

DISEÑO ESTRUCTURAL II

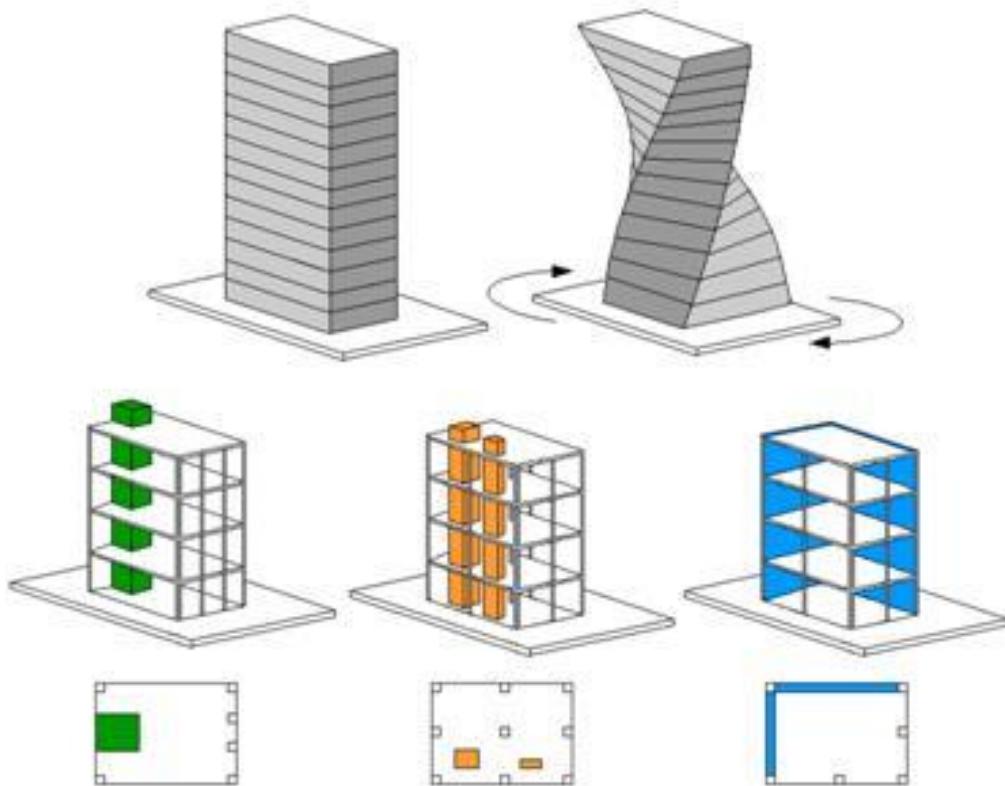
Carrera de **Arquitectura**

Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Cuyo



UNIDAD 5

RIGIDEZ DE ELEMENTOS Y DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS SISMICAS – Ampliación teoría



Dr. Ing. Gonzalo S. Torrisi

2024

1-RIGIDEZ DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

1.1 Relaciones entre acciones y desplazamientos

Las relaciones que existen entre las acciones y los desplazamientos juegan un papel importante en el análisis estructural y se utilizan extensamente en diversos métodos de resolución de estructuras hiperestáticas. Un modo conveniente de expresar la relación entre las acciones que actúan en una estructura y los desplazamientos de la misma, es mediante ecuaciones de acción y de desplazamiento. Se obtiene una ilustración sencilla de tales ecuaciones considerando el resorte linealmente elástico mostrado en la figura 1. La acción P extiende el resorte, produciendo por lo tanto un desplazamiento D de su extremo.

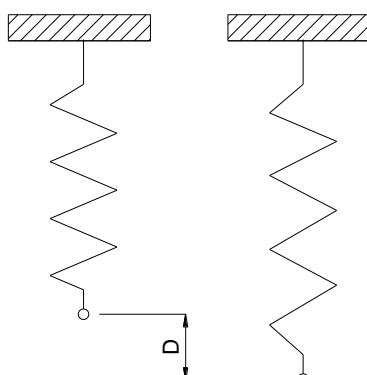


Figura 1

La relación entre D y F puede expresarse por una ecuación de desplazamiento, de la forma

$$D=F.P \quad (1)$$

En esta ecuación, al factor de proporcionalidad F se lo denomina “flexibilidad” del resorte y se lo define como el desplazamiento producido por un valor unitario de la acción A . En efecto, si $P=1$, el a ec.1 será $D=F$.

La relación entre la acción P y el desplazamiento D del resorte puede también expresarse por una ecuación de acción, que expresa a P en términos de D .

$$P=R.D \quad (2)$$

En donde R se denomina “rigidez” del resorte, la que se define como la acción necesaria para producir un desplazamiento unitario. En efecto, si $D=1$, será $P=R$.

Puede verse de las ecuaciones 1 y 2 que la flexibilidad y la rigidez del resorte son inversas, o sea

$$F=1/R \quad \text{y} \quad R=1/F \quad (3)$$

La flexibilidad tiene unidades de longitud sobre fuerza, si los desplazamientos son corrimientos o numero puro (radianes) sobre momentos, si son rotaciones. Por su parte la rigidez tiene unidades de fuerza sobre longitud para desplazamientos lineales o de momento sobre numero puro (radianes) para los angulares.

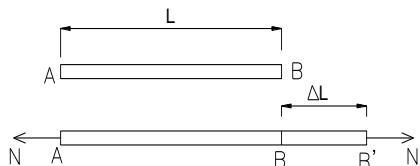
Las mismas relaciones generales (ecuaciones 1 a 3) deducidas para el resorte, son válidas para cualquier estructura linealmente elástica que esté sujeta a una sola acción, variando de acuerdo al tipo de solicitación y/o de vinculación, las expresiones respectivas de F y de R .

1.2 Rigidez a las deformaciones producidas por distintos tipos de solicitación.

1.2.1 Deformación por solicitudes normales

Sea el caso de un elemento AB solicitado por una carga axial N, que produce una deformación ΔL (figura 2). La barra representada en esta última figura actúa como un

resorte cuando, al suprimir la carga por la elasticidad del material, recupera su forma inicial.



La ecuación 4

Figura 2

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (4)$$

Servirá para calcular las expresiones de

la rigidez y la flexibilidad de la barra, por aplicación directa de los conceptos básicos expuestos en el apartado anterior.

