicación ordinaria. Definiremos dos tipos de productos de vectores. El primero, llamado *producto escalar*, produce un resultado escalar. El segundo, el *producto vectorial*, genera otro vector.

Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota con $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Debido a esta notación, el producto escalar también se denomina **producto punto**. Aun cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean vectores, la cantidad $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es un escalar.

Para definir el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con su cola en el mismo punto (figura 1.25*a*). El ángulo ϕ (la letra griega fi) puede tomar valores entre 0° y 180°. La figura 1.25*b* muestra la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$; esta proyección es la componente de $\vec{B}$ sobre la proyección de $\vec{A}$ y es igual a $B\cos\phi$. (Podemos obtener componentes en cualquier dirección conveniente, no solo en los ejes x y y). Definimos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$. Expresado en la forma de ecuación,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad \text{(definición del producto escalar (punto))} \qquad (1.18)$$

También podemos definir $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$, como en la figura 1.25*c*. Así, $\vec{A} \cdot \vec{B} = B(A\cos\phi) = AB\cos\phi$, que es lo mismo que la ecuación (1.18).

El producto escalar es una cantidad escalar, no un vector, y puede ser positivo, negativo o cero. Si ϕ está entre 0° y 90°, $\cos\phi > 0$ y el producto escalar es positivo (figura 1.26*a*). Cuando ϕ está entre 90° y 180°, de modo que cos $\phi < 0$, la componente de $\vec{\boldsymbol{B}}$ paralela a $\vec{\boldsymbol{A}}$ es negativa, y $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ (producto punto o producto escalar) también es negativo (figura 1.26*b*). Por último, cuando $\phi = 90°$, $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ (figura 1.26*c*). *El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre es cero.*

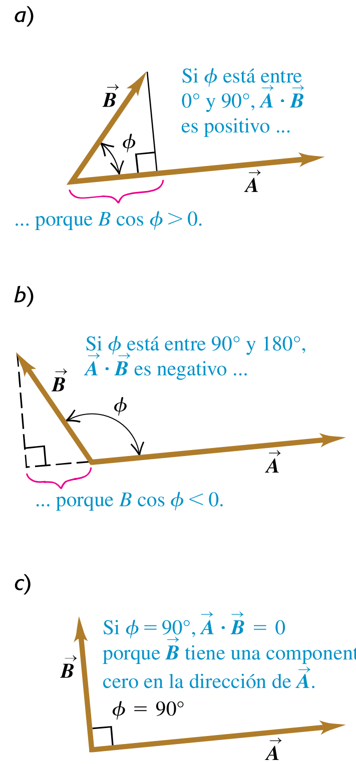
Para dos vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$, cualesquiera $AB \cos\phi = BA \cos\phi$. Esto significa que $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$. El producto escalar obedece la ley conmutativa de la multiplicación; el orden de los dos vectores no importa.

Usaremos el producto escalar en el capítulo 6 para describir el trabajo realizado por una fuerza. Si una fuerza constante $\vec{\boldsymbol{F}}$ se aplica a un cuerpo que sufre un desplazamiento $\vec{\boldsymbol{s}}$, el trabajo W (una cantidad escalar) realizado por la fuerza es

$$W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}}$$

El trabajo efectuado por la fuerza es positivo si el ángulo entre $\vec{\boldsymbol{F}}$ y $\vec{\boldsymbol{s}}$ está entre 0° y 90°, negativo si el ángulo está entre 90° y 180°, y cero si $\vec{\boldsymbol{F}}$ y $\vec{\boldsymbol{s}}$ son perpendiculares. (Este es otro ejemplo de un término con significado especial en física; en el lenguaje cotidiano, "trabajo" no es algo que pueda ser positivo o negativo). En capítulos posteriores usaremos el producto escalar para varios fines, desde calcular potencial eléctrico hasta determinar el efecto de campos magnéticos variables sobre circuitos eléctricos.

1.26 El producto escalar $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = AB\cos\phi$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$.



Cálculo del producto escalar usando componentes

Podemos calcular el producto escalar $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ directamente si conocemos las componentes x, y y z de $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$. Para saber cómo se hace, obtenemos primero los productos escalares de los vectores unitarios. Esto es fácil, pues $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}$ tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí. Por la ecuación (1.18), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} &= \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = (1)(1)\cos 0° = 1 \\ \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} &= \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = (1)(1)\cos 90° = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ahora expresamos $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en términos de sus componentes, realizamos el producto escalar entre estos vectores, así como entre los vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}) \cdot (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= A_xB_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_xB_y\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_xB_z\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_yB_x\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_yB_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_yB_z\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_zB_x\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_zB_y\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_zB_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por las ecuaciones (1.19), vemos que seis de estos nueve términos son cero, y los otros tres que quedan simplemente dan

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad \text{(producto escalar (punto) en términos de sus componentes)} \tag{1.21}$$

Por lo tanto, *el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes.*

El producto escalar permite calcular directamente el ángulo ϕ entre dos vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ cualesquiera cuyas componentes conocemos. En este caso, obtenemos el producto escalar de $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ con la ecuación (1.21). El ejemplo 1.11 de la siguiente página muestra cómo hacer esto.

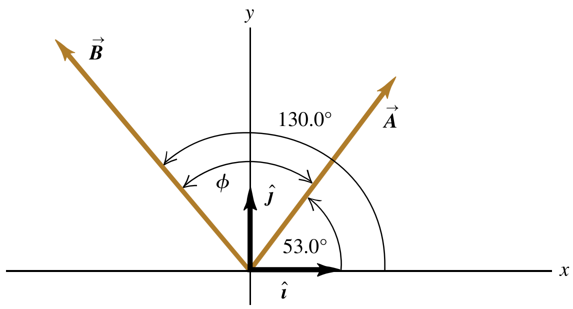
Ejemplo 1.10 Cálculo de un producto escalar

Obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de los dos vectores de la figura 1.27. Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos calcular el producto escalar de dos formas: usando las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos (ecuación 1.18); o usando las componentes de los vectores (ecuación 1.21). Lo haremos de las dos formas, y los resultados se verificarán uno con otro.

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.



EJECUTAR: El ángulo entre los dos vectores es $\phi = 130.0° - 53.0° = 77.0°$, así que la ecuación (1.18) nos da

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi = (4.00)(5.00) \cos 77.0° = 4.50$$

Para usar la ecuación (1.21) necesitamos calcular primero las componentes de los vectores. Los ángulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dan con respecto al eje $+x$, medidos hacia el eje $+y$, de modo que podemos usar las ecuaciones (1.6):

$$A_x = (4.00) \cos 53.0° = 2.407$$
$$A_y = (4.00) \operatorname{sen} 53.0° = 3.195$$
$$B_x = (5.00) \cos 130.0° = -3.214$$
$$B_y = (5.00) \operatorname{sen} 130.0° = 3.830$$

Como en el ejemplo 1.7, dejamos una cifra significativa de más en las componentes y redondearemos al final. La ecuación (1.21) ahora nos da

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= (2.407)(-3.214) + (3.195)(3.830) + (0)(0) = 4.50 \end{aligned}$$

EVALUAR: Ambos métodos dan el mismo resultado, como debe de ser.

Ejemplo 1.11 Cálculo de un ángulo con el producto escalar

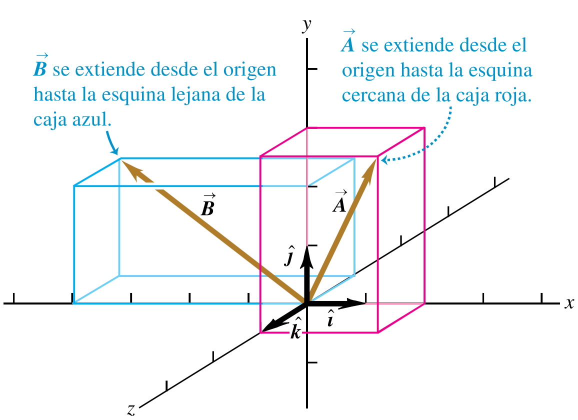
Determine el ángulo entre los vectores

$$\vec{A} = 2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 1.00\hat{k} \qquad \text{y}$$
$$\vec{B} = -4.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath} - 1.00\hat{k}$$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos dan las componentes x, y y z de dos vectores. Nuestra incógnita es el ángulo ϕ entre ellos (figura 1.28). Para calcular esto, resolvemos la ecuación (1.18), $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$, despejando ϕ en términos del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y las magnitudes A y B. Podemos evaluar el producto escalar usando la ecuación (1.21), $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$, y obtenemos los valores de A y B usando la ecuación (1.7).

1.28 Dos vectores en tres dimensiones.



EJECUTAR: Resolvemos la ecuación (1.18) para despejar coseno de ϕ y escribimos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ usando la ecuación (1.21). El resultado es

$$\cos \phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Se puede utilizar esta fórmula para encontrar el ángulo *entre* dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera. En nuestro ejemplo, tenemos que $A_x = 2.00$, $A_y = 3.00$ y $A_z = 1.00$ y $B_x = -4.00$, $B_y = 2.00$ y $B_z = -1.00$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= (2.00)(-4.00) + (3.00)(2.00) + (1.00)(-1.00) \\ &= -3.00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2.00)^2 + (3.00)^2 + (1.00)^2} \\ &= \sqrt{14.00} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (2.00)^2 + (-1.00)^2} \\ &= \sqrt{21.00} \end{aligned}$$

$$\cos \phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3.00}{\sqrt{14.00}\sqrt{21.00}} = -0.175$$

$$\phi = 100°$$

EVALUAR: Para verificar el resultado, observe que el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es negativo, lo cual significa que ϕ está entre 90° y 180° (véase la figura 1.26), que concuerda con nuestra respuesta.

Producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también llamado **producto cruz**, se denota con $\vec{A} \times \vec{B}$. Como su nombre lo indica, el producto vectorial es un vector en sí mismo. Usaremos este producto en el capítulo 10 para describir la torca y la cantidad de movimiento angular; en los capítulos 27 y 28 (volumen 2) lo emplearemos para describir campos magnéticos y fuerzas.

Para definir el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, dibujamos de nuevo los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto (figura 1.29*a*). Así, los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como una cantidad vectorial con dirección perpendicular a este plano (es decir, perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$) y una magnitud igual a AB sen ϕ. Esto es, si $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, entonces,

$$C = AB \text{ sen } \phi \quad \text{(magnitud del producto vectorial (cruz) de } \vec{A} \text{ y } \vec{B}\text{)} \tag{1.22}$$

Medimos el ángulo ϕ de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ tomando el más pequeño de los dos ángulos posibles, de manera que ϕ está entre 0° y 180°. Por lo tanto, sen $\phi \geq 0$ y C en la ecuación (1.22) nunca es negativo, como corresponde a una magnitud vectorial. Observe también que cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos, $\phi = 0°$ o 180°, y $C = 0$. Es decir, *el producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos siempre es cero*. En particular, *el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.*

CUIDADO **Producto vectorial contra producto escalar** Tenga cuidado de no confundir la expresión AB sen ϕ de la magnitud del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ con la expresión similar AB cos ϕ del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Para ver la diferencia entre estas dos expresiones, suponga que variamos el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a la vez que mantenemos constantes sus magnitudes. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud del producto vectorial será cero y el producto escalar será el máximo. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud del producto vectorial será la máxima y el producto escalar será cero.

Siempre hay *dos* direcciones perpendiculares a un plano dado, una a cada lado del plano. Elegimos cuál de estas es la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ como sigue. Imagine que hace girar el vector $\vec{A}$ alrededor de la línea perpendicular hasta alinearlo con $\vec{B}$, eligiendo el ángulo más pequeño entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Gire los dedos de su mano derecha alrededor de la perpendicular, con las puntas de los dedos señalando en la dirección de la rotación; entonces, el pulgar señalará la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$. Esta **regla de la mano derecha** se ilustra en la figura 1.29*a* y describe una segunda manera de visualizar esta regla.

De manera análoga, determinamos la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$ girando $\vec{B}$ hacia $\vec{A}$ como en la figura 1.29*b*. El resultado es un vector *opuesto* al vector $\vec{A} \times \vec{B}$. ¡El producto vectorial *no* es conmutativo! De hecho, para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{1.23}$$

Como hicimos con el producto escalar, podemos interpretar geométricamente la magnitud del producto vectorial. En la figura 1.30*a*, B sen ϕ es la componente del vector $\vec{B}$ que es *perpendicular* a la dirección del vector $\vec{A}$. Por la ecuación (1.22), la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$. La figura 1.30*b* muestra que la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ también es igual a la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$. Observe que la figura 1.30 ilustra el caso en que ϕ está entre 0° y 90°; usted debería dibujar un diagrama similar para ϕ entre 90° y 180°, con la finalidad de comprobar que es válida la misma interpretación geométrica de la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$.

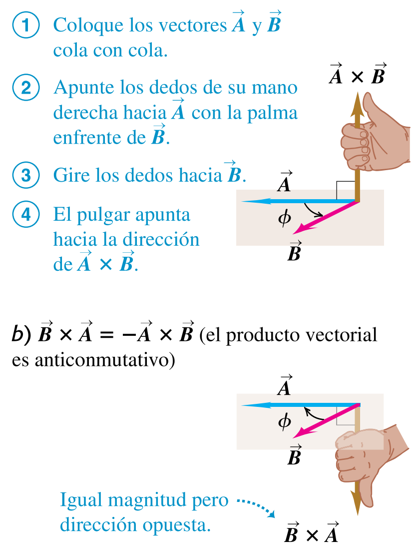
Cálculo del producto vectorial usando componentes

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podemos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar. Primero deducimos la tabla de multiplicación de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, los cuales son

1.29 *a*) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ determinado por la regla de la mano derecha. *b*) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.

a) Uso de la regla de la mano derecha para obtener la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$

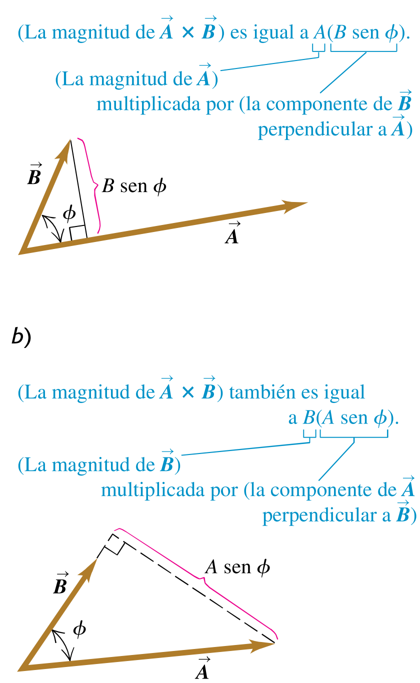
b) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$ (el producto vectorial es anticonmutativo)



1.30 Cálculo de la magnitud AB sen ϕ del producto de dos vectores, $\vec{A} \times \vec{B}$.

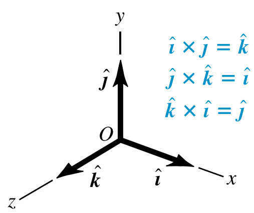
a)

b)

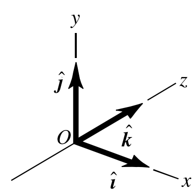


1.31 *a*) Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas de mano derecha, como este. *b*) Nunca usaremos un sistema de coordenadas de mano izquierda (donde $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\hat{\boldsymbol{k}}$, etcétera).

a) Sistema de coordenadas de mano derecha:



b) Sistema de coordenadas de mano izquierda; no lo usaremos aquí.



mutuamente perpendiculares (figura 1.31*a*). El producto vectorial de cualquier vector consigo mismo es cero, así que

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$$

El cero en negritas nos recuerda que cada producto es un *vector* cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a cero y con dirección indefinida. Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23), y la regla de la mano derecha, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} &= -\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} &= -\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} &= -\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Podrá verificar estas ecuaciones observando la figura 1.31*a*.

Ahora expresamos $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes, y ampliamos la expresión del producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}) \times (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \times B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \times B_z\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{1.25}$$

También podemos rescribir los términos individuales en la ecuación (1.25) como $A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (A_xB_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}}$, etcétera. Evaluamos esto usando la tabla de multiplicar de los vectores unitarios en las ecuaciones (1.24) y luego agrupamos términos para obtener

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.26}$$

Por lo tanto, las componentes de $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ están dadas por

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \qquad C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad C_z = A_xB_y - A_yB_x$$
$$\text{(componentes de } \vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) \tag{1.27}$$

El producto vectorial también puede expresarse en forma de determinante:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Si usted no está familiarizado con determinantes, omita el estudio de esta forma.

Si invertimos la dirección del eje z en el sistema de ejes de la figura 1.31*a*, obtenemos el sistema de la figura 1.31*b*. Aquí, como podrá comprobar el lector, la definición del producto vectorial da $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\hat{\boldsymbol{k}}$ en vez de $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}$. De hecho, todos los productos vectoriales de $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}$ tendrían signos opuestos a los de las ecuaciones (1.24). Vemos que hay dos tipos de sistemas de coordenadas, que difieren en los signos de los productos vectoriales de los vectores unitarios. En un sistema de ejes en el cual $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}$, como en la figura 1.31*a*, se conoce como **sistema de mano derecha**. Lo usual es utilizar *solo* sistemas de mano derecha, algo que haremos a lo largo de este libro.

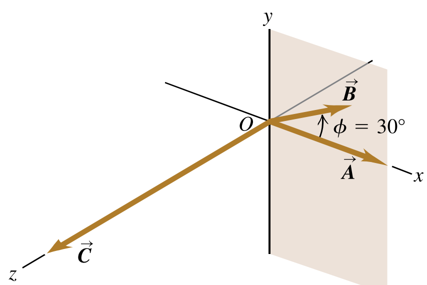
Ejemplo 1.12 Cálculo de un producto vectorial

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje $+x$. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje $+x$ (figura 1.32). Calcule el producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Obtendremos el producto vectorial de dos maneras, lo cual nos ayudará a hacer la verificación de nuestro resultado. Primero usaremos la ecuación (1.22) y la regla de la mano derecha; luego, usaremos las ecuaciones (1.27) para obtener el producto vectorial usando las componentes.

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



EJECUTAR: Por la ecuación (1.22), la magnitud del producto vectorial es

$$AB \operatorname{sen} \phi = (6)(4)(\operatorname{sen} 30°) = 12$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje $+z$ (la dirección del vector unitario $\hat{k}$), por lo tanto, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$.

Para usar las ecuaciones (1.27), primero determinamos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$
$$B_x = 4 \cos 30° = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4 \operatorname{sen} 30° = 2 \qquad B_z = 0$$

Luego, las ecuaciones (1.27) nos dan

$$C_x = (0)(0) - (0)(2) = 0$$
$$C_y = (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0$$
$$C_z = (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12$$

Nuevamente tenemos que $\vec{C} = 12\hat{k}$.

EVALUAR: Ambos métodos dan el mismo resultado. Dependiendo de la situación, uno u otro enfoque será más conveniente.

Evalúe su comprensión de la sección 1.10 El vector $\vec{A}$ tiene magnitud 2 y el vector $\vec{B}$ tiene magnitud 3. Se sabe que el ángulo ϕ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 0°, 90° o 180°. Para cada una de las siguientes situaciones, determine cuál debe ser el valor de ϕ. (En cada situación puede haber más de una respuesta correcta). *a)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$; *b)* $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$; *c)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = 6$; *d)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = -6$; *e)* (Magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) $= 6$.

