UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 4

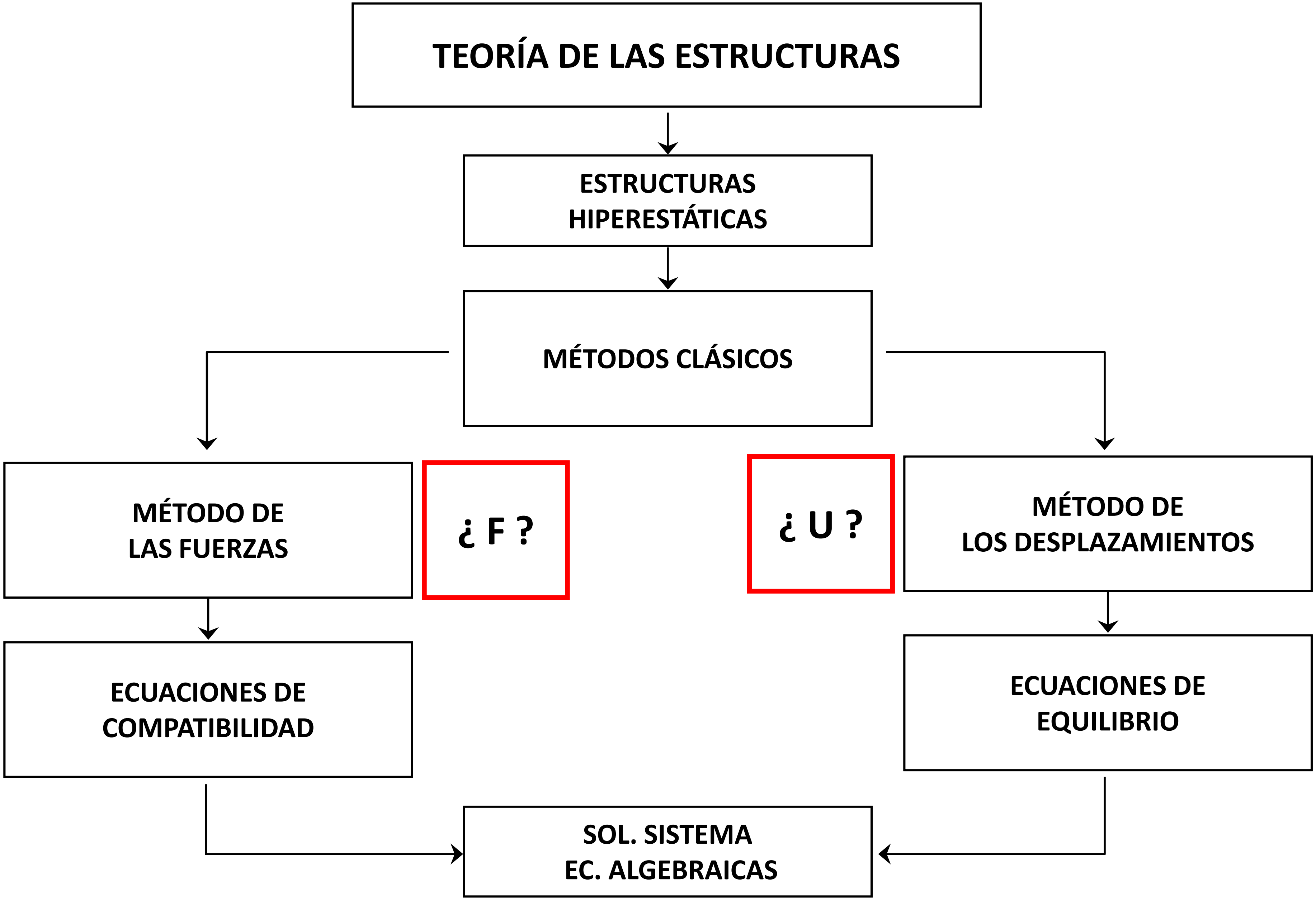
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Curso 2.024

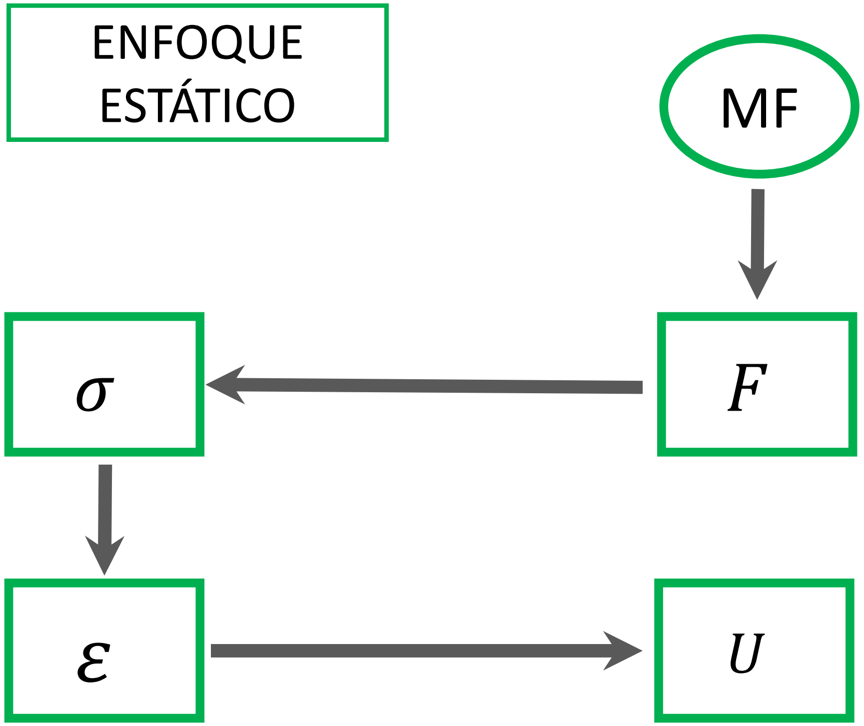
Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

