Integrales de funciones de varias variables

Ingeniería

Recorrido

Recorrido

Definición de función acotada en una región D

Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada en D si existen números reales m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$.

Similarmente se define función acotada en una región $D \subset \mathbb{R}^n$.

Observación: no debe confundirse el concepto de función acotada en una región con el de región acotada, estudiado con anterioridad.

Veamos un par de ejemplos.

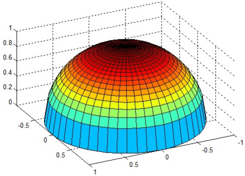
Definición de función acotada en una región D

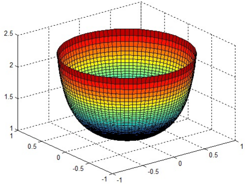
Ejemplo

La función dada por $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ es acotada y su dominio es un conjunto acotado.

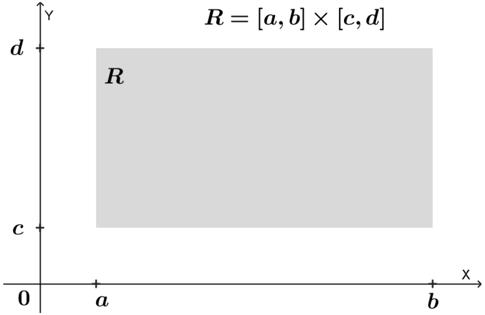
Ejemplo

La función dada por $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ es no acotada y su dominio es un conjunto acotado (no cerrado).