RESUMEN

Video Tutor Solutions

Cantidades y unidades físicas: Las tres cantidades físicas fundamentales son masa, longitud y tiempo. Las unidades básicas correspondientes del SI son el kilogramo, el metro y el segundo. Las unidades derivadas para otras cantidades físicas son productos o cocientes de las unidades básicas. Las ecuaciones deben ser dimensionalmente congruentes; dos términos solo se pueden sumar cuando tienen las mismas unidades. (Véase los ejemplos 1.1 y 1.2).

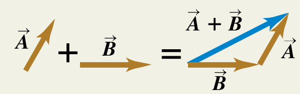
Cifras significativas: La exactitud de una medición se indica con el número de cifras significativas o estableciendo un nivel de incertidumbre. El resultado de un cálculo no suele tener más cifras significativas que los datos de entrada. Cuando solo disponemos de estimaciones burdas como datos de entrada, podemos estimar el orden de la magnitud del resultado. (Véase los ejemplos 1.3 y 1.4).

Cifras significativas en magenta

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{0.424\text{ m}}{2(0.06750\text{ m})} = 3.14$$

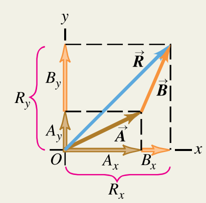
$$123.62 + 8.9 = 132.5$$

Escalares, vectores y suma de vectores: Las cantidades escalares son números y se combinan mediante las reglas habituales de la aritmética. Las cantidades vectoriales tienen tanto dirección como magnitud, y se combinan según las reglas de la suma vectorial. El negativo de un vector tiene la misma magnitud que este pero apunta en la dirección opuesta. (Véase el ejemplo 1.5).



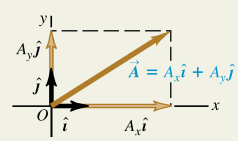
Componentes de vectores y suma de vectores: La suma vectorial puede efectuarse con las componentes de los vectores. La componente x de $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es la suma de las componentes x de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y las componentes y y z se obtienen de forma análoga. (Véase los ejemplos 1.6 a 1.8).

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y \quad (1.10)$$
$$R_z = A_z + B_z$$



Vectores unitarios: Los vectores unitarios señalan direcciones en el espacio y tienen magnitud 1, sin unidades. Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, alineados con los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas rectangular, tienen especial utilidad. (Véase el ejemplo 1.9).

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \quad (1.16)$$

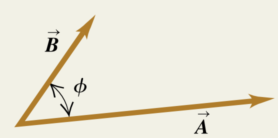


Producto escalar: El producto escalar $C = \vec{A}\cdot\vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una cantidad escalar. Se puede expresar en términos de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo ϕ que forman, o bien, en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto escalar es conmutativo; $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero. (Véase los ejemplos 1.10 y 1.11).

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \quad (1.18)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (1.21)$$

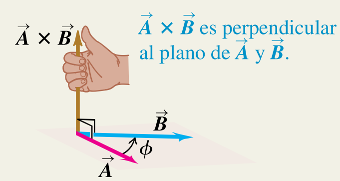
Producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$



Producto vectorial: El producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$, cuya magnitud depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ así como del ángulo ϕ entre los dos vectores. La dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano de los dos vectores multiplicados, según la regla de la mano derecha. Las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ se pueden expresar en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto vectorial no es conmutativo; $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es cero. (Véase el ejemplo 1.12).

$$C = AB\,\text{sen}\,\phi \quad (1.22)$$

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y$$
$$C_y = A_zB_x - A_xB_z \quad (1.27)$$
$$C_z = A_xB_y - A_yB_x$$

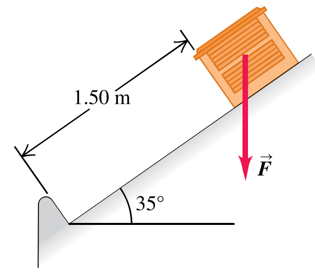


(Magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) = AB sen ϕ

PROBLEMA PRÁCTICO Vectores en el techo

Una unidad de aire acondicionado está sujeta a un techo inclinado a un ángulo de 35° en relación con la horizontal (figura 1.33). Su peso actúa como una fuerza sobre la unidad en dirección vertical hacia abajo. Con el propósito de que la unidad no aplaste las baldosas del tejado, la componente del peso perpendicular al techo no debe ser mayor de 425 N (un Newton, o 1 N, es la unidad de fuerza en el sistema SI, y es igual a 0.2248 lb). *a*) ¿Cuál es el peso máximo permitido de la unidad? *b*) Si los sujetadores fallan, la unidad se deslizará 1.50 m a lo largo del techo antes de que se detenga contra la cornisa. ¿Qué cantidad de trabajo hace la fuerza del peso sobre la unidad durante el deslizamiento si la unidad tiene el peso calculado en el inciso *a*)? Como se describió en la sección 1.10, el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre un objeto que experimenta un desplazamiento $\vec{s}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

1.33 Unidad de aire acondicionado sobre un techo inclinado.



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Este problema implica vectores y sus componentes. ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Qué aspecto(s) del vector peso (magnitud, dirección y/o determinadas componentes) representa la incógnita del inciso *a*)? ¿Qué aspectos debe conocer para resolver el inciso *b*)?
2. Elabore un dibujo con base en la figura 1.33. Agregue los ejes *x* y *y* eligiendo la dirección positiva de cada uno. Sus ejes no tienen que ser horizontal y vertical, pero tienen que ser perpendiculares entre sí. Elija la opción más conveniente.
3. Elija las ecuaciones que utilizará para determinar las incógnitas.

EJECUTAR

4. Use la relación entre la magnitud y dirección de un vector y sus componentes para despejar la incógnita del inciso *a*). Tenga cuidado: ¿El ángulo de 35° es el adecuado para usarlo en la ecuación? (*Sugerencia:* Revise su dibujo).
5. Asegúrese de que su respuesta tenga el número correcto de cifras significativas.
6. Use la definición de producto escalar para despejar la incógnita en el inciso *b*). Una vez más, asegúrese de usar el número correcto de cifras significativas.

EVALUAR

7. ¿Su respuesta del inciso *a*) incluye una componente cuyo valor absoluto es mayor que la magnitud del vector? ¿Es esto razonable?
8. Hay dos maneras de obtener el producto escalar de dos vectores, una de las cuales se usó para resolver el inciso *b*). Verifique su respuesta realizando el cálculo de la otra manera. ¿Se obtiene la misma respuesta?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P1.1 ¿Cuántos experimentos correctos necesitamos para refutar una teoría? ¿Y para demostrarla? Explique su respuesta.
P1.2 Una guía indica que, en una montaña, la pendiente de una vereda es de 120 metros por kilómetro. ¿Cómo expresaría esto con un número sin unidades?
P1.3 Suponga que se le pide calcular la tangente de 5.00 metros. ¿Es esto posible? ¿Por qué?
P1.4 Un contratista de carreteras dice que, al construir la cubierta de un puente, vació 250 yardas de concreto. ¿A qué cree usted que se refería el contratista?
P1.5 ¿Qué estatura tiene usted en centímetros? ¿Cuál es su peso en newtons?
P1.6 En Estados Unidos el National Institute of Standards and Technology (NIST) tiene varias copias exactas del kilogramo estándar internacional. A pesar de una cuidadosa limpieza, estos estándares nacionales aumentan de masa a razón de 1 μg/año en promedio, cuando se comparan cada 10 años aproximadamente con el kilogramo estándar internacional. ¿Es importante este cambio evidente? Explique su respuesta.
P1.7 ¿Qué fenómenos físicos (además de un péndulo o un reloj de cesio) servirían para definir un estándar de tiempo?
P1.8 Describa cómo podría medir el espesor de una hoja de papel con una regla común.
P1.9 La cantidad π = 3.14159… no tiene dimensiones, ya que es un cociente de dos longitudes. Describa otras dos o tres cantidades geométricas o físicas adimensionales.
P1.10 ¿Cuáles son las unidades de volumen? Suponga que otro estudiante le dice que un cilindro de radio *r* y altura *h* tiene un volumen dado por $\pi r^3 h$. Explique por qué esto no es correcto.

P1.11 Cada uno de tres arqueros dispara cuatro flechas hacia un blanco. Las cuatro flechas de Joe quedan: 10 cm arriba, 10 cm abajo, 10 cm a la izquierda y 10 cm a la derecha del centro del blanco. Las cuatro flechas de Moe quedan a menos de 1 cm de un punto que está a 20 cm del centro. Y las cuatro flechas de Flo quedan a menos de 1 cm del centro del blanco. El juez del concurso dice que uno de los arqueros es preciso pero no exacto, otro es exacto pero no es preciso, y el tercero es exacto y preciso. ¿Cuál descripción corresponde a cada arquero? Explique su razonamiento.

P1.12 Una pista de carreras circular tiene un radio de 500 m. ¿Cuál es el desplazamiento de un ciclista que sigue la pista del extremo norte al extremo sur? ¿Y cuando da una vuelta completa? Explique su razonamiento.

P1.13 ¿Puede usted encontrar dos vectores de diferente longitud que sumados den cero? ¿Qué restricciones de longitud son necesarias para que tres vectores tengan una resultante cero? Explique su razonamiento.

P1.14 A veces hablamos de la "dirección del tiempo", del pasado al futuro. ¿Eso significa que el tiempo es un vector? Explique su razonamiento.

P1.15 Los controladores de tráfico aéreo dan instrucciones a los pilotos de la dirección hacia donde deben volar. Tales instrucciones se denominan "vectores". Si estas son las únicas instrucciones que se dan, ¿se está usando correctamente el término "vector"? ¿Por qué?