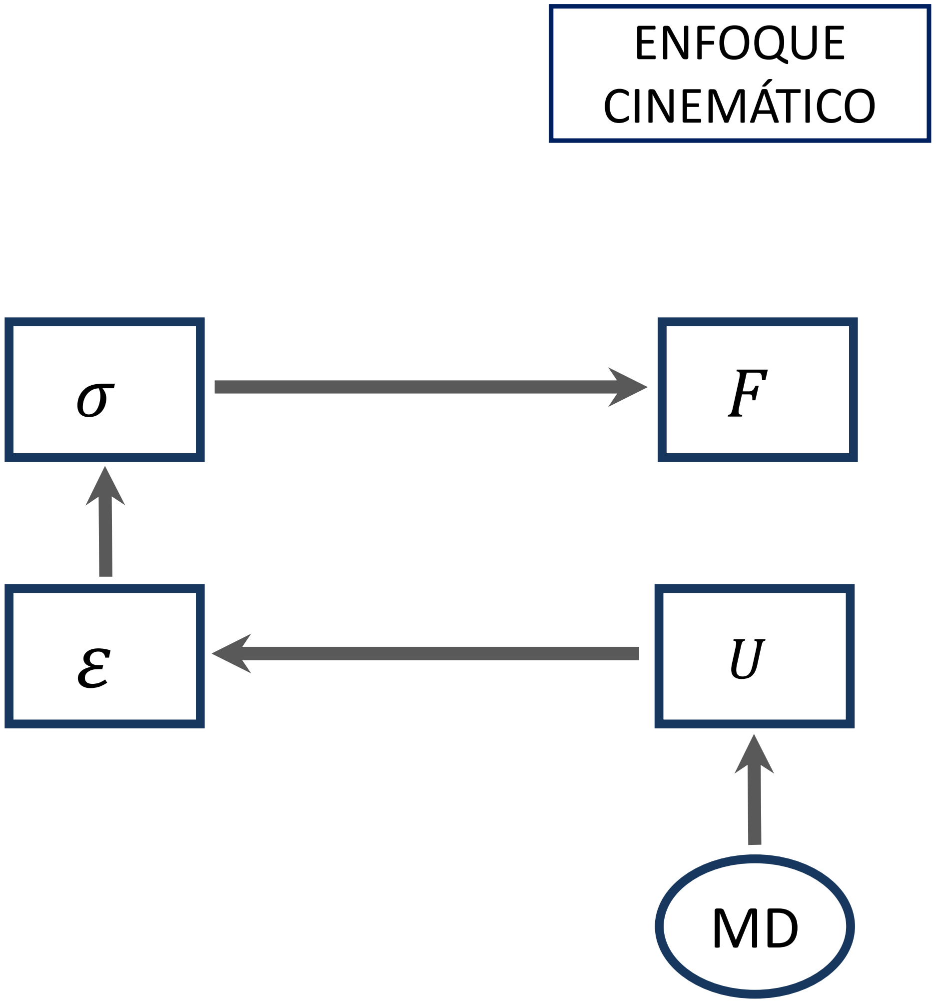
INTRODUCCIÓN

Introducción



Introducción. Diagrama de TONTI

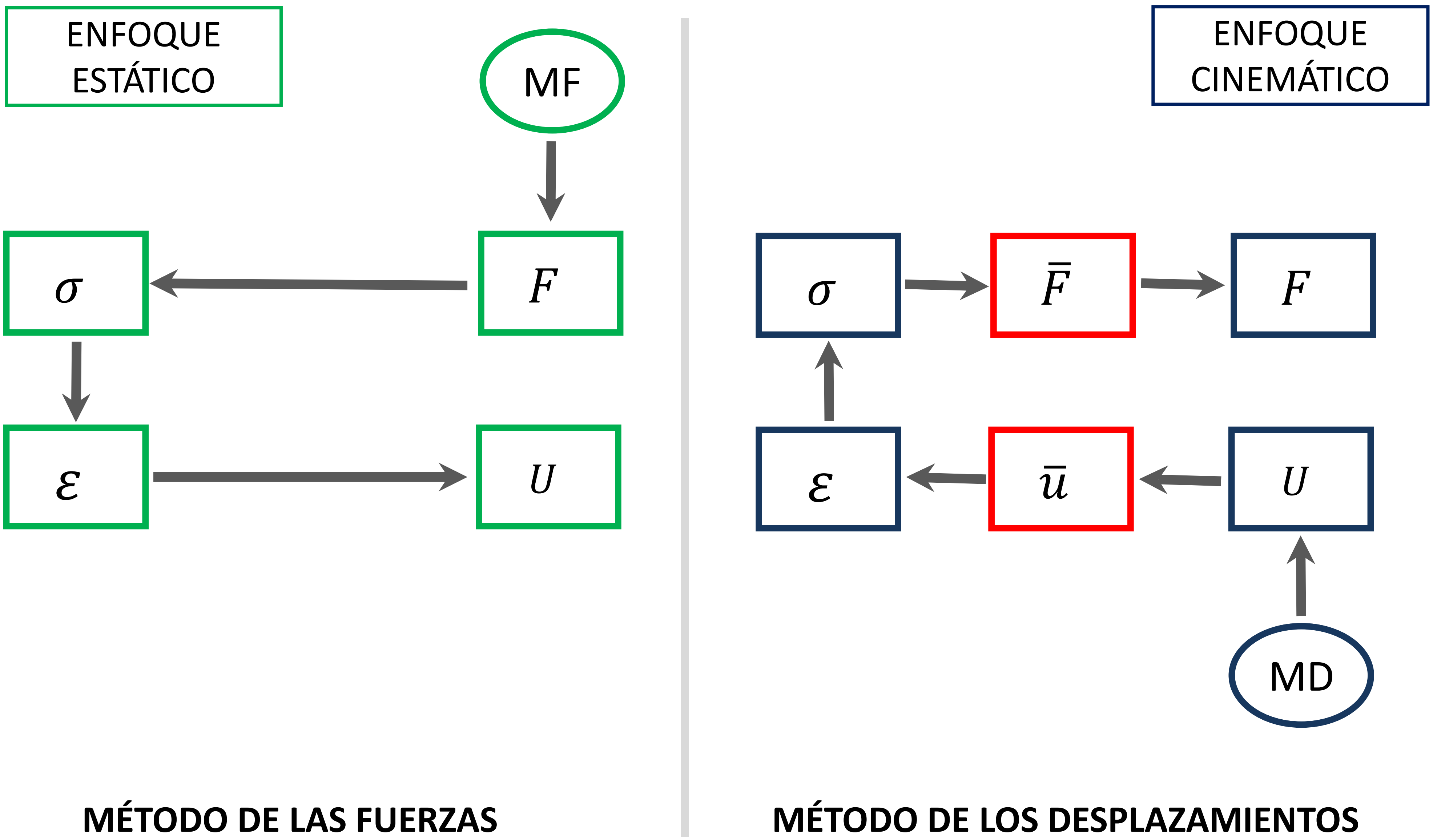




MÉTODO DE LAS FUERZAS

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Introducción. Diagrama de TONTI



MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Cinemática

Hipótesis

- Todas las barras que concurren a un nodo se conectan rígidamente a él (dos barras como mínimo).

  Los desplazamientos de los extremos de las barras son iguales a los del nudo al que están conectados.

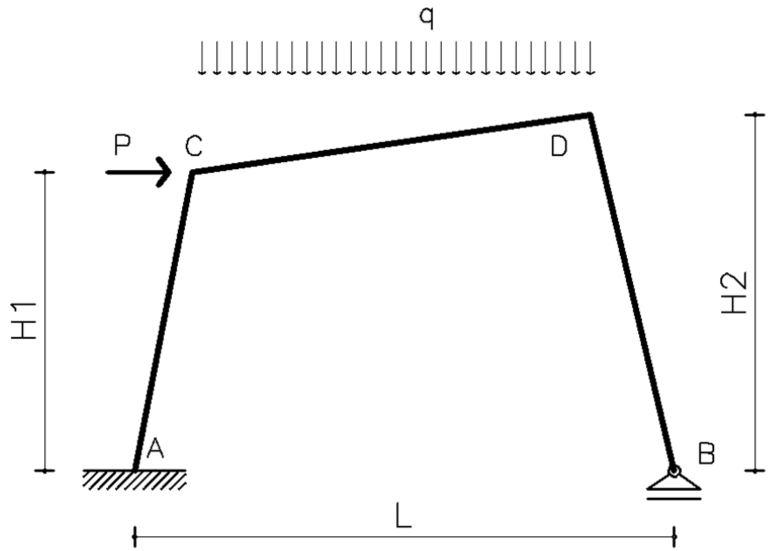
  Los giros de los extremos de las barras son iguales a los del nudo al que están conectados.

- Existe un conjunto de desplazamientos (lineales o angulares) que son independientes entre sí y que son suficientes para expresar los desplazamientos en el resto de la estructura. Son las variables cinemáticas y representan los grados de libertad de la estructura.

- Se considera que las barras que componen la estructura son infinitamente rígidas en la dirección axial. Es decir, no cambian de longitud cuando la estructura se deforma.

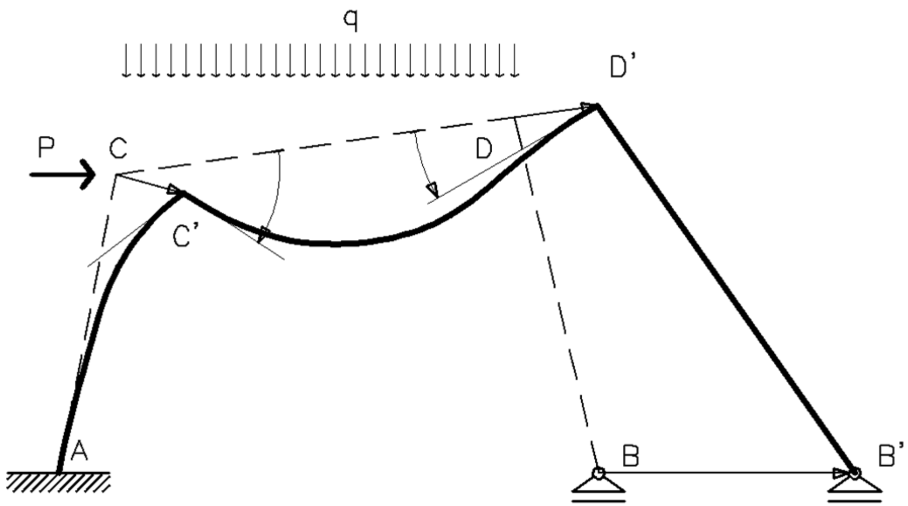
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

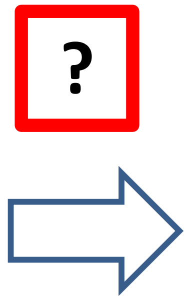
Cinemática

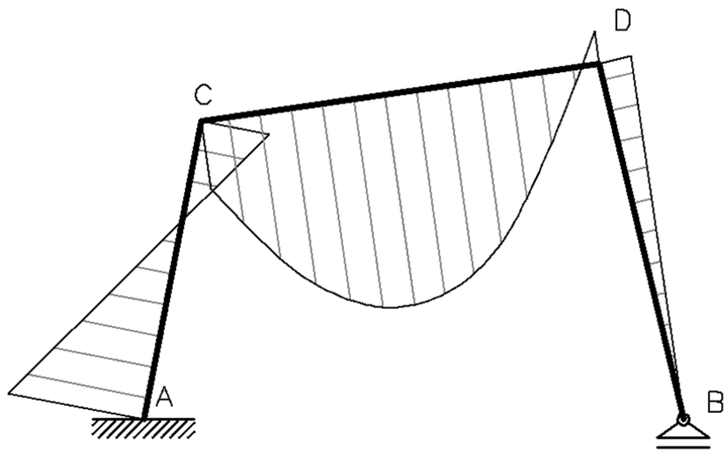


Elástica

M, N, Q, R





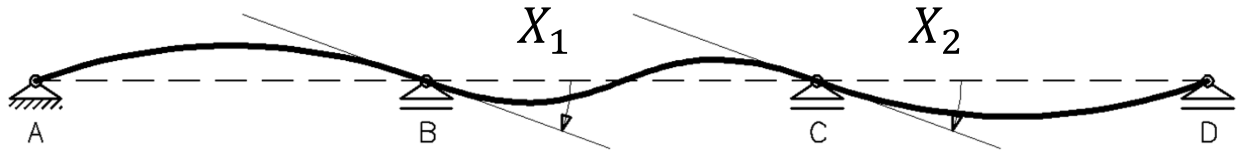


MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS. INCÓGNITAS

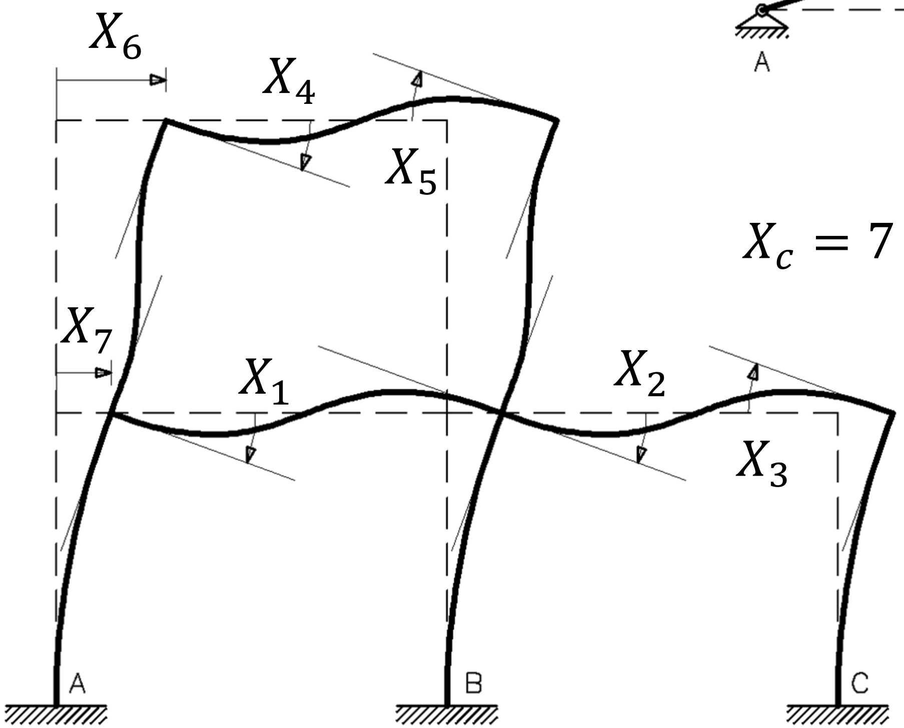
Incógnitas Cinemáticas

- Son las variables cinemáticas independientes o grados de libertad de la estructura.
- Su cantidad es tal que permite definir en forma completa la configuración deformada de la estructura, de acuerdo con las hipótesis adoptadas.