Recordando que la rigidez se define como la acción (fuerza en este caso) que origina un alargamiento $\Delta L=1$ se tiene

$$1 = \frac{RL}{EA} \rightarrow R = \frac{EA}{L} \quad (5)$$

La rigidez a las deformaciones producidas por esfuerzos normales, tendrá las unidades de una fuerza por unidad de longitud (N/m)

Inversamente, se definirá la flexibilidad como la deformación producida por una carga unitaria. En consecuencia

$$F = \frac{1L}{EA} = \frac{L}{EA} \quad (6)$$

Y sus unidades serán m/N.

1.2.2 Deformaciones por flexión

La rigidez de tramo de una viga o elemento estructural, se define como la fuerza R que, aplicada en el punto medio de su luz, origina en el mismo una flecha unitaria (figura 3a y 3b). Aplicando los conceptos del análisis estructural para calcular deformaciones (o haciendo uso de tablas) sera:

$$D = \frac{PL^3}{48EJ} \rightarrow 1 = \frac{RL^3}{48EJ} \rightarrow R \quad (7)$$

$$= \frac{48EJ}{L^3}$$

En este caso se mantiene la unidad N/m antes mencionada.

Por su parte la flexibilidad es el desplazamiento producido por un valor unitario de la carga (figura 3c), o sea

$$F = \frac{1L^3}{48EJ} = \frac{L^3}{48EJ} \quad (8)$$

Y sus unidades son m/N.

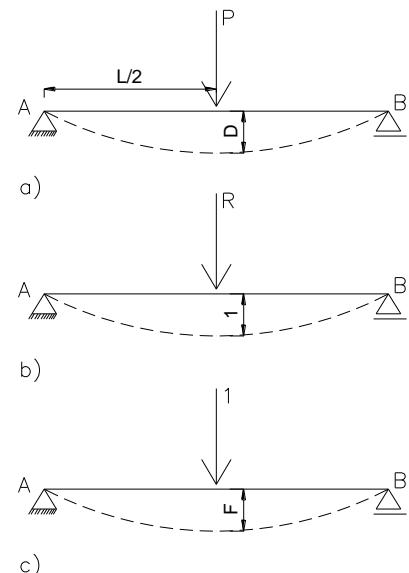


Figura 3

1.3 Factor de distribución

El concepto de rigidez expuesto permite determinar la repartición de acciones que deben distribuirse entre varios elementos resistentes.

1.3.1 Caso de fuerzas

Sea la estructura de la figura 4, donde tres columnas desiguales soportan una placa indeformable de peso P .

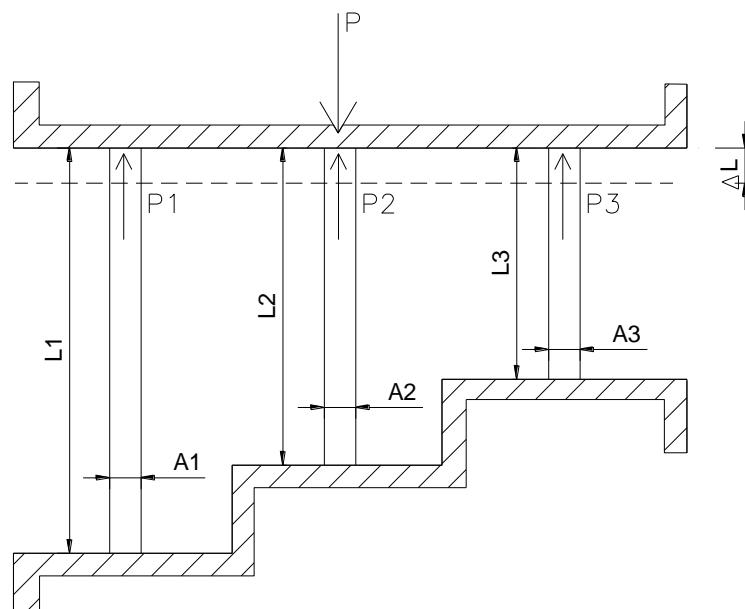


Figura 4

Se supone que la deformación en las mismas tiene lugar de modo tal que las tres columnas experimenten el mismo acortamiento ΔL . Evidentemente la expresión que se deduce

$$\Delta_L = \frac{PL}{EA} \quad y \quad R = \frac{EA}{L} \quad \rightarrow \quad \Delta_L = \frac{P}{R} \quad (9)$$

Es válida para el caso de compresión pura, de modo que llamando respectivamente R_1 , R_2 y R_3 a las rigideces de cada columna, puede escribirse

$$\Delta_L = \frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} = \frac{P_3}{R_3} \quad (10)$$

Siendo de acuerdo a la ecuación 9 $R=EA/L$

$$R_1 = \frac{EA_1}{L_1}, \quad R_2 = \frac{EA_2}{L_2}, \quad R_3 = \frac{EA_3}{L_3} \quad (11)$$

Por su parte, la condición de equilibrio estático exige:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P \quad (12)$$

O sea que la expresión inicial puede escribirse, recordando además las propiedades de las razones:

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_1}{R_2} = \frac{P_1}{R_3} = \frac{(P_1 + P_2 + P_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{P}{\sum R_i} \quad (13)$$

De donde se puede despejar sucesivamente

$$P_1 = \frac{PR_1}{\sum R_i}, \quad P_2 = \frac{PR_2}{\sum R_i}, \quad P_3 = \frac{PR_3}{\sum R_i} \quad (14)$$

Se observa que la distribución de la carga P entre las tres columnas se obtiene en función de la relación $R_i / \sum R_i$, a la que se conoce como “factor de distribución” v , que en forma general puede expresarse como

$$v = \frac{R_i}{\sum R_i} \quad (15)$$

En definitiva, resulta

$$P_1 = v_1 P, \quad P_2 = v_2 P, \quad P_3 = v_3 P \quad (16)$$

1.3.2 Rigideces relativas

De los desarrollos anteriores se observa que, en los casos de distribución de solicitudes entre los elementos estructurales destinados a absorberlas, las rigideces intervienen solo en la determinación de los factores de distribución v . Como estas están expresadas mediante el cociente de dos rigideces (una individual y otra que es sumatoria de la

totalidad de las rigideces a considerar), la suma de los vi siempre debe ser igual a la unidad. En consecuencia, para un mismo material, puede prescindirse del módulo E o aún, si resultare conveniente, multiplicar todas las rigideces por un mismo factor, a los efectos de lograr valores numéricos de un orden de magnitud tal que con ellos resulte sencillo operar. Por esta circunstancia, suelen utilizarse en los cálculos prácticos las denominadas “rigideces relativas”, que son valores numéricos cualesquiera, proporcionales a las rigideces reales, y cuyo empleo no altera los valores de vi.