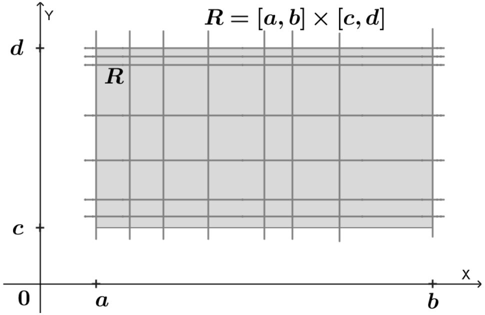




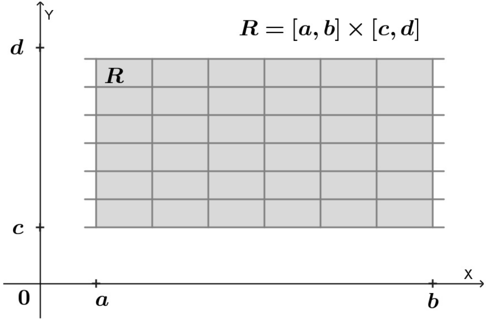
Definición de integral doble

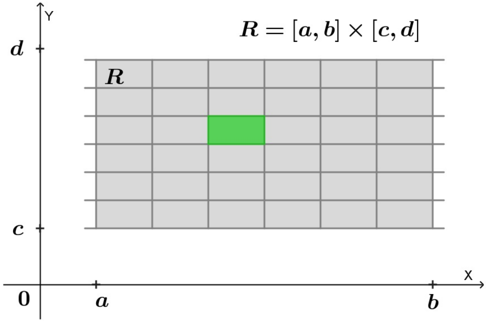


Definición de integral doble

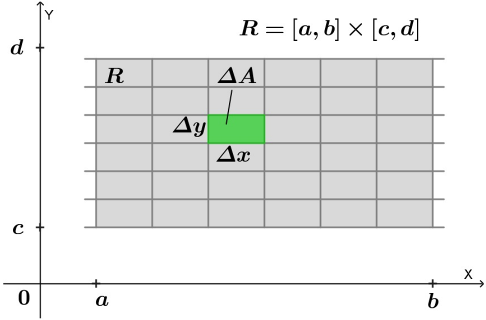


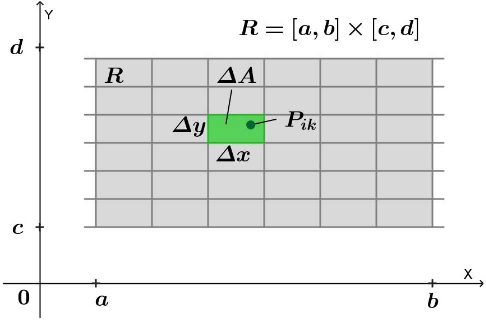
Definición de integral doble



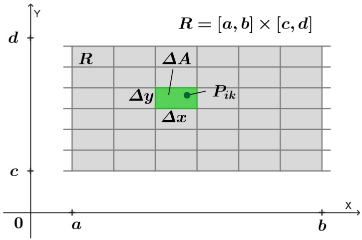

Y
d
c
0
a
b
X
R
$R = [a, b] \times [c, d]$

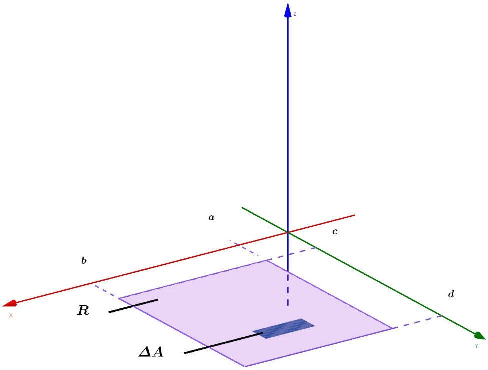
Definición de integral doble



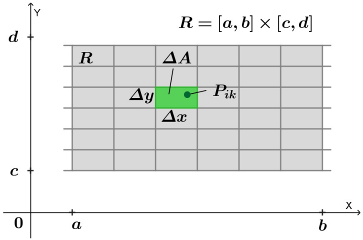

Y
$R = [a, b] \times [c, d]$
d
R
ΔA
Δy
P_{ik}
Δx
c
X
0
a
b

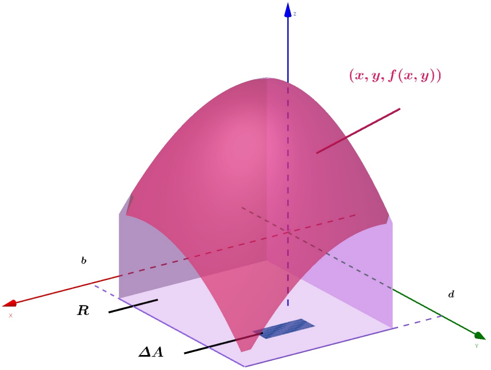
Definición de integral doble



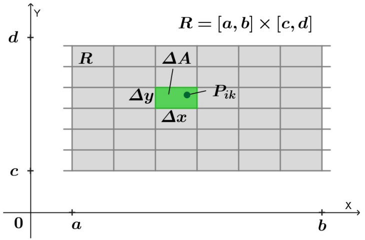


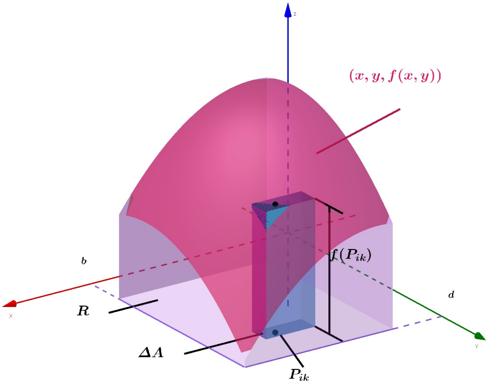
Definición de integral doble



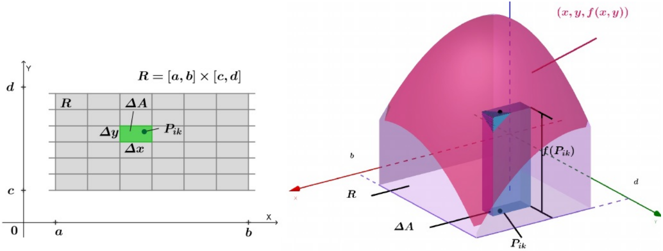


Definición de integral doble

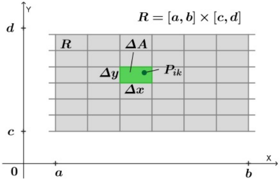


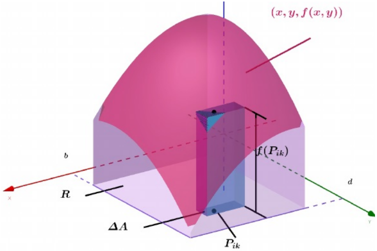


Definición de integral doble sobre rectángulos



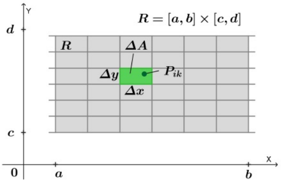
Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectángulos

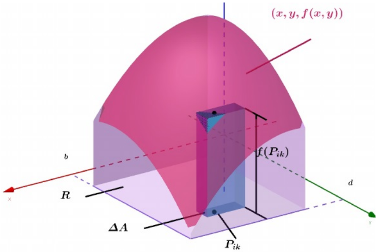




Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ik}) \Delta A$.

Definición de integral doble sobre rectángulos



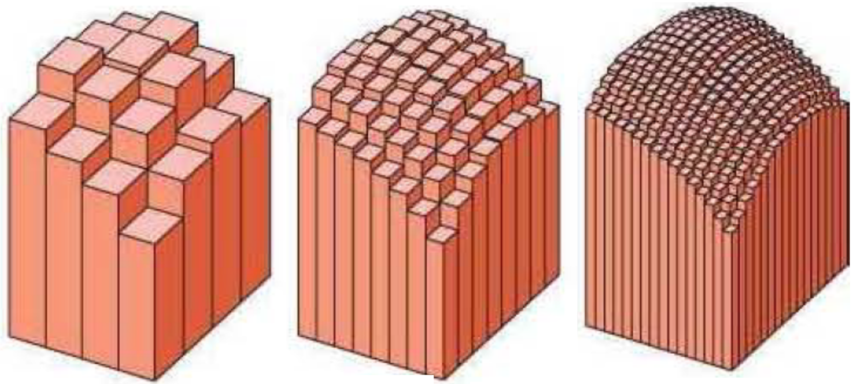


Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A$.

Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe para cualquier elección de P_{ik}, se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

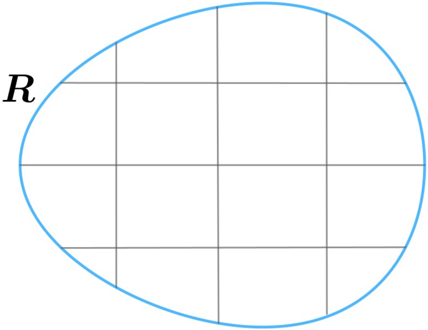
$$\iint_R f(x, y)\,dA \qquad \text{o} \qquad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy$$

