Integrales de funciones de varias variables

Ingeniería

Recorrido

Recorrido

1. Integración de funciones de dos variables
   - Revisión integrales de funciones de una variable
   - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
   - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
   - Nota sobre integrales impropias
   - Aplicaciones: masas, áreas y valor medio
2. Fórmula del cambio de variables
   - Fórmula del cambio de variables
   - Integrales dobles en coordenadas polares
3. Integrales múltiples
   - Integrales triples en coordenadas rectangulares
   - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
   - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
4. Ejemplos varios

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a,b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

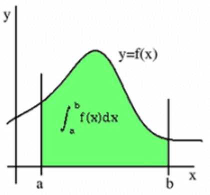
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a,b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

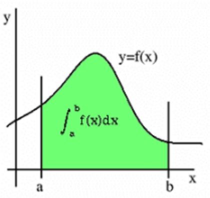
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

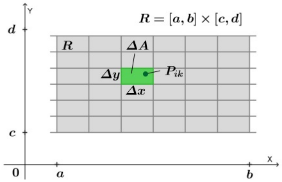
Aplicaciones:

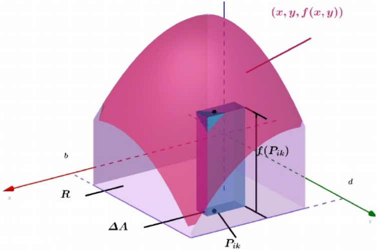


$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k^*)\Delta x_k$$

Recorrido

Definición de integral doble sobre rectángulos



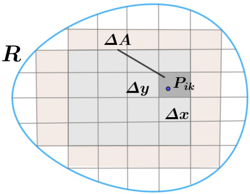


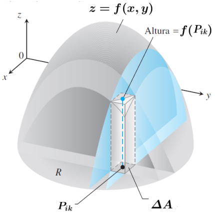
Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ik}) \Delta A$.

Si el $\lim_{n \to \infty} S_n$ existe para cualquier elección de P_{ik}, se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x, y)\, dA \qquad \text{o} \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

Definición de integral doble sobre otras regiones





Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann
$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(P_{ik}\right) \Delta A$.

Si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, para cualquier elección de (P_{ik}), se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x,y)dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)dx\,dy$$

Propiedades de las integrales dobles

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

2 $\displaystyle\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA.$

3 $\displaystyle\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA.$

4 Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$,

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA.$$

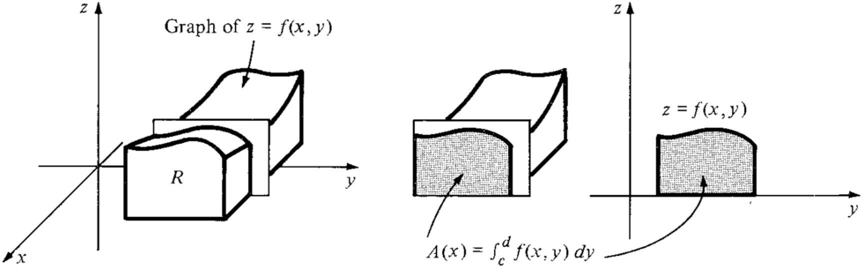
5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

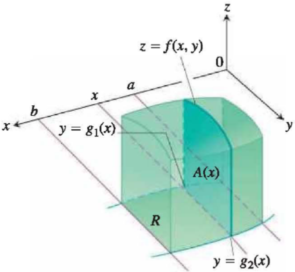
$$\iint_{R_1\cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA.$$

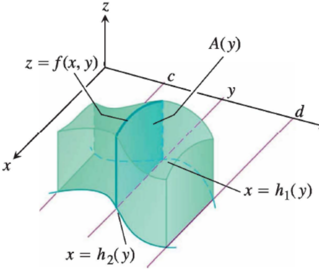
Recorrido

1. Integración de funciones de dos variables
   - Revisión integrales de funciones de una variable
   - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
   - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
   - Nota sobre integrales impropias
   - Aplicaciones: masas, áreas y valor medio
2. Fórmula del cambio de variables
   - Fórmula del cambio de variables
   - Integrales dobles en coordenadas polares
3. Integrales múltiples
   - Integrales triples en coordenadas rectangulares
   - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
   - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
4. Ejemplos varios

Integrales iteradas: Principio de Cavalieri







Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy.$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx.$$

