Funciones de varias variables o campos escalares: Linealización y extremos

Ingeniería

Recorrido

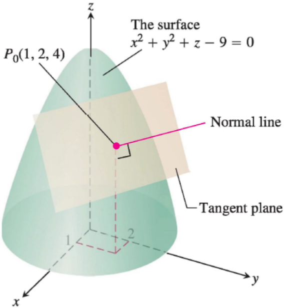
Recorrido

Recorrido

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Definición (Plano tangente y recta normal a una **superficie de nivel**)

Si f es una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, el **plano tangente** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0), en dicho punto, es el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es normal al vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Similarmente, la **recta normal** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0), en dicho punto, es la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.



Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(1, 0, 0)$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(1, 0, 0)$.
Sol.: la superficie de nivel de f que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ es $f(x, y, z) = f(1, 0, 0)$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
Ecuación plano tangente (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$): $x = 1$.
Ecuación recta normal (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$):
$\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(0, 0, 0)$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(0, 0, 0)$.
Sol.: la superficie de nivel de f que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ es $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; es un punto y $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
Ecuación plano tangente: no existe el plano tangente (a sup. nivel en $(0, 0, 0)$).
Ecuación recta normal: no existe recta normal (a sup. nivel en $(0, 0, 0)$).

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?
Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?
Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

El gráfico de f es la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables? Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

El gráfico de f es la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

$$\text{ejemplo: } 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(x_0, y_0)\, t \\ y = y_0 + f_y(x_0, y_0)\, t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 - t \end{cases} \qquad \text{ejemplo: } \begin{cases} x = x_0 + 2x_0 t \\ y = y_0 + 2y_0 t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 - t \end{cases}$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?
Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

El gráfico de f es la superficie de nivel $g(x,y,z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

$$\text{ejemplo: } 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(x_0,y_0)\,t \\ y = y_0 + f_y(x_0,y_0)\,t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 - t \end{cases} \qquad \text{ejemplo: } \begin{cases} x = x_0 + 2x_0 t \\ y = y_0 + 2y_0 t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 - t \end{cases}$$

Actividad en aula 18 de agosto: ejercicios 1 y 2.

Recorrido

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Recordemos que, si f es derivable en $x = x_0$,

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{Ecuación recta tangente.}$$

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Recordemos que, si f es derivable en $x = x_0$,

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{Ecuación recta tangente.}$$

Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en P_0

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

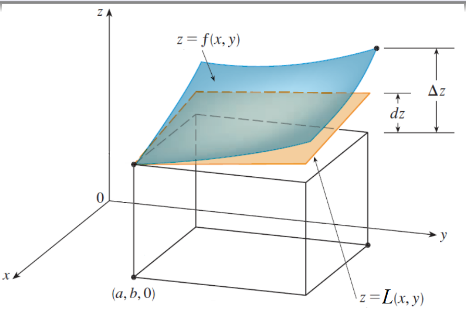
↑ Ecuación plano tangente.

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

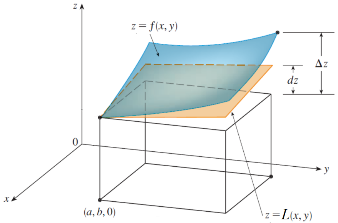
Definición

Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$



$$\begin{aligned}\Delta L(x_0,y_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - L(x_0,y_0)\\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y - f(x_0,y_0) - 0 - 0\\ &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y\end{aligned}$$

$$\Delta f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

Linealización y funciones diferenciables

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}_{f(x,y)} = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\underbrace{L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}_{L(x,y)} = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

Definición

Si f es una función de tres variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}.$$

No contamos con una representación gráfica conveniente de este caso.

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ +f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta L(P_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - L(x_0,y_0,z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \end{aligned}$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta L(P_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - L(x_0,y_0,z_0)\\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0\\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f(P_0) = \quad & f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\\ & + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z.\end{aligned}$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) +$$
$$+ f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta L(P_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - L(x_0, y_0, z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(P_0) = \quad & f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \\ & + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z. \end{aligned}$$

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)+$$
$$+f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta L(P_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - L(x_0,y_0,z_0)\\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0\\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f(P_0) = \quad & f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\\ & +\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z.\end{aligned}$$

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.
Actividad en aula 18 de agosto: ejercicios 3 y 4.