1.3.3 Coeficiente de rigidez

Las rigideces de mayor uso en la práctica del cálculo estructural son las rigideces a las deformaciones por flexión, las que, prescindiendo del material (o sea del valor de E) y considerando independientemente el factor que introduce el tipo de vinculación del extremo opuesto, resultan función de las dimensiones geométricas de los elementos estructurales mediante la relación entre el momento de inercia de la sección transversal y la longitud de la barra. A la relación entre ambos parámetros, se la denomina “coeficiente de rigidez” o “rigidez de la barra”, y se la representa por k , o sea que en general

$$k = \frac{J}{L} \quad (17)$$

Su introducción en los desarrollos de los métodos de cálculo de estructuras hiperestáticas es muy frecuente, dado que permite simplificar la forma final de las expresiones de aplicación.

1.4 Rigidez a desplazamiento horizontal

Se define la rigidez de un elemento estructural o de una estructura al desplazamiento horizontal, como la fuerza horizontal que, aplicada a nivel del extremo superior del elemento o de la estructura, le provoca un desplazamiento unitario en su propia dirección.

Se calcularán a continuación, las expresiones correspondientes a las rigideces antes definidas, para diversos tipos de estructuras.

1.4.1 Caso de elementos aislados

Sea la estructura de la figura 5. Asimilable a los efectos de la determinación del valor de

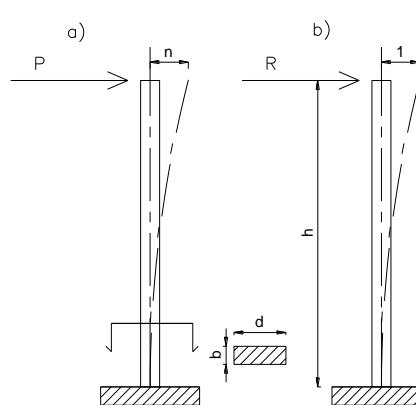


Figura 5

η , a una viga empotrada con una carga concentrada en su extremo, para la cual, según el análisis estructural (o haciendo uso de tablas), haciendo $L=h$

$$\eta = \frac{Ph^3}{3EJ} + \psi \frac{Ph}{GA} = \frac{Ph^3}{3EJ} \left(1 + \psi \frac{3EJ}{h^2 GA}\right) \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que estas expresiones se aplicaran por lo general para cálculos inherentes a estructuras de hormigón armado, pueden

particularizarse las expresiones para este tipo de material y sus formas constructivas más usuales, las que presentan secciones transversales de forma rectangular de dimensiones bxd.

En consecuencia, en la ecuación 18 puede reemplazarse

$$G = 0.4E, \quad A = bd, \quad J = \frac{bd^3}{12}, \quad \psi = 1.2 \quad (19)$$

Resultando

$$\eta = \frac{Ph^3}{3EJ} \left(1 + 1.2 \frac{3Ebd^3}{0.4E12h^2bd} \right) = \frac{Ph^3}{3EJ} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{d}{h} \right)^2 \right] \quad (20)$$

Y llamando $\lambda = \frac{3}{4} \left(\frac{d}{h} \right)^2$ se tiene

$$\eta = \frac{Ph^3}{3EJ} [1 + \lambda] \quad (21)$$

Si $\eta=1$, resulta por definición $P=R$ (figura 4b), luego

$$1 = \frac{Ph^3}{3EJ} [1 + \lambda] \quad (22)$$

O bien

$$R = \frac{3EJ}{h^3[1 + \lambda]} \quad (23)$$

La expresión obtenida es válida para cualquier elemento estructural que puede suponerse aislado en su extremo superior y empotrado en su base, independientemente de sus dimensiones relativas, es decir que es aplicable tanto al caso de columnas como de tabiques.

Si d es sensiblemente menor que h (caso de columnas), λ (o sea la influencia del esfuerzo de corte) es despreciable, y puede aplicarse $R = \frac{3EJ}{h^3}$, en cambio, si d y h tienen magnitudes semejantes (caso de tabiques), la consideración de λ incide en el valor de la rigidez, por lo que debe aplicarse la expresión completa.

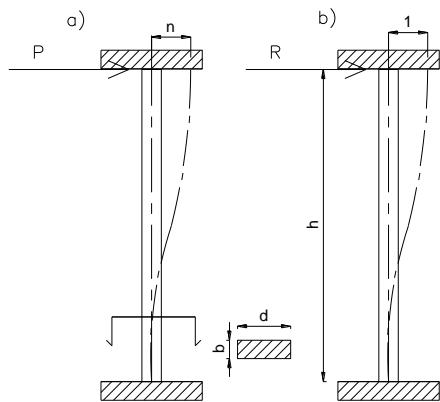


Figura 6

Si en lugar de ser columnas en voladizo son elemento tales que se les impide rotar en la parte superior, por ejemplo, por estar conectados a una viga de mayor rigidez, el valor de R se puede deducir en forma análoga y vale

$$R = \frac{12EJ}{h^3[1 + \lambda]} \quad (24)$$

La ecuación 24 indica que, si se restringe completamente el giro en la cabeza de la columna, como muestra la figura 6, la rigidez se incrementa en 4 veces.

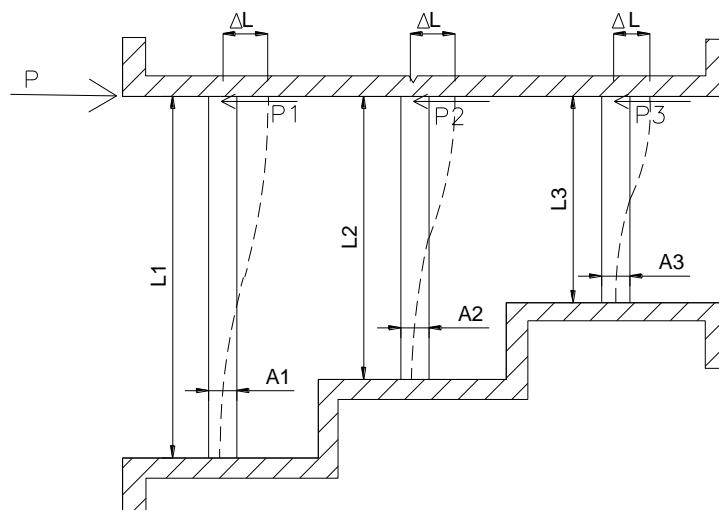


Figura 7

Realizando ahora el mismo análisis que se muestra en la figura 4 pero para una carga lateral, como se ve en la figura 7, y considerando que el elemento superior es suficientemente rígido como para evitar el giro de la columna en la parte extrema superior, podemos calcular los factores de distribución v en forma análoga a la anterior. De esta forma, las fuerzas P_1 , P_2 y P_3 que tomarían las distintas columnas serían distribuidas de acuerdo a la ecuación 16, con los v_i calculados de acuerdo a la ecuación 15.