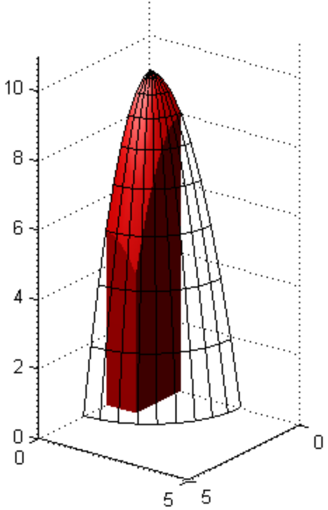
- *R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy.$$

Ejemplo

$$\int_0^2 \int_0^1 (9 - x^2 - y^2)dydx$$

- ¿Cómo se calcula?
- ¿Qué obtengo al final del cálculo?
- ¿Cómo puedo interpretar ese resultado?



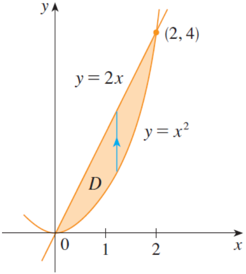
1. Calcule:
   a) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^4 2xy \, dy dx$
   d) $\displaystyle\iint\limits_R xy \cos y \, dA$, donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$

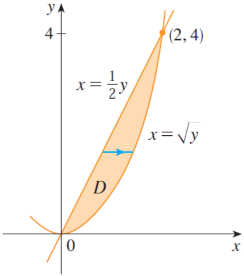
Ejemplo: región no rectangular

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

Ejemplo: región no rectangular

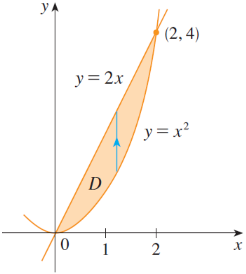
Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

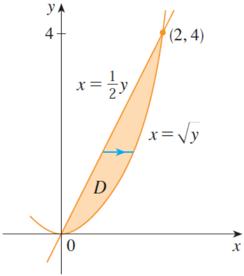


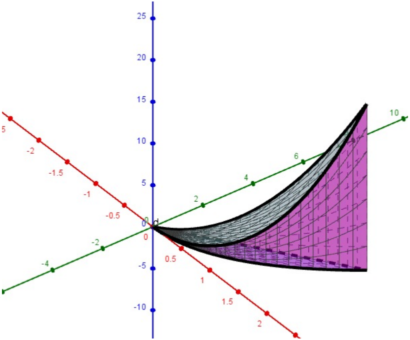


Ejemplo: región no rectangular

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

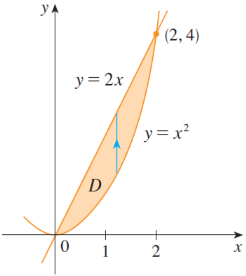


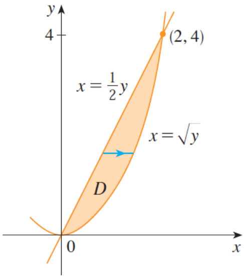


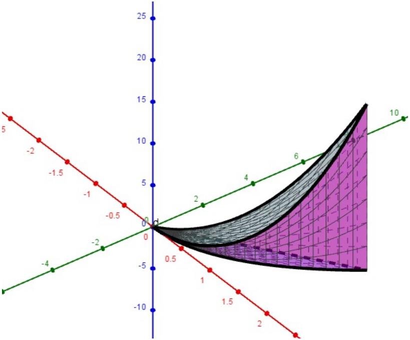


Ejemplo: región no rectangular

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.







Rta: $\dfrac{216}{35} \approx 6,17.$

Ejercicios del TP 3

6. Trace la región de integración y evalúe la integral.
   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} y \, dy \, dx$
   b) $\displaystyle\int_1^{2} \int_y^{y^2} dx \, dy$
12. Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 3$.

Recorrido

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f\, dA$

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\displaystyle\iint_D f\,dA$

1. La región de integración D es no acotada: $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}dy\,dx$.

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f\, dA$

1. La región de integración D es no acotada: $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1} \frac{1}{x^3 y} dy\, dx$.
2. f es continua en el interior de D pero no lo es en algunos puntos de su frontera: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy\, dx$.

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\displaystyle\iint_D f\,dA$

1. La región de integración D es no acotada: $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}dy\,dx.$
2. f es continua en el interior de D pero no lo es en algunos puntos de su frontera: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy\,dx.$
3. f es una función no acotada en puntos aislados de D: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\,dx.$

15. Evalúe la integral impropia $\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1} \frac{1}{x^3 y}\,dy\,dx$ como si fuese una integral iterada.