Interpretación: si $f(x, y) \geq 0$ la integral es un volumen

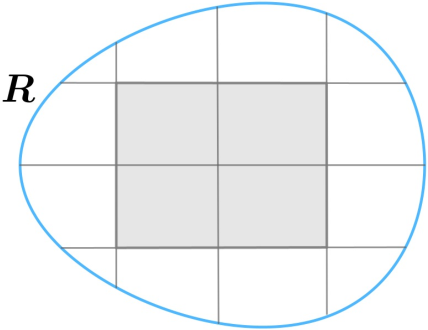


$n \times n = 16$ $\quad$ $n \times n = 64$ $\quad$ $n \times n = 256$

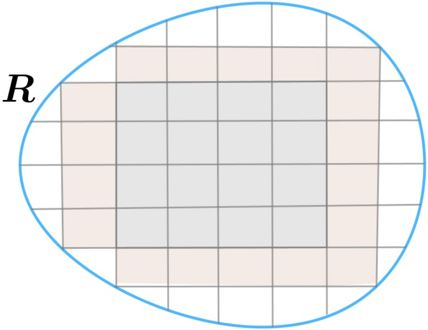
Definición de integral doble



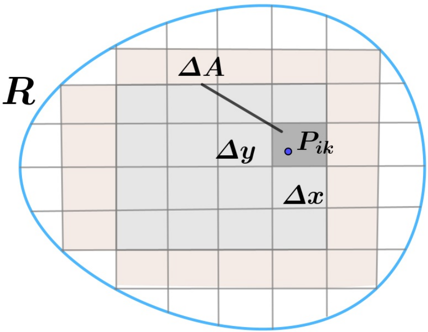
Definición de integral doble

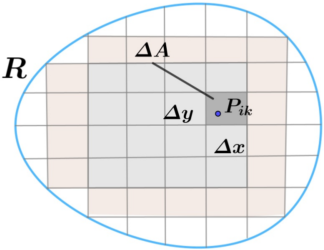


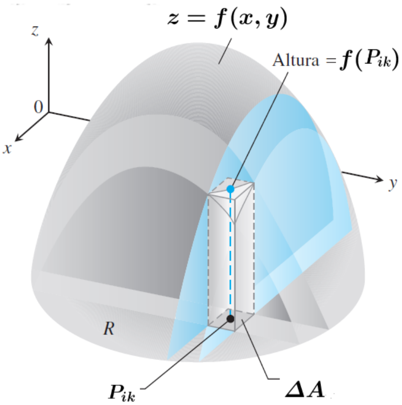
Definición de integral doble



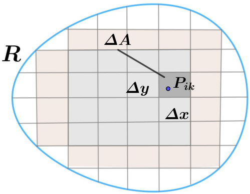
Definición de integral doble

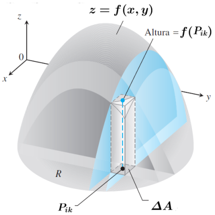



R
ΔA
Δy
P_{ik}
Δx


$z = f(x, y)$
Altura $= f(P_{ik})$
z
0
x
y
R
P_{ik}
ΔA

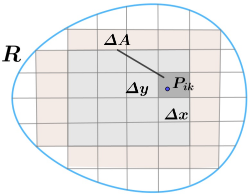
Definición de integral doble sobre otras regiones

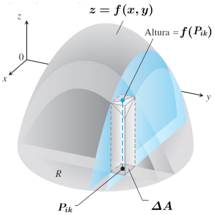




Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ik}) \Delta A$.

Definición de integral doble sobre otras regiones





Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(P_{ik}\right) \Delta A$.

Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, para cualquier elección de (P_{ik}), se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x,y)dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)dx\,dy$$

Propiedades de las integrales dobles

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

2 $\displaystyle\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA.$

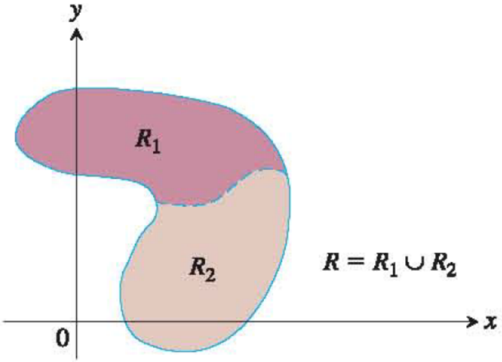
3 $\displaystyle\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA.$

4 Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$,

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA.$$

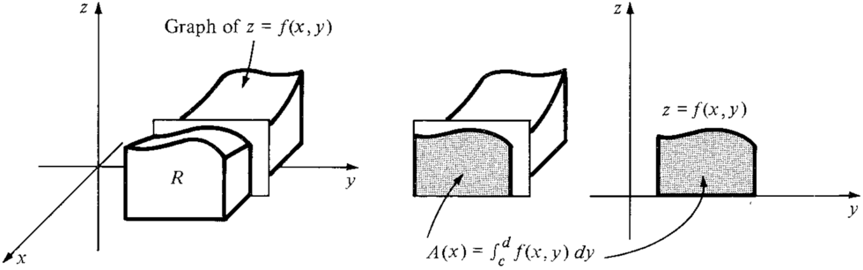
5. Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA.$$

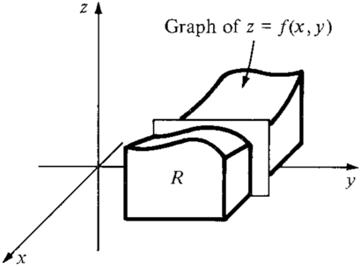


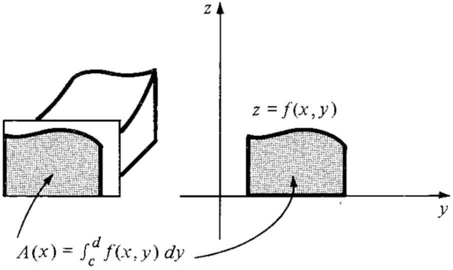
Recorrido

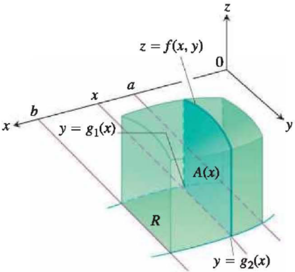
Integrales iteradas: Principio de Cavalieri

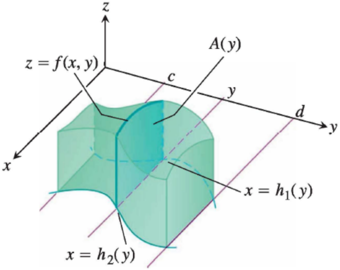


Integrales iteradas: Principio de Cavalieri









Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d]$), entonces*

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R *es rectangular* ($R = [a, b] \times [c, d]$)*, entonces*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\, dy.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d]$), entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy.$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx.$$

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d]$), entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy.$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx.$$

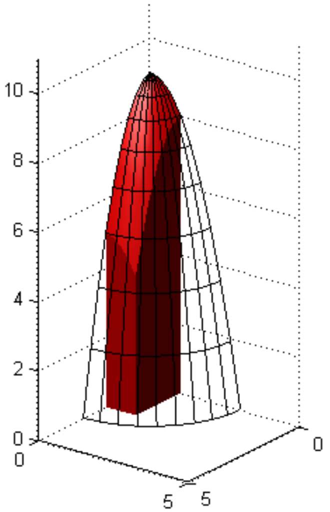
- *R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy.$$

Ejemplo

$$\int_0^2 \int_0^1 (9 - x^2 - y^2)dydx$$

- ¿Cómo se calcula?
- ¿Qué obtengo al final del cálculo?
- ¿Cómo puedo interpretar ese resultado?