Recorrido

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es difernciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

Definición

Si f es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2$$

$$L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

$$df_{(x_0,y_0)}(dx, dy) = \qquad f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Diferencial de una función de tres variables

Definición

Si f es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz,$$

si f es de tres variables.

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) =$$
$$f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3$$

$$L_{f,P_0}(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0).$$

$$df_{(P_0)}(dx, dy, dz) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz.$$

Ejemplo

Actividad en aula 18 de agosto: ejercicio 5

Ejemplo

Actividad en aula 18 de agosto: ejercicio 5

$f(x,y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy$ $\qquad$ $f(1,2) = 30$

$\nabla f(x,y) = (12x + 6y, 6y + 6x)$ $\qquad$ $\nabla f(1,2) = (24, 18)$

Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$,

$$\underbrace{f(1+\Delta x, 2+\Delta y) - f(1,2)}_{\Delta f(1,2)} = 24\Delta x + 18\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

$L_{f,(1,2)}(x,y) = 30 + 24(x-1) + 18(y-2)$

$df_{(1,2)}(dx,dy) = 24dx + 18dy$

$f(1,2) = 30;$ $\qquad$ $L_{f,(1;2)}(1,2) = 30;$ $\qquad$ $df_{(1,2)}(0,0) = 0$

$f(1{,}1; 1{,}9) = 30{,}63;$ $\qquad$ $L_{f,(1;2)}(1{,}1; 1{,}9) = 30{,}6;$ $\qquad$ $df_{(1;2)}(0{,}1; -0{,}1) = 0{,}6$

Recorrido

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h. Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera, según los valores de r y h.

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h. Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera, según los valores de r y h.Como

$$|error| = \left| \frac{Aprox - Real}{Real} \right| = \left| \frac{\Delta magnitud}{magnitud\, real} \right|,$$

si se mide r con un error no mayor de ε_r y h con un error que no supera ε_h, el máximo error posible en el cálculo de V es

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h}{\pi r^2 h} \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| \leq 2\varepsilon_r + \varepsilon_h$$

Recorrido

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en una región D.

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en una región D.

Dados $\quad (a,b) \in \operatorname{int} D \quad$ y $\quad h, k$ tales que $(a+h, b+k) \in D$,

definimos $\quad \mathbf{r}(t) = (a+th, b+tk),\ 0 \leq t \leq 1,$

que une $\quad (a,b) \quad$ y $\quad (a+h, b+k)$.

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en una región D.
Dados $(a,b) \in \operatorname{int} D$ y h, k tales que $(a+h, b+k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a+th, b+tk)$, $0 \leq t \leq 1$,

que une (a,b) y $(a+h, b+k)$. Entonces:

$$f(a+h, b+k) = f(\mathbf{r}(1)); \qquad f(a,b) = f(\mathbf{r}(0)).$$

Definimos la función compuesta w por

$$w(t) := f(\mathbf{r}(t)); \qquad \text{así:} \quad f(a+h, b+k) = w(1); \qquad f(a,b) = w(0).$$

Recordando la **fórmula de Taylor para w alrededor de 0**:

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

para algún c entre 0 y t.

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \; c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas en la región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas en la región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) =$$

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas en la región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + ...?$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a,b)$$

$$w'(t) =$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a,b)$$

$$w'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t)$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned} w(0) &= f(a,b) \\ w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a, b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \\
w'(0) &= f_x(a, b)h + f_y(a, b)k
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned} w(0) &= f(a,b) \\ w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\ w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ w''(t) &= \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 +
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk \\
&\qquad + f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk \\
&\qquad + f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2 \\
w''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \; c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk \\
&\qquad + f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2 \\
w''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f\Big|_{(a,b)}
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a,b)} + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch, b+ck)}$$

Fórmula de Taylor de primer orden, para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

para cierto c entre 0 y 1.