Pongamos como ejemplo que $L_1=2L_3$ y $L_2=1.5L_3$, las rigideces de las columnas, obviando el valor de E y de J que es el mismo para todas y considerando un valor de λ despreciable, serían proporcionales a $R=1/h^3$, de esta forma:

$$R_1 = \frac{1}{L_1^3} = \frac{1}{(2L_3)^3} = \frac{1}{8L_3^3}, \quad R_2 = \frac{1}{L_2^3} = \frac{1}{(1.5L_3)^3} = \frac{1}{3.38L_3^3}, \quad R_3 = \frac{1}{L_3^3} \quad (25)$$

Es decir que $R_1=0.125R_3$ y $R_2=0.296R_3$. Considerando la ecuación 16, las fuerzas P_i que tomarían las columnas son:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{0.125}{0.125 + 0.296 + 1.00} P = 0.088P \\
 P_2 &= \frac{0.296}{0.125 + 0.296 + 1.00} P = 0.208P \\
 P_3 &= \frac{1.00}{0.125 + 0.296 + 1.00} P = 0.703P
 \end{aligned} \tag{26}$$

Se observa que la columna más corta toma más del 70% de la fuerza total, mientras que la más larga (doble de longitud), toma menos del 9% de la fuerza total. Este efecto de variación brusca de rigidez y fuerzas se da frecuentemente cuando en un edificio se consideran distintas alturas de columna, por ejemplo, en dobles alturas de piso.

1.4.2 Discusión de la incidencia del esfuerzo de corte

De las expresiones desarrolladas en el apartado anterior surge que la incidencia del esfuerzo de corte en los desplazamientos η y por ende, en el valor de las rigideces R , es función de la relación entre la dimensión d de la sección transversal del elemento estructural en la dirección del esfuerzo aplicado y la altura h del mismo.

Para evaluar la magnitud de dicha incidencia, para valores crecientes de la relación d/h , se indican en la tabla 1 adjunta, los parámetros característicos que permiten definir la misma.

Tabla 1

d/h (1)	λ (2)	Indicencia % de η (3)	Rigidez		Error % (6)=[(4)-(5)]/(5)
			flexión (4)	Flexión+corte (5)	
0.10	0.0075	0.74%	0.0010	0.00099	0.75%
0.15	0.0169	1.66%	0.0034	0.00332	1.7%
0.20	0.0300	2.91%	0.0080	0.00777	3.0%
0.25	0.0469	4.48%	0.0156	0.0149	4.7%
0.30	0.0675	6.32%	0.0270	0.0253	6.8%
0.40	0.1200	10.71%	0.0640	0.0571	12.0%
0.50	0.1875	15.79%	0.1250	0.1053	18.8%
0.60	0.2700	21.26%	0.2160	0.1701	27.0%
0.80	0.4800	32.43%	0.5120	0.3459	48.0%
1.00	0.7500	42.86%	1.0000	0.5714	75.0%
1.25	1.172	53.95%	1.9531	0.8992	117.2%
1.50	1.688	62.78%	3.3750	1.2556	168.8%
2.00	3.000	75.00%	8.000	2.0000	300.0%

En la columna (2) figuran los valores de λ , calculados según las expresiones anteriores. Del análisis de las ecuaciones 18 y su equivalente para estructuras de hormigón armado, ecuación 21, surge que λ indica la influencia del esfuerzo de corte en la magnitud del

desplazamiento η del extremo superior de la barra, tomando como base de comparación el valor 1 para el desplazamiento debido a la acción del momento flector, considerado como causa única.

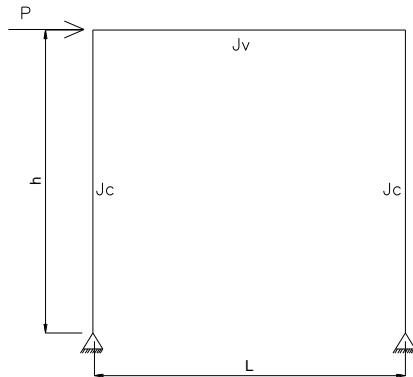
La incidencia porcentual del esfuerzo de corte en el valor total de los desplazamientos η se señala en la columna (3).

Del análisis de los valores que muestra el cuadro de referencia se desprende:

- En general, para los grados de exactitud usuales en los cálculos de la ingeniería de estructuras, puede prescindirse de la consideración del efecto del esfuerzo de corte cuando $d/h < 0.20$.
- En cálculos preliminares o que requieren menor exactitud, puede extenderse tal consideración hasta valores de $d/h < 0.25$.
- Si se prescinde del esfuerzo de corte se obtienen desplazamientos menores a los reales y rigideces mayores a las verdaderas, con la incidencia porcentual que en cada caso se indica en el cuadro analizado.

1.4.3 Pórtico biarticulado simétrico

La figura 8, si bien se trata de una estructura estáticamente indeterminada, por simetría y haciendo uso del análisis estructural, resulta



$$R = \frac{12EJ_c}{h^3} \left(\frac{\beta}{1 + 2\beta} \right) \quad (27)$$

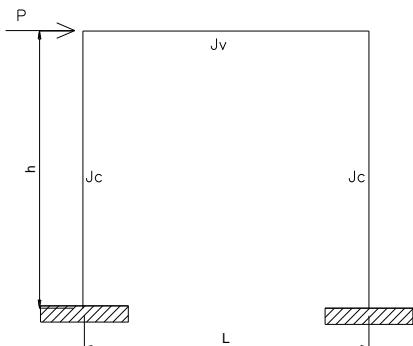
Siendo

$$\beta = k_v/k_c, \quad k_v = J_v/L, \quad k_c = J_c/h \quad (28)$$

Figura 8

1.4.4 Pórtico biempotrado simétrico

También en este caso se trata de una estructura hiperestática, figura 9, cuya resolución es factible atendiendo a su simetría y a la consideración de su deformación, aplicando conceptos del análisis estructural.



$$R = \frac{12EJ_c}{h^3} \left(\frac{1+6\beta}{2+3\beta} \right) \quad (28)$$

Siendo en este caso β , igual al del apartado anterior

Figura 9

1.4.5 Resumen y cuadro comparativo

Con las expresiones obtenidas en los apartados anteriores, puede efectuarse el siguiente resumen (tabla 2), donde asimismo se modifica la forma de expresión para levantar indeterminaciones en la consideración de β . Omitiendo el factor $12EJ_c/h^3$ se obtiene

Tabla 2

β	Articulado	Empotrado
0	0.00	0.500
0.5	0.25	1.143
1.0	0.33	1.400
2.0	0.40	1.625
infinito	0.50	2.000

Del análisis del cuadro precedente surge:

- a) Para valores iguales de k_v y de k_c , la rigidez aumenta apreciablemente a medida que aumenta el grado de hiperestaticidad de la estructura
- b) Para cada tipo de vinculación, la rigidez se incrementa a medida que aumenta el valor de k_v frente al de k_c .

