Unidad 2: Ley de GAUSS

Materia: Física II

Objetivo

- Aplicar la Ley de Gauss para campos en torno a superficies con densidades de carga conocidas.

La ley de Gauss

- La ley de Gauss constituye una de las leyes fundamentales de la Teoría Electromagnética.
- Se trata de una relación entre la carga encerrada en una superficie y el flujo de su campo eléctrico, a través de la misma.
- Constituye un medio para obtener expresiones de campos eléctricos, con suficientes condiciones de simetría.

Enunciado

El flujo de campo eléctrico a través de cualesquier superficie cerrada (gaussiana), es igual a la carga neta encerrada, por la misma, sobre la constante ε_0.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 \Phi_E = q_{enc}$$

Ley de Gauss – ¿Cuándo se usa?

- Sólo es útil para situaciones donde hay mucha simetría.
- Hay que usar la simetría para saber dónde E es constante y cuál es su dirección.
- Hay que seleccionar una superficie cerrada en la cual E sea constante o donde el flujo sea cero (E perpendicular a la superficie).

Guía para aplicar la Ley de Gauss

- Identificar al campo eléctrico y representarlo con líneas de campo.
  - En los casos de cargas estáticas en sólidos, el campo eléctrico tiene dirección perpendicular a la superficie.
- Seleccionar superficie gaussiana acorde a la simetría.
  - Que pase por los puntos donde se desea conocer la magnitud de E
  - Que sea cerrada.
  - Que E sea constante en los puntos de la superficie.
  - Que E sea paralelo a la superficie en las partes donde no es constante.
- La integral lleva directo a una expresión algebráica que contiene E.
- Calcular la carga encerrada por la superficie.
  - En ocasiones será necesario calcularla a partir de alguna densidad de carga.
- Aplicar la ley de Gauss.

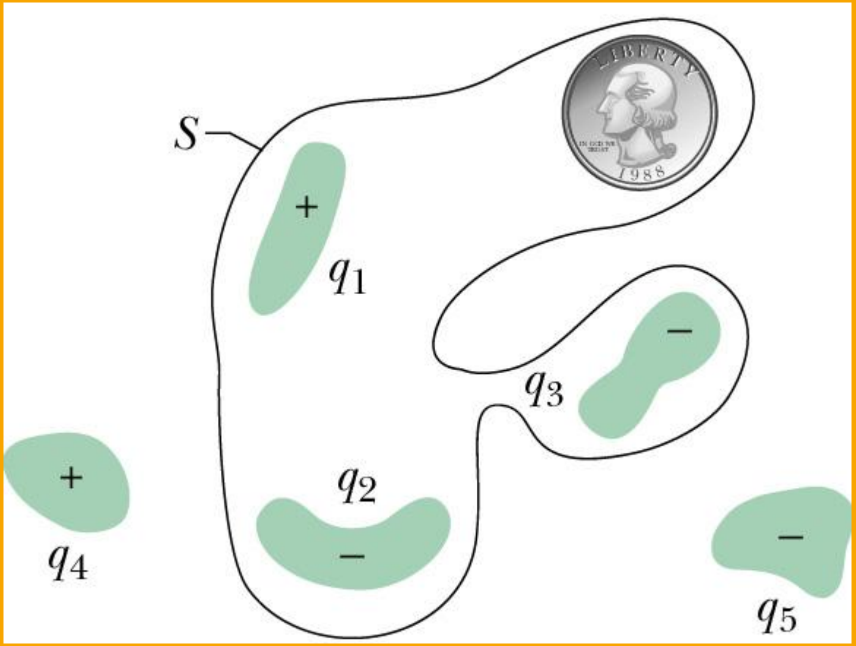
Aplicación de la ley de Gauss para el cálculo de Φ_E

Encontrar el flujo eléctrico neto a través de la superficie si:

$q_1=q_4= +3.1$ nC

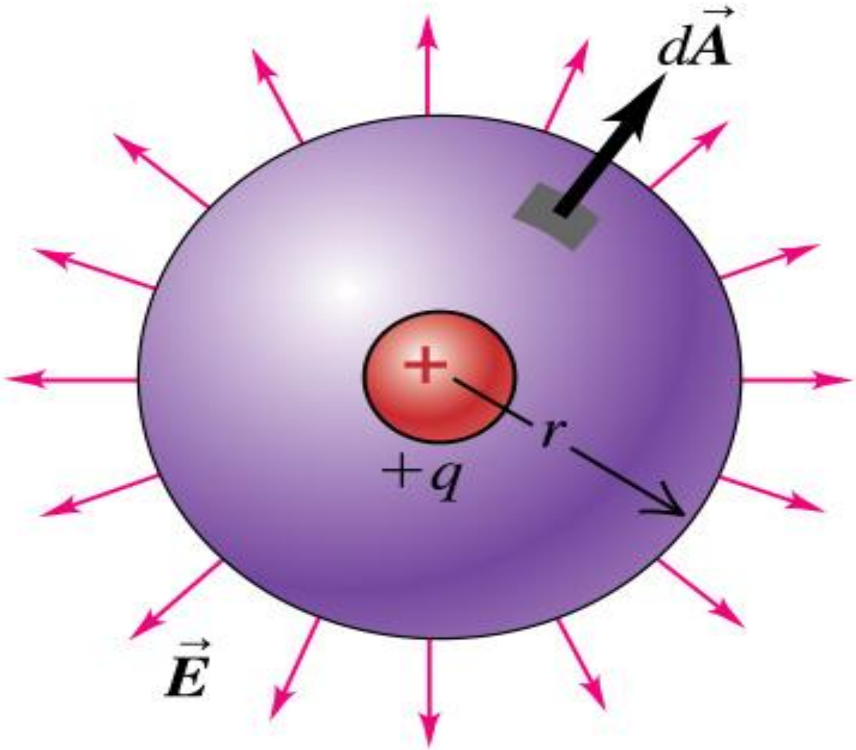
$q_2=q_5= -5.9$ nC

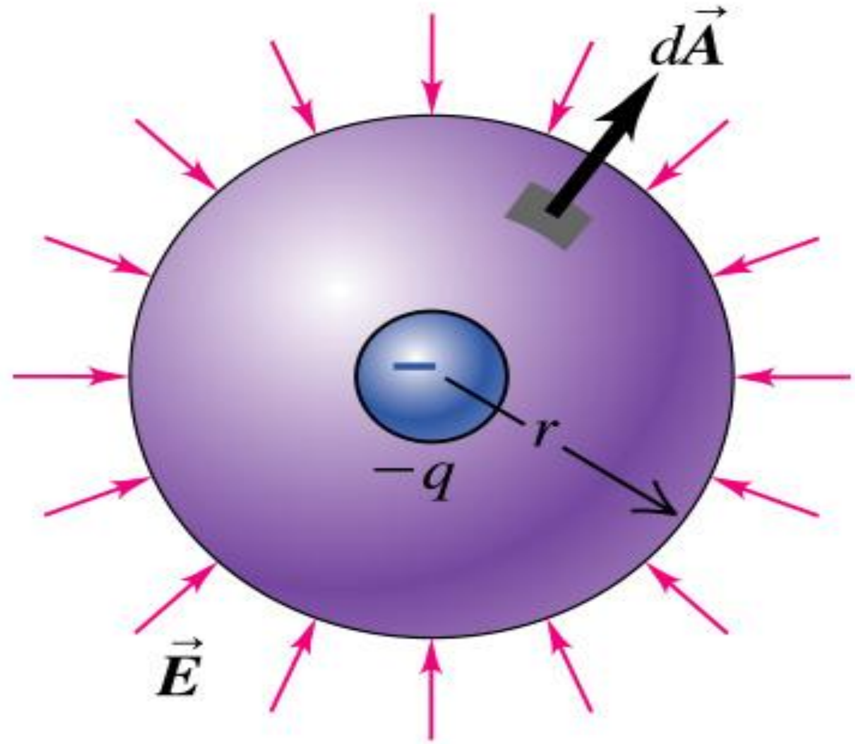
and $q_3= -3.1$ nC



$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0} = -670 N \cdot m^2 / C$$

Superficies esfericas Gaussianas





a) carga puntual positiva

a) carga puntual negativa

Flujo Positivo

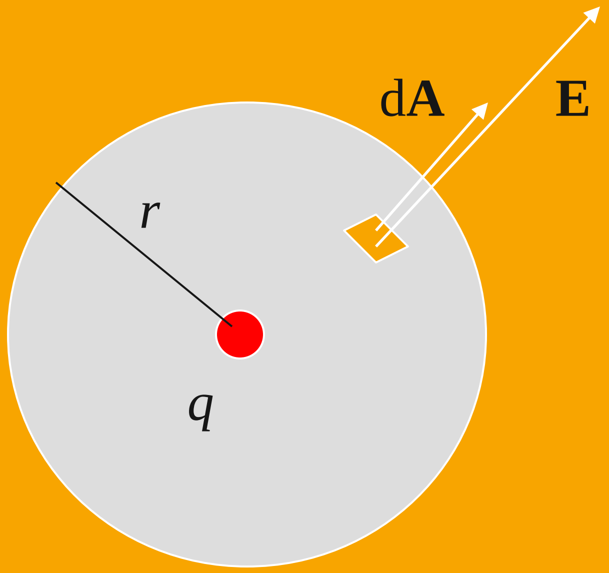
Flujo Negativo

Campo Eléctrico de una carga puntual

Considerando una carga puntual *q* : el flujo en una esfera de radio *r* será:

$$\Phi = \oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{A} = E \oint dA = E\, 4\pi\, r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = q / 4\pi r 2 \varepsilon_0$$



Campo eléctrico de una carga puntual

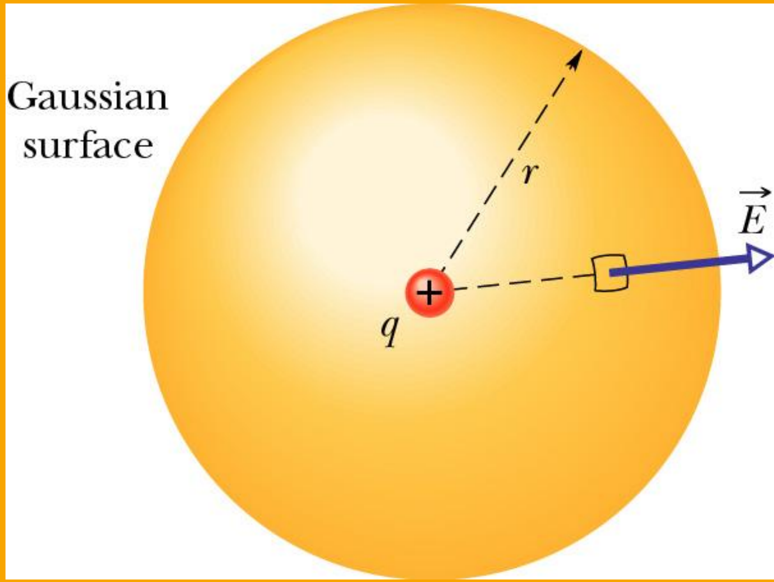
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\,dA = q_{enc}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q$$

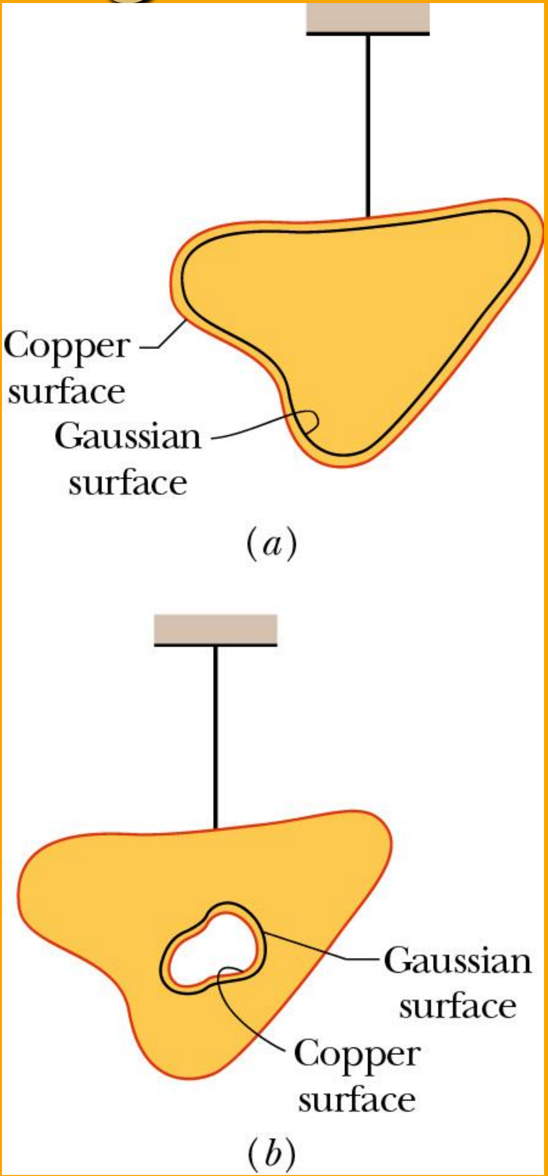
$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = q \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