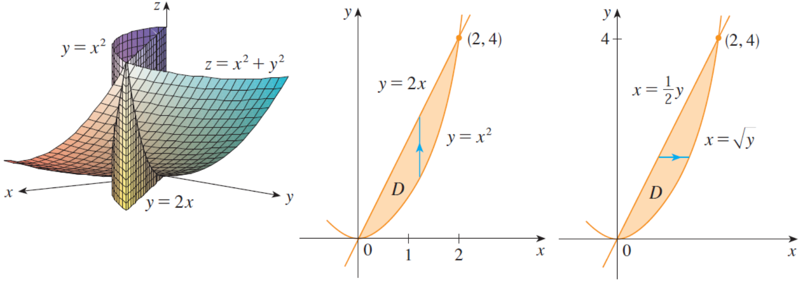


Ejemplo

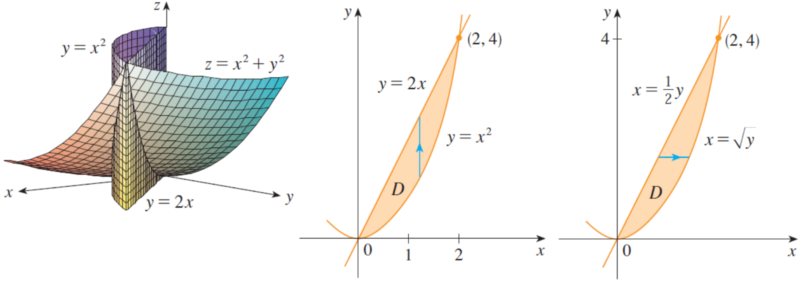
Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.



Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.



Rta: $\dfrac{216}{35} \approx 6,17.$

Recorrido

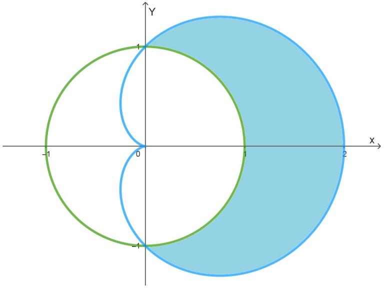
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r=1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1+\cos\theta$:



circunferencia: $x^2+y^2=1$

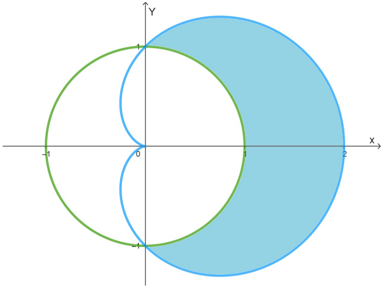
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r=1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1+\cos\theta$:



circunferencia: $x^2+y^2=1$

cardioide: $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$

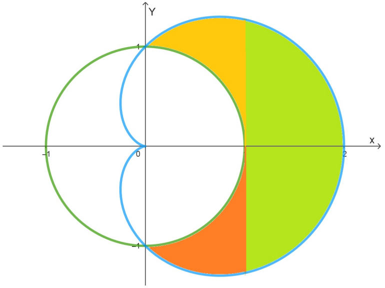
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0, 0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

cardioide: $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$

Valor medio de una función integrable en una región acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

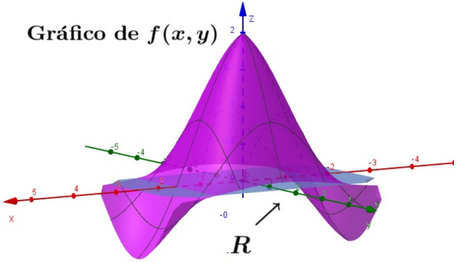
$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

Valor medio de una función integrable en una región acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$



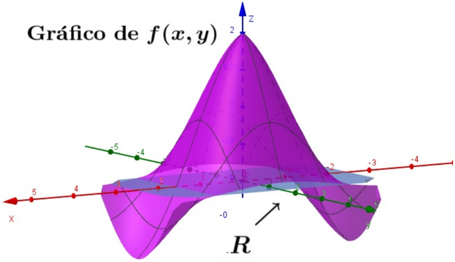
Valor medio de una función integrable en una región acotada R

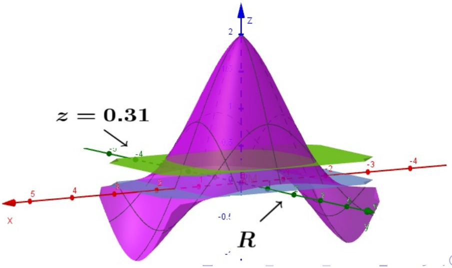
Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

$$VM = \frac{1}{15} \int_{-2.5}^{2.5} \int_{-1.5}^{1.5} f(x,y)\,dy\,dx = 0.31$$





Recorrido

Reminder...

Para resolver por sustitución la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos(5x)dx$, planteamos:

$$u = 5x;\ du = 5dx \tag{1}$$

y hacemos

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{1}{5}\,du.$$

Reminder...

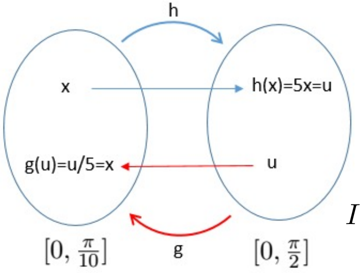
Para resolver por sustitución la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos(5x)dx$, planteamos:

$$u = 5x;\ du = 5dx \qquad (1)$$

y hacemos

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\, \frac{1}{5}\, du.$$

En (1) hemos definido una función biyectiva, entre $[0, \frac{\pi}{10}]$ y $[0, \frac{\pi}{2}]$:



$$g : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to [0, \tfrac{\pi}{10}]$$

$$x = g(u) = \tfrac{u}{5}; \quad g'(u) = \tfrac{1}{5}; \quad dx = \tfrac{1}{5}du$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(5\frac{u}{5}\right) \frac{1}{5}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(g(u)\right) g'(u)\, du$$

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad 0 \le \rho \le 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad 0 \leq \rho \leq 1;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Verificar que $\mathbf{r}(\rho, 0)$, $0 \leq \rho \leq 1$, es el segmento $[0,1] \times 0$; y que $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta), \qquad 0 \le \rho \le 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Verificar que $\mathbf{r}(\rho,0)$, $0 \le \rho \le 1$, es el segmento $[0,1]\times 0$; y que $\mathbf{r}(\frac{1}{2},\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, es la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Esta transformación no es inyectiva en la frontera de S (todos los puntos $(0,\theta)$ tienen imagen $(0,0)$), pero sí lo es en el interior de S.