1.4.6 Rigidez de muro de mampostería

Para calcular la rigidez de un muro de mampostería encadenada se utiliza la misma expresión que para los tabiques (ecuación 23), con la única salvedad que se utiliza el módulo de elasticidad de la mampostería en lugar del módulo de elasticidad del hormigón.

1.4.6.1 Consideración de la rotación de la base

Debido a la característica de los suelos, los mismos se deforman cuando se deforma la estructura que apoya sobre ellos. Esto genera un incremento en la deformación de la estructura y por tanto, un cambio en la rigidez de los elementos. En general, las propiedades de los suelos hacen que la deformación que se produce en ellos sea mayor a la deformación propia de la superestructura por lo que no se puede obviar esta deformación.

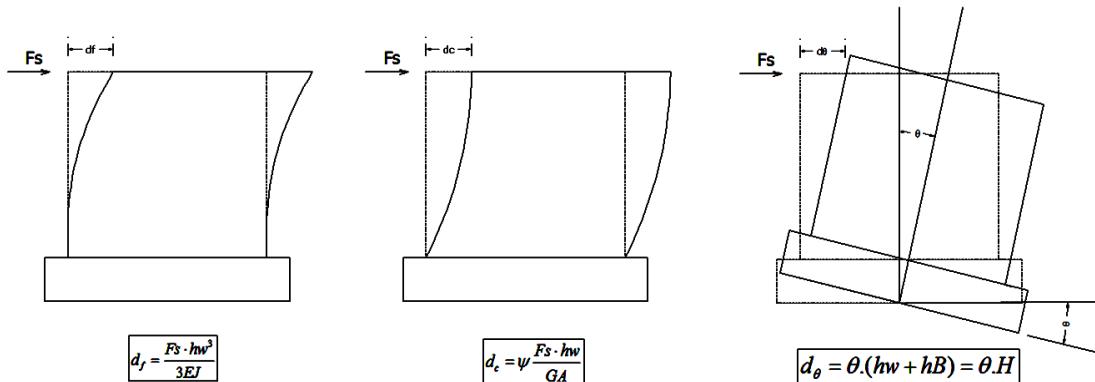


Figura 10

La figura 10 muestra las componentes de deformación de un muro, o tabique) cuando se considera la rotación de la base. Las dos primeras componentes de deformación, flexión y corte, ya han sido consideradas para la evaluación de la rigidez en el apartado 1.4.1 y aparece como nueva componente de deformación la correspondiente a la rotación de la base. La ecuación 29 expresa las tres componentes de deformación del muro.

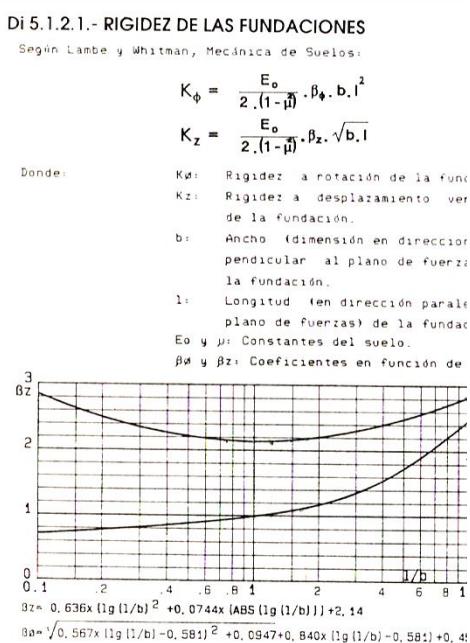
$$d_f = \frac{F_s h_m^3}{3EJ}, \quad d_c = \psi \frac{F_s h_m}{GA}, \quad d_\phi = \theta (h_m + h_c) = \left(\frac{F_s H}{K_\phi} \right) H = \frac{F_s H^2}{K_\phi} \quad (29)$$

Siendo en este caso h_m la altura del elemento estructural, h_c la altura de la fundación y $H=h_m+h_c$. En la ecuación anterior, K_ϕ es la rigidez de la base que depende de sus dimensiones y las propiedades del suelo.

Siguiendo las expresiones del CCSR-87 la rigidez K_ϕ se puede calcular para bases rectangulares como;

$$K_\phi = \frac{E_o h_m^3}{2(1-\mu^2)} \beta_\phi b_B L_B^2 \quad (30)$$

Siendo β_ϕ un factor que depende de la relación L_B/b_B , en que L_B y b_B son la longitud y ancho de la base rectangular. E_o el módulo edométrico del suelo y μ su coeficiente de Poisson. La Tabla 3 muestra los valores recomendados para E_o y β_ϕ según la Directriz 5.1.2.2 del CCSR-87. En cuanto a μ se puede tomar el valor 0,30 a 0,35.

Tabla 3**DI 5.1.2.2.- CONSTANTES DEL SUELO**

En ausencia de resultados de ensayos específicos se usarán los valores siguientes:

(Jiménez Salas: Geotecnia y Cimientos).

(Schulze y Simmer: Cimentaciones).

Tipo de Suelo	Módulo E_0
Limo	300 a
Arena seca o húmeda suelta (N SPT 3 a 9)	160 Z a 1
Arena seca o húmeda media (N SPT 9 a 30)	480 Z a 16
Arena seca o húmeda densa (N SPT 30 a 50)	1600 Z a 32
Grava fina con arena fina	1070 Z a 16
Grava media con arena fina	1330 Z a 16
Grava media con arena gruesa	1600 Z a 20
Grava gruesa con arena gruesa	2000 Z a 26
Grava gruesa firme	2500 Z a 50
Arcilla blanda (qu 0,25 a 0,50 Kg/cm²)	150 a
Arcilla media (qu 0,50 a 2,00 Kg/cm²)	300 a
Arcilla compacta (qu 2,00 a 4,00 Kg/cm²)	900 a
Arcilla dura c/tosca (qu 4,00 a 10,0 Kg/cm²)	1300 a
Tosca arenosa rígida	4800 a 1
Módulo de Poisson: para suelos no saturados	$\mu =$
para suelos saturados	$\mu =$
Z es la profundidad de la fundación que se estudia en	
Para acciones sísmicas adoptar valores 10 x E_0 .	