19. Pruebe que

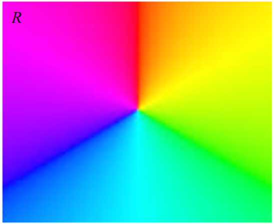
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\ &= 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

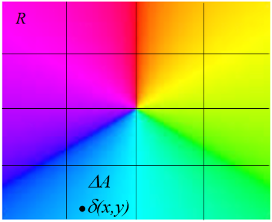
Recorrido

Masas y centros de masa

La masa de una lámina plana R, de densidad variable dada por $\delta(x,y)$ es

$$M = \iint_R \delta(x,y)\, dx\, dy.$$

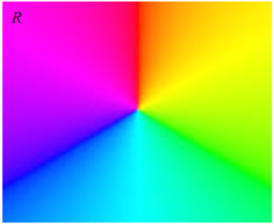


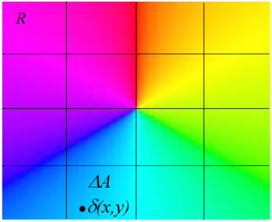


Masas y centros de masa

La masa de una lámina plana R, de densidad variable dada por $\delta(x, y)$ es

$$M = \iint_R \delta(x, y)\, dx\, dy.$$





Las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \underbrace{\iint_R x\delta(x, y) dA}_{M_y},\ \bar{y} = \frac{1}{M} \underbrace{\iint_R y\delta(x, y) dA}_{M_x}.$$

M_y: momento con respecto al eje y.

42. Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad $\delta = 3$ acotada por las rectas $x = 0$, $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$ en el primer cuadrante.

Planteamos:

$$M = \iint_R \delta(x,y)dA = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} 3\,dy\,dx = \frac{7}{2}$$

$$M_y = \iint_R x\delta(x,y)dA = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} 3x\,dy\,dx = \frac{5}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{5/4}{7/2} = \frac{5}{14}.$$

Similarmente, $M_x = \frac{19}{5}$ y

$$\bar{y} = \frac{38}{35}.$$

Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

Ejercicio del TP 3:

20. Trace la región acotada por las rectas y las curvas dadas. Exprese el área de la región como una integral doble iterada y evalúe la integral.
    b) La parábola $x = -y^2$ y la recta $y = x + 2$.

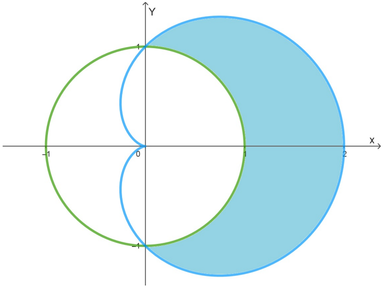
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

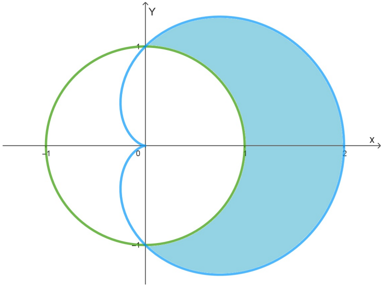
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos\theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

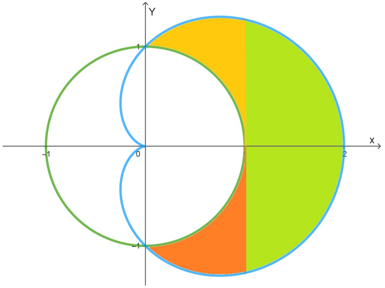
cardioide: $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r=1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1+\cos\theta$:



circunferencia: $x^2+y^2=1$

cardioide: $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$

Valor medio de una función integrable en una región acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

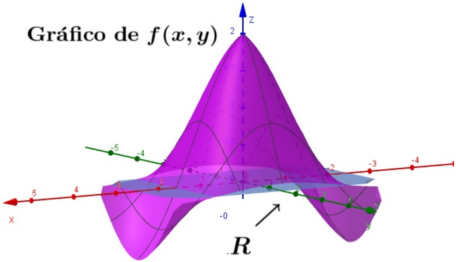
$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

Valor medio de una función integrable en una región acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$