Observación: la linealización de f en (a,b) coincide con la fórmula de Taylor de primer orden sin el término de error.

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

Sea $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$. Buscamos las Fórmulas de Taylor de segundo orden y de primer orden centradas en $(a,b) = (0,0)$; estudiamos el error que se comete por usar el polinomio de Taylor en lugar de f.

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(a,b)}$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\,\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

$$f(h,k) = f(0,0) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(0,0)}$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\,\Big|_{(ch,ck)}$$

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

$$f(h,k) = f(0,0) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(0,0)}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\,\Big|_{(ch,ck)}$$

$$\begin{array}{llll}
f_x(x,y)=e^x \operatorname{sen}(y) & f_{xx}(x,y)=e^x \operatorname{sen}(y) & f_{xxx}(x,y)=e^x \operatorname{sen}(y) & \\
 & f_{xy}(x,y)=e^x \cos(y) & f_{xxy}(x,y)=e^x \cos(y) & \\
f_y(x,y)=e^x \cos(y) & f_{yy}(x,y)=-e^x \operatorname{sen}(y) & f_{yyx}(x,y)=-e^x \operatorname{sen}(y) & f_{yyy}(x,y)=-e^x \cos(y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
f_x(0,0)=0 & f_{xx}(0,0)=0 & f_{xxx}(ch,ck)=e^{ch} \operatorname{sen}(ck) & \\
 & f_{xy}(0,0)=1 & f_{xxy}(ch,ck)=e^{ch} \cos(ck) & \\
f_y(0,0)=1 & f_{yy}(0,0)=0 & f_{yyx}(ch,ck)=-e^{ch} \operatorname{sen}(ck) & f_{yyy}(ch,ck)=-e^{ch} \cos(ck)
\end{array}$$

$$f(h,k) = 0 + (0+k) + \frac{1}{2}(0 + 2hk + 0)$$
$$+\frac{1}{6}\left(h^3e^{ch}\operatorname{sen}(ck) + 3h^2ke^{ch}\cos(ck) - 3hk^2e^{ch}\operatorname{sen}(ck) - k^3e^{ch}\cos(ck)\right)$$

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables

2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

3. Anexo: Ejemplos varios

Recorrido

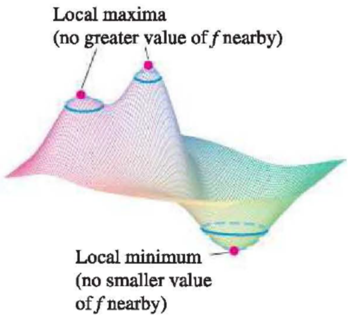
Recorrido

Definiciones de máximo local y mínimo local

Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a,b) y $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todos los $(x,y) \in D(f)$ de algún entorno de (a,b), entonces $f(a,b)$ es un (valor) máximo local de f. Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a,b).

Definiciones de máximo local y mínimo local



Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los $(x, y) \in D(f)$ de algún entorno de (a, b), entonces $f(a, b)$ es un (valor) máximo local de f. Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b).
Similarmente se define mínimo local.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

En una planta industrial se modela la eficiencia de un proceso mediante

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa)[1].

[1] Presión manométrica; valores negativos indican tensión o tracción.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

En una planta industrial se modela la eficiencia de un proceso mediante

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa)[1].
- x^3 y y^3: Representan el comportamiento no lineal de la eficiencia con respecto a la temperatura y la presión. En muchos procesos industriales, la relación entre la eficiencia y estos parámetros no es lineal debido a la naturaleza compleja del proceso.
- $3xy^2$: Es un término de interacción entre la temperatura y la presión, lo que indica que la eficiencia no solo depende de x y y de forma independiente, sino también de cómo interactúan entre sí.
- $-15x$ y $-15y$: Son términos que representan pérdidas de eficiencia, que aumentan linealmente con la temperatura y la presión, respectivamente.