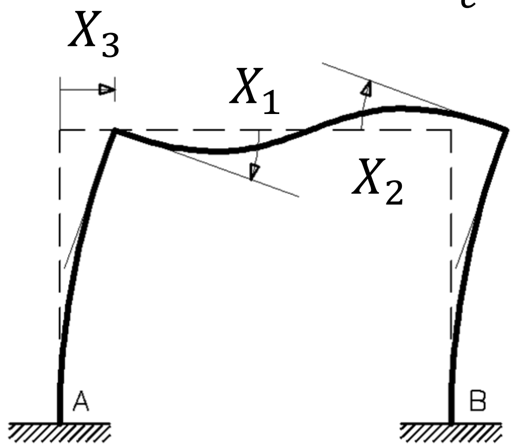
$X_c = 2$



$X_c = 7$



$X_c = 3$



MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS. INCÓGNITAS

Incógnitas Cinemáticas

- Son las variables cinemáticas independientes o grados de libertad de la estructura.
- Su cantidad es tal que permite definir en forma completa la configuración deformada de la estructura, de acuerdo con las hipótesis adoptadas.

La cantidad de incógnitas cinemáticas es igual al número de nodos rígidos más los desplazamientos independientes de piso.

La cantidad de desplazamientos de piso se puede determinar de dos formas:

- Plantear una cadena cinemática abierta y calcular el Gh (hipóstaticidad).
- Considerar un giro y dos desplazamientos por nudo y luego aplicar las hipótesis planteadas, restando los giros.

$$Gh = E - I$$

$$I = Vs + B + 2\,A^1 + 3\,R + 4\,A^2 + 6\,A^3$$

$$E = 3\,N + 2\,V$$

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

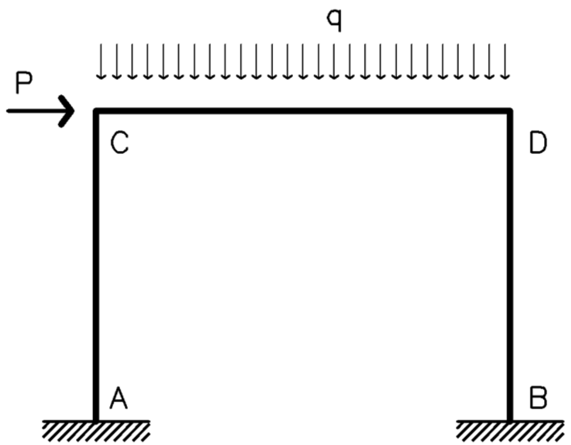
Planteo del Método

- Identificar las incógnitas cinemáticas.
- Platear el sistema fundamental, que se obtiene bloqueando los desplazamientos (corrimientos o giros) desconocidos.
- Cuando la incógnita cinemática es un corrimiento, su desplazamiento se impide con apoyo simple.
- Cuando la incógnita cinemática es un giro, su movimiento se impide con un empotramiento móvil.
- De este modo, el sistema fundamental es único.
- Para obtener el sistema fundamental, a la estructura original se le agregan apoyos ficticios.
- El sistema fundamental es una estructura más hiperestática que la original.
- El sistema fundamental es compatible pero está desequilibrado.
- En cada apoyo ficticio existen reacciones, que no existen en la estructura original y que permiten plantear las ecuaciones del método.

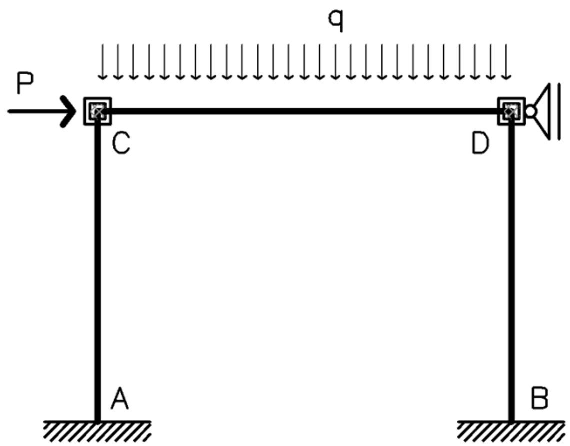
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Planteo del Método

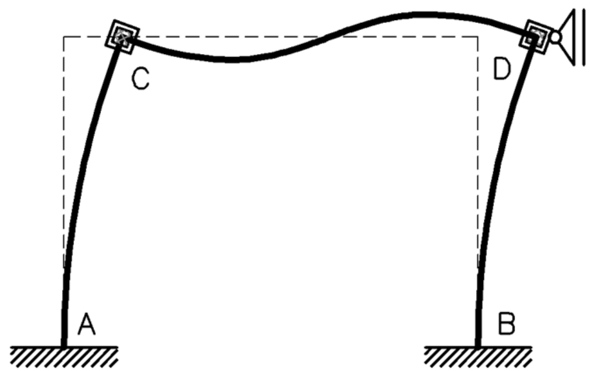
Estructura Original



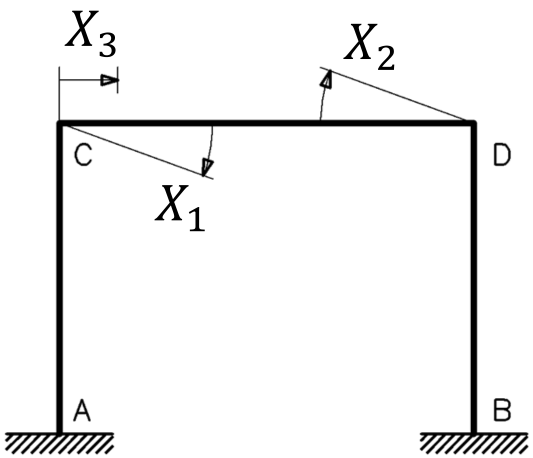
Sistema Fundamental



SF. ELASTICA (X_j)



Incógnitas



$$R_i = R_i(P_0, X_j)$$

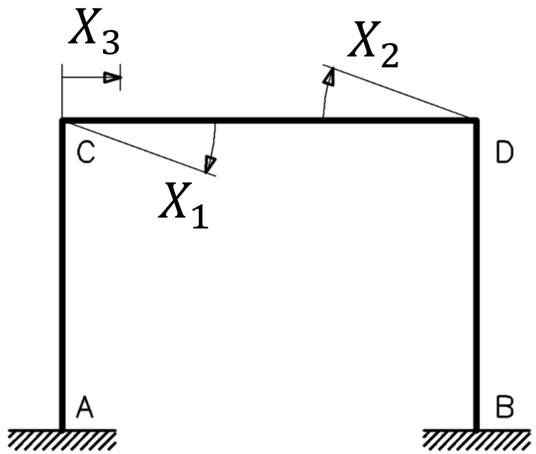
Ecuaciones de Equilibrio

$$\boxed{R_i(P_0, X_j) = 0}$$

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Planteo del Método

$$\boxed{R_i(P_0, X_j) = 0}$$



P I A S E

$$R_i = R_i(P_0) + R_i(X_1) + R_i\,(X_2) + R_i(X_3) = 0$$

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 1, \quad X_3 = 1$$

$$R_i = R_{i0} + r_{i1}\,X_1 + r_{i2}\,X_2 + r_{i3}\,X_3 = 0$$

$$\begin{cases} R_{10} + r_{11}\,X_1 + r_{12}\,X_2 + r_{13}\,X_3 = 0 \\ R_{20} + r_{21}\,X_1 + r_{22}\,X_2 + r_{23}\,X_3 = 0 \\ R_{30} + r_{31}\,X_1 + r_{32}\,X_2 + r_{33}\,X_3 = 0 \end{cases}$$

R_{i0}: Reacción en la dirección de la incógnita i debida el sistema de cargas actuando en el fundamental.

r_{ij}: Reacción en la dirección de la incógnita i debida a un movimiento unitario en la dirección de j en el sistema fundamental.

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Generalización *n* Incógnitas

$$R_{i0} + r_{i1}\ X_1 + r_{i2}\ X_2 + \cdots + r_{in}\ X_n = 0$$

$$\begin{cases} R_{10} + r_{11}\ X_1 + r_{12}\ X_2 + \cdots + r_{1n}\ X_n = 0 \\ R_{20} + r_{21}\ X_1 + r_{22}\ X_2 + \cdots + r_{2n}\ X_n = 0 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad = 0 \\ R_{n0} + r_{n1}\ X_1 + r_{n2}\ X_2 + \cdots + r_{nn}\ X_n = 0 \end{cases}$$

R_{i0}: Reacción en la dirección de la incógnita i debida el sistema de cargas actuando en el fundamental.

r_{ij}: Reacción en la dirección de la incógnita i debida a un movimiento unitario en la dirección de j en el sistema fundamental.

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Generalización *n* Incógnitas

$$\boxed{[R_{i0}] + [r_{ij}]\,[X_j] = 0}$$

$[R_{i0}]$: Vector de términos independientes.

Reacciones en la dirección de las incógnitas, provocados por el sistema de cargas, actuando sobre el sistema fundamental.

$[r_{ij}]$: Matriz de Rigidez.

Reacciones en la dirección de las incógnitas, provocados por los valores unitarios de estas, actuando sucesivamente sobre el sistema fundamental.

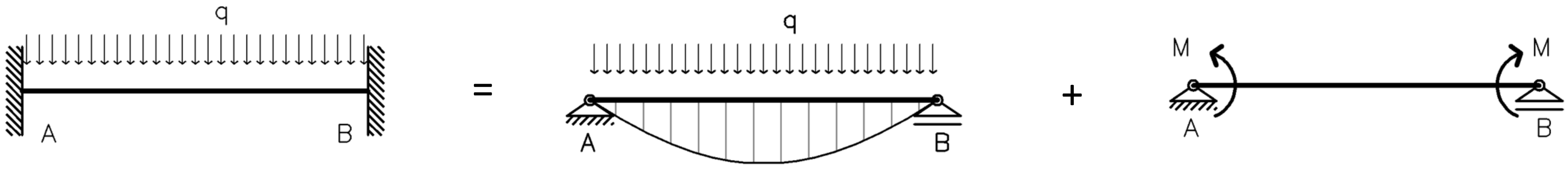
- Independiente de las cargas sobre la estructura.
- Depende del material, la geometría y de las condiciones de vínculo del sistema fundamental.
- Es una matriz cuadrada.
- Es una matriz simétrica. $r_{ij} = r_{ji}$ (Teorema de Maxwell)
- Es diagonal dominante. $r_{ii} > |r_{ij}|$
- Es positiva definida. Es inversible.

$[X_j]$: Vector de Incógnitas.

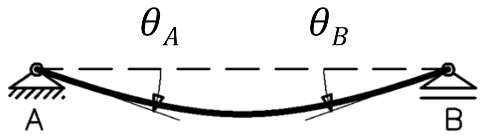
Desplazamientos Lineales o Angulares.