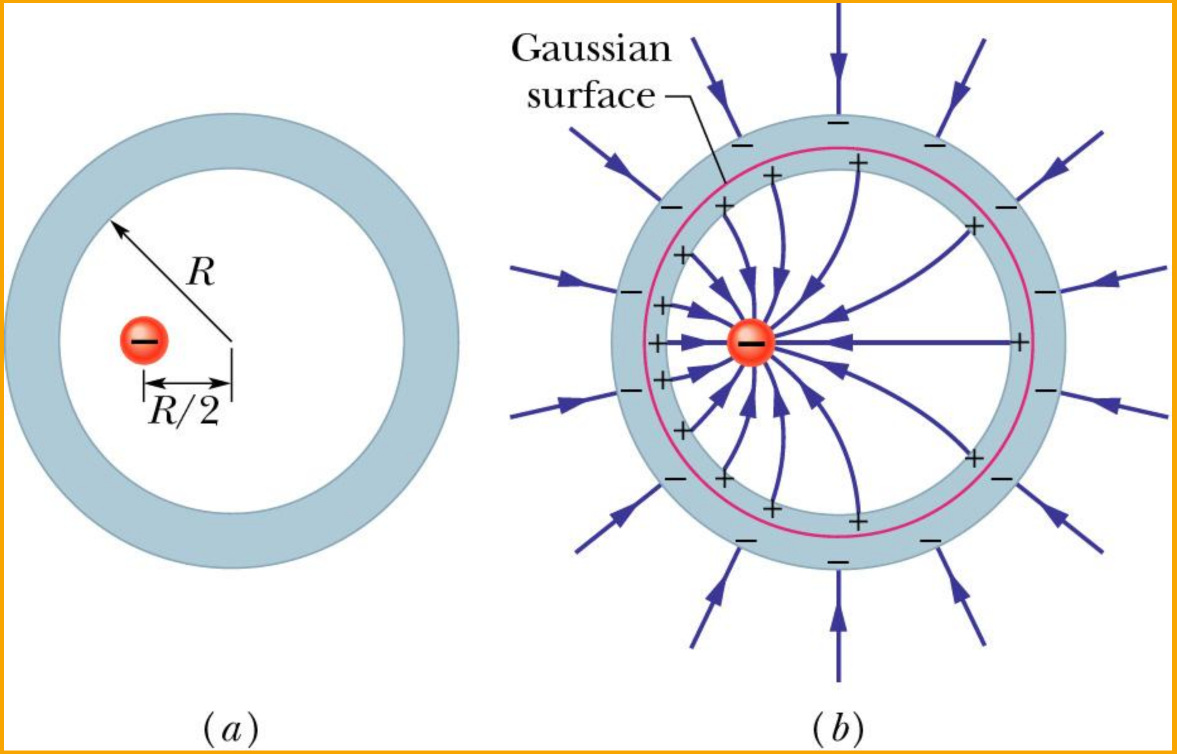


Un conductor aislado cargado

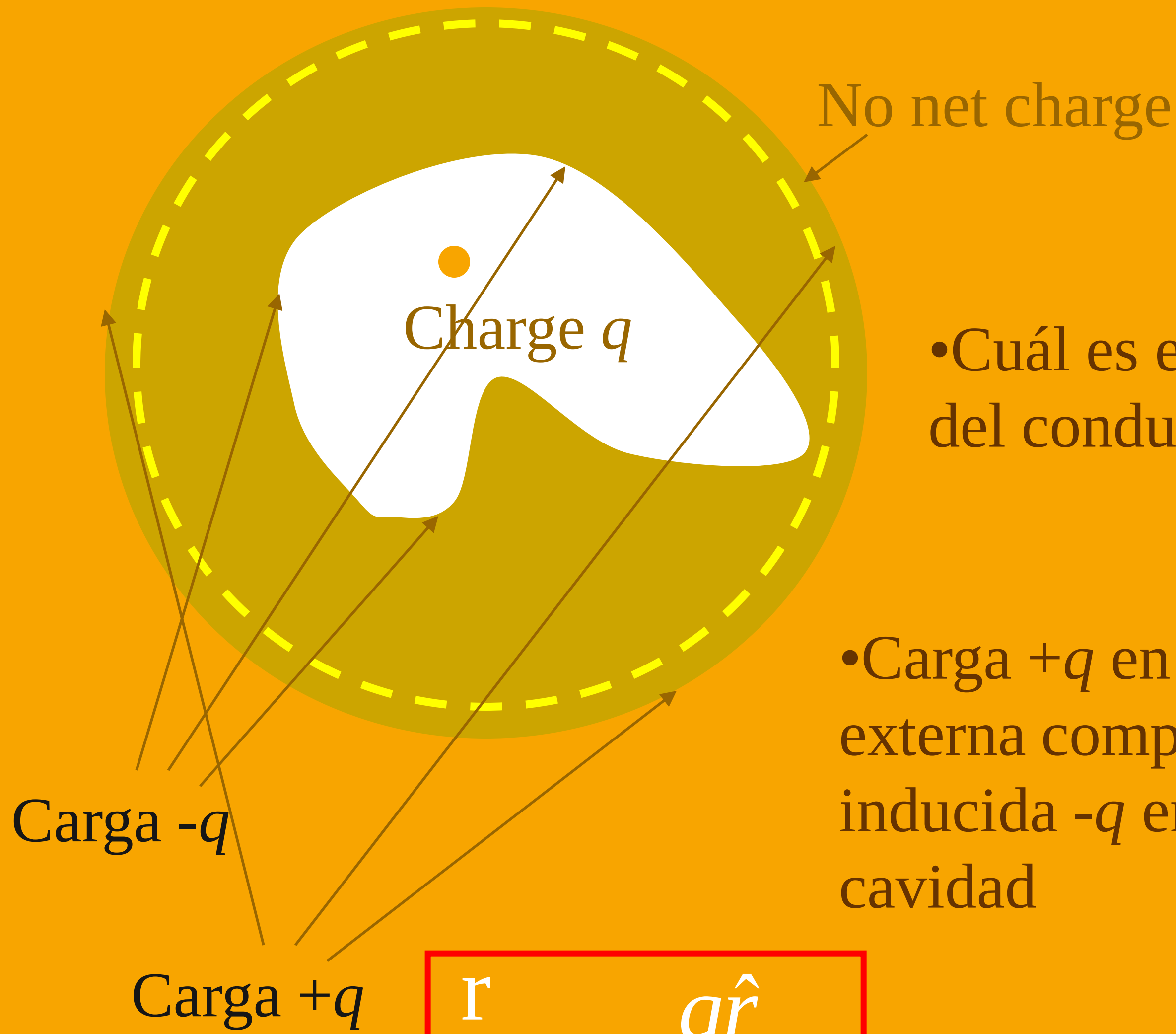
Si un exceso de cargas es colocado en un conductor aislado, esa cantidad de carga se moverá completamente a la superficie del conductor. Nada del exceso de carga se encontrara dentro del cuerpo del conductor.