P1.16 ¿Puede encontrar un vector de magnitud cero cuyas componentes sean distintas de cero? Explique su respuesta. ¿La magnitud de un vector puede ser menor que la magnitud de cualquiera de sus componentes? Explique su respuesta.

P1.17 *a*) ¿Tiene sentido decir que un vector es *negativo*? ¿Por qué? *b*) ¿Tiene sentido decir que un vector es el negativo de otro? ¿Por qué? ¿Esta respuesta contradice lo que contestó en el inciso *a*)?

P1.18 Si $\vec{C}$ es la suma vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, ¿qué deberá ser cierto acerca de las direcciones y magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si $C = A + B$? ¿Qué deberá ser cierto acerca de las direcciones y magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si $C = 0$?

P1.19 Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores distintos de cero, ¿es posible que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y $\vec{A} \times \vec{B}$ sean *ambos* cero? Explique su respuesta.

P1.20 ¿Qué resulta de $\vec{A} \cdot \vec{A}$, el producto escalar de un vector consigo mismo? ¿Y de $\vec{A} \times \vec{A}$, el producto vectorial de un vector consigo mismo?

P1.21 Sea $\vec{A}$ cualquier vector distinto de cero. ¿Por qué $\vec{A}/A$ es un vector unitario y qué dirección tiene? Si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y el eje $+x$, explique por qué $(\vec{A}/A) \cdot \hat{\imath}$ se llama el *coseno director* de dicho eje.

P1.22 Indique cuáles de las siguientes son operaciones matemáticas correctas: *a*) $\vec{A} \cdot (\vec{B} - \vec{C})$; *b*) $(\vec{A} - \vec{B}) \times \vec{C}$; *c*) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$; *d*) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$; *e*) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$? En cada caso, justifique su respuesta.

P1.23 Considere los dos productos vectoriales $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$. Dé un ejemplo que ilustre la regla general de que estos dos productos vectoriales no tienen la misma magnitud o dirección. ¿Puede elegir los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de modo que esos dos productos vectoriales sí sean iguales? Si es así, dé un ejemplo.

P1.24 Demuestre que, sin importar lo que sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$. (*Sugerencia:* No busque una demostración matemática compleja. Más bien, revise la definición de la dirección del producto cruz).

P1.25 *a*) Si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, ¿necesariamente se concluye que $A = 0$ o que $B = 0$? Explique su respuesta. *b*) Si $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$, ¿necesariamente se concluye que $A = 0$ o que $B = 0$? Explique su respuesta.

P1.26 Si $\vec{A} = \mathbf{0}$ para un vector en el plano xy, ¿se concluye que $A_x = -A_y$? ¿Qué podría decir acerca de A_x y de A_y?

EJERCICIOS

Sección 1.3 Estándares y unidades

Sección 1.4 Consistencia y conversiones de unidades

1.1 • A partir de la definición 1 in = 2.54 cm, determine *a*) cuántos kilómetros hay en 1.00 milla y *b*) cuántos pies hay en 1.00 km.

1.2 •• Según la etiqueta de un frasco de aderezo para ensalada, el volumen del contenido es 0.473 litros (L). Use solo las conversiones 1 L = 1000 cm^3 y 1 in = 2.54 cm para expresar dicho volumen en pulgadas cúbicas.

1.3 •• ¿Cuántos nanosegundos tarda la luz en viajar 1.00 ft en el vacío? (Este resultado es una cantidad útil de recordar).

1.4 •• La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3. ¿Cuál es su equivalencia en kilogramos por metro cúbico?

1.5 • El motor más potente que había para el automóvil clásico Chevrolet Corvette Sting Ray modelo 1963 desarrollaba 360 caballos de fuerza y tenía un desplazamiento de 327 pulgadas cúbicas. Exprese este desplazamiento en litros (L) usando solo las conversiones 1 L = 1000 cm^3 y 1 in = 2.54 cm.

1.6 •• Un campo cuadrado que mide 100.0 m por 100.0 m tiene un área de 1.00 hectárea. Un acre tiene un área de 43,600 ft^2. Si un campo tiene un área de 12.0 acres, ¿cuál es su equivalencia en hectáreas?

1.7 • ¿Cuántos años más tendrá usted dentro de 1.00 mil millones de segundos? (Suponga que un año tiene 365 días).

1.8 • Mientras va conduciendo en un país extranjero, observa un letrero que indica el límite de velocidad en una carretera como 180,000 estadios (furlongs) por quincena. ¿Cuánto es esto en millas por hora? (Un furlong es $\frac{1}{8}$ de milla, y una quincena equivale a 14 días. Originalmente, el estadio se refería a la longitud de un surco arado).

1.9 • Cierto automóvil híbrido que consume poco combustible tiene un rendimiento de gasolina de 55.0 mpg (millas por galón). *a*) Si usted va manejando dicho auto en Europa y quiere comparar su rendimiento con el de otros autos europeos, exprese tal rendimiento en km/L (L = litro). Utilice los factores de conversión del apéndice E. *b*) Si el depósito de gasolina de este automóvil tiene una capacidad de 45 L, ¿cuántas veces deberá llenar el depósito de gasolina para conducir 1500 km?

1.10 • Las conversiones que siguen son comunes en física, además de muy útiles. *a*) Use 1 mi = 5280 ft y 1 h = 3600 s para convertir 60 mph a unidades de ft/s. *b*) La aceleración de un objeto en caída libre es de 32 ft/s^2. Use 1 ft = 30.48 cm para expresar esta aceleración en unidades de m/s^2. *c*) La densidad del agua es de 1.0 g/cm^3. Convierta esta densidad a unidades de kg/m^3.

1.11 •• **Neptunio.** En el otoño de 2002, un grupo de científicos de Los Alamos National Laboratory determinó que la masa crítica del neptunio 237 es de unos 60 kg. La masa crítica de un material fisionable es la cantidad mínima que debe reunirse para iniciar una reacción en cadena. Este elemento tiene una densidad de 19.5 g/cm^3. ¿Cuál será el radio de una esfera de este material que tiene dicha masa crítica?

1.12 • BIO *a*) La dosis diaria recomendada (RDA, por las siglas de *recommended daily allowance*) del metal traza magnesio es de 410 mg/día para los hombres. Exprese esta cantidad en μg/día. *b*) La RDA del aminoácido lisina es de 12 mg por kg de peso corporal. ¿Cuántos gramos diarios debe recibir un adulto de 75 kg de peso? *c*) Una tableta multivitamínica típica contiene 2.0 mg de vitamina B_2 (riboflavina) y la RDA recomendada es de 0.0030 g/día. ¿Cuántas de estas tabletas debe tomar a diario una persona para obtener la cantidad adecuada de esta vitamina, suponiendo que no tiene ninguna otra fuente de abasto? *d*) La RDA para el elemento traza selenio es de 0.000070 g/día. Exprese esta dosis en mg/día.

Sección 1.5 Incertidumbre y cifras significativas

1.13 •• La figura 1.7 muestra el resultado de un error inaceptable en el punto de parada de un tren. *a*) Si un tren viaja 890 km de Berlín a París y luego rebasa el fin de la vía 10 m, ¿cuál será el error de aproximación en la distancia total recorrida? *b*) ¿Sería correcto escribir la distancia total recorrida por el tren como 890,010 m? Explique su respuesta.

1.14 • Con una regla graduada de madera, usted determina que un trozo rectangular de lámina mide 12 mm de longitud; por otro lado, usa un micrómetro para medir el ancho del trozo y obtiene 5.98 mm. Conteste las siguientes preguntas con las cifras significativas correctas. *a*) ¿Qué área tiene el rectángulo? *b*) ¿Qué razón ancho/largo tiene el rectángulo? *c*) ¿Qué perímetro tiene el rectángulo? *d*) ¿Cuál es la diferencia entre la longitud y la anchura? *e*) ¿Cuál es la razón longitud/anchura?

1.15 •• Un valor de aproximación útil y fácil de recordar para el número de segundos en un año es $\pi \times 10^7$. Determine el error de aproximación en este valor. (Hay 365.24 días en un año).

Sección 1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

1.16 • ¿Cuántos galones de gasolina se consumen en Estados Unidos en un día? Suponga que hay dos automóviles por cada tres personas, que cada auto recorre en promedio 10,000 millas por año, y que el auto promedio rinde 20 millas por galón.

1.17 •• **BIO** Un hombre más bien ordinario de mediana edad está en el hospital para realizarse un chequeo de rutina. La enfermera escribe la cantidad de 200 en el expediente médico, pero olvida anotar las unidades. ¿Cuál de las siguientes cantidades sería posible que representaran ese valor de 200? *a*) Su masa en kilogramos; *b*) su estatura en metros; *c*) su estatura en centímetros; *d*) su estatura en milímetros; *e*) su edad en meses.

1.18 • ¿Cuántas semillas de maíz se necesitan para llenar una botella de bebida gaseosa de 2 L?

1.19 • ¿Cuántas palabras hay en este libro?

1.20 • **BIO** Cuatro astronautas están en una estación espacial esférica. *a*) Si, como suele ocurrir, cada uno de ellos inhala cerca de 500 cm^3 de aire en cada respiración, ¿aproximadamente qué volumen de aire (en metros cúbicos) respiran estos astronautas en un año? *b*) ¿Qué diámetro (en metros) debería tener la estación espacial para contener todo este aire?

1.21 • **BIO** ¿Cuántas veces parpadea un ser humano común durante toda su vida?

1.22 • **BIO** ¿Cuántas veces late el corazón de una persona en su vida? ¿Cuántos galones de sangre bombea? (Estime que el corazón bombea 50 cm^3 de sangre en cada latido).