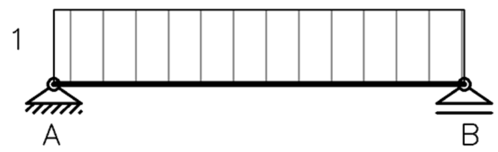
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

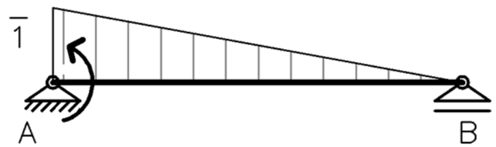
Cálculo de los Términos Independientes. R_{i0}

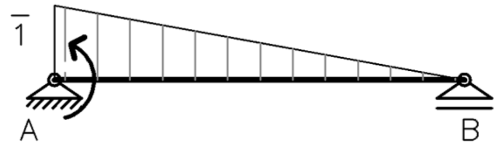


$$\boxed{M = \frac{q\,L^2}{12}}$$









$$\theta_A = -\frac{1}{3}\frac{q\,L^2}{8}\frac{L}{EJ}$$

$$\theta_A = -\frac{q\,L^3}{24EJ}$$

$$\theta_B = -\theta_A$$

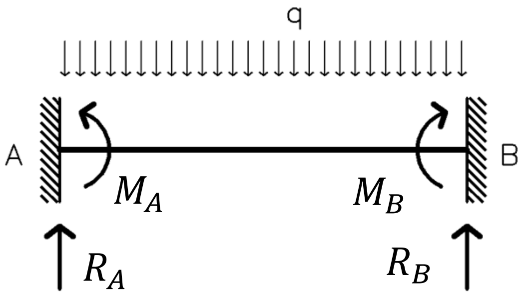
$$\delta_{11} = \frac{L}{2\,EJ}$$

$$\Delta_{10} = -\frac{q\,L^3}{24EJ}$$

$$M = \frac{q\,L^3}{24EJ}\frac{2\,EJ}{L}$$

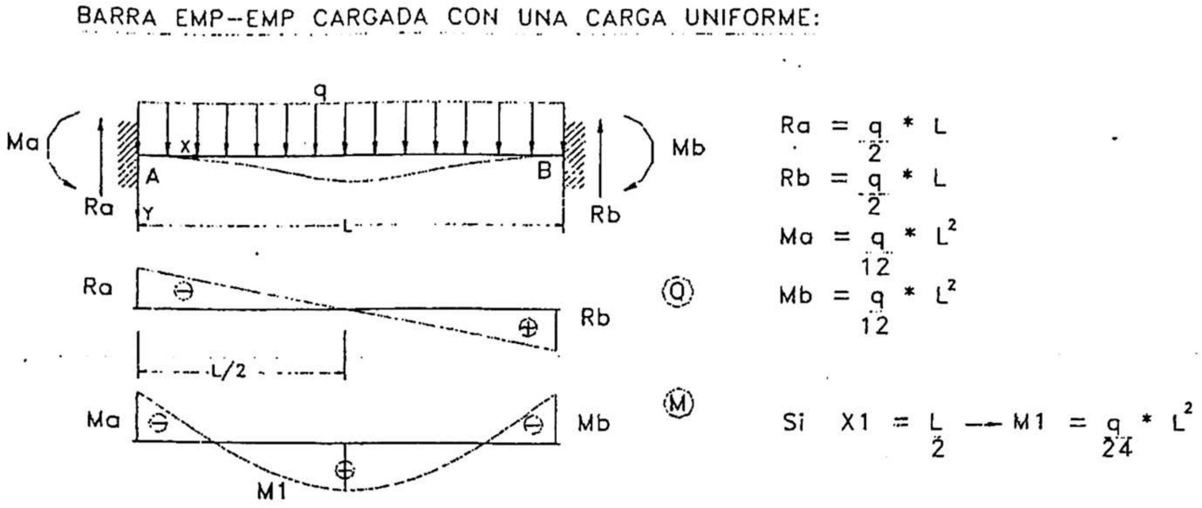
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Cálculo de los Términos Independientes. R_{i0}



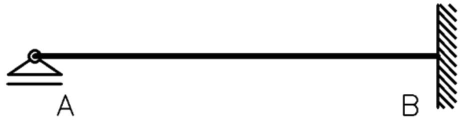
$$M_A = \frac{q\,L^2}{12} \qquad M_B = \frac{q\,L^2}{12}$$

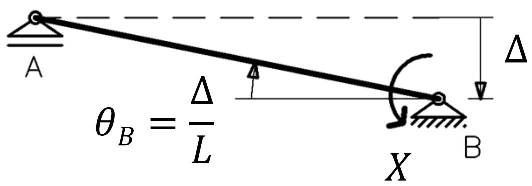
$$R_A = \frac{q\,L}{2} \qquad R_B = \frac{q\,L}{2}$$



MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

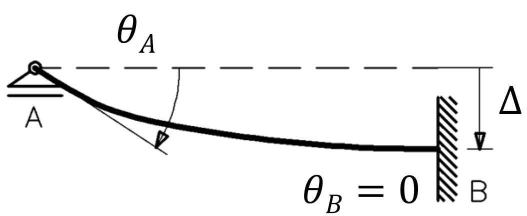
Cálculo de los coeficientes de la Matriz de Rigidez. r_{ij}

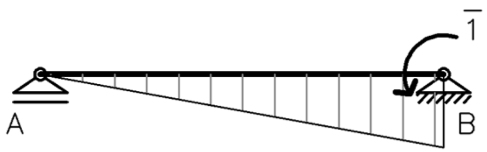




$$\Delta_{10} = -\frac{\Delta}{L}$$

$$\delta_{11} = \frac{L}{3\ EJ}$$



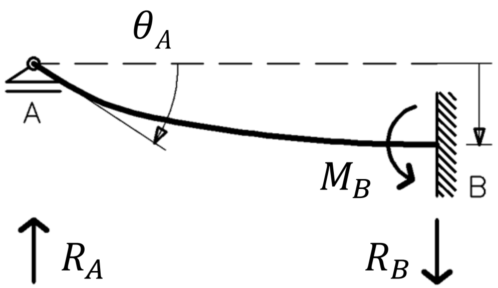


$$X = -\frac{-\Delta/L}{L/3EJ}$$

$$\boxed{M = \frac{3\ EJ}{L^2}\ \Delta}$$

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

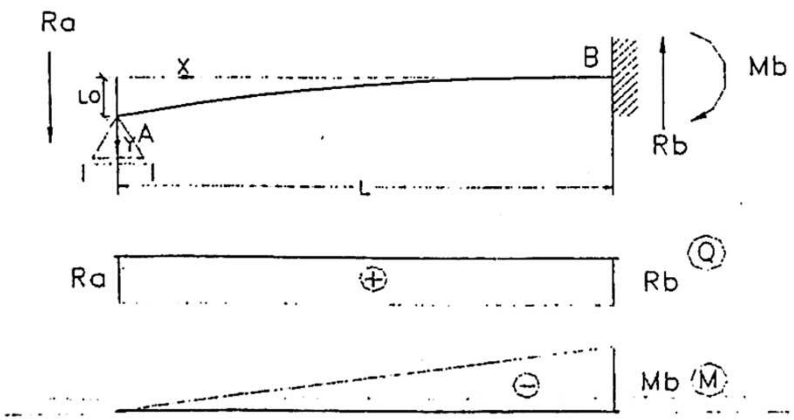
Cálculo de los coeficientes de la Matriz de Rigidez. r_{ij}



$$M_B = \frac{3\ EJ}{L^2}$$

$$R_A = \frac{3\ EJ}{L^3} \qquad R_B = \frac{3\ EJ}{L^3}$$

BARRA ARTIC–EMP CARGADA CON UN DESPLAZAMIENTO "LO" EN A:



$$Ra = \frac{3 * E * J * LO}{L^3}$$

$$Rb = \frac{3 * E * J * LO}{L^3}$$

$$Ma = \frac{3 * E * J * LO}{L^2}$$

APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Pasos

1. Identificar las Incógnitas (desplazamientos lineales / angulares)
2. Definir el sistema fundamental, SF (bloquear desplazamientos)
3. Calcular Reacciones de las cargas sobre los apoyos. R_{i0}
4. Calcular Reacciones debidas a desplazamientos unitarios. r_{ij}
5. Plantear las ecuaciones de equilibrio. $R_i = 0$
6. Resolver el SEL. $[R_{i0}] + [r_{ij}]\,[X_j] = 0$
7. Calcular los diagramas de esfuerzos internos, aplicando PIASE.

APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Cálculo de Esfuerzos Internos

P I A S E

$$M = M_{(0)} + M_{(1)} + M_{(2)} + \cdots + M_{(n)}$$

$$\boxed{M = M_{(0)} + m_{(1)}X_1 + m_{(2)}X_2 + \cdots + m_{(n)}X_n}$$

$M_{(0)}$: Momentos debidos al sistema P0 actuando sobre el SF.

$m_{(i)}$: Momentos debidos a los valores unitarios de la incógnitas, actuando sobre el sistema fundamental.

X_i : Valor de la incógnita.

Se aplica a todos los esfuerzos internos y a las reacciones de vinculo.

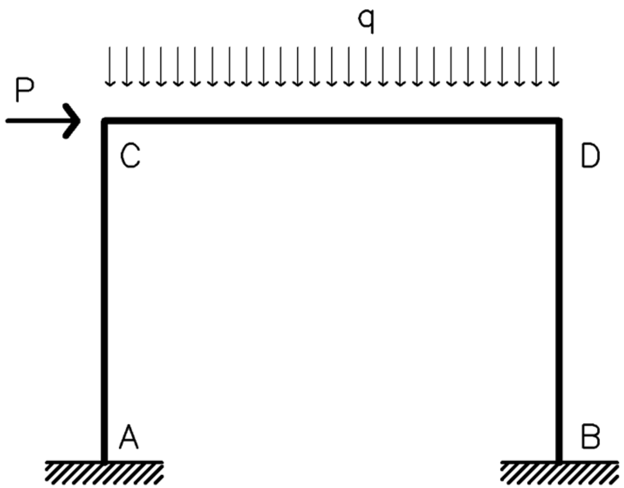
APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