Cargas en cavidades (Cargas inducidas)



Conductores con cargas en cavidades



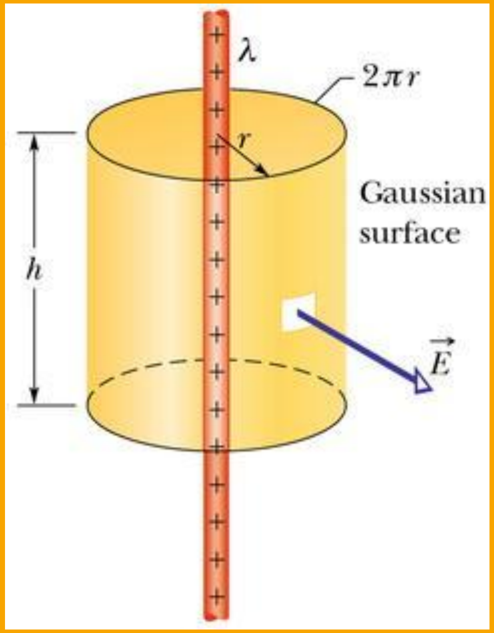
•Cuál es el **E** en el exterior del conductor esférico?

•Carga +*q* en la superficie externa compensa la carga inducida -*q* en la superficie de la cavidad

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Ejemplo de aplicación de la ley de Gauss

Una Linea Recta e Infinita de Carga



- Lo de infinita es importante porque es lo que nos permite decir que todos los puntos en los lados de nuestra superficie Gaussiana cilíndrica (en amarillo) tienen la misma magnitud de E. En la práctica, por supuesto, no existen lineas infinitas pero el resultado que obtengamos será una buena aproximación al caso de puntos que quedan muy cerca de una linea de carga finita.
- En una situación como esta, con un punto y una linea, la única dirección definida por la realidad física es la dirección radial (coordenadas cilíndricas). E tiene que ser en esa dirección.
- Nuestra superficie Gaussiana tiene lados y dos tapas. En las tapas E no es constante pero es perpendicular a E así que la integral sobre las tapas es cero y la integral sobre los lados es $\epsilon_0 E(2\pi r h)$
- Ese resultado es siempre igual para toda simetría cilíndrica.

Como siempre, la solución al problema particular se reduce a determinar la carga dentro de la superficie. En este caso resulta ser λh donde λ es la densidad lineal de carga. Así que la ecuación de la ley de Gauss se convierte en este problema en $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ y resolviendo por E obtenemos $\epsilon_0 E(2\pi r h) = \lambda h,$ o sea el campo disminuye con la primera potencia de r, no con la segunda. Esto quizás no debe extrañarnos ya que tenemos una carga mucho más grande que una carga puntiforme.

Para el caso de una linea de longitud L con carga total Q, entonces λ = Q / L y nuestro resultado es correcto sólo para puntos donde r << L y que quedan lejos de los extremos de la linea.