1.23 • En la ópera *El anillo de los Nibelungos*, de Wagner, la diosa Freya es rescatada con una pila de oro con la altura y anchura suficientes para ocultarla. Estime el valor monetario de esta pila. La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3, y su valor es aproximadamente de $10 por gramo (aunque esto varía).

1.24 • Usted utiliza agua para diluir cantidades pequeñas de sustancias químicas en el laboratorio, gota a gota. ¿Cuántas gotas de agua hay en una botella de 1.0 L? (*Sugerencia:* Comience por calcular el diámetro de una gota de agua).

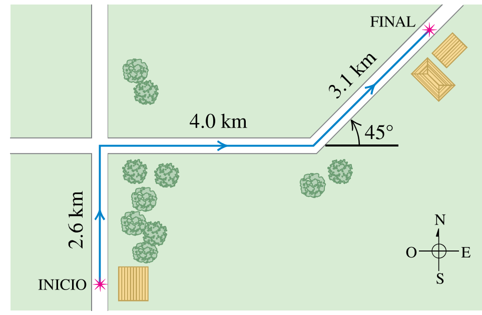
1.25 • ¿Cuántas pizzas consumen los estudiantes de su escuela cada año escolar?

Sección 1.7 Vectores y suma de vectores

1.26 •• Al oír el cascabel de una serpiente, usted realiza dos desplazamientos rápidos de 1.8 m y 2.4 m. Realice dibujos (a escala aproximada) que muestren cómo tales desplazamientos podrían dar una resultante de magnitud *a*) 4.2 m, *b*) 0.6 m, *c*) 3.0 m.

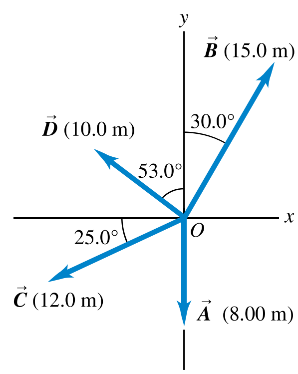
1.27 •• Un empleado del servicio postal conduce su camión por la ruta de la figura E1.27. Determine la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante dibujando un diagrama a escala. (Véase el ejercicio 1.34 donde se enfoca de otra manera este problema).

Figura **E1.27**



1.28 •• Con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura E1.28, use un dibujo a escala para obtener la magnitud y la dirección de *a*) la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B}$ y *b*) la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. Con base en sus respuestas, determine la magnitud y la dirección de *c*) $-\vec{A} - \vec{B}$ y *d*) $\vec{B} - \vec{A}$. (El ejercicio 1.35 enfoca el problema de otra manera).

Figura **E1.28**



1.29 •• Un espeleólogo está explorando una cueva y sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m 45° al este del sur, y después 280 m 30° al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento sin medir, vuelve al punto inicial. Con un diagrama a escala, determine la magnitud y la dirección del cuarto desplazamiento. (El problema 1.69 enfoca de manera distinta este problema).

Sección 1.8 Componentes de vectores

1.30 •• Sea el ángulo θ el que forma el vector $\vec{A}$ con el eje $+x$, medido en sentido antihorario a partir de ese eje. Obtenga el ángulo θ para un vector que tiene las siguientes componentes: *a*) $A_x = 2.00$ m, $A_y = -1.00$ m; *b*) $A_x = 2.00$ m, $A_y = 1.00$ m; *c*) $A_x = -2.00$ m, $A_y = 1.00$ m; *d*) $A_x = -2.00$ m, $A_y = -1.00$ m.

1.31 • Calcule las componentes *x* y *y* de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la figura E1.28.

1.32 • El vector $\vec{A}$ tiene una dirección de 34.0° en sentido horario a partir del eje $-y$. La componente *x* de $\vec{A}$ es $A_x = -16.0$ m. *a*) ¿Cuál es la componente y de $\vec{A}$? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{A}$?

1.33 • El vector $\vec{A}$ tiene una componente *y* $A_y = +13.0$ m. $\vec{A}$ tiene un ángulo de 32.0° en sentido antihorario a partir del eje $+y$. *a*) ¿Cuál es la componente *x* de $\vec{A}$? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{A}$?

1.34 •• Un empleado del servicio postal conduce su camión por la ruta de la figura E1.27. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección de su desplazamiento resultante. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.35 • Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura E1.28, use el método de componentes para obtener la magnitud y la dirección de *a*) la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) la suma vectorial $\vec{B} + \vec{A}$; *c*) la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$; *d*) la diferencia vectorial $\vec{B} - \vec{A}$.

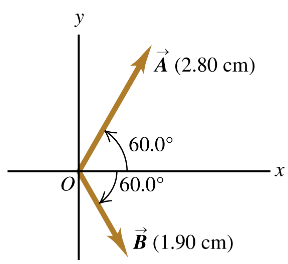
1.36 • Calcule la magnitud y la dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes: *a*) $A_x = -8.60$ cm, $A_y = 5.20$ cm; *b*) $A_x = -9.70$ m, $A_y = -2.45$ m; *c*) $A_x = 7.75$ km, $A_y = -2.70$ km.

1.37 •• Un profesor de física desorientado conduce 3.25 km al norte, 2.90 km al oeste y 1.50 km al sur. Calcule la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, usando el método de componentes. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.38 •• En un plano vertical, dos cuerdas ejercen fuerzas de igual magnitud sobre un peso colgante, pero tiran con un ángulo de 86.0° entre sí. ¿Qué tirón ejerce cada cuerda si el tirón resultante es de 372 N directamente hacia arriba?

1.39 •• El vector $\vec{A}$ mide 2.80 cm y está 60.0° sobre el eje x en el primer cuadrante. El vector $\vec{B}$ mide 1.90 cm y está 60.0° bajo el eje x en el cuarto cuadrante (figura E1.39). Utilice las componentes para obtener la magnitud y la dirección de *a*) $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) $\vec{A} - \vec{B}$; c) $\vec{B} - \vec{A}$. En cada caso, dibuje la suma o resta de vectores, y demuestre que sus respuestas numéricas concuerdan cualitativamente con el dibujo.

Figura **E1.39**



Sección 1.9 Vectores unitarios

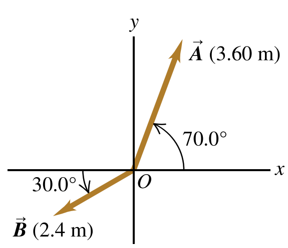
1.40 • En cada caso, obtenga las componentes x y y del vector $\vec{A}$: *a*) $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.3\hat{\jmath}$; *b*) $\vec{A} = 11.2\hat{\jmath} - 9.91\hat{\imath}$; *c*) $\vec{A} = -15.0\hat{\imath} + 22.4\hat{\jmath}$; *d*) $\vec{A} = 5.0\hat{B}$, donde $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$.

1.41 •• Escriba cada uno de los vectores de la figura E1.28 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

1.42 •• Dados dos vectores $\vec{A} = 4.00\hat{\imath} + 7.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 5.00\hat{\imath} - 2.00\hat{\jmath}$, *a*) calcule las magnitudes de cada uno; *b*) escriba una expresión para $\vec{A} - \vec{B}$ usando vectores unitarios; *c*) obtenga la magnitud y la dirección de la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. *d*) Dibuje un diagrama vectorial que muestre $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$, y demuestre que su diagrama coincide cualitativamente con su respuesta del inciso *c*).

1.43 •• *a*) Escriba cada uno de los vectores de la figura E1.43 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. *b*) Utilice vectores unitarios para expresar el vector $\vec{C}$, donde $\vec{C} = 3.00\vec{A} - 4.00\vec{B}$. *c*) Determine la magnitud y la dirección de $\vec{C}$.

Figura **E1.43**



1.44 •• *a*) ¿El vector $(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ es unitario? Justifique su respuesta. *b*) ¿Un vector unitario puede tener una componente con magnitud mayor a la unidad? ¿Puede tener alguna componente negativa? En cada caso, justifique su respuesta. *c*) Si $\vec{A} = a(3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath})$, donde a es una constante, determine el valor de a que convierte a $\vec{A}$ en un vector unitario.

Sección 1.10 Productos de vectores

1.45 • Para los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura E1.28, obtenga los productos escalares *a*) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; *b*) $\vec{B} \cdot \vec{C}$; *c*) $\vec{A} \cdot \vec{C}$.

1.46 •• *a*) Obtenga el producto escalar de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ descritos en el ejercicio 1.42. *b*) Obtenga el ángulo entre estos dos vectores.

1.47 •• Calcule el ángulo entre estos pares de vectores:

a) $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2.00\hat{\imath} - 3.00\hat{\jmath}$

b) $\vec{A} = 3.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 10.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$

c) $\vec{A} = -4.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 7.00\hat{\imath} + 14.00\hat{\jmath}$

1.48 •• Obtenga el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ (expresado en vectores unitarios) de los dos vectores del ejercicio 1.42. ¿Cuál es la magnitud del producto vectorial?

1.49 • Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{D}$ de la figura E1.28, *a*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{D}$; *b*) calcule la magnitud y la dirección de $\vec{D} \times \vec{A}$.

1.50 • Para los dos vectores de la figura E1.39, *a*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$; *b*) obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$.

1.51 • Para los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura E1.43, *a*) obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$; *b*) obtenga la magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

1.52 • El vector $\vec{A}$ tiene 3.50 cm de longitud y está dirigido hacia esta página. El vector $\vec{B}$ apunta de la esquina inferior derecha de esta página a la esquina superior izquierda. Defina un sistema de coordenadas adecuado de mano derecha, y obtenga las tres componentes del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, medido en cm^2. Muestre en un diagrama su sistema de coordenadas y los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} \times \vec{B}$.