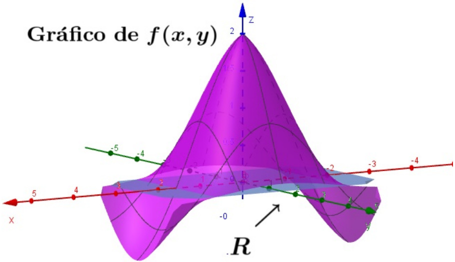
Valor medio de una función integrable en una región acotada R

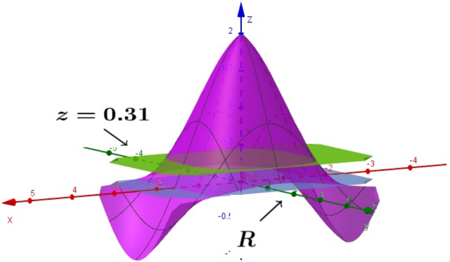
Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

$$VM = \frac{1}{15} \int_{-2.5}^{2.5} \int_{-1.5}^{1.5} f(x,y)dydx = 0.31$$

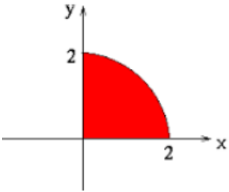




Recorrido

Utilidad del cambio de variables en integrales múltiples

La región de integración de $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ es:



El cálculo de esta integral en coordenadas rectangulares es posible, pero difícil.

Sustitución en integrales de funciones de una variable

Para resolver por sustitución la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos(5x)dx$, planteamos:

$$u = 5x; \; du = 5dx \tag{1}$$

y hacemos

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{1}{5}\,du.$$

Sustitución en integrales de funciones de una variable

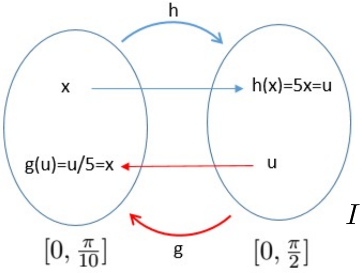
Para resolver por sustitución la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos(5x)dx$, planteamos:

$$u = 5x;\ du = 5dx \tag{1}$$

y hacemos

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{1}{5}\,du.$$

En (1) hemos definido una función biyectiva, entre $[0, \frac{\pi}{10}]$ y $[0, \frac{\pi}{2}]$:



$$g : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to [0, \tfrac{\pi}{10}]$$

$$x = g(u) = \tfrac{u}{5};\quad g'(u) = \tfrac{1}{5};\quad dx = \tfrac{1}{5}du$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(5\frac{u}{5}\right)\frac{1}{5}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(g(u)\right)g'(u)\,du$$

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad 0 \le \rho \le 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad 0 \le \rho \le 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Verificar que $\mathbf{r}(\rho, 0)$, $0 \le \rho \le 1$, es el segmento $[0,1] \times 0$; y que $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, es la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta), \qquad 0 \leq \rho \leq 1;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

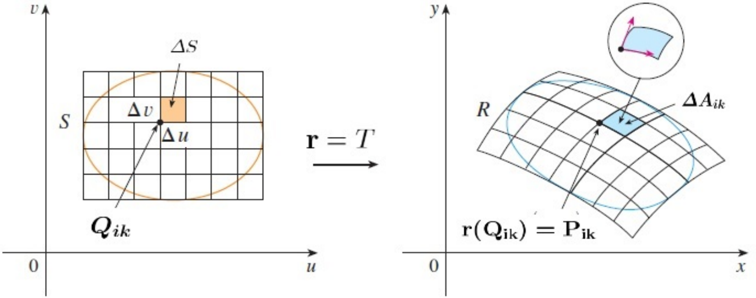
Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Verificar que $\mathbf{r}(\rho, 0)$, $0 \leq \rho \leq 1$, es el segmento $[0,1] \times 0$; y que $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Esta transformación no es inyectiva en la frontera de S (todos los puntos $(0, \theta)$ tienen imagen $(0,0)$), pero sí lo es en el interior de S.