[1] Presión manométrica; valores negativos indican tensión o tracción.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

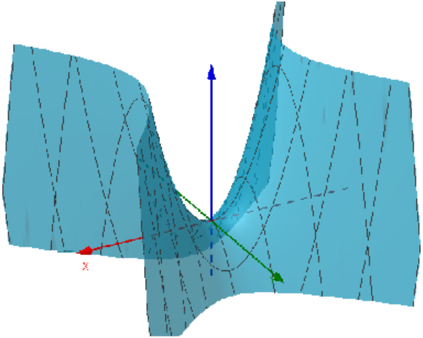
El objetivo de la planta industrial es encontrar los valores óptimos de x (temperatura) y y (presión) que maximicen la eficiencia del proceso. Para ello, se analiza la función $f(x, y)$ utilizando técnicas de optimización. Este tipo de análisis es común en la ingeniería de procesos, donde la optimización de variables operativas es crucial para mejorar la eficiencia y reducir costos en la producción.

Punto crítico y punto de silla

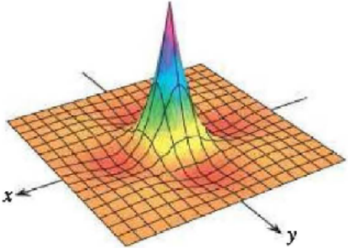
Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ es un punto crítico de f.

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P)$ no existe, es un punto (singular o) crítico de f.

Si f es diferenciable en P , tiene un punto de silla en P si P es un punto crítico de f y f no presenta en P un máximo local ni un mínimo local.



$f(x, y) = x^2 - y^2$



$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

Criterio de la derivada primera para valores extremos locales

Teorema (Criterio de la derivada primera)

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRAR Supongamos que $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo local de f.

Entonces la función $f(x, y_0)$, como función de una variable independiente, también tiene un extremo en $x = x_0$. Por el criterio de la derivada primera para funciones de una variable, si la derivada existe en x_0 debe ser cero.
Luego $f_x(x_0, y_0) = 0$.
Similarmente se prueba que $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- f es la eficiencia:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- f es la eficiencia:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- f es la eficiencia:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{cases}$$

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- f es la eficiencia:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\left| \begin{array}{cc} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{array} \right|; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

1. f *tiene un* **máximo local** *en* (a,b) *si* $H_f(a,b) > 0$ *y* $f_{xx}(a,b) < 0$;
2. f *tiene un* **mínimo local** *en* (a,b) *si* $H_f(a,b) > 0$ *y* $f_{xx}(a,b) > 0$;
3. f *tiene un* **punto de silla** *en* (a,b) *si* $H_f(a,b) < 0$;
4. *el criterio* **no es concluyente** *si* $H_f(a,b) = 0$.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{vmatrix} = 6x(6x + 6y) - (6y)^2$$

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{vmatrix} = 6x(6x + 6y) - (6y)^2$$

$$\begin{aligned} H_f(0, \pm\sqrt{5}) &= -36 \cdot 5 < 0 \\ H_f(2, 1) &= 12 \cdot 18 - 36 = 180 > 0; \qquad f_{xx}(2, 1) = 12 > 0 \\ H_f(-2, -1) &= -12 \cdot (-18) - 36 = 180 > 0; \quad f_{xx}(-2, -1) = -12 < 0 \end{aligned}$$

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

Puntos críticos: $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

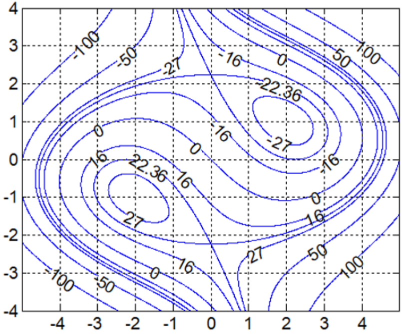
$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x+6y \end{vmatrix} = 6x(6x+6y) - (6y)^2$$

$$\begin{aligned} H_f(0,\pm\sqrt{5}) &= -36 \cdot 5 < 0 & & \\ H_f(2,1) &= 12 \cdot 18 - 36 = 180 > 0; & & f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \\ H_f(-2,-1) &= -12 \cdot (-18) - 36 = 180 > 0; & & f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0 \end{aligned}$$

Puntos de silla: $(0,\sqrt{5},-10\sqrt{5})$ y $(0,-\sqrt{5},10\sqrt{5})$.
Mínimo local: $f(2,1) = -30$; máximo local: $f(-2,-1) = 30$.