1.53 • Dados dos vectores $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 4.00\hat{k}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{\imath} + 1.00\hat{\jmath} - 3.00\hat{k}$, realice lo siguiente. *a*) Obtenga la magnitud de cada vector. *b*) Escriba una expresión para la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$ usando vectores unitarios. *c*) Obtenga la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$. ¿Es la misma magnitud de $\vec{B} - \vec{A}$? Explique su respuesta.

PROBLEMAS

1.54 • Un acre es una unidad de agrimensura que todavía se emplea mucho, tiene una longitud de un estadio o furlong $\left(\frac{1}{8}\text{ de mi}\right)$ y su anchura es un décimo de su longitud. *a*) ¿Cuántos acres hay en una milla cuadrada? *b*) ¿Cuántos pies cuadrados hay en un acre? Véase el apéndice E. *c*) Un acre-pie es el volumen de agua que cubriría un acre de terreno plano hasta 1 ft de profundidad. ¿Cuántos galones hay en 1 acre-pie?

1.55 •• **Un planeta similar a la Tierra.** En enero de 2006, unos astrónomos informaron el descubrimiento de un planeta comparable en tamaño a la Tierra, el cual orbita otra estrella y tiene una masa de casi 5.5 veces la masa terrestre. Se cree que está compuesto por una mezcla de piedra y hielo, de manera similar a Neptuno. Si este planeta tiene la misma densidad que Neptuno (1.76 g/cm^3), ¿cuál será su radio expresado en *a*) kilómetros y *b*) como múltiplo del radio terrestre? Consulte el apéndice F para más datos astronómicos.

1.56 •• **El máser de hidrógeno.** Las ondas de radio generadas por un máser de hidrógeno pueden servir como estándar de frecuencia. La frecuencia de estas ondas es de 1,420,405,751.786 hertz. (Un hertz es un ciclo por segundo). Un reloj controlado por un máser de hidrógeno tiene un error de 1 s en 100,000 años. En las siguientes preguntas, use solo tres cifras significativas. (El gran número de cifras significativas dadas para la frecuencia tan solo ilustra la notable exactitud con que se midió). *a*) ¿Cuánto dura un ciclo de la onda de radio? *b*) ¿Cuántos ciclos ocurren en 1 h? *c*) ¿Cuántos ciclos habrán pasado durante la edad de la Tierra, estimada en 4.6×10^9 años? *d*) ¿Qué error en segundos tendría un reloj de máser de hidrógeno después de un lapso semejante?

1.57 • BIO **Respiración de oxígeno.** La densidad del aire en condiciones estándar de laboratorio es de 1.29 kg/m^3, y aproximadamente el 20% de ese aire es oxígeno. Normalmente, las personas inhalan medio litro de aire por respiración. *a*) ¿Cuántos gramos de oxígeno respira una persona en un día? *b*) Si el aire se almacena sin comprimirlo en un tanque, ¿qué longitud tiene cada lado del tanque?

1.58 ••• Una lámina rectangular de aluminio tiene 7.60 ± 0.01 cm de largo y 1.90 ± 0.01 cm de ancho. *a*) Obtenga el área y la incertidumbre de esta para el rectángulo. *b*) Verifique que la incertidumbre fraccionaria del área sea igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. (Este es un resultado general: véase el problema de desafío 1.98).

1.59 ••• Conforme usted come galletas de chocolate de una bolsa, observa que cada galleta es un disco circular con un diámetro de 8.50 ± 0.02 cm y un grosor de 0.050 ± 0.005 cm. *a*) Obtenga el volumen promedio y su incertidumbre para una galleta. *b*) Obtenga la razón entre el diámetro y el grosor, así como la incertidumbre de esta razón.

1.60 • **BIO** Los tejidos biológicos normalmente contienen un 98% de agua. Considerando que la densidad del agua es de 1.0×10^3 kg/m^3, estime la masa de *a*) el corazón de un ser humano adulto; *b*) una célula de 0.5 μm de diámetro; *c*) una abeja.

1.61 • **BIO** Estime cuántos átomos hay en su cuerpo. (*Sugerencia:* Con base en sus conocimientos de biología y química, ¿cuáles son los tipos de átomos más comunes en su cuerpo? ¿Qué masa tiene cada tipo? El apéndice D da la masa atómica de diversos elementos, medida en unidades de masa atómica; el valor de una unidad de masa atómica (1 u) se incluye en el apéndice E).

1.62 ••• ¿Cuántos billetes de un dólar tendría que apilar para llegar hasta la Luna? ¿Eso sería más barato que construir y enviar ahí una nave espacial? (*Sugerencia:* Comience doblando un billete de un dólar para saber cuántos de sus espesores hacen 1.0 mm).

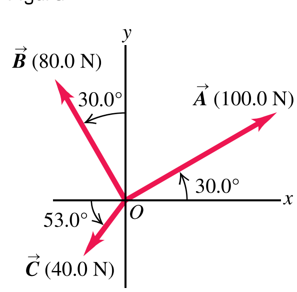
1.63 ••• ¿Cuánto costaría tapizar todo Estados Unidos (incluyendo Alaska y Hawai) con billetes de un dólar? ¿Cuánto tendría que aportar cada estadounidense para ello?

1.64 • **Estrellas en el Universo.** Los astrónomos a menudo dicen que hay más estrellas en el Universo que granos de arena en todas las playas de la Tierra. *a*) Puesto que un grano de arena común tiene un diámetro aproximado de 0.2 mm, estime el número de granos de arena en todas las playas de la Tierra y, por lo tanto, el número aproximado de estrellas en el Universo. Sería útil consultar un atlas y hacer mediciones. *b*) Como una galaxia ordinaria contiene aproximadamente 100,000 millones de estrellas y hay más de 100,000 millones de galaxias en el Universo conocido, estime el número de estrellas en el Universo y compare este número con el resultado que obtuvo en el inciso *a*).

1.65 ••• Dos trabajadores tiran horizontalmente de una caja pesada, aunque uno de ellos tira dos veces más fuerte que el otro. El tirón más fuerte se aplica 25.0° al oeste del norte, y la resultante de estos dos tirones es de 460.0 N directamente hacia el norte. Use las componentes vectoriales para calcular la magnitud de cada tirón y la dirección del tirón más débil.

1.66 •• Tres cuerdas horizontales tiran de una piedra grande enterrada en el suelo, produciendo los vectores de fuerza $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que se ilustran en la figura P1.66. Obtenga la magnitud y la dirección de una cuarta fuerza aplicada a la piedra que haga que la suma vectorial de las cuatro fuerzas sea cero.

Figura **P1.66**



1.67 •• Le han pedido programar un brazo robótico de una línea de ensamble que se mueve en el plano *xy*. Su primer desplazamiento es $\vec{A}$; el segundo es $\vec{B}$, de magnitud 6.40 cm y dirección 63.0° medida en el sentido del eje $+x$ al eje $-y$. La resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ de los dos desplazamientos también debe tener una magnitud de 6.40 cm, pero una dirección de 22.0° medida en el sentido del eje $+x$ al eje $+y$. *a*) Dibuje el diagrama de la suma de estos vectores, aproximadamente a escala. *b*) Obtenga las componentes de $\vec{A}$. *c*) Obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{A}$.

1.68 ••• **Aterrizaje de emergencia.** Un avión sale del aeropuerto de Galisteo y vuela 170 km en una dirección 68° al este del norte; luego, cambia el rumbo y vuela 230 km a 48° al sur del este, para efectuar inmediatamente un aterrizaje de emergencia en un potrero. ¿En qué dirección y qué distancia deberá volar una cuadrilla de rescate enviada por el aeropuerto para llegar directamente al avión averiado?

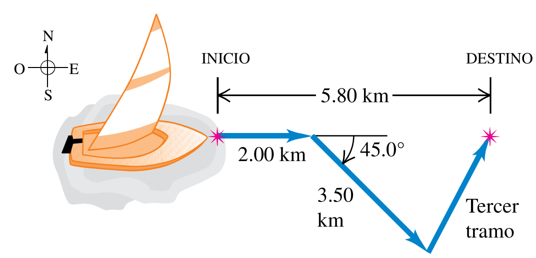
1.69 ••• El espeleólogo del ejercicio 1.29 está explorando una cueva. Sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m en una dirección 45° al este del sur, y después 280 m a 30° al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento sin medir, vuelve al punto inicial. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección del cuarto desplazamiento. Dibuje el diagrama de la suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

1.70 •• *a*) Obtenga la magnitud y la dirección del vector $\vec{R}$ que es la suma de los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura E1.28. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{R}$ a partir de los tres vectores. *b*) Obtenga la magnitud y la dirección del vector $\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}$. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{S}$ a partir de los tres vectores.

1.71 •• Un cohete enciende dos motores simultáneamente. Uno produce un empuje de 480 N directamente hacia delante; mientras que el otro da un empuje de 513 N, 32.4° arriba de la dirección hacia delante. Obtenga la magnitud y la dirección (relativa a la dirección hacia delante) de la fuerza resultante que estos motores ejercen sobre el cohete.