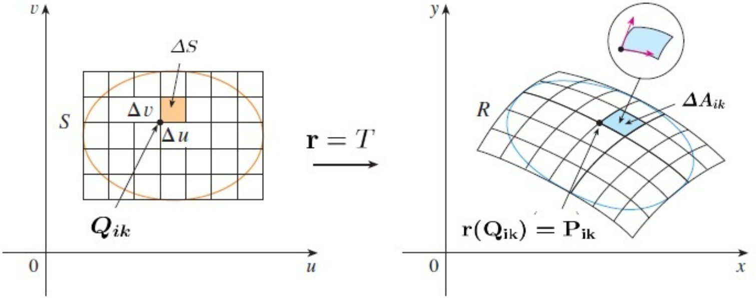
JACOBIANO

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$



JACOBIANO

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$



$$\text{Área}(R) = \iint_R dA \simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_{ik}$$

JACOBIANO

$$\Delta A \approx |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

JACOBIANO

$$\Delta A \approx |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

JACOBIANO

$$\Delta A \approx |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Definición

El Jacobiano de la transfomación $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLES

Teorema

Supóngase que T es una transformación biyectiva de S en R, tal que sus componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en S y cuyo Jacobiano es no nulo en S. Supóngase que f es continua en R. Entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

Observación: el teorema también vale si T no es inyectiva en puntos de la frontera de S.

Recorrido

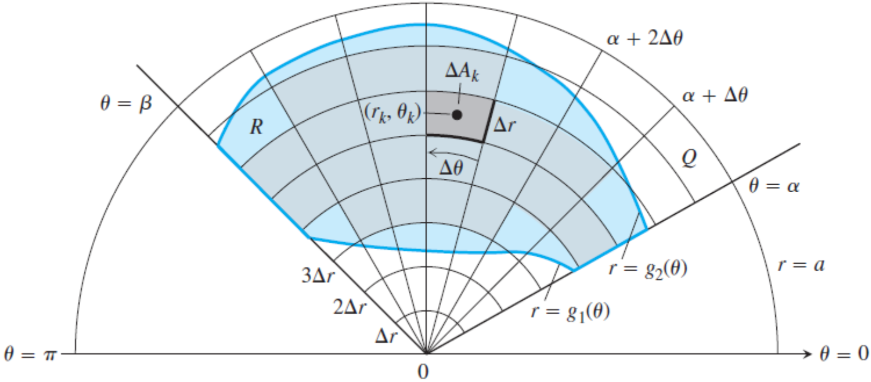
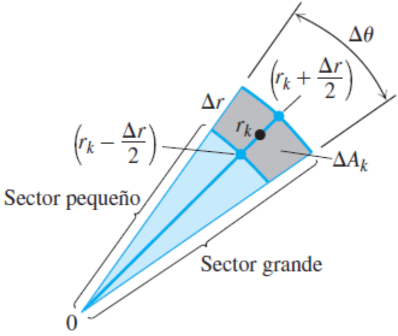


FIGURA 15.21 La región R: $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, está contenida en la región con forma de abanico Q: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

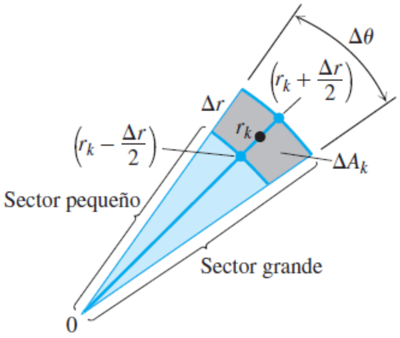
Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

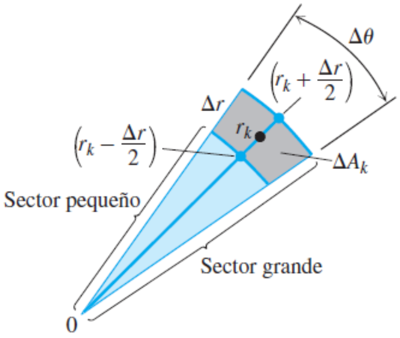
FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

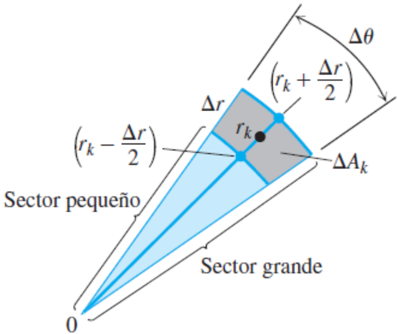
nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\,\Delta r \Delta\theta.$

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r| = r.$$

Ejercicio del TP 3

25. Cambie la integral cartesiana por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

    a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

27. Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

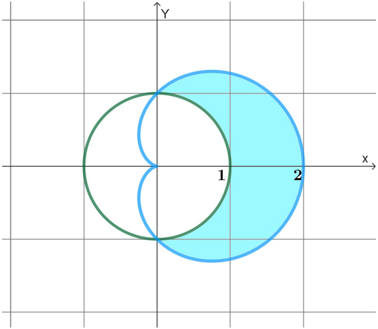
27. Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

Vamos a representar la región y buscar intersecciones en coordenadas polares.

Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

27. Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

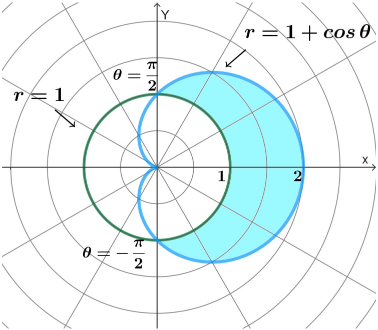
Vamos a representar la región y buscar intersecciones en coordenadas polares.



Si la región plana R es acotada, su área es $$A = \iint_R dA.$$

27. Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

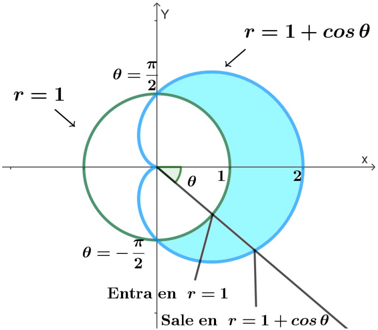
Vamos a representar la región y buscar intersecciones en coordenadas polares.



Si la región plana R es acotada, su área es $A = \iint_R dA.$

27. Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

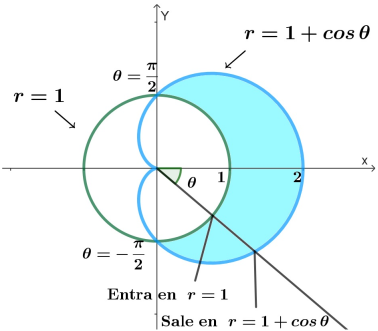
Vamos a representar la región y buscar intersecciones en coordenadas polares.



Si la región plana R es acotada, su área es $A = \iint_R dA.$

27. Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

Vamos a representar la región y buscar intersecciones en coordenadas polares.



$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} 1 \cdot r\, dr\, d\theta$$

Recorrido

Definición de integral triple sobre rectángulos

Sea f una función definida y acotada en un **rectángulo o caja** R.
Definimos una partición de R, formada por n^3 subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk})\Delta V$.

Definición de integral triple sobre rectángulos

Sea f una función definida y acotada en un **rectángulo o caja** R. Definimos una partición de R, formada por n^3 subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk})\Delta V$.
Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe para cualquier elección de (P_{ijk}), se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iiint_R f(x,y,z)dV \quad \text{o} \quad \iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Definición de integral triple sobre otras regiones

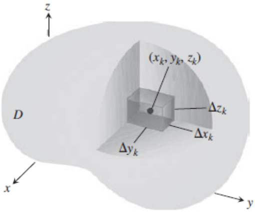


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k.

Definición de integral triple sobre otras regiones

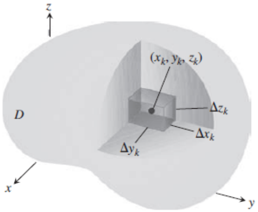


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k.

Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en R; formamos la suma de Riemann
$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk})\Delta V$.

Definición de integral triple sobre otras regiones

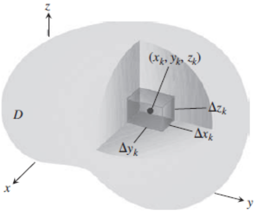


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k.

Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en R; formamos la suma de Riemann
$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ijk})\Delta V$.
Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, para cualquier elección de (P_{ijk}), se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iiint_R f(x,y,z)dV \quad \text{o} \quad \iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Propiedades de las integrales triples

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

2 $$\iiint_R [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dV = \iiint_R f(x,y,z)dV + \iiint_R g(x,y,z)dV.$$

3 $$\iint_R cf(x,y,z)dV = c\iiint_R f(x,y,z)dV.$$

4 Si $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in R$,

$$\iiint_R f(x,y,z)dV \leq \iiint_R g(x,y,z)dv.$$

Propiedades de las integrales triples

5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iiint_{R_1 \cup R_2} f(x,y,z)dV = \iiint_{R_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{R_2} f(x,y,z)dV.$$

Recorrido

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$), entonces*

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d] \times [e,m]$), entonces*