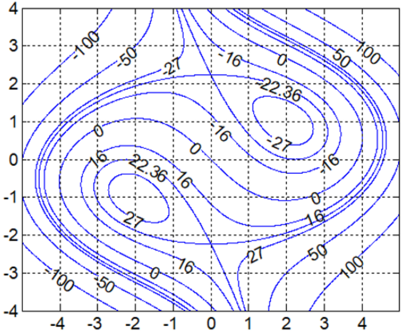
Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.



Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

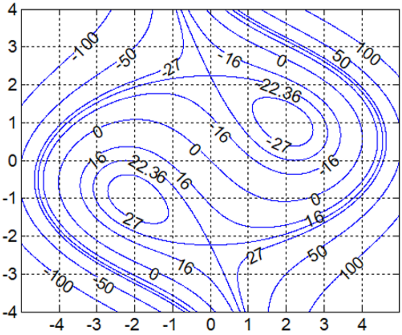
- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

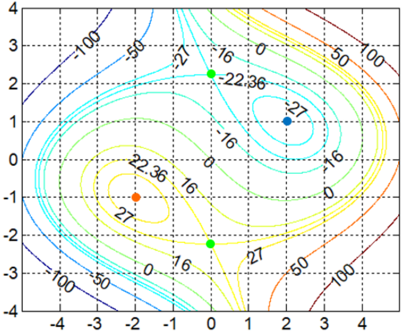


Puntos de silla: $(0, \sqrt{5}, -10\sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5}, 10\sqrt{5})$.
Mínimo local: $f(2, 1) = -30$; máximo local: $f(-2, -1) = 30$.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia

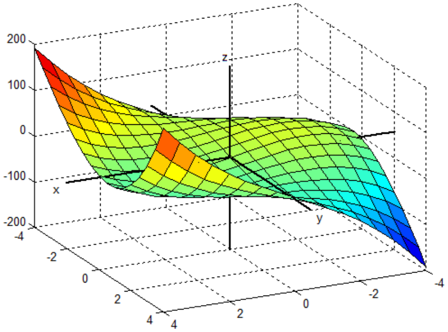
- x representa la temperatura de la operación en grados Celsius.
- y representa la presión de operación en pascales (Pa).
- la eficiencia es $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$.

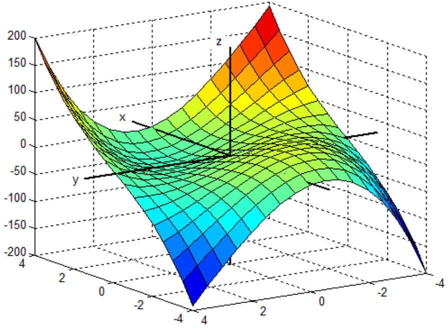




Puntos de silla: $(0, \sqrt{5}, -10\sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5}, 10\sqrt{5})$.
Mínimo local: $f(2, 1) = -30$; máximo local: $f(-2, -1) = 30$.

Diseño de un proceso industrial para maximizar la eficiencia





Criterio de la derivada segunda: caso especial

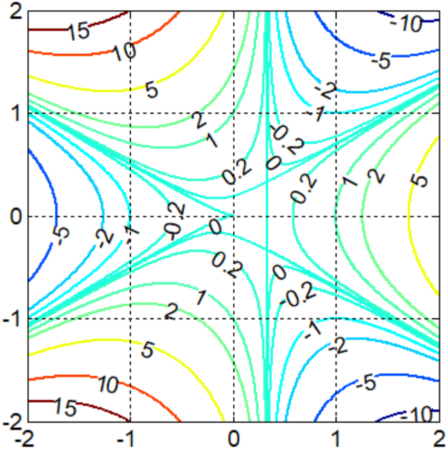
Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.

Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.
Puntos críticos: $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
$H_f\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$, dos puntos de silla: $\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$; $H_f(0, 0) = 0$.

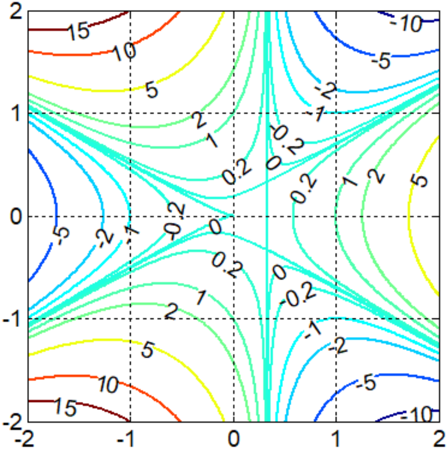
Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.
Puntos críticos: $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
$H_f\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$, dos puntos de silla: $\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$; $H_f(0, 0) = 0$.



Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.
Puntos críticos: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
$H_f\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$, dos puntos de silla: $\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$; $H_f(0,0) = 0$.



$f(x,0) = x^3$.

Recorrido

Valores extremos de funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados

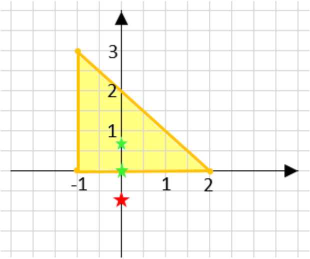
Teorema

Si f es una función continua en un conjunto D que es cerrado y acotado, entonces existen en D puntos en los cuales f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

SIN DEMOSTRAR

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. Ejemplo.

Buscar los extremos de $f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$ en los puntos de D que es el triángulo con vértices $(2,0)$, $(-1,0)$ y $(-1,3)$ (Restricción).



Los puntos críticos de f son $(0,0)$, $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, pero el último de éstos no pertenece a D y lo descartamos.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas

Evaluamos f en los puntos críticos pertenecientes a D:

$$f(0,0) = 0; \qquad f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Evaluamos f en la frontera de D:

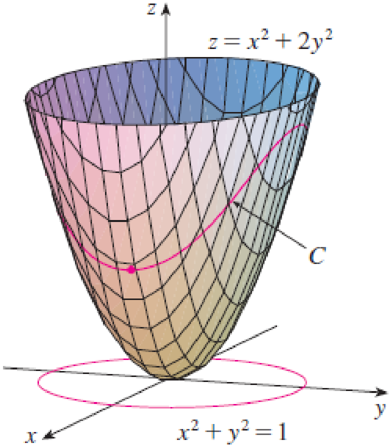
1. $f(-1,0) = -1; \quad f(2,0) = -4; \quad f(-1,3) = -8,75;$
2. $f(x,0) = -x^2;$
3. $f(-1,y) = y^2 - y^4 - 1; \quad f(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -0,75;$
4. $f(2-y,y) = -y^4 + 4y - 4; \quad f(1,1) = -1.$

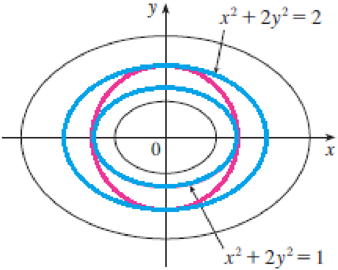
El valor máximo es $\frac{1}{4}$ y se alcanza en $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$; el valor mínimo es $-8,75$ y se alcanza en $(-1,3)$.

Recorrido

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad\qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$.





Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Sea C parametrizada por $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, y sea $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$, para cierto $t_0 \in [a, b]$. Si $w(t) = (f \circ \mathbf{r})(t)$ alcanza un valor extremo en t_0, por la diferenciabilidad de f y debido a que $w(t_0)$ es extremo, se tiene:

$$w'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad \text{y} \quad w'(t_0) = 0,$$

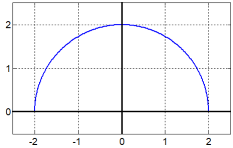
Luego $\nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$.