Ahora la rigidez considerando la deformabilidad del suelo será:

$$d_t = d_f + d_q + d_\theta \quad y \quad K_m = 1/d_t \quad (31)$$

Si se quisiera evaluar la rigidez del muro considerando el modelo de biela equivalente, en forma simplificada, la deformación por flexión y corte se pueden reemplazar por la dada en la siguiente ecuación.

$$d_{f+c} = \frac{d_m}{E_m w t (\cos(\theta))^2} \quad (32)$$

En donde d_m es la longitud de la diagonal principal, w el ancho de la misma, t el espesor del muro y θ el ángulo de la diagonal con la horizontal.

1.4.7 Base equivalente

Los muros en general se fundan con cimientos corridas o bases corridas. Cuando un muro se deforma e intenta girar la fundación, los muros perpendiculares colaboran en esa deformación ya que están vinculados rígidamente entre sí. Es por esto que se debe tener en cuenta la colaboración de los muros perpendiculares al momento de calcular la rigidez del suelo. La forma en que colaboran los muros perpendiculares deben cumplir lo siguiente:

- La longitud de colaboración es menor a la mitad de la altura del muro en estudio.
- La longitud de colaboración es menor a la separación de dos muros paralelos que comparten al muro perpendicular.
- La longitud de colaboración es menor a la longitud del muro en estudio.

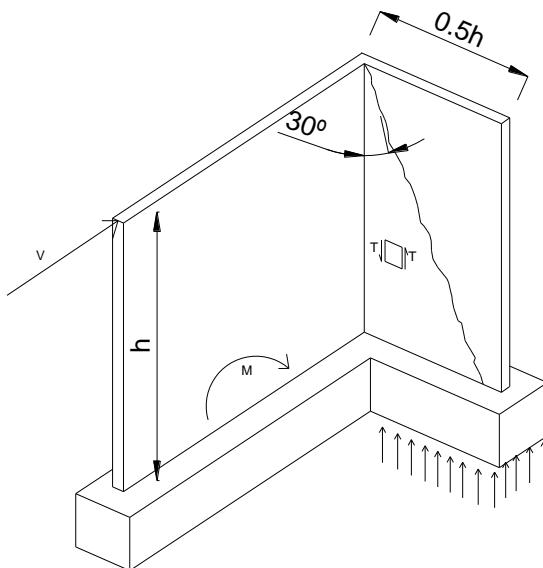


Figura 11

La consideración de estas longitudes perpendiculares puede conducir a formas no rectangulares de los cimientos o bases, es por esto que se debe transformar esta figura compleja en una figura rectangular equivalente que debe cumplir las siguientes condiciones:

- El área de la base rectangular equivalente es igual al área real de la fundación considerada.
- El momento de inercia de la base rectangular equivalente es igual al momento de inercia real de la base o fundación considerada.

Esto se traduce en lo siguiente:

$$L_{eq} = \sqrt{\frac{12J_b}{A_b}}, \quad b_{eq} = \frac{A_b}{L_{eq}} \quad (33)$$

Donde J_b , y A_b es el momento de inercia y área real, respectivamente, de la fundación analizada.

Con estos valores es posible calcular la rigidez de la base al ingresar al gráfico de la tabla 3 con la relación L_{eq}/b_{eq} .

1.4.8 Rigidez de piso de pórticos de varios niveles

Sin embargo, es muy difícil encontrar pórticos de un nivel en la vida real, por tanto vamos a considerar un pórtico genérico.

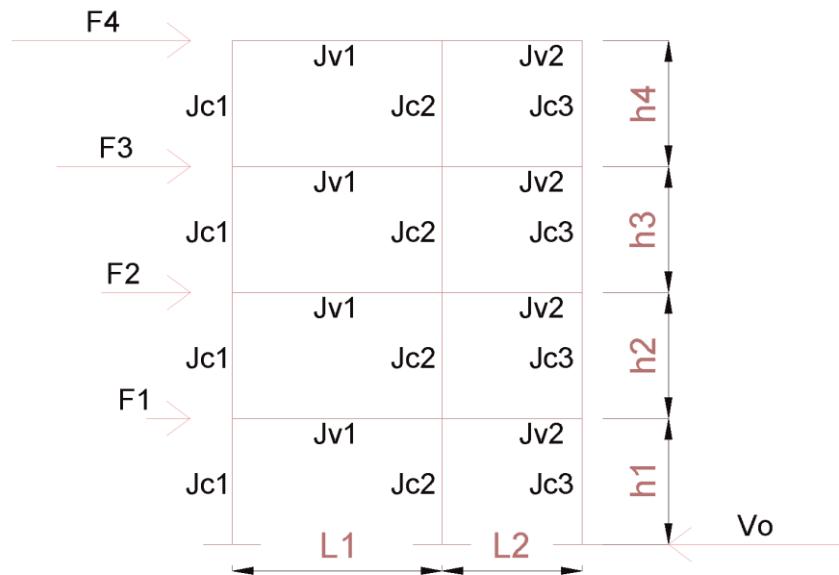


Figura 12

Vamos a tomar el primer nivel y calculamos los factores de rigidez de vigas y columnas:

$$\begin{aligned} k_{c1} &= \frac{J_{c1}}{h_1} , \quad k_{c2} = \frac{J_{c2}}{h_1} , \quad k_{c3} = \frac{J_{c3}}{h_1} \\ k_{v1} &= \frac{J_{v1}}{L_1} , \quad k_{v2} = \frac{J_{v2}}{L_2} \end{aligned} \quad (34)$$

Calculamos la relación de rigideces considerando lo siguiente:

-Siempre es la rigidez de la columna sobre la rigidez de la viga

-En el numerador va la suma de las columnas que confluyen a un nudo y en el denominador va la suma de las vigas que confluyen al mismo nudo.

$$\begin{aligned} \beta_{c1} &= \frac{k_{c1}^{inf} + k_{c1}^{sup}}{k_{v1}} \\ \beta_{c2} &= \frac{k_{c2}^{inf} + k_{c2}^{sup}}{k_{v1} + k_{v2}} \\ \beta_{c3} &= \frac{k_{c3}^{inf} + k_{c3}^{sup}}{k_{v2}} \end{aligned} \quad (36)$$

Luego se calculan los factores de empotramiento:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{0.5\beta_{c1} + 1}{2\beta_{c1} + 1} \\ \alpha_2 &= \frac{0.5\beta_{c2} + 1}{2\beta_{c2} + 1} \\ \alpha_3 &= \frac{0.5\beta_{c3} + 1}{2\beta_{c3} + 1}\end{aligned}\tag{36}$$

Y finalmente la rigidez se calcula como:

$$K = \frac{12E}{h_1^3} (\alpha_1 J_{c1} + \alpha_2 J_{c2} + \alpha_3 J_{c3})\tag{37}$$

En forma genérica, para la columna “i”:

$$\begin{aligned}\beta_{ci} &= \frac{k_{ci}^{inf} + k_{ci}^{sup}}{k_{v,izq} + k_{v,der}} \\ \alpha_i &= \frac{0.5\beta_{ci} + 1}{2\beta_{ci} + 1} \\ K &= \frac{12E}{h^3} \sum_{i=1}^{num\ cols} (\alpha_i J_{ci})\end{aligned}$$

De esta forma ya se obtiene la rigidez del pórtico.