Aplicación de la ley de Gauss, simetría cilíndrica

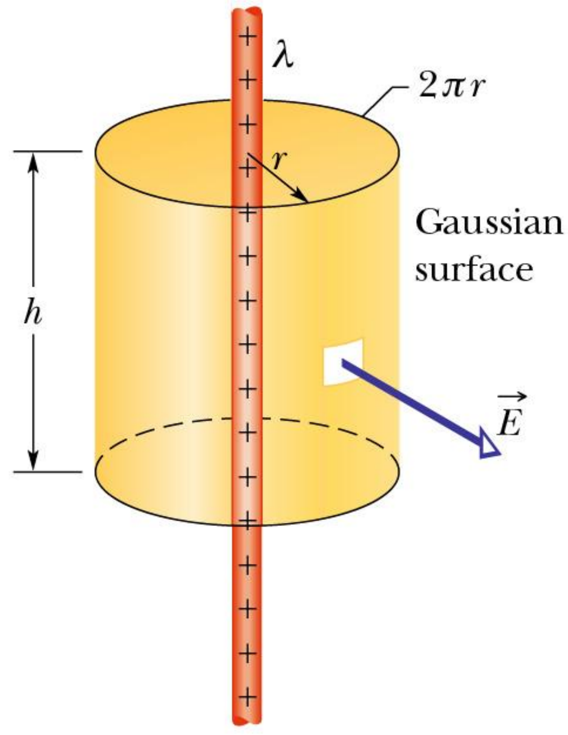
$$\Phi = EA\cos\theta$$

$$= E(2\pi rh)\cos 0 = E(2\pi rh)$$

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

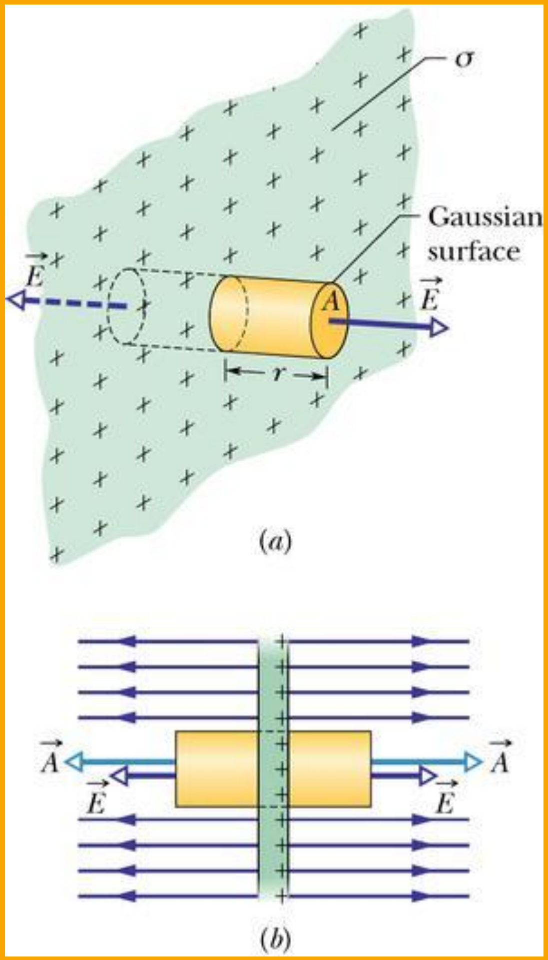


Para una línea infinita, con densidad lineal de carga uniforme, el campo eléctrico en cualquier punto p, es <u>perpendicular</u> a la línea de carga y de magnitud:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

donde r es la distancia perpendicular de la línea de carga al punto.

Aplicación de la Ley de Gauss
Simetría Plana



La única dirección especificada por la situación física es la dirección perpendicular al plano. Por tanto, ésta tiene que ser la dirección de E.

Puntos que quedan en planos paralelos están equidistantes al plano y tienen un campo E de la misma magnitud

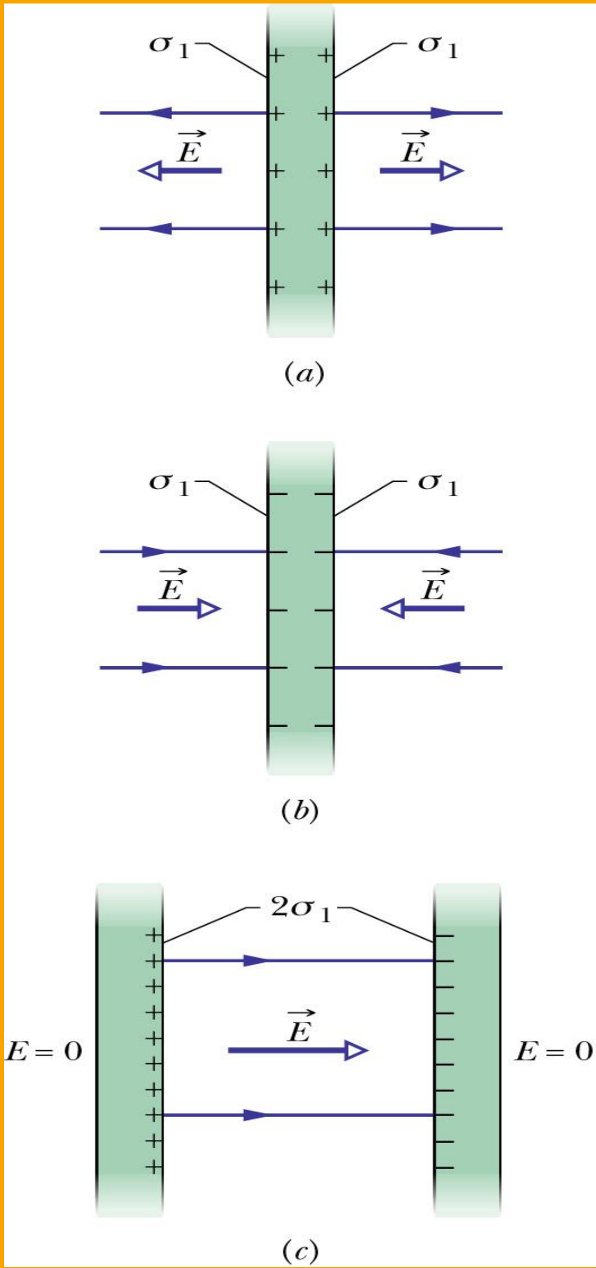
La superficie Gaussiana que usamos tiene tapas que son dos de esos planos paralelos. El flujo a través de la superficie Gaussiana es cero. Los flujos a través de las dos tapas son iguales.