Corolario

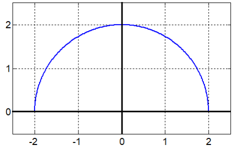
En $\mathbb{R}^2$ también vale.

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (restricción).



Se busca los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (restricción).



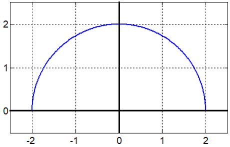
Se puede parametrizar la curva restricción

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq \pi$$

y buscar los extremos de $f \circ \mathbf{r}$: $f(\mathbf{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4$.

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (restricción).



Se puede parametrizar la curva restricción

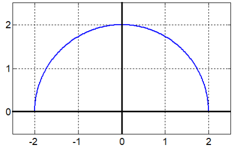
$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq \pi$$

y buscar los extremos de $f \circ \mathbf{r}$: $f(\mathbf{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4$.

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 8\cos(t) \\ 4\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{sen}(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} = -8\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)$$

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (restricción).



Se puede parametrizar la curva restricción

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq \pi$$

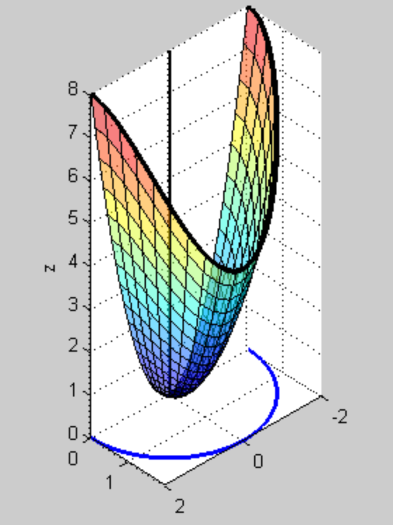
y buscar los extremos de $f \circ \mathbf{r}$: $f(\mathbf{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4$.

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 8\cos(t) \\ 4\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{sen}(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} = -8\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)$$

$$-8\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \tfrac{\pi}{2}, \pi\right\};\ \tfrac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}(t) = -8(\cos^2(t) - \mathrm{sen}^2(t)).$$

$$\tfrac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}(0) = -8 = \tfrac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}(\pi);\ \tfrac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 8.$$

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal



Método de multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

Método de multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

El punto P_0 es un **punto crítico** de f restringida a S (puede haber más de uno).

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

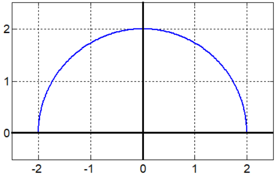
$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = & 0. \end{cases}$$

Para funciones de dos variables, es similar.

Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x,y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.

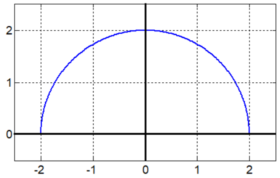


Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x,y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.

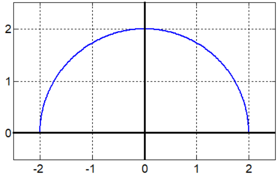
$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g \\ g(x,y) = & 0. \end{cases}$$



Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x, y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.



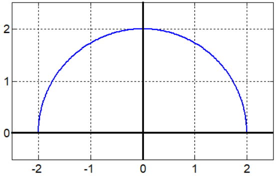
$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g \\ g(x, y) = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = & \lambda 2x \\ 2y = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = & 0. \end{cases}$$

Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x,y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.