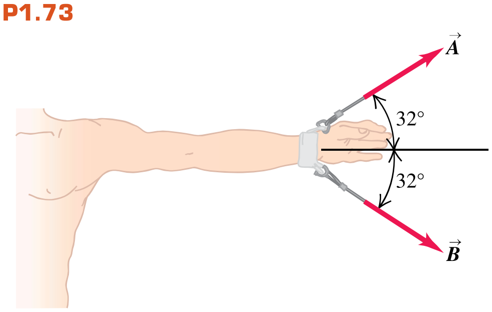
1.72 •• Un marinero en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, luego 3.50 km al sureste y después otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es 5.80 km directamente al este del punto inicial (figura P1.72). Determine la magnitud y la dirección del tercer tramo. Dibuje el diagrama de suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

Figura **P1.72**



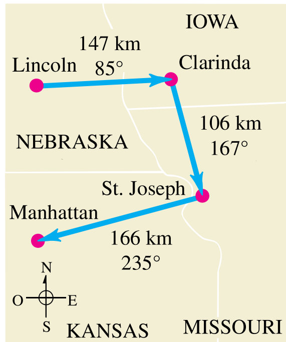
1.73 ••• **BIO** **Hombro dislocado.** Un paciente con una luxación en un hombro es colocado en un aparato de tracción como el que se ilustra en la figura P1.73. Los tirones $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes iguales y deben combinarse para producir una fuerza de tracción hacia fuera de 5.60 N. ¿De qué magnitud deben ser estos tirones?

Figura **P1.73**



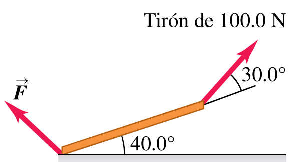
1.74 ••• En un vuelo de entrenamiento, un piloto estudiante vuela de Lincoln, Nebraska, a Clarinda, Iowa; luego a Saint Joseph, Missouri, y después a Manhattan, Kansas (figura P1.74). Las direcciones se muestran en relación con el norte: 0° es norte, 90° es este, 180° es sur y 270° es oeste. Use el método de componentes para calcular *a*) la distancia que debe volar para regresar a Lincoln desde Manhattan; y *b*) la dirección (relativa al norte) que debe seguir. Ilustre su solución con un diagrama vectorial.

Figura **P1.74**



1.75 •• **Equilibrio.** Decimos que un objeto está en *equilibrio* cuando todas las fuerzas sobre él se estabilizan (suman cero). La figura P1.75 ilustra una viga que pesa 124 N y que está apoyada en equilibrio por un tirón de 100.0 N y una fuerza $\vec{F}$ en el piso. La tercera fuerza sobre la viga es su peso de 124 N que actúa verticalmente hacia abajo. *a*) Utilice componentes de vectores para encontrar la magnitud y la dirección de $\vec{F}$. *b*) Verifique lo razonable de su respuesta en el inciso *a*) elaborando una solución gráfica aproximadamente a escala.

Figura **P1.75**



1.76 ••• **Regreso.** Un explorador en las espesas junglas del África ecuatorial sale de su choza. Camina 40 pasos al noreste, 80 pasos a 60° al norte del oeste y 50 pasos al sur. Suponga que todos sus pasos tienen la misma longitud. *a*) Dibuje, aproximadamente a escala, los tres vectores y su resultante. *b*) Sálvelo de perderse irremediablemente en la jungla indicándole el desplazamiento, calculado con el método de componentes, que lo llevará de regreso a su choza.

1.77 ••• Un diseñador está creando un nuevo logotipo para el sitio Web de su compañía. En el programa que está usando, cada pixel de un archivo de imagen tiene coordenadas (x, y), donde el origen (0, 0) está en la esquina superior izquierda de la imagen, el eje $+x$ apunta a la derecha y el eje $+y$ apunta hacia abajo. Las distancias se miden en pixeles. *a*) El diseñador traza una línea del punto (10, 20) al punto (210, 200). Quiere trazar una segunda línea que parta de (10, 20), tenga 250 pixeles de longitud y forme un ángulo de 30° medido en sentido horario a partir de la primera línea. ¿En qué punto debería terminar la segunda línea? Dé su respuesta al pixel más próximo. *b*) Ahora el diseñador traza una flecha que conecta el extremo inferior derecho de la primera línea con el extremo inferior derecho de la segunda. Determine la longitud y la dirección de esta flecha. Elabore un diagrama que muestre las tres líneas.

1.78 ••• Un barco zarpa de la isla de Guam y navega 285 km a 40.0° al norte del oeste. ¿Qué rumbo deberá tomar ahora y qué distancia deberá navegar para que su desplazamiento resultante sea de 115 km directamente al este de Guam?

1.79 •• BIO **Huesos y músculos.** El antebrazo de un paciente en terapia pesa 20.5 N y levanta un peso de 112.0 N. Estas dos fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo. Las únicas otras fuerzas apreciables que actúan sobre el antebrazo provienen del músculo bíceps (que actúa perpendicular al antebrazo) y la fuerza en el codo. Si el bíceps produce un tirón de 232 N cuando el antebrazo se alza 43° sobre la horizontal, determine la magnitud y la dirección de la fuerza que el codo ejerce sobre el antebrazo. (La suma de la fuerza del codo y la del bíceps debe equilibrar el peso del brazo y el peso que carga, así que su resultante debe ser 132.5 N hacia arriba).

1.80 ••• Usted tiene hambre y decide visitar su restaurante de comida rápida preferido del vecindario. Sale de su apartamento, baja 10 pisos en el elevador (cada piso tiene 3.0 m de altura) y camina 15 m al sur hacia la salida del edificio. Luego camina 0.2 km al este, da vuelta al norte y camina 0.1 km hasta la entrada del restaurante. *a*) Determine el desplazamiento entre su apartamento y el restaurante. Use notación con vectores unitarios en su respuesta, dejando bien claro qué sistema de coordenadas eligió. *b*) ¿Qué distancia recorrió por el camino que siguió de su apartamento al restaurante y qué magnitud tiene el desplazamiento que calculó en el inciso *a*)?

1.81 •• Para seguir un mapa del tesoro, usted inicia en un viejo roble. Primero camina 825 m directamente al sur, luego da vuelta y camina 1.25 km a 30.0° al oeste del norte y, por último, camina 1.00 km a 40.0° al norte del este, donde usted encuentra el tesoro: ¡una biografía de Isaac Newton! *a*) Para regresar al viejo roble, ¿en qué dirección debería seguir y qué distancia tendrá que caminar? Utilice componentes para resolver este problema. *b*) Para saber si su cálculo en el inciso *a*) es razonable, verifíquelo con una solución gráfica elaborada aproximadamente a escala.

1.82 •• Un poste está a 52.0 m de donde usted se encuentra de pie, en una dirección 37.0º al norte del este. Un segundo poste se encuentra al sur de usted. ¿Cuál es la distancia entre el segundo poste y usted, si la distancia entre los dos postes es de 80.0 m?

1.83 •• Un perro corre en un campo 12.0 m hacia el este y luego 28.0 m a 50.0° al oeste del norte. ¿Qué distancia y en qué dirección debe correr el perro para terminar a 10.0 m al sur del punto inicial?

1.84 ••• Ricardo y Jane están de pie bajo un árbol en medio de un potrero. Después sigue una discusión y se separan en direcciones diferentes. Ricardo camina 26.0 m a 60.0° al oeste del norte. Jane camina 16.0 m a 30.0° al sur del oeste. Luego se detienen y dan vuelta para verse de frente. *a*) ¿Cuál es la distancia entre ellos? *b*) En qué dirección debe caminar Ricardo para ir directamente hacia Jane?

1.85 ••• John, Paul y George se detienen en un sembradío de fresas. Paul está a 14.0 m al oeste de John. George está a 36.0 m de Paul, en una dirección de 37.0° al sur del este de la ubicación de Paul. ¿A qué distancia está George de John? ¿Cuál es la dirección de George en relación con la ubicación de John?

1.86 ••• Usted acampa con dos amigos, Joe y Karl. Puesto que a los tres les gusta la privacidad, no levantan sus tiendas juntas. La de Joe está a 21.0 m de la suya, en dirección 23.0° al sur del este. La de Karl está a 32.0 m de la suya, en dirección 37.0° al norte del este. ¿Qué distancia hay entre las tiendas de Karl y de Joe?

1.87 •• Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen un producto escalar igual a -6.00 y su producto vectorial tiene una magnitud igual a +9.00. ¿Cuál es el ángulo entre estos dos vectores?

1.88 •• **Ángulo de enlace del metano.** En la molécula de metano, CH_4, cada átomo de hidrógeno está en la esquina de un tetraedro regular, con el átomo de carbono en el centro. En coordenadas en las que uno de los enlaces C—H esté en la dirección de $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, un enlace C—H adyacente está en la dirección $\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$. Calcule el ángulo entre estos dos enlaces.

1.89 •• El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud igual a 12.0 m y el vector $\vec{B}$ mide 16.0 m. El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es igual a 90.0 m^2. ¿Cuál es la magnitud del producto vectorial de estos dos vectores?

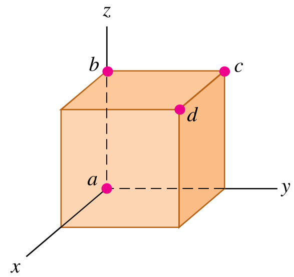
1.90 •• Si dibujamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ desde un punto común, el ángulo entre ellos es ϕ. *a*) Con técnicas vectoriales, demuestre que la magnitud de su suma es

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

b) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud, ¿con qué valor de ϕ su suma tendrá la misma magnitud que $\vec{A}$ o $\vec{B}$?

1.91 •• Un cubo se coloca de modo que una esquina esté en el origen y tres aristas estén en los ejes *x*, *y* y *z* de un sistema de coordenadas (figura P1.91). Use vectores para calcular *a*) el ángulo entre la arista sobre el eje *z* (línea *ab*) y la diagonal que va del origen a la esquina opuesta (línea *ad*); y *b*) el ángulo entre las aristas *ac* (la diagonal de una cara) y *ad*.

Figura **P1.91**



1.92 •• El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6.00 m, el vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de 3.00 m, y su producto vectorial es igual a 12.0 m^2. ¿Cuáles son los dos valores posibles del producto escalar para estos dos vectores? Para cada valor de $\vec{A}\cdot\vec{B}$, dibuje un diagrama que muestre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y explique por qué los productos vectoriales de los dos diagramas son iguales pero los productos escalares difieren.