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

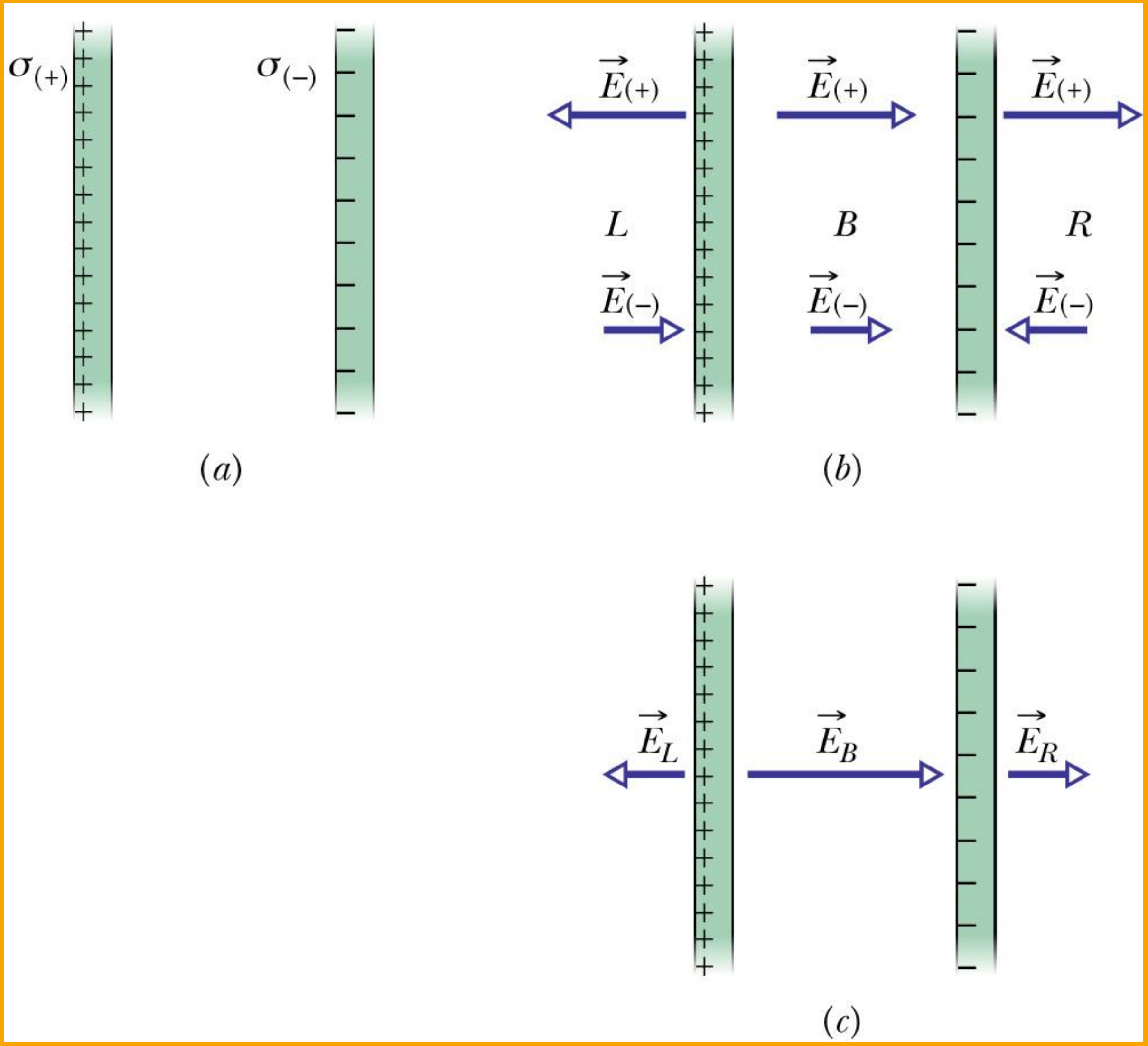
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Dos placas conductoras:

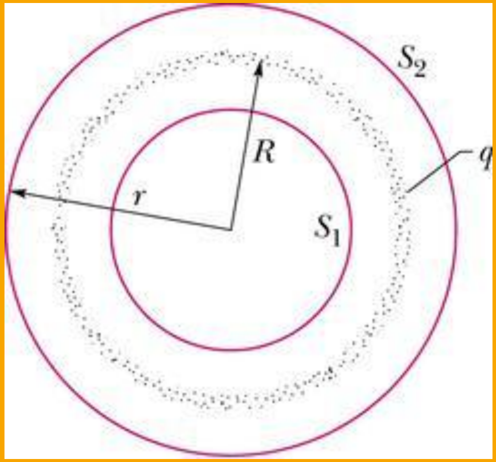
$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Ejemplo


$\sigma_{(+)}$
$\sigma_{(-)}$
$\vec{E}_{(+)}$
$\vec{E}_{(+)}$
$\vec{E}_{(+)}$
L
B
R
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_{(-)}$
(a)
(b)
$\vec{E}_L$
$\vec{E}_B$
$\vec{E}_R$
(c)

Aplicación de la Ley de Gauss - Simetría Esférica -



Concha esférica de R .

1) E tiene dirección radial,
2) La magnitud de E es constante en la superficie de cualquier superficie esférica concéntrica con la carga. Es obvio que debe tomarse la superficie Gaussiana como esfera.
3) Por tanto E y da apuntan en la misma direccion y la integral del lado izquierdo de la ley de Gauss resulta:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E\, dA = \epsilon_0 E\left(4\pi r^2\right)$$

Para cada situación de simetría esférica lo que cambia es el lado derecho de la ley de Gauss. De hecho, esta es diferente aún para diferentes regiones en una misma situación. Así que resolver uno de estos problemas es determinar cuánta carga hay dentro de la suprerficie gaussiana, q_N.

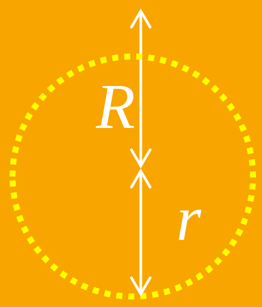
Tomemos el ejemplo de un cascarón esférico de carga q y radio R. (Ver dibujo.) Debemos considerar dos regiones: I) fuera del cascarón y II) dentro del cascarón. Siempre llamamos r a la distancia entre el punto donde queremos calcular E y el centro de simetría. Matemáticamente las regiones se definen como I) $r>R$ y II) $r<R$. Por supuesto, la esfera Gaussiana tiene radio r.

Para la región I, se toma la esfera Gaussiana S_2 . Es obvio que $q_N = q$ ya que esa es la carga adentro de la esfera S_2 . En esta región la carga se comporta como si fuese puntiforme.

Para la región II, tomamos la esfera Gaussiana S_1. Ahora $q_N = 0$ y no hay E dentro de la carga.