1.4.9 Método simplificado para calcular rigidez de pórticos

El cálculo de la rigidez lateral de un pórtico puede ser muy engorroso, pero en forma simplificada y para objetivos de prediseño, se pueden utilizar criterios para estimar dicha rigidez. Consideremos el caso de la ecuación 23 y 24 sin tener en cuenta las deformaciones por corte, es decir $\lambda=0$. De esta forma podemos saber la rigidez de una columna Empotrada-libre y Empotrada-empotrada. Ahora bien, tomemos los pórticos de la figura 13.

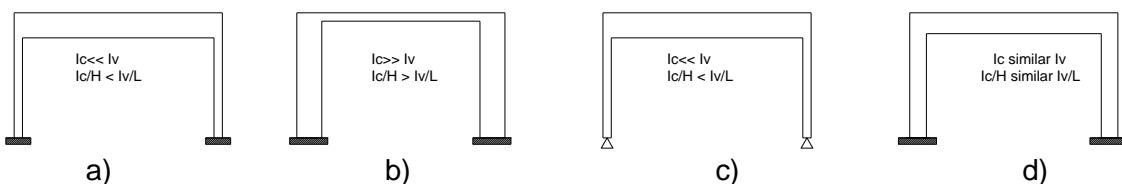


Figura 13

En la figura 13.a) se puede ver que la rigidez de la columna es mucho menor a la rigidez de la viga, medidos en proporción a su momento de inercia y su longitud. De esta forma, podríamos inducir que la viga actúa como un empotramiento para las columnas (figura 14.a), y dado que la base también está empotrada, la rigidez de la columna podría evaluarse con la ecuación 24, de una columna biempotrada. Para el caso de la figura 13.b) la rigidez de la columna es mayor a la de la viga y se podría considerar que la viga no opone resistencia a que gire la columna libremente en su parte superior (figura 14.b) y de esta forma considerar que la columna se comporta como empotrada-libre y se podría utilizar la ecuación 23. El caso de la figura 13.c) es una mezcla entre el caso a y b. La viga es más rígida que las columnas y por lo tanto se comporta como un empotramiento para la columna, sin embargo, la base de la columna está articulada, por lo que puede girar libremente. De esta forma, la columna se comporta como libre-empotrada, como se puede ver en la figura 14.c) y correspondería utilizar la ecuación 23. Finalmente, la figura 13.d) es un caso ya no extremo sino donde las rigideces de las vigas y columnas son similares. En esta situación no correspondería utilizar la ecuación 23 ni 24 sino una intermedia.

Como la ecuación 23 y 24 se pueden expresar como:

$$K_c = \frac{rEI_c}{h^3} \quad (38)$$

Siendo $r=3$ para la ecuación 23 y $r=12$ para la ecuación 24, para el caso de la figura 13.d), el valor de r estaría entre 3 y 12, o siendo más estrictos, entre 5 y 10, para eliminar los extremos. De esta forma podríamos adoptar un valor de $r=7-8$ o 9 y evaluar la rigidez de la columna. Estos valores variarán respecto a la diferencia de rigidez entre las vigas y columnas.

Finalmente, la rigidez del pórtico será $K=NK_c$, donde “N” es el número de columnas del pórtico y K_c la rigidez de cada columna. Cabe aclarar que no necesariamente todas las rigideces de las columnas tienen que ser iguales, pudiendo ser K la suma de las rigideces de las columnas que conforman el pórtico. En el caso de los pórticos de la figura 13, las rigideces serían:

$$K_a = \frac{2x12EI_c}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$K_b = \frac{2x3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

$$K_c = \frac{2x3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

$$K_d = \frac{2x8EI_c}{h^3} = \frac{16EI_c}{h^3}$$

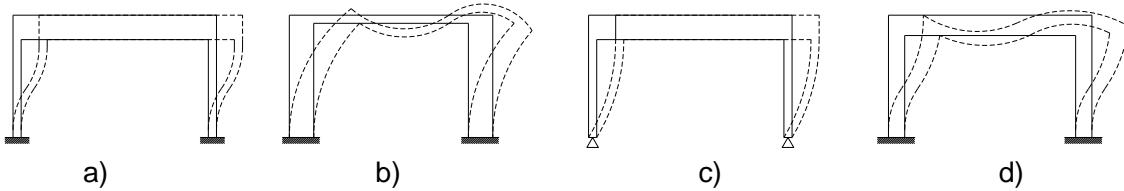


Figura 14

Si el pórtico de la figura 13.d) fuera de 3 columnas, la rigidez sería 3xRigidez de columna.

A modo de resumen, y relacionando la rigidez de la ecuación 28 con lo expresado en la ecuación 38, el factor “r”, para cada columna podría escribirse como:

$$r = 6 \left(\frac{1+6\beta}{2+3\beta} \right) \quad (39)$$

Con β siendo la relación entre la rigidez de la viga y la columna. Y simplificando aún más, se podría considerar que si $\beta < 0.05 \Rightarrow r=3$ y si $\beta > 11 \Rightarrow r=12$.

2. DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS HORIZONTALES ENTRE LOS ELEMENTOS DE RIGIDEZ DE LA PANTA DE UN EDIFICIO.

Una de las condiciones fundamentales que debe cumplir toda construcción, es que sea autoestable. Esta exigencia debe observarse particularmente para la acción de cargas laterales derivadas generalmente del efecto del sismo y del viento. La estabilidad de las edificaciones y de sus elementos, especialmente los muros de carga, debe asegurarse mediante elementos de arriostramiento, de rigidez adecuada, de modo tal que cualquier fuerza horizontal que se presente actuando a nivel de losa, pueda ser transmitida a través de ellos, a las cimentaciones.