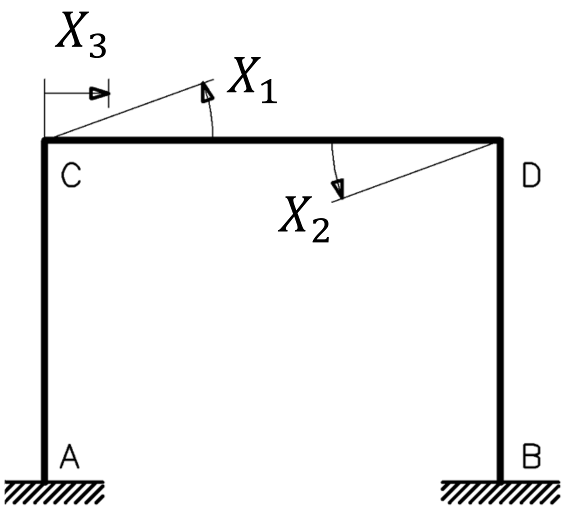
Ejemplo

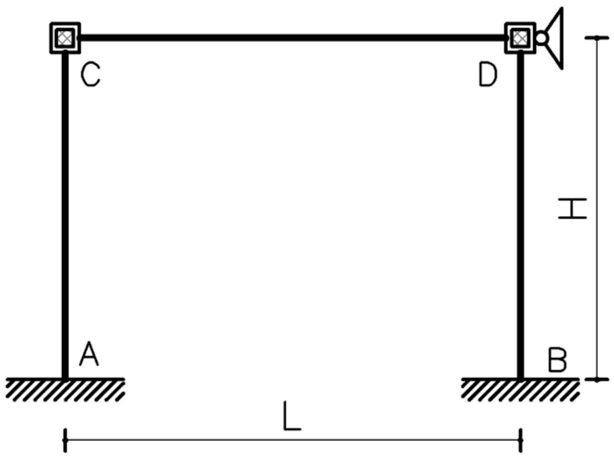
Estructura Original

Incógnitas Cinemáticas

Sistema Fundamental





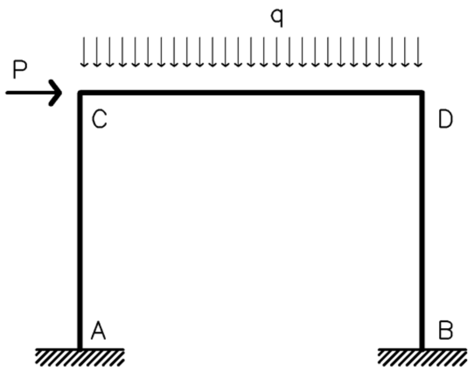


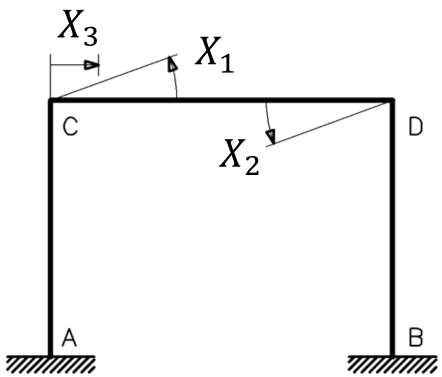
Ec. Equilibrio

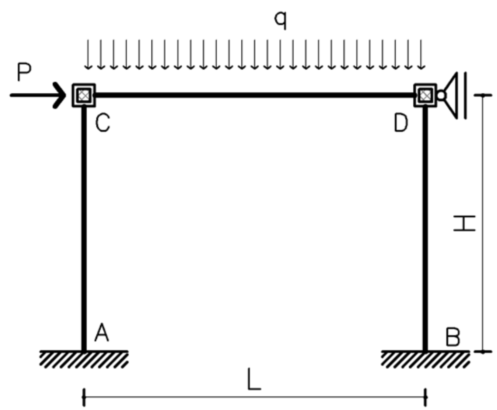
$$R_{i0} + r_{ij} \quad X_j = 0$$

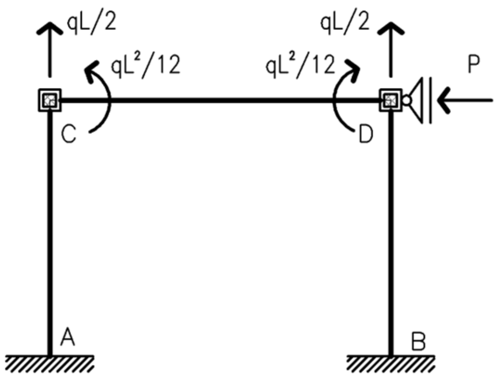
APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

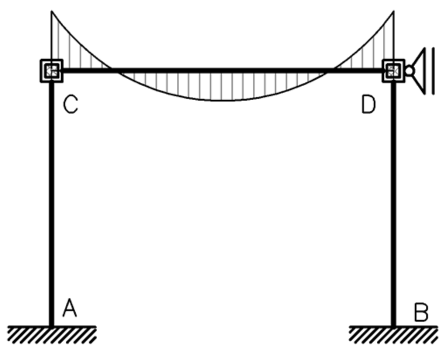
Cálculo R_{i0}











$$R_{10} = \frac{qL^2}{12}$$

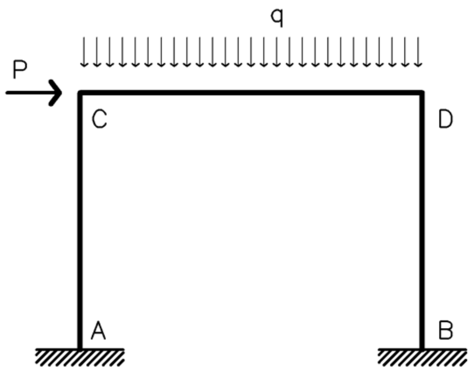
$$R_{20} = -\frac{qL^2}{12}$$

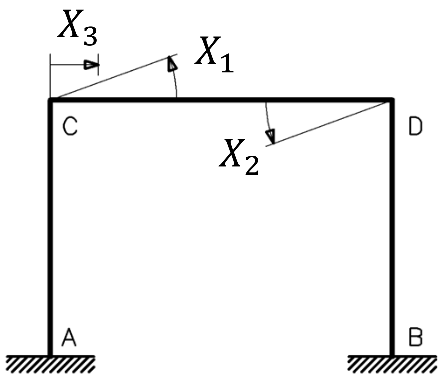
$$R_{30} = -P$$

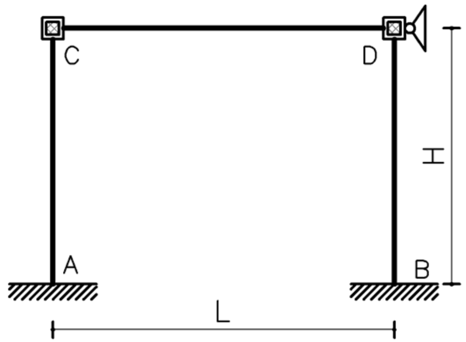
M0

APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

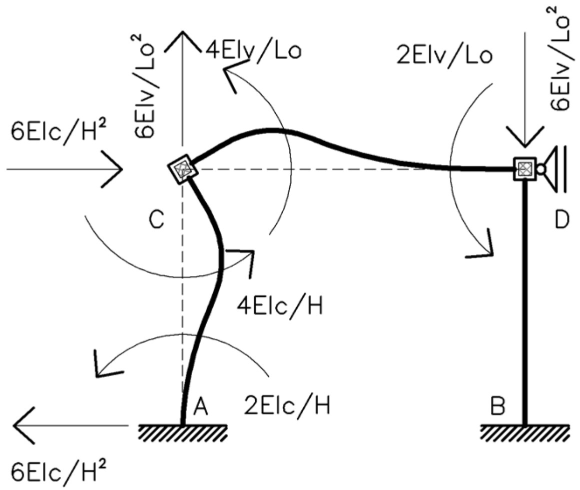
Cálculo r_{ij}

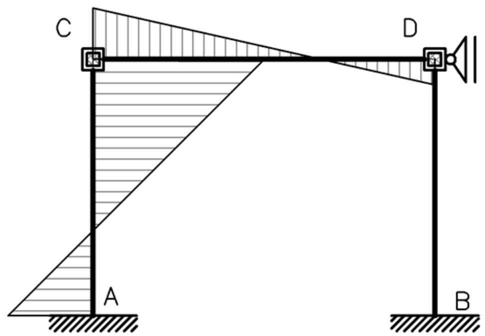






$$\boxed{X_1 = 1}$$





$$\boxed{\mathbf{m1}}$$

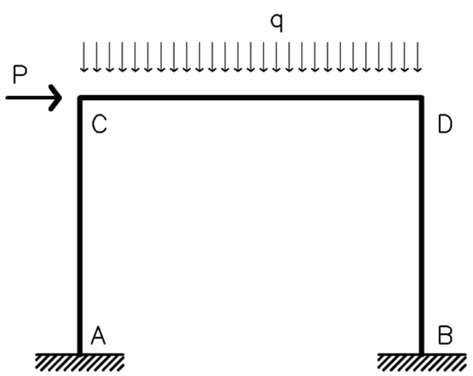
$$r_{11} = \frac{4EIv}{Lo} + \frac{4EIc}{H}$$