Aplicación de la ley de Gauss

$$\boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$



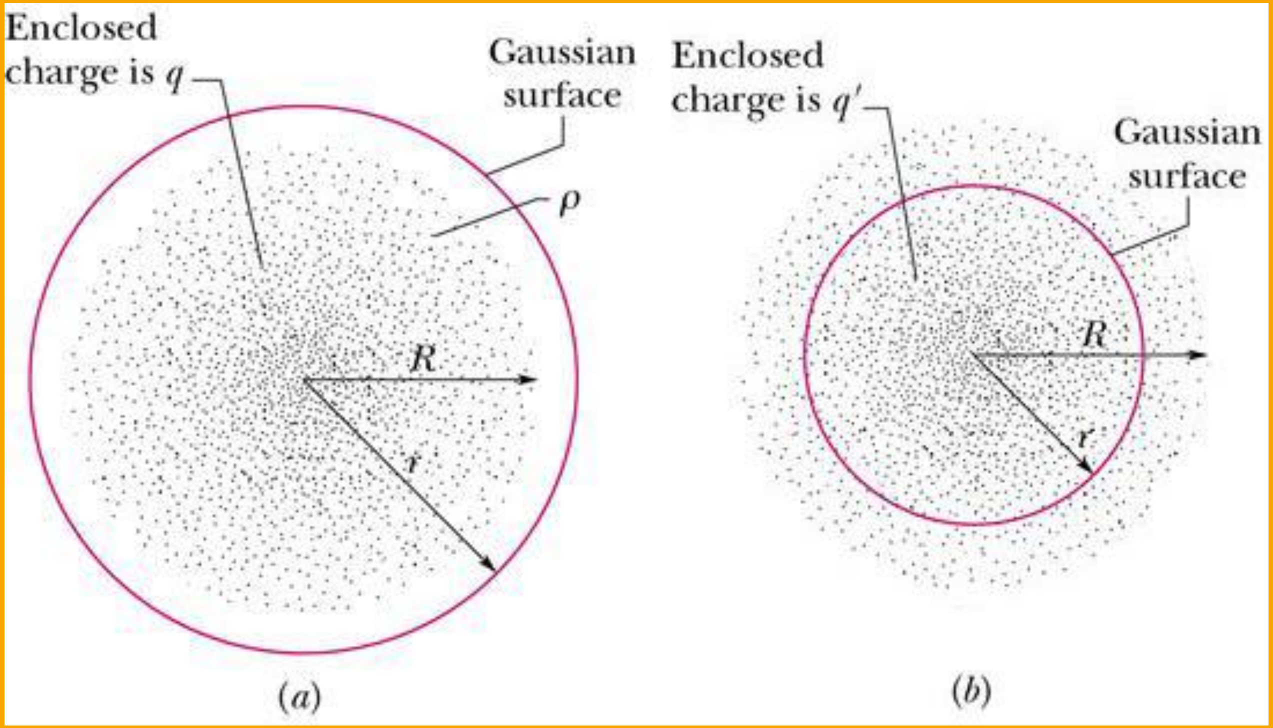
V = 4πR^3/3

A = 4πR^2

- Esfera de radio R y ρ constante . ¿Cuál es el campo en el interior?
- Se escoge una superficie gaussiana esférica de radio r<R

$$\Phi = AE = 4\pi r^2 E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{V\rho}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$



El lado izquierdo de la ley de Gauss depende sólo de la simetría. Lo que tenemos que determinar es el lado derecho, o sea, la carga encerrada.

Fuera de la distribución de carga, la respuesta es igual que el caso anterior.

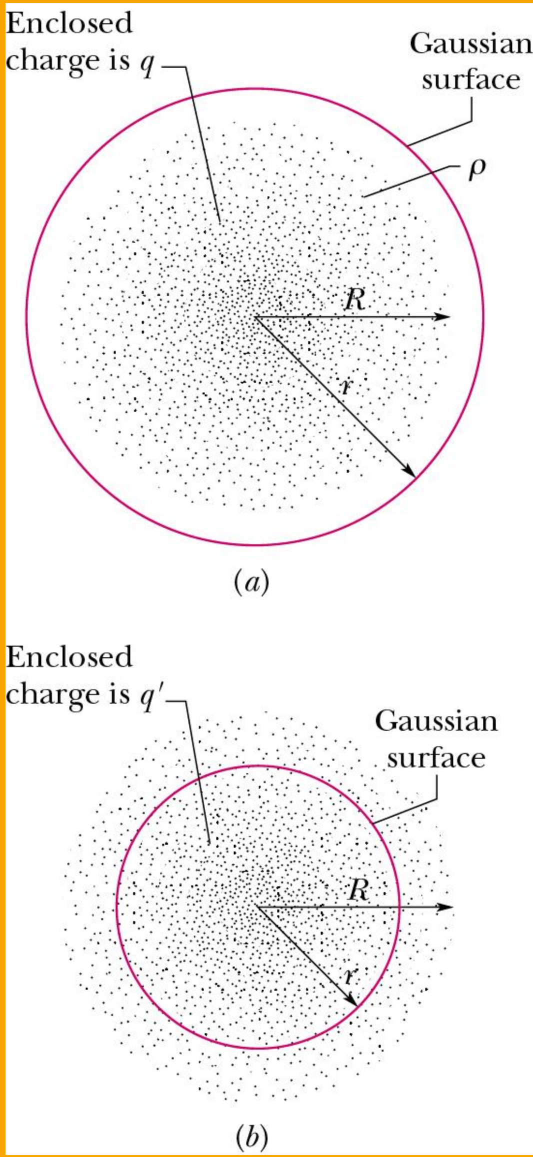
Dentro de la esfera, $q_N = \rho\, V_r$ donde ρ es la densidad volumétrica de carga = q / V_R.