1.93 •• El producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es +48.0 m^2. El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 9.00 m y dirección igual a 28.0º al oeste del sur. Si el vector $\vec{B}$ tiene una dirección de 39.0º al sur del este, ¿cuál es la magnitud de $\vec{B}$?

1.94 ••• Obtenga un *vector unitario* perpendicular a los dos vectores dados en el ejercicio 1.53.

1.95 •• Le dan los vectores $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.5\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -3.5\hat{\imath} + 7.0\hat{\jmath}$. Un tercer vector $\vec{C}$ está en el plano *xy* y es perpendicular a $\vec{A}$, y el producto escalar de $\vec{C}$ con $\vec{B}$ es 15.0. Con esta información, obtenga las componentes del vector $\vec{C}$.

1.96 •• Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes $A = 3.00$ y $B = 3.00$. Su producto vectorial es $\vec{A}\times\vec{B} = -5.00\hat{k} + 2.00\hat{\imath}$. ¿Qué ángulo forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

1.97 •• Más adelante encontraremos cantidades representadas por $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$. *a*) Demuestre que, para tres vectores cualesquiera $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$. *b*) Calcule $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ para los tres vectores donde $\vec{A}$ tiene magnitud $A = 5.00$ y ángulo $\theta_A = 26.0°$ medido del eje $+x$ al $+y$, $\vec{B}$ tiene $B = 4.00$ y $\theta_B = 63.0°$, y $\vec{C}$ tiene magnitud 6.00 y sigue el eje $+z$. $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano *xy*.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

1.98 ••• La longitud de un rectángulo se da como $L \pm l$ y su anchura como $W \pm w$. *a*) Demuestre que la incertidumbre de su área *A* es $a = Lw + lW$. Suponga que las incertidumbres *l* y *w* son pequeñas, de manera que el producto *lw* es muy pequeño y puede despreciarse. *b*) Demuestre que la incertidumbre fraccionaria del área es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. *c*) Un sólido rectangular tiene dimensiones $L \pm$ l, $W \pm w$ y $H \pm h$. Obtenga la incertidumbre fraccionaria del volumen y demuestre que es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud, la anchura y la altura.

1.99 ••• **Pase completo.** En la Universidad Autónoma de Inmensidad (UAI), el equipo de fútbol americano registra sus jugadas con desplazamientos vectoriales, siendo el origen la posición del balón al iniciar la jugada. En cierta jugada de pase, el receptor parte de $+1.0\hat{\imath} - 5.0\hat{\jmath}$, donde las unidades son yardas, $\hat{\imath}$ es a la derecha y $\hat{\jmath}$ es hacia delante. Los desplazamientos subsiguientes del receptor son $+9.0\hat{\imath}$ (en movimiento antes de salir la jugada), $+11.0\hat{\jmath}$ (sale hacia delante), $-6.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath}$ (a un lado) y $+12.0\hat{\imath} + 18.0\hat{\jmath}$ (al otro lado). Mientras tanto, el mariscal de campo retrocedió $-7.0\hat{\jmath}$. ¿Qué tan lejos y en qué dirección debe lanzar el balón el mariscal de campo? (Al igual que al entrenador, le recomendamos diagramar la situación antes de resolverla numéricamente).

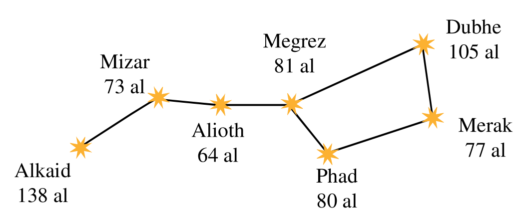
1.100 ••• **Navegación en el Sistema Solar.** La nave *Mars Polar Lander* se lanzó al espacio el 3 de enero de 1999. El 3 de diciembre de 1999, el día en que la nave se posó en la superficie de Marte, las posiciones de la Tierra y Marte estaban dadas por estas coordenadas:

	x	*y*	*z*
Tierra	0.3182 UA	0.9329 UA	0.0000 UA
Marte	1.3087 UA	−0.4423 UA	−0.0414 UA

En estas coordenadas, el Sol está en el origen y el plano de la órbita de la Tierra es el plano *xy*. La Tierra pasa por el eje $+x$ una vez al año en el equinoccio de otoño, el primer día de otoño en el hemisferio norte (cerca del 22 de septiembre). Una UA o *unidad astronómica* es igual a 1.496×10^8 km, la distancia media de la Tierra al Sol. *a*) Dibuje un diagrama que muestre las posiciones del Sol, la Tierra y Marte el 3 de diciembre de 1999. *b*) Calcule las siguientes distancias en UA el 3 de diciembre de 1999: **i.** del Sol a la Tierra; **ii.** del Sol a Marte; **iii.** de la Tierra a Marte. *c*) Visto desde la Tierra, ¿qué ángulo había entre la dirección al Sol y la dirección a Marte el 3 de diciembre de 1999? *d*) Indique si Marte se veía desde donde usted estaba el 3 de diciembre de 1999 a medianoche. (Cuando es la medianoche en su posición, el Sol está en el lado opuesto de la Tierra).

1.101 ••• **Navegación en la Osa Mayor.** Las estrellas de la Osa Mayor parecen estar todas a la misma distancia de la Tierra, pero en realidad están muy lejanas entre sí. La figura P1.101 muestra las distancias desde la Tierra a cada estrella en años luz (al), es decir, la distancia que la luz viaja en un año. Un año luz es igual a 9.461×10^{15} m. *a*) Alkaid y Merak están separadas 25.6° en el firmamento. Dibuje un diagrama que muestre las posiciones relativas de Alkaid, Merak y el Sol. Calcule la distancia en años luz de Alkaid a Merak. *b*) Para un habitante de un planeta en órbita alrededor de Merak, ¿cuántos grados de separación en el cielo habría entre Alkaid y el Sol?

Figura **P1.101**



1.102 ••• El vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, llamado *vector de posición*, apunta desde el origen (0, 0, 0) hasta un punto arbitrario en el espacio, cuyas coordenadas son (*x*, *y*, *z*). Use sus conocimientos de vectores para demostrar que todos los puntos (*x*, *y*, *z*) que satisfacen la ecuación $Ax + By + Cz = 0$, donde *A*, *B* y *C* son constantes, están en un plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$. Dibuje este vector y el plano.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

Haga que el eje x apunte al este y el eje $+y$ al norte. Lo que intentamos obtener es la componente y del vector velocidad, el cual tiene una magnitud $v = 20$ km/h y un ángulo $\theta = 53°$ medido del eje $+x$ hacia el eje $+y$. Partiendo de las ecuaciones (1.6), tenemos que $v_y = v$ sen θ = (20 km/h) sen 53° = 16 km/h. De modo que la tormenta eléctrica se desplaza 16 km al norte en 1 h.

Preguntas de las secciones

Evalúe su comprensión

1.5 Respuesta: ii. Densidad = (1.80 kg)/(6.0 × 10^{-4} m^3) = 3.0 × 10^3 kg/m^3. Cuando se multiplica o se divide, el número con menos cifras significativas determina el número de cifras significativas del resultado.

1.6 La repuesta depende de cuántos estudiantes se inscribieron en la universidad.

1.7 Respuestas: ii, iii y iv. El vector $-\vec{T}$ tiene la misma magnitud que el vector $\vec{T}$, de modo que $\vec{S} - \vec{T} = \vec{S} + (-\vec{T})$ es la *suma* de un vector de magnitud igual a 3 m y uno de 4 m. Esta suma tiene una magnitud de 7 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son paralelos, y una magnitud de 1 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son antiparalelos. La magnitud de $\vec{S} - \vec{T}$ es de 5 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son perpendiculares, de modo que los vectores $\vec{S}$, $\vec{T}$ y $\vec{S} - \vec{T}$ forman un triángulo rectángulo 3-4-5. La respuesta **i** es imposible porque la magnitud de la suma de dos vectores no puede ser mayor que la suma de las magnitudes; la respuesta **v** es imposible porque la suma de dos vectores puede ser cero solo si estos son antiparalelos y tienen la misma magnitud; y la respuesta **vi** es imposible porque la magnitud de un vector no puede ser negativa.

1.8 Respuestas: *a*) sí, *b*) no Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pueden tener la misma magnitud pero diferentes componentes si apuntan en diferentes direcciones. Sin embargo, si tienen las mismas componentes, se trata del mismo vector $(\vec{A} = \vec{B})$ y entonces deben tener la misma magnitud.

1.9 Respuesta: todos tienen la misma magnitud Los cuatro vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ apuntan en diferentes direcciones, pero todos tienen la misma magnitud:

$$A = B = C = D = \sqrt{(\pm 3\text{ m})^2 + (\pm 5\text{ m})^2 + (\pm 2\text{ m})^2}$$
$$= \sqrt{9\text{ m}^2 + 25\text{ m}^2 + 4\text{ m}^2} = \sqrt{38\text{ m}^2} = 6.2\text{ m}$$

1.10 Respuestas: *a*) ϕ = 90°, *b*) ϕ = 0° o ϕ = 180°, *c*) ϕ = 0°, *d*) ϕ = 180°, *e*) ϕ = 90° *a*) El producto escalar es cero solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. *b*) El producto vectorial es cero solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos. *c*) El producto escalar es igual al producto de las magnitudes $(\vec{A} \cdot \vec{B} = AB)$ solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos. *d*) El producto escalar es igual al negativo del producto de las magnitudes $(\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB)$ solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos. *e*) La magnitud del producto vectorial es igual al producto de las magnitudes $[(\text{magnitud de } \vec{A} \times \vec{B}) = AB]$ solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 5.2×10^2 N
***b*)** 4.5×10^2 N·m