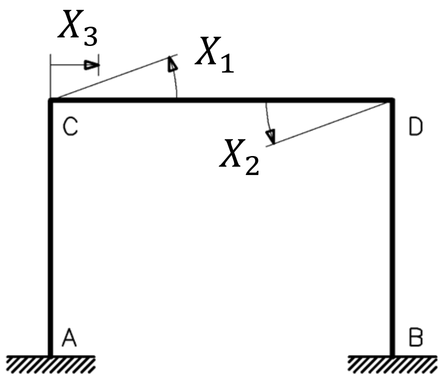
$$r_{21} = \frac{2EIv}{Lo}$$

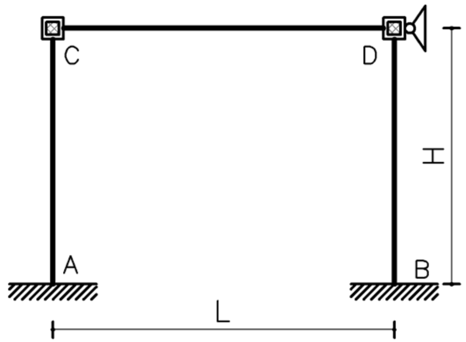
$$r_{31} = \frac{6EIc}{H^2}$$

APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

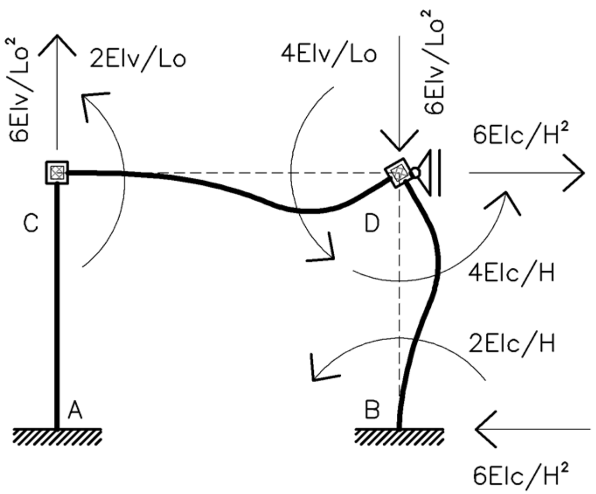
Cálculo r_{ij}

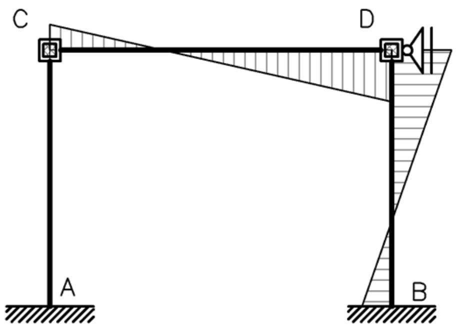






$\boxed{X_2 = 1}$





m2

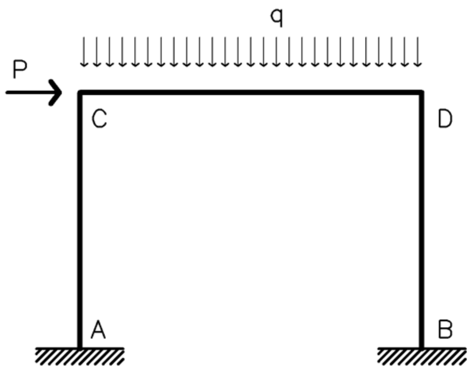
$$r_{12} = \frac{2EIv}{Lo}$$

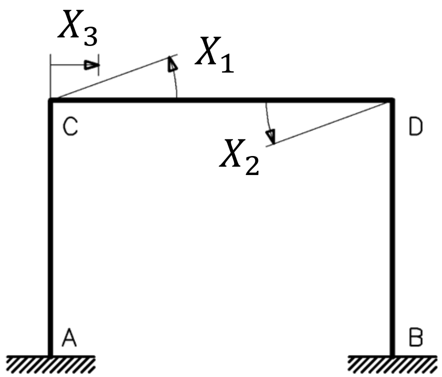
$$r_{22} = \frac{4EIv}{Lo} + \frac{4EIc}{H}$$

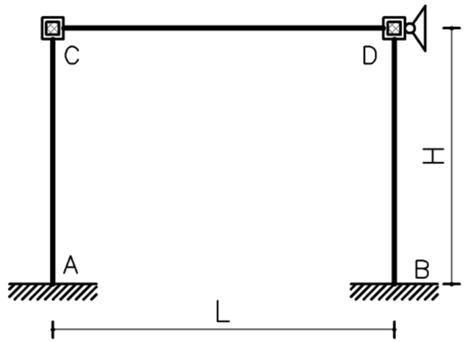
$$r_{32} = \frac{6EIc}{H^2}$$

APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

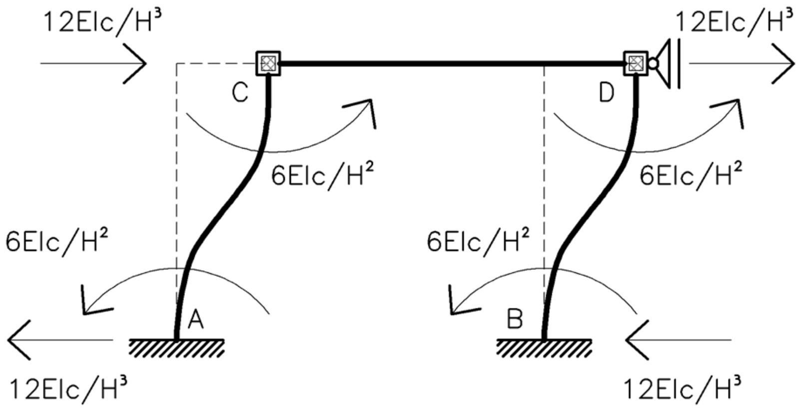
Cálculo r_{ij}

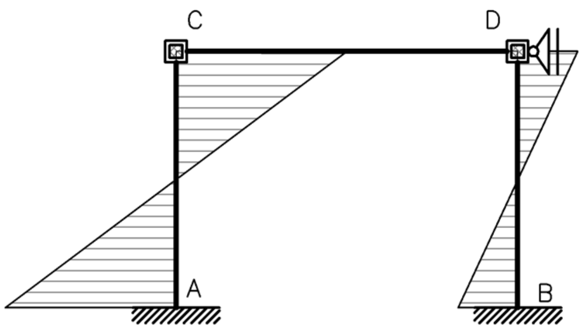






$\boxed{X_3 = 1}$





$$r_{13} = \frac{6EIc}{H^2}$$

$$r_{23} = \frac{6EIc}{H^2}$$

$$r_{32} = \frac{12EIc}{H^3} + \frac{12EIc}{H^3}$$

m3

APLICACIÓN MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Resolver SEL

$$[R_{i0}] + [r_{ij}]\,[X_j] = 0$$

Diagramas de Esfuerzos

$$M = M_{(0)} + m_{(1)}X_1 + m_{(2)}X_2 + \cdots + m_{(n)}X_n$$

$$Q = Q_{(0)} + q_{(1)}X_1 + q_{(2)}X_2 + \cdots + q_{(n)}X_n$$

$$N = N_{(0)} + n_{(1)}X_1 + n_{(2)}X_2 + \cdots + n_{(n)}X_n$$

Reacciones

$$R = R_{(0)} + r_{(1)}X_1 + r_{(2)}X_2 + \cdots + r_{(n)}X_n$$

M. DE LOS DESPLAZAMIENTOS vs M. DE LAS FUERZAS.

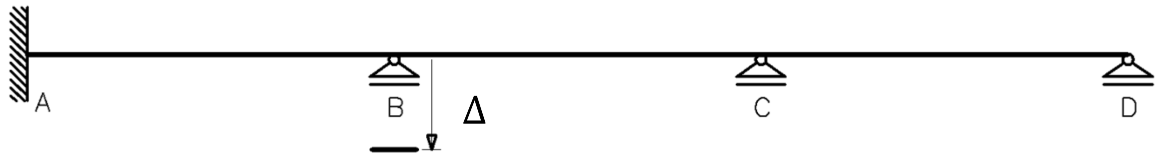
Comparación entre M de los Desplazamientos y M de las Fuerzas

Variable	Método de las Fuerzas	Método de los Desplazamientos
Enfoque	Estático	Cinemático
Incógnitas	Fuerzas (Internas o Reacciones)	Desplazamientos (lineales o angulares)
Ecuaciones	Compatibilidad	Equilibrio
Sistema Fundamental	Isostático	Hiperestático
	No único	Único
	Equilibrado	No Equilibrado
	No compatible	Compatible
	Se elige para facilitar el cálculo	No se elige. Se pueden agregar incógnitas
Diagramas	Se aplica PIASE	Se aplica PIASE
Desplazamientos	Se calculan sobre el fundamental	Se obtienen directamente

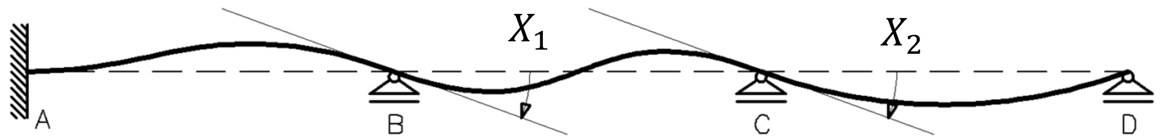
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Descenso de Apoyos