Fórmula del cambio de variables

Para calcular

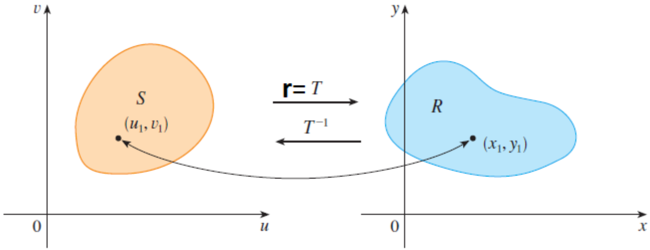
$$\iint_R f(x,y)dx\,dy$$

Fórmula del cambio de variables

Para calcular

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy$$

se puede definir una transformación



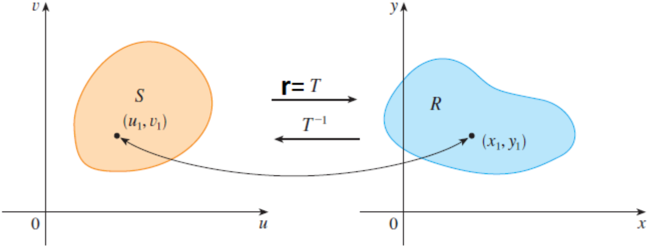
$$T : S \to R \qquad \text{biyectiva}$$

$$T(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$$

Para calcular

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

se puede definir una transformación

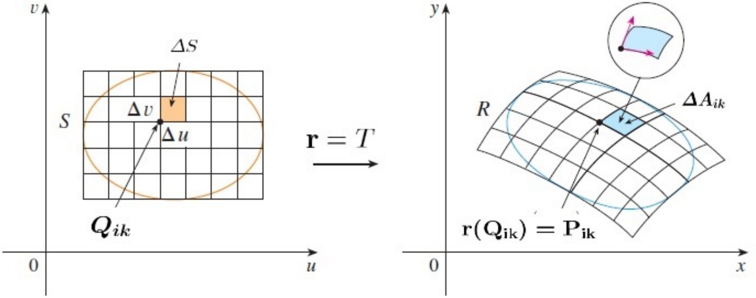


$$T : S \to R \qquad \text{biyectiva}$$

$$T(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$$

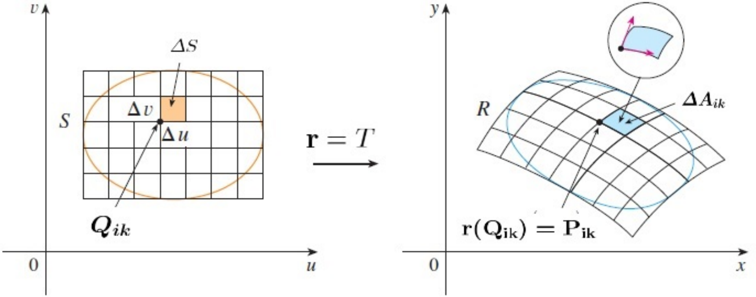
Se puede probar que **si** f es continua, x y y tienen derivadas paciales de primer orden continuas y el jacobiano de la transformación, $J(u,v)$, solo se anula en puntos aislados o nunca, **entonces**

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv$$



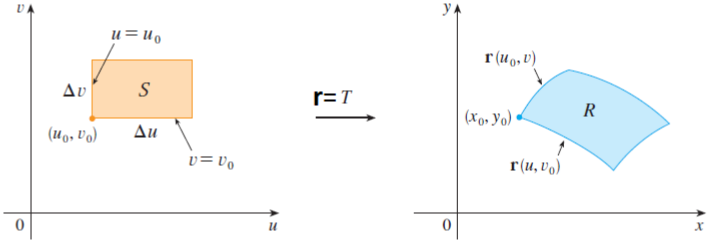
v
ΔS
S
Δv
Δu
Q_{ik}
0
u
$\mathbf{r} = T$
y
R
ΔA_{ik}
$\mathbf{r}(\mathbf{Q_{ik}}) = \mathbf{P_{ik}}$
0
x

JACOBIANO



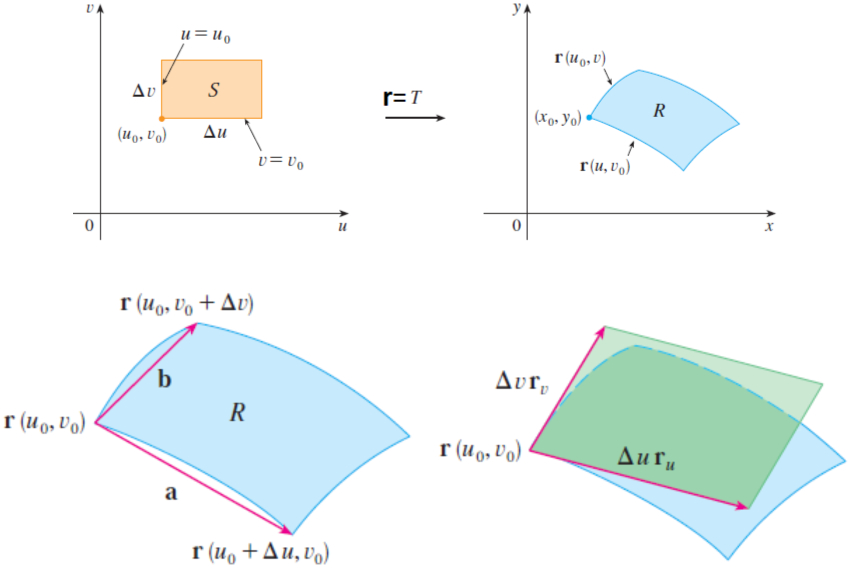
$$\iint_R f(x,y)dA \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A_{ik}$$

JACOBIANO



v
$u = u_0$
Δv
S
(u_0, v_0)
Δu
$v = v_0$
0
u
$\mathbf{r} = T$
y
$\mathbf{r}(u_0, v)$
(x_0, y_0)
R
$\mathbf{r}(u, v_0)$
0
x

JACOBIANO



v
$u = u_0$
Δv
S
(u_0, v_0)
Δu
$v = v_0$
0
u
$\mathbf{r} = T$
y
$\mathbf{r}(u_0, v)$
(x_0, y_0)
R
$\mathbf{r}(u, v_0)$
0
x
$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v)$
$\mathbf{b}$
R
$\mathbf{r}(u_0, v_0)$
$\mathbf{a}$
$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0)$
$\Delta v\, \mathbf{r}_v$
$\mathbf{r}(u_0, v_0)$
$\Delta u\, \mathbf{r}_u$

JACOBIANO

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

JACOBIANO

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

JACOBIANO

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Definición

El Jacobiano de la transfomación $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

JACOBIANO

$$\iint_R f(x,y)dA \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A_{ik}$$

JACOBIANO

$$\iint_R f(x,y)dA \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A_{ik}$$

$$\Delta A_{ik} \simeq \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| Q_{ik}\Delta u \Delta v$$

JACOBIANO

$$\iint_R f(x,y)dA \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A_{ik}$$

$$\Delta A_{ik} \simeq \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| Q_{ik}\Delta u\Delta v$$

$$\iint_R f(x,y)dA \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLES

Teorema

Supóngase que T es una transformación biyectiva de S en R, tal que sus componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en S y cuyo Jacobiano es no nulo en S. Supóngase que f es continua en R. Entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Observación: el teorema también vale si T no es inyectiva en puntos de la frontera de S.