Se analizará desde el punto de vista de la teoría de las estructuras y prescindiendo de condiciones impuestas por reglamentaciones constructivas particulares (que pueden ser modificadas en el tiempo), la distribución, entre los distintos elementos de rigidez que presente una construcción de una planta, de las fuerzas horizontales que pueden actuar a nivel de losa, suponiendo a esta suficientemente rígida como para transmitir dichas fuerzas a los elementos verticales resistentes, sin experimentar deformación propia en su plano, como se ve en la figura 10.

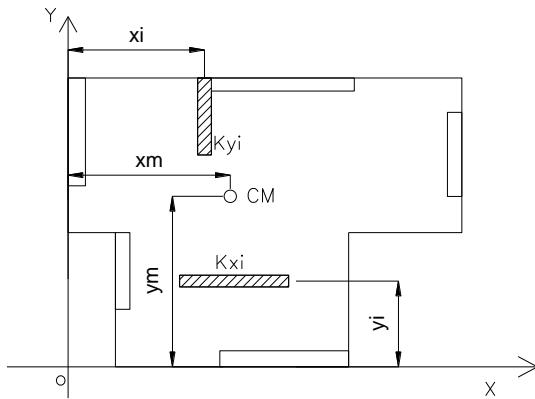


Figura 15

Obviando los desarrollos tediosos sobre cómo encontrar las fuerzas en los distintos elementos cuando una fuerza actúa a nivel de losa, considerando los desplazamientos horizontales de la losa y el giro respecto a un eje vertical, la fuerza que recibe un elemento cualquiera “i” cuando actúa una fuerza V es:

$$\begin{aligned} F_{xi} &= \frac{K_{xi}}{\sum K_{xi}} V_x + \frac{M_{tx} S_{xi}}{I_{xy}} \\ F_{yi} &= \frac{K_{yi}}{\sum K_{yi}} V_y + \frac{M_{ty} S_{yi}}{I_{xy}} \end{aligned} \quad (40)$$

En donde $M_{tx}=V_x \cdot e_y$, $M_{ty}=V_y \cdot e_x$ los momentos torsores debidos a las excentricidades de rigidez e_x y e_y , calculadas como.

$e_x=x_m-x_r$ y $e_y=y_m-y_r$, siendo x_m e y_m las coordenadas del centro de masas y las coordenadas del centro de rigidez son:

$$x_r = \frac{\sum (K_{yi} x_i)}{\sum (K_{yi})} \quad y \quad y_r = \frac{\sum (K_{xi} y_i)}{\sum (K_{xi})} \quad (41)$$

Con x_i e y_i las coordenadas de los elementos de rigidez K_{yi} y K_{xi} respectivamente.

En la ecuación 40, los términos S_{xi} y S_{yi} se denominan momentos estáticos de las rigideces y se calculan como:

$$S_{xi} = K_{xi} y_i \quad y \quad S_{yi} = K_{yi} x_i \quad (42)$$

Y el término I_{xy} es el momento de inercia de las rigideces, el cual depende de todos los elementos en la planta y está relacionado con la oposición a los giros de la misma.

$$I_{xy} = \sum (K_{xi} y_i^2 + K_{yi} x_i^2) \quad (43)$$

En la ecuación 40, el primer término se denomina “*Fuerza directa*” y es la fuerza que recibe un elemento en proporción a su rigidez respecto a la rigidez total en la dirección analizada. El segundo término se denomina “*Fuerza por torsión*” y es la fuerza que recibe un elemento de la planta en función de los giros que experimenta. Es fácil observar que, si las excentricidades son nulas, los momentos torsores son nulos y por tanto la distribución de las fuerzas sísmicas se realiza solamente en proporción a la rigidez de los elementos, sin considerar la influencia de los giros. Además, podemos ver que mientras más separados están los elementos unos de otros, las coordenadas de los mismos aumentan, lo que hace que tal vez, la excentricidad aumente (linealmente ya que tiene exponente 1) y los momentos estáticos también se incrementen (también en forma lineal), sin embargo, el momento de inercia de las rigideces aumenta en forma mucho más rápida ya que las coordenadas están elevadas al cuadrado. Esto significa que existe una mejor restricción a los giros mientras más alejados se encuentran del centro del edificio.

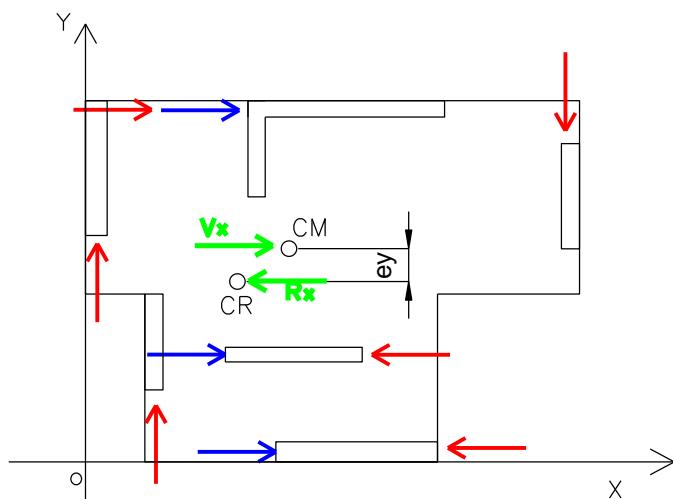


Figura 15

La figura 15 muestra en verde un corte V_x actuando en dirección X y aplicándose en el centro de masas CM (por ser una fuerza inercial producto de las masas). La misma fuerza reacción con R_x en el centro de rigidez CR, lugar que es el “baricentro” de las rigideces, ubicado a una distancia e_y y e_x del CM (se indica solo e_y en la figura). El corte V_x se distribuye de acuerdo a la ecuación 40 y genera fuerzas directas en dirección de análisis, indicadas en azul en la figura, y fuerzas de torsión (indicadas en rojo) debido a la excentricidad. Cabe mencionar que como existe excentricidad y por tanto giro de la planta, todos los elementos, no solo los ubicados en la dirección de análisis, reciben fuerzas. Es decir que, aunque se analice una estructura en dirección X o Y, todos los elementos, en la dirección de análisis y en la dirección perpendicular recibirán un porcentaje del corte total debido al giro experimentado. En un buen diseño, estas fuerzas de torsión son pequeñas, sin embargo, el problema existe cuando las fuerzas de torsión son mayores a las fuerzas directas, significando que los giros son tan grandes y hay tan pocos elementos que las fuerzas originales son excesivas.