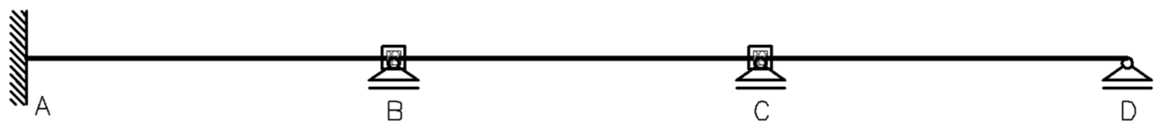
E. Original



Incógnitas

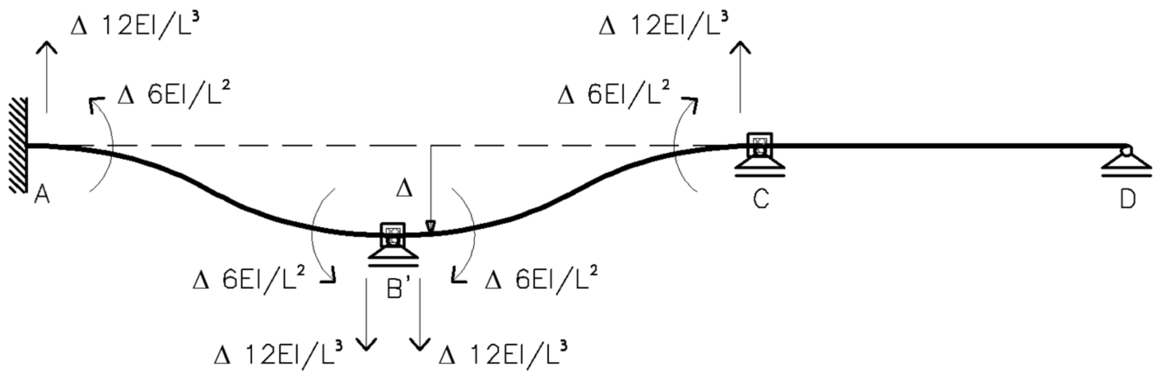


SF



$$[R_{i0}] + [r_{ij}]\,[X_j] = 0$$

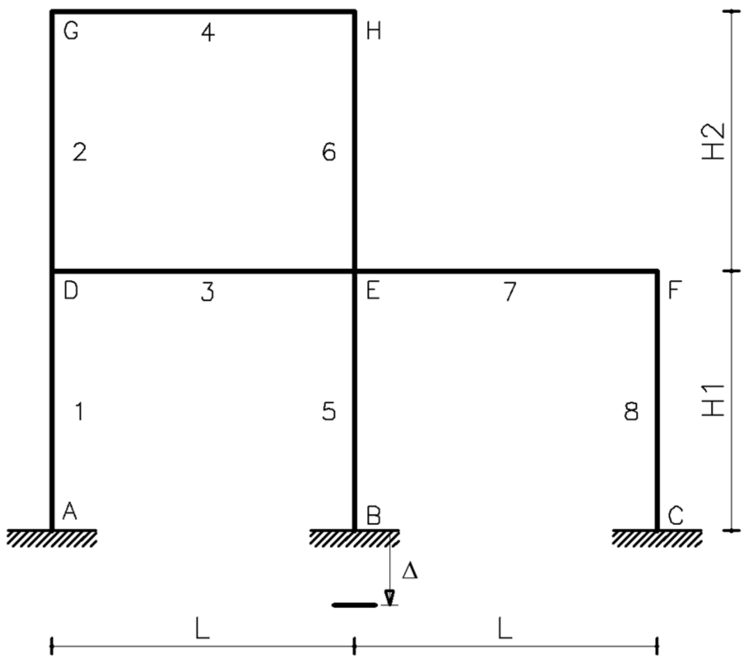
R_{i0}



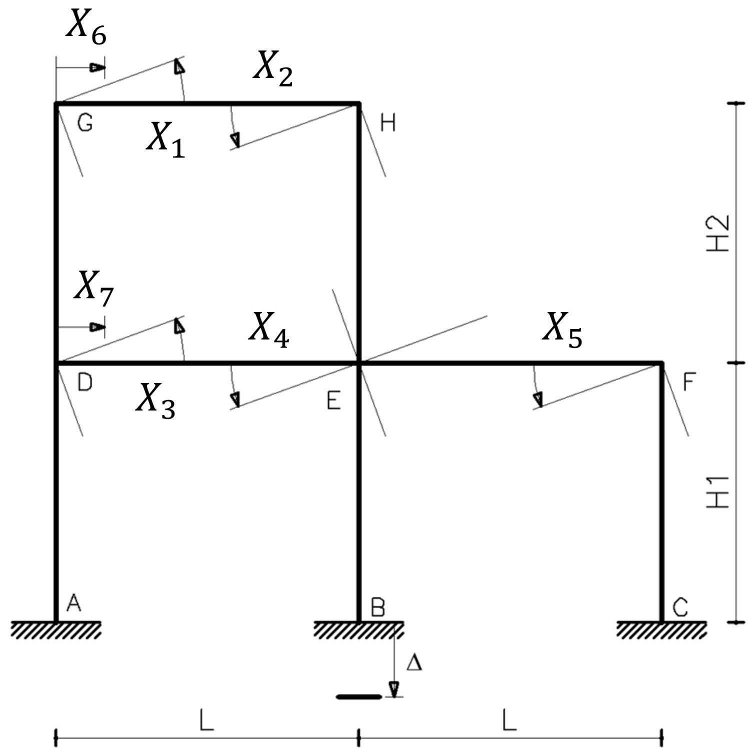
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Descenso de Apoyos

E. Original



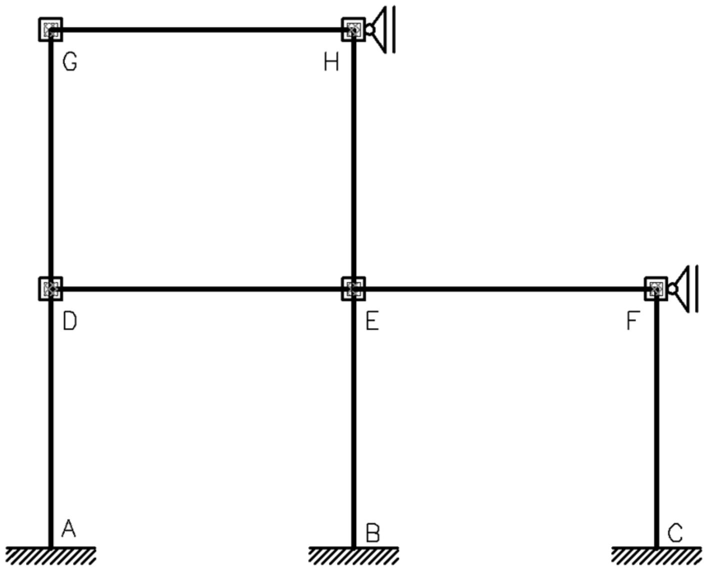
Incógnitas



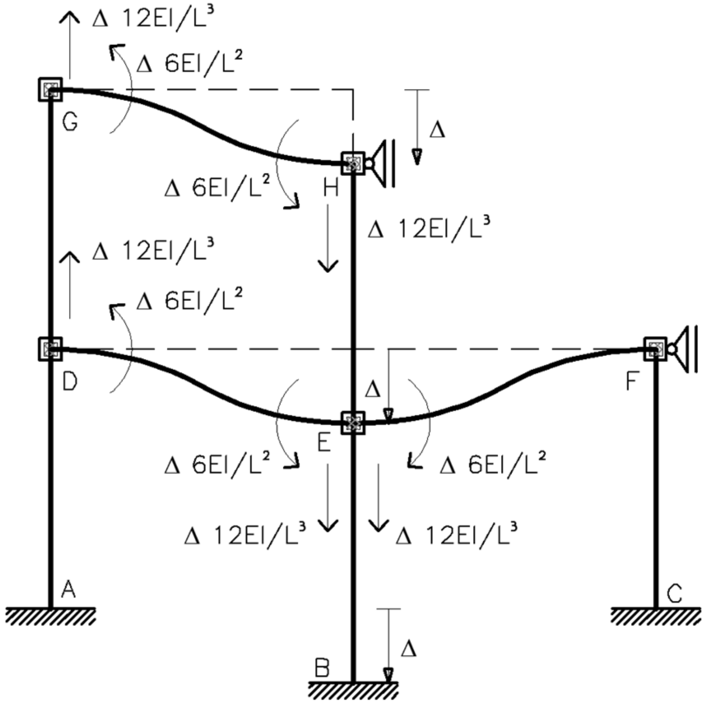
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Descenso de Apoyos

SF



R_{i0}

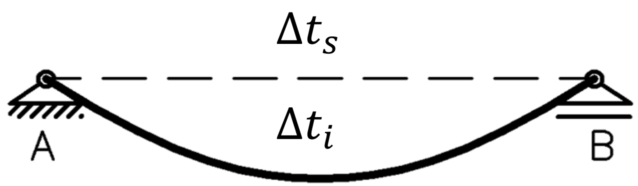


MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Acciones Térmicas

E. Isostática

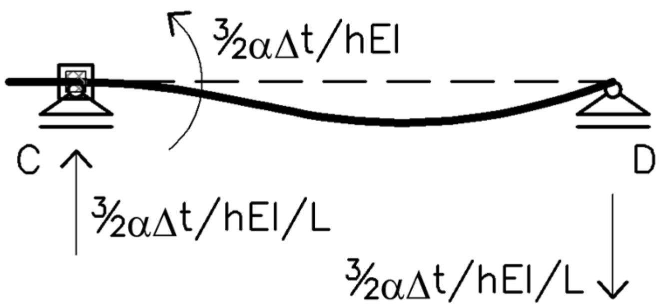
$\Delta t_i > \Delta t_s$



V. Continua

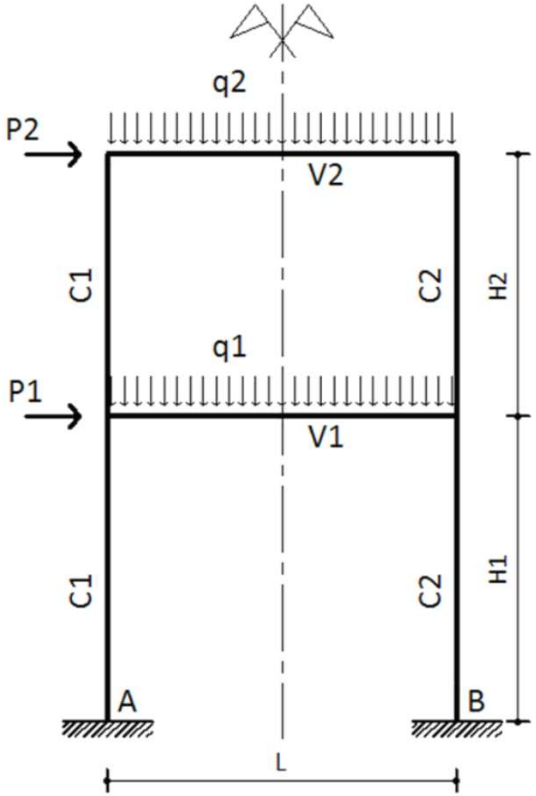
$\Delta t_i > \Delta t_s$

R_{i0}



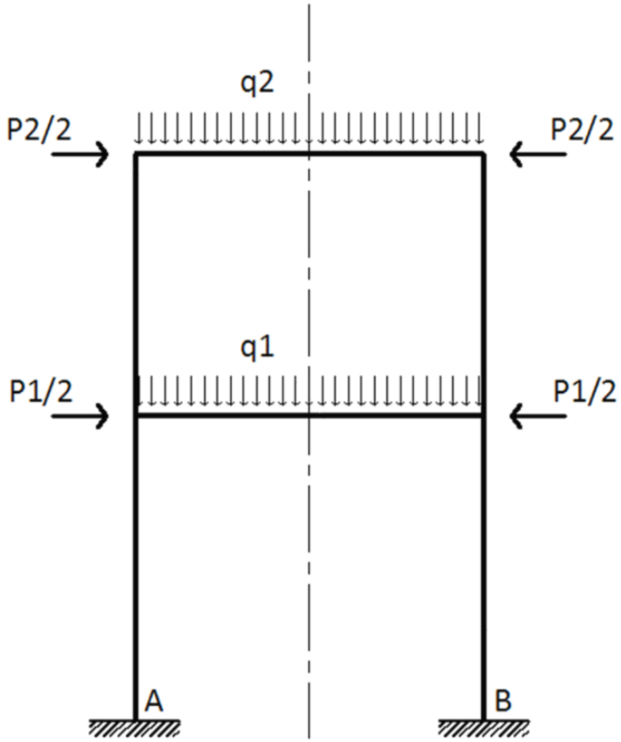
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Simetría y Antisimetría