Recorrido

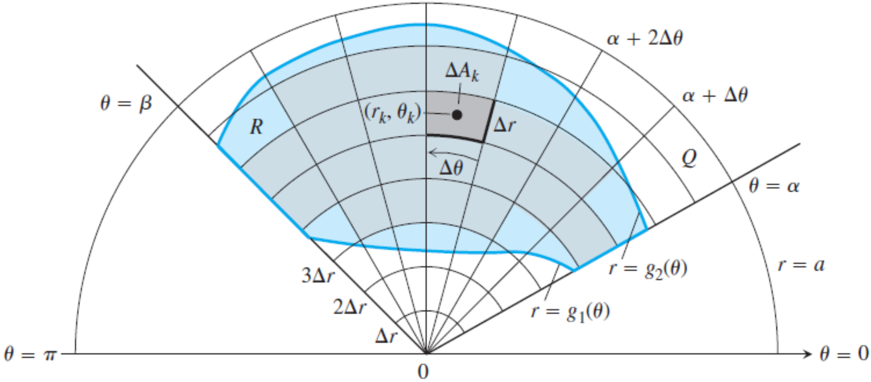
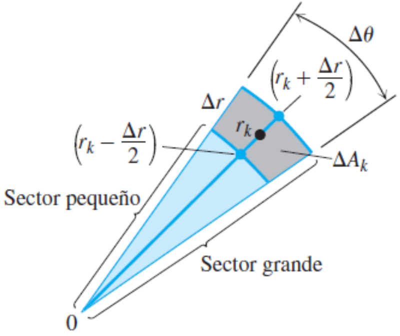


FIGURA 15.21 La región R: $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, está contenida en la región con forma de abanico Q: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

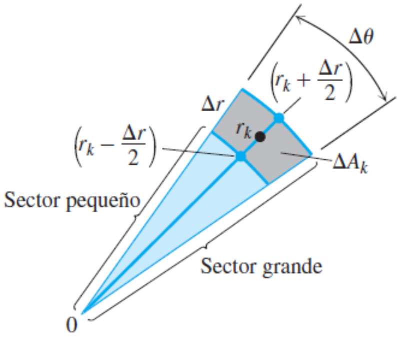
Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

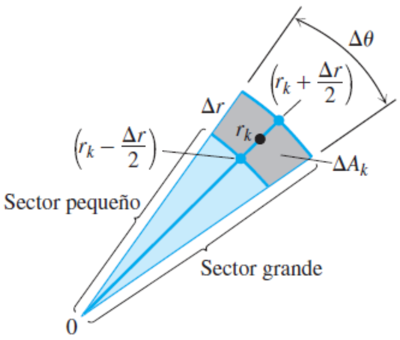
FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\dfrac{1}{2}\left(r_k - \dfrac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\dfrac{1}{2}\left(r_k + \dfrac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

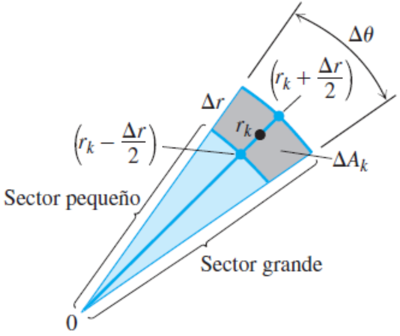
nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r| = r.$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Planteo: $V = \iint_R f(x,y)\, dA$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y)\, dA$

SOLUCIÓN en coordenadas rectangulares:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy\, dx$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Planteo: $V = \iint_R f(x,y)\,dA$

SOLUCIÓN en coordenadas rectangulares:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} \right) dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Planteo: $V = \iint_R f(x,y)\,dA$

SOLUCIÓN en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} \right) dx \end{aligned}$$

Ver fórmulas 45 y 46 del final del libro (repasar análisis 1)

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Planteo: $V = \iint_R f(x,y)\, dA$

SOLUCIÓN en coordenadas polares:

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y)\, dA$

SOLUCIÓN en coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta; \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy?
Planteo: $V = \iint_R f(x, y)\, dA$
SOLUCIÓN en coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta; \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta) r\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{8}$$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es $\qquad A = \iint_R dA.$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$:

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

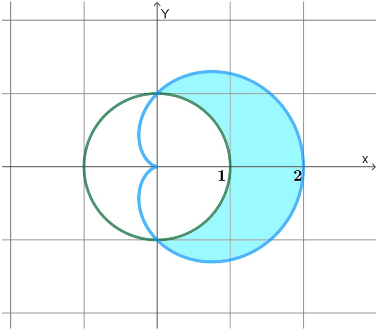
Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

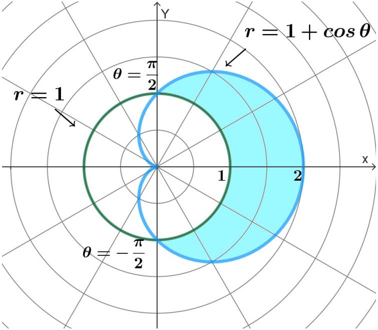
Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.



Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

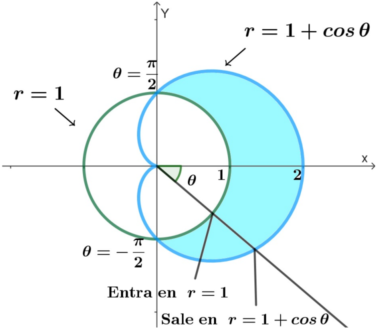
Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.

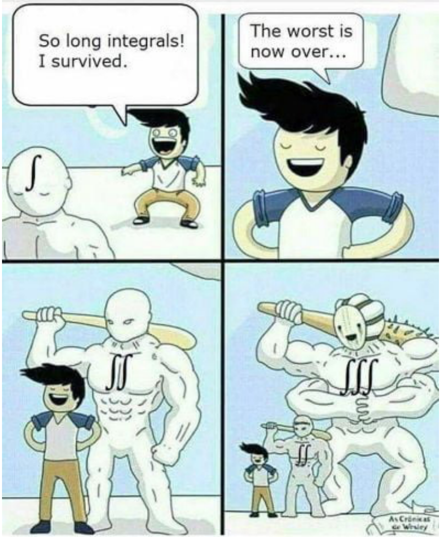


Si la región plana R es acotada, su área es $\quad A = \iint_R dA.$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.