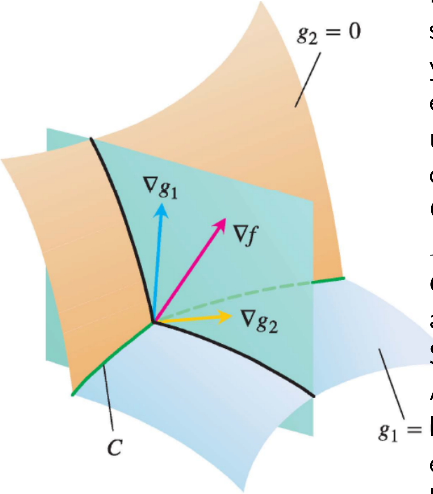


$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g \\ g(x,y) = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = & \lambda 2x \\ 2y = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = & 0. \end{cases}$$

Puntos críticos: $(\pm 2, 0)$ y $(0,2)$ ($(0,-2) \notin S$).

Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones



La curva C es la intersección de las superficies S_1 (superficie de nivel $g_1 = 0$) y S_2 (superficie de nivel $g_2 = 0$). Según el T. del Grad. Ortogonal, si f presenta un extremo relativo a C en $P_0 \in C$, debe ocurrir que $\nabla f(P_0)$ es ortogonal a C. Como C es una curva en el espacio, en P_0 habrá un plano normal a C. Por estar C includia en S_1, $\nabla g_1(P_0)$ es ortogonal a S_1 y así, es ortogonal a C. Similarmente, $\nabla g_2(P_0)$ es ortogonal a C. Así, si $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$ son linealmente independientes, se podrá expresar $\nabla f(P_0)$ como combinación lineal de $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$.

Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones

El planteo es:

$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) = & 0 \\ g_2(x,y,z) = & 0. \end{cases}$$

Notar que es un **sistema de 5 ecuaciones no lineales con 5 incógnitas**.

Recorrido

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 1 punto crítico: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
   $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ¿es máximo o mínimo?
   Es mínimo.

Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

1. $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2 - \frac{1}{2}$.
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y $g(x, y) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}) - 1$.
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = y - x$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Casos especiales

Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

1. $f(x,y) = y$ y $g(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2 - \frac{1}{2}$.
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ y $g(x,y) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}) - 1$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = y - x$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

En los dos primeros se verifica que $\nabla g(P_0) = \mathbf{0}$, siendo P_0 punto crítico de este problema. En el tercero se puede notar que no hay ningún problema cuando $\lambda = 0$. En el cuarto, se observa que $g = 0$ es una curva de nivel de f y todos los puntos que cumplen $g = 0$ son puntos críticos para este problema.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1, definida por $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1, definida por $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos **no** pertenecen a D_1.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_1 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm 1) = 3/4$; $f(\pm 1, 0) = -1$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_1 de 0.75, en los puntos $(0,\pm 1)$, y un mínimo absoluto de -1 en los puntos $(\pm 1, 0)$.

Ejercicio integrador 2

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_2, definida por $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos sí pertenecen a D_2.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_2 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm\sqrt{2},0) = -2$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_2 de 1, en los puntos $(0,\pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -2 en los puntos $(\pm\sqrt{2},0)$.

Ejercicio integrador 3

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_3, definida por $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos sí pertenecen a D_2.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_3 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-2)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm 2, 0) = -4$; $f(0,\pm 2) = 0$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_3 de 1, en los puntos $(0,\pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -4 en los puntos $(\pm 2, 0)$.

Ejemplo: Planos tangentes y rectas normales a superficie de nivel

Ejemplo: dada $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, buscar la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de nivel de f que pasa por el punto indicado, en dicho punto, para los puntos $(1,0,0)$ y $(0,0,0)$.
Sol: la superficie de nivel $f(x,y,z) = c$ que contiene al punto $(1,0,0)$ es $f(x,y,z) = f(1,0,0)$, es decir $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 0$; el plano tangente a esta superficie de nivel en $(1,0,0)$ es $z = 0$ y la recta normal a la superfice en ese punto es $\mathbf{r}(t) = (1,0,t), \quad t \in \mathbb{R}$. El punto $(0,0,0)$ pertenece a la misma superficie de nivel que $(1,0,0)$; en $(0,0,0)$, se tiene que $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$ de manera que no existe plano tangente ni recta normal.