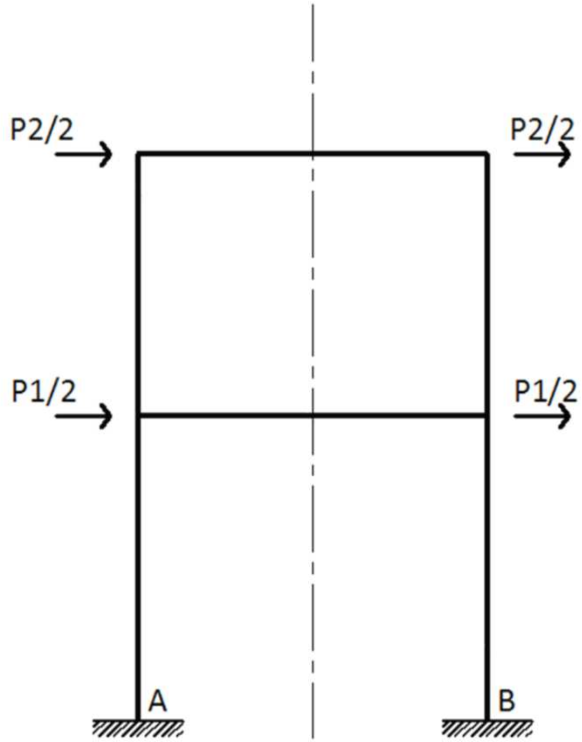
=

Simétrica



+

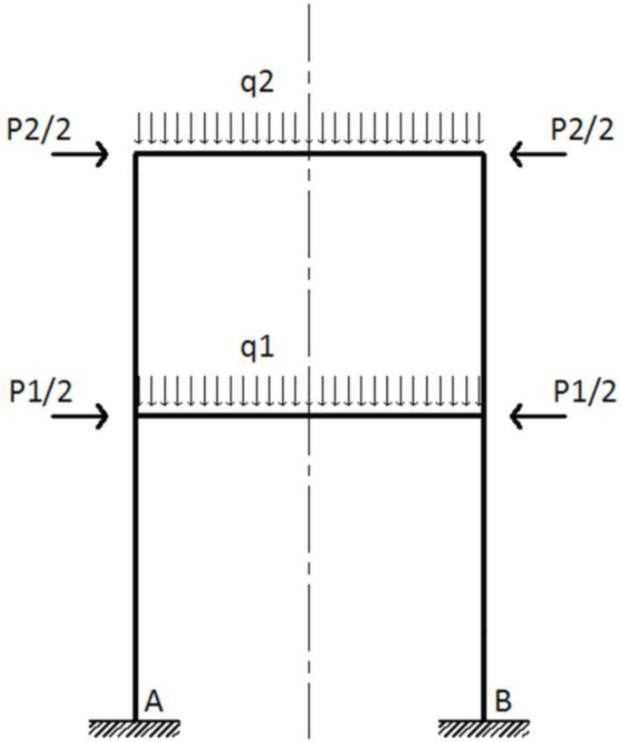
Antisimétrica



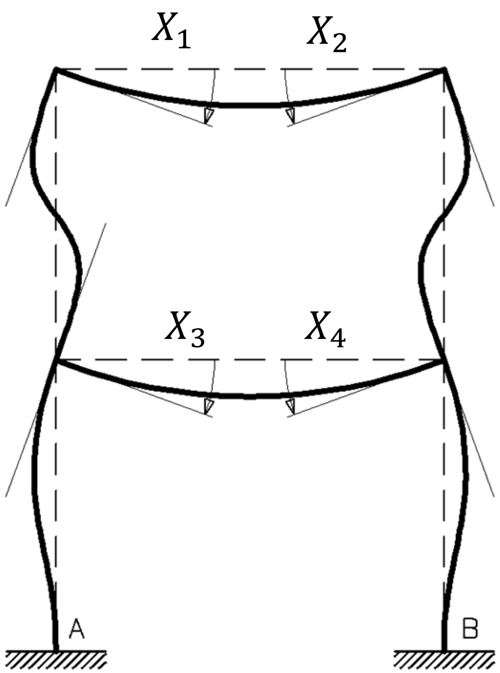
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Simetría y Antisimetría

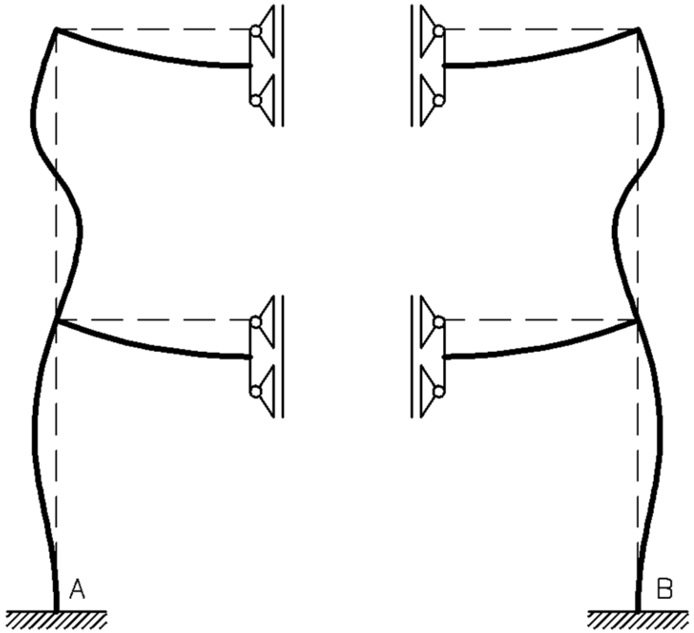
Simétrica



Elástica



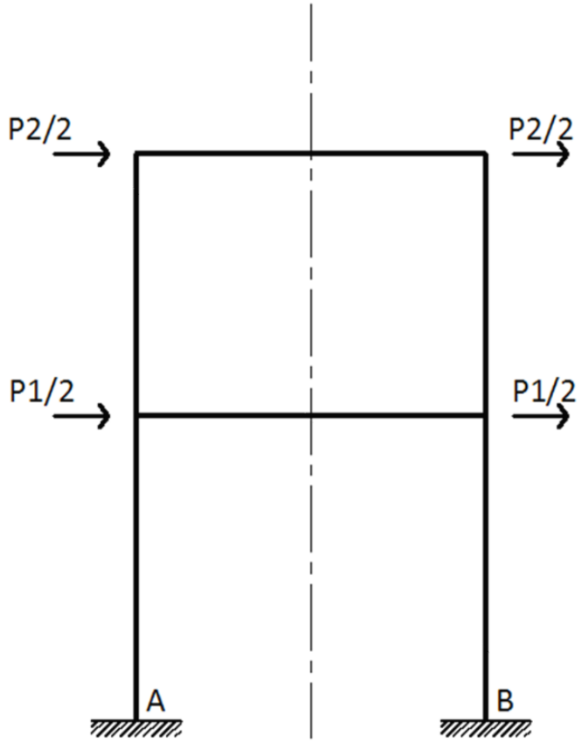
Empotramiento Guiado



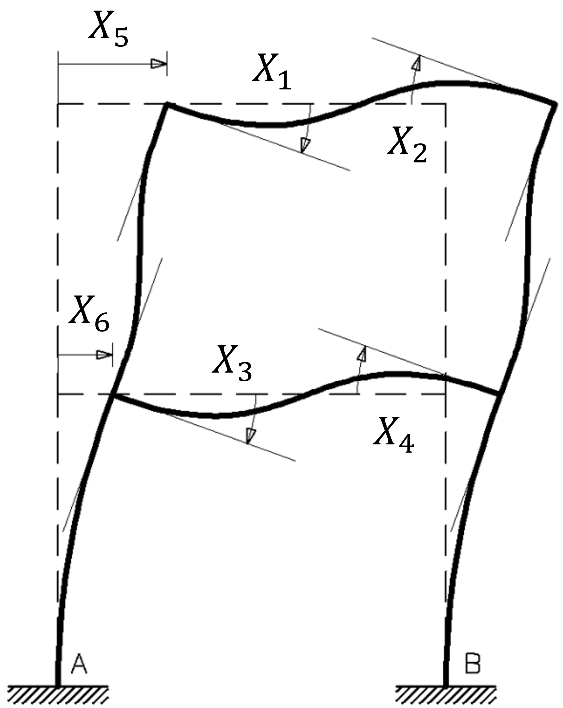
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Simetría y Antisimetría

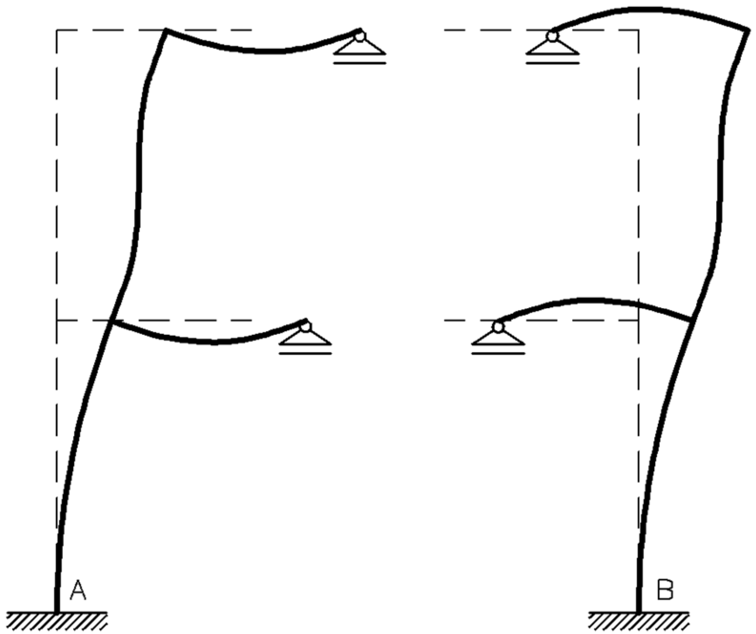
Antisimétrica



Elástica



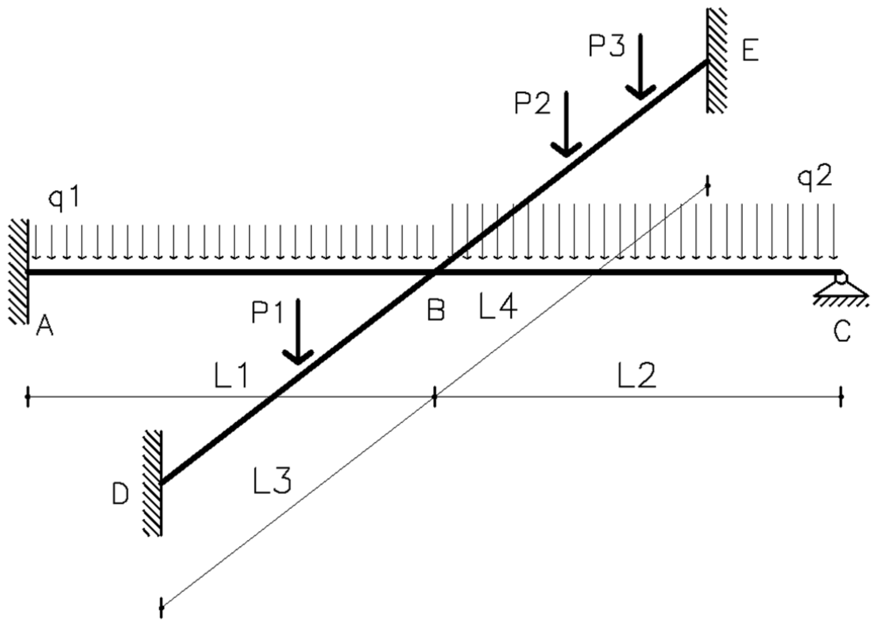
Apoyo Simple