Distribución esférica, campo a r ≥R

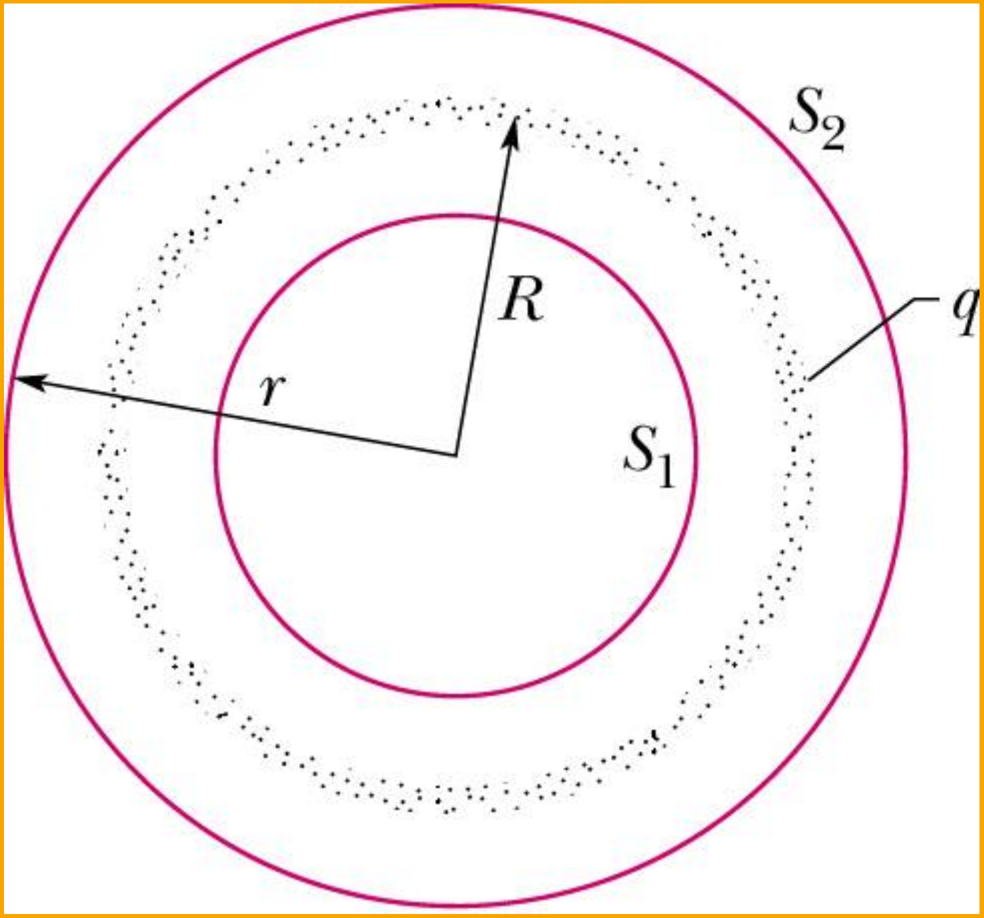
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$$

Carga uniforme, campo a r ≤R

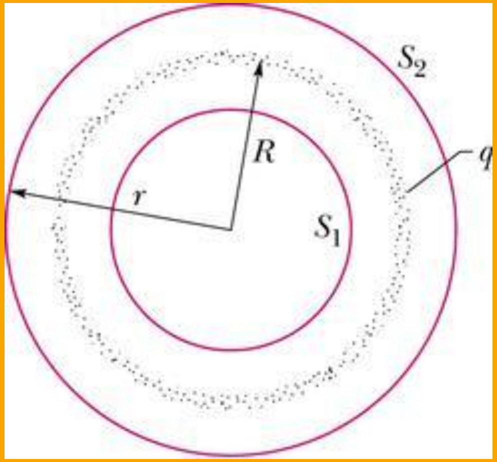
$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r$$



Aplicando la ley de Gauss: Casquete esférico



Aplicación de la Ley de Gauss - Simetría Esférica



Concha esférica de R .

1) E tiene dirección radial,
2) La magnitud de E es constante en la superficie de cualquier superficie esférica concéntrica con la carga. Es obvio que debe tomarse la superficie Gaussiana como esfera.
3) Por tanto E y da apuntan en la misma direccion y la integral del lado izquierdo de la ley de Gauss resulta:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E\, dA = \epsilon_0 E\left(4\pi r^2\right)$$

Para cada situación de simetría esférica lo que cambia es el lado derecho de la ley de Gauss. De hecho, esta es diferente aún para diferentes regiones en una misma situación. Así que resolver uno de estos problemas es determinar cuánta carga hay dentro de la suprerficie gaussiana, q_N.

Tomemos el ejemplo de un cascarón esférico de carga q y radio R. (Ver dibujo.) Debemos considerar dos regiones: I) fuera del cascarón y II) dentro del cascarón. Siempre llamamos r a la distancia entre el punto donde queremos calcular E y el centro de simetría. Matemáticamente las regiones se definen como I) $r>R$ y II) $r<R$. Por supuesto, la esfera Gaussiana tiene radio r.

Para la región I, se toma la esfera Gaussiana S_2 . Es obvio que $q_N = q$ ya que esa es la carga adentro de la esfera S_2 . En esta región la carga se comporta como si fuese puntiforme.

Para la región II, tomamos la esfera Gaussiana S_1. Ahora $q_N = 0$ y no hay E dentro de la carga !!

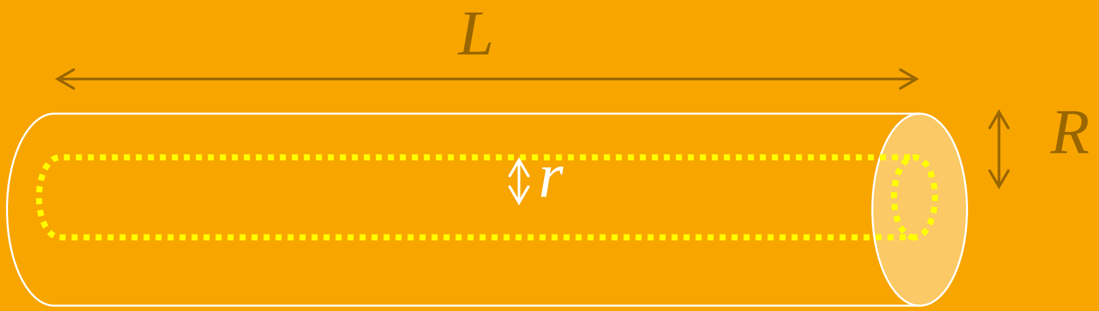
Casquete esférico, campo a r ≥R

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Campo eléctrico a r <R

$$E = 0$$

Cilindro Cargado



•Dibuje un cilindro de radio r en el interior del cilindro.

•El campo eléctrico tiene dirección perpendicular al eje del cilindro.

$$\Phi = AE = 2\pi rLE = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{V\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \rho L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}$$