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x,y,z)dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x,y,z)dz\,dy\,dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x,y,z)dz\,dx\,dy...\end{aligned}$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d] \times [e,m]$), entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x,y,z)dz\,dx\,dy...$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ y $h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a,b] \times [c,d] \times [e,m]$), entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x,y,z)dz\,dx\,dy...$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ y $h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces*

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx.$$

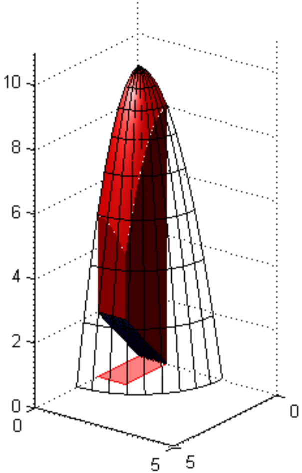
- *Hay otros casos...*

Ejemplo Teorema de Fubini

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.

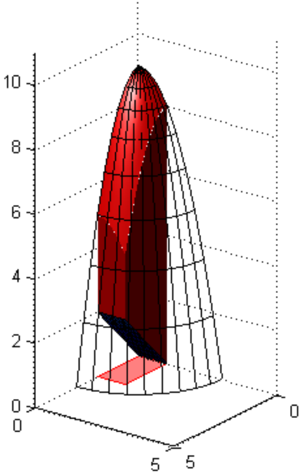
Ejemplo Teorema de Fubini

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



Ejemplo Teorema de Fubini

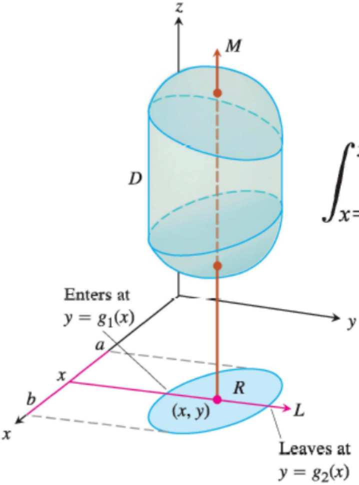
Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



$$\int_0^2 \int_0^1 \int_x^{9-x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Teorema de Fubini

Si f es continua en $D \subset \mathbb{R}^3$,
$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx = \ldots.$



$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Valor medio de una función de tres variables

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{volumen de } R} \iiint_R f \, dV.$$

Definiciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su **volumen** es

Definiciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su **volumen** es

$$V = \iiint_D dV$$

Definiciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su **volumen** es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su **masa** se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

Definiciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su **volumen** es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su **masa** se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su **centro de masa** vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

M_{yz} es el momento con respecto al plano yz.

Definiciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su **volumen** es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su **masa** se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su **centro de masa** vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

M_{yz} es el momento con respecto al plano yz.
Observación: cuando δ es constante, el centro de masa se llama centroide.

Ejercicio del TP 3

51. Una región sólida en el primer octante está acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 2$. La densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = 2x$. Obtenga la masa y el centro de masa del sólido.

Recorrido

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r,\theta,z) = x = r\cos\theta; \qquad h(r,\theta,z) = y = r\operatorname{sen}\theta; \qquad k(r,\theta,z) = z$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r,\theta,z) = x = r\cos\theta; \qquad h(r,\theta,z) = y = r\operatorname{sen}\theta; \qquad k(r,\theta,z) = z$$

Jacobiano:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r,\theta,z) = x = r\cos\theta; \qquad h(r,\theta,z) = y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad k(r,\theta,z) = z$$

Jacobiano:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r.$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho,\theta,\phi) = x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta; \qquad h(\rho,\theta,\phi) = y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta;$$

$$k(\rho,\theta,\phi) = z = \rho\cos\phi$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho, \theta, \phi) = x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; \qquad h(\rho, \theta, \phi) = y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$$

$$k(\rho, \theta, \phi) = z = \rho \cos \phi$$

Jacobiano:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho,\theta,\phi) = x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta; \qquad h(\rho,\theta,\phi) = y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta;$$

$$k(\rho,\theta,\phi) = z = \rho \cos\phi$$

Jacobiano:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho \cos\phi$$

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo:
Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D.