Dibujito



Recorrido

1. Integración de funciones de dos variables
   - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
   - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
   - Aplicaciones: áreas y valor medio
2. Fórmula del cambio de variables
   - Fórmula del cambio de variables
   - Integrales dobles en coordenadas polares
3. **Integrales múltiples**
   - **Integrales triples en coordenadas rectangulares**
   - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
   - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
4. Ejemplos varios

Definición de integral triple sobre rectángulos

Sea f una función definida y acotada en un **rectángulo o caja** R.
Definimos una partición de R, formada por n^3 subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk}) \Delta V$.

Definición de integral triple sobre rectángulos

Sea f una función definida y acotada en un **rectángulo o caja** R.
Definimos una partición de R, formada por n^3 subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ijk})\Delta V$.
Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe para cualquier elección de (P_{ijk}), se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iiint_R f(x,y,z)dV \quad \text{o} \quad \iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Definición de integral triple sobre otras regiones

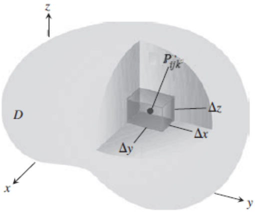


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV.

Definición de integral triple sobre otras regiones

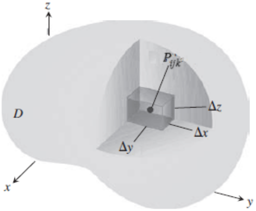


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV

Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en R; formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk})\Delta V$.

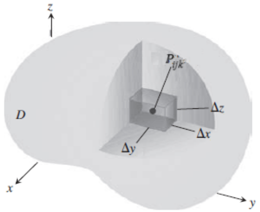


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV

Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en R; formamos la suma de Riemann
$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk})\Delta V$.
Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, para cualquier elección de (P_{ijk}), se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iiint_R f(x,y,z)dV \quad \text{o} \quad \iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Propiedades de las integrales triples

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

2 $$\iiint_R [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dV = \iiint_R f(x,y,z)dV + \iiint_R g(x,y,z)dV.$$

3 $$\iint_R cf(x,y,z)dV = c\iiint_R f(x,y,z)dV.$$

4 Si $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in R$,
$$\iiint_R f(x,y,z)dV \leq \iiint_R g(x,y,z)dv.$$

Propiedades de las integrales triples

5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iiint_{R_1 \cup R_2} f(x, y, z) dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z) dV.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$), entonces*

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$), entonces*

$$\iiint_R f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x, y, z)dz\,dy\,dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x, y, z)dz\,dx\,dy ...$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d] \times [e,m]$), entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x,y,z)dz\,dx\,dy...$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ y $h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x,y) : a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$), entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x,y,z)dz\,dx\,dy...$$

- *R está definida por $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ y $h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx.$$

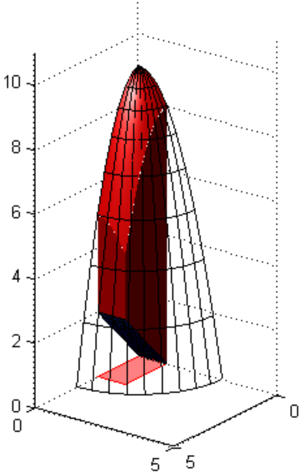
- *Hay otros casos...*

Ejemplo Teorema de Fubini

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano $z = x$ y el plano $y = 1$, en el primer octante.

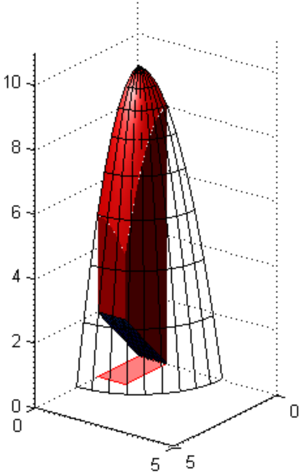
Ejemplo Teorema de Fubini

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano $z = x$ y el plano $y = 1$, en el primer octante.



Ejemplo Teorema de Fubini

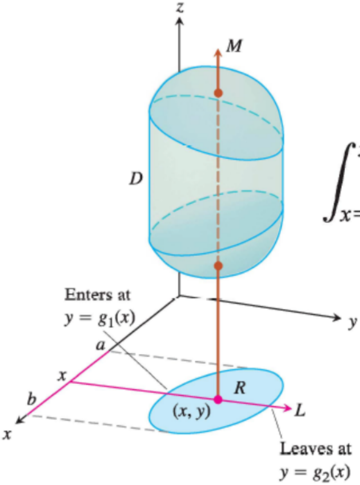
Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano $z = x$ y el plano $y = 1$, en el primer octante.



$$\int_0^2 \int_0^1 \int_x^{9-x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Teorema de Fubini

Si f es continua en $D \subset \mathbb{R}^3$,
$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \ldots.$



$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Valor medio de una función de tres variables

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{volumen de } R} \iiint_R f\, dV.$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su volumen es

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

Observación: cuando δ es constante, el centro de masa se llama centroide.

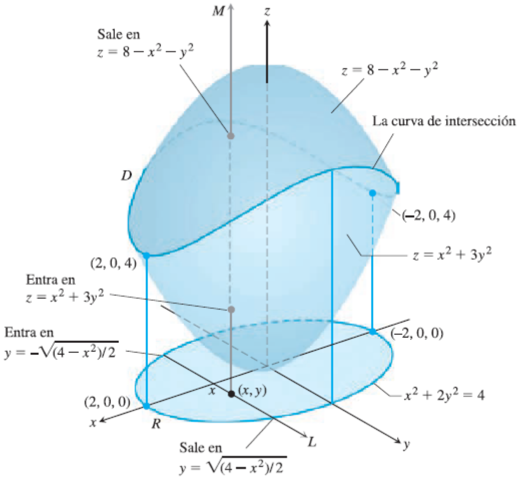
Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$.

Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL: (pag.862)

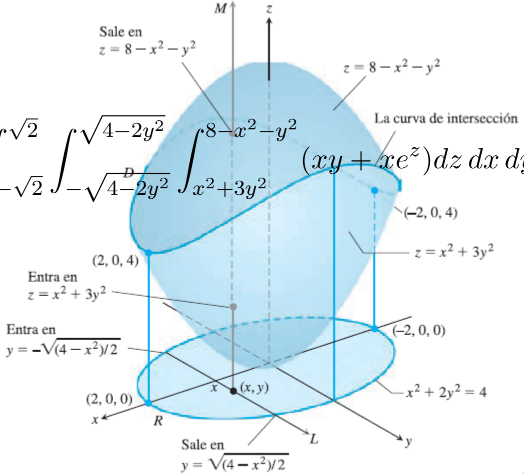
Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL: (pag.862)



Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL: (pag.862)

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} (xy + xe^z)\, dz\, dx\, dy.$$



Recorrido

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r\cos\theta; \qquad h(r, \theta, z) = y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad k(r, \theta, z) = z$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r\cos\theta; \qquad h(r, \theta, z) = y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad k(r, \theta, z) = z$$

Jacobiano:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r,\theta,z) = x = r\cos\theta; \qquad h(r,\theta,z) = y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad k(r,\theta,z) = z$$

Jacobiano:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r.$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho,\theta,\phi) = x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta; \qquad h(\rho,\theta,\phi) = y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta;$$

$$k(\rho,\theta,\phi) = z = \rho\cos\phi$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho, \theta, \phi) = x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; \qquad h(\rho, \theta, \phi) = y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$$

$$k(\rho, \theta, \phi) = z = \rho \cos \phi$$

Jacobiano:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho,\theta,\phi) = x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta; \qquad h(\rho,\theta,\phi) = y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta;$$

$$k(\rho,\theta,\phi) = z = \rho\cos\phi$$

Jacobiano:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

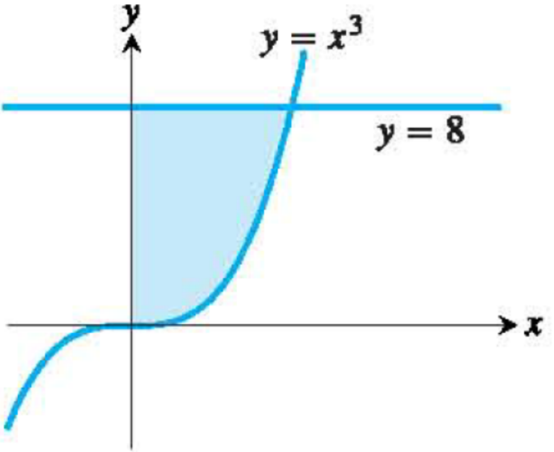
$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Otros ejemplos

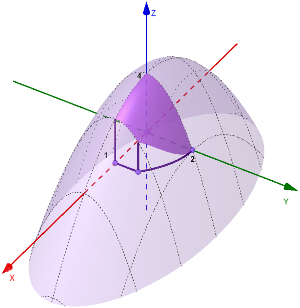
1) Escriba dos integrales iteradas para hallar $\iint_R f(x,y)dA$ sobre la región R dada en el gráfico.



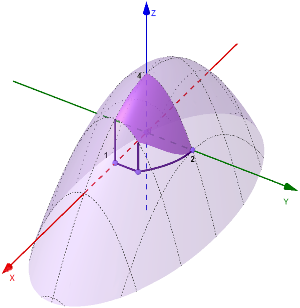
Otros ejemplos

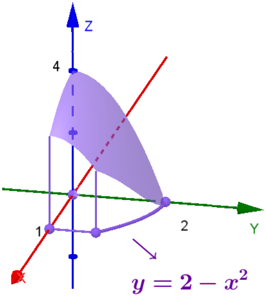
2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy\, dx$? ¿Cuánto vale?

2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\, dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:



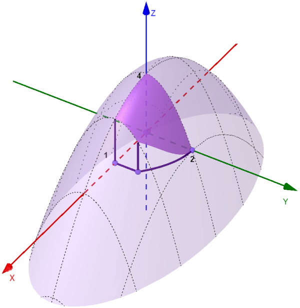
2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\,dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:

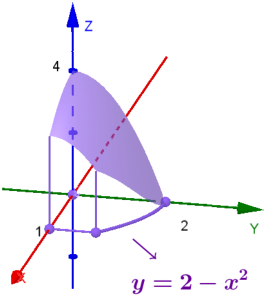




Otros ejemplos

2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\,dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:

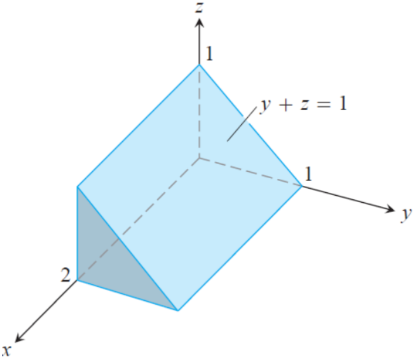




$$\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\,dx = \frac{158}{35} \simeq 4{,}5143$$

Otros ejemplos

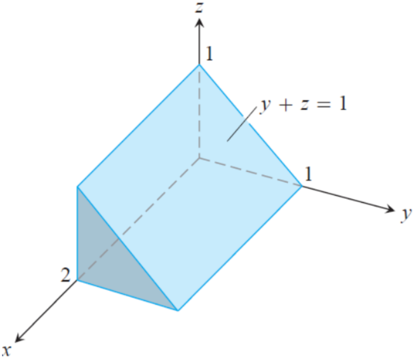
3) Plantee 6 integrales para hallar el volumen del prisma de la figura:



SOLUCIÓN:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz$$

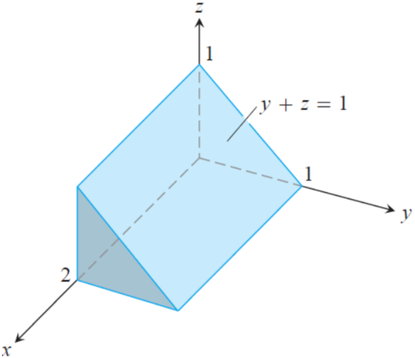
3) Plantee 6 integrales para hallar el volumen del prisma de la figura:



SOLUCIÓN:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\, dz\, dy$$

3) Plantee 6 integrales para hallar el volumen del prisma de la figura:



SOLUCIÓN:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\, dz\, dy = \ldots$$