Solución:

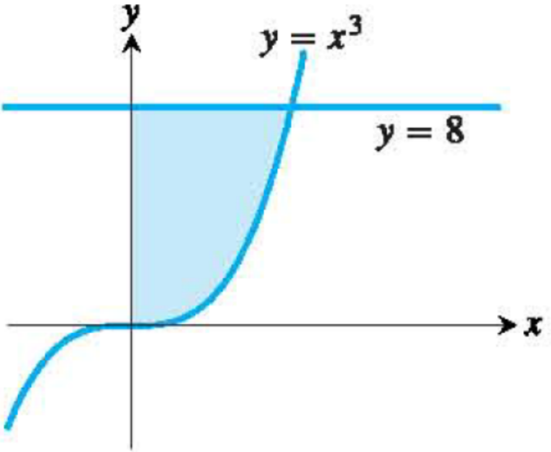
$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Otros ejemplos

1) Escriba dos integrales iteradas para hallar $\iint_R f(x,y)dA$ sobre la región R dada en el gráfico.

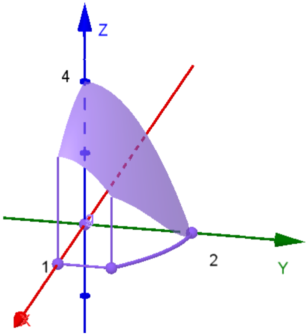


Otros ejemplos

2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy\, dx$? ¿Cuánto vale?

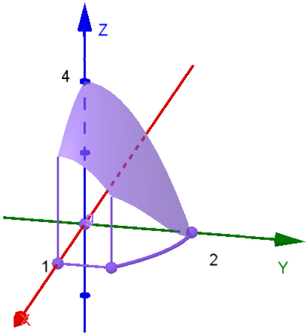
Otros ejemplos

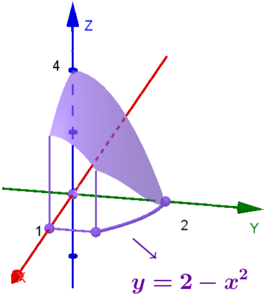
2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\, dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:



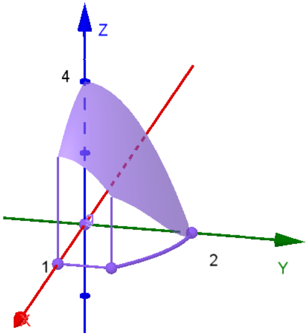
Otros ejemplos

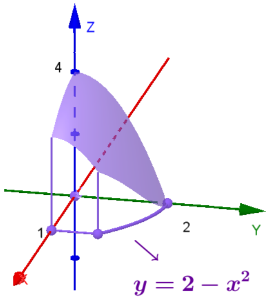
2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\,dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:





2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\,dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:

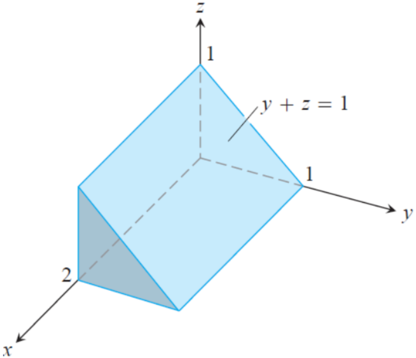




$$\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2)dy\,dx = \frac{158}{35} \simeq 4{,}5143$$

Otros ejemplos

3) Plantee 6 integrales para hallar el volumen del prisma de la figura:

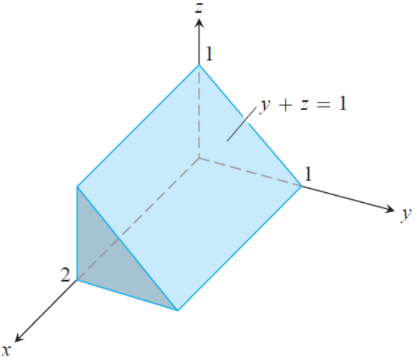


SOLUCIÓN:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz$$

Otros ejemplos

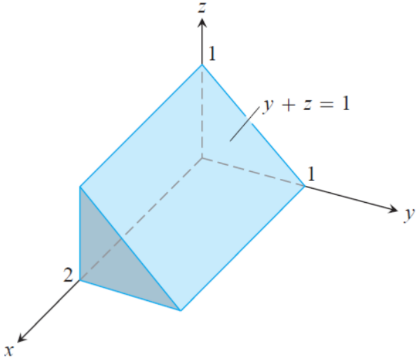
3) Plantee 6 integrales para hallar el volumen del prisma de la figura:



SOLUCIÓN:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\, dz\, dy$$

3) Plantee 6 integrales para hallar el volumen del prisma de la figura:



SOLUCIÓN:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\, dz\, dy = \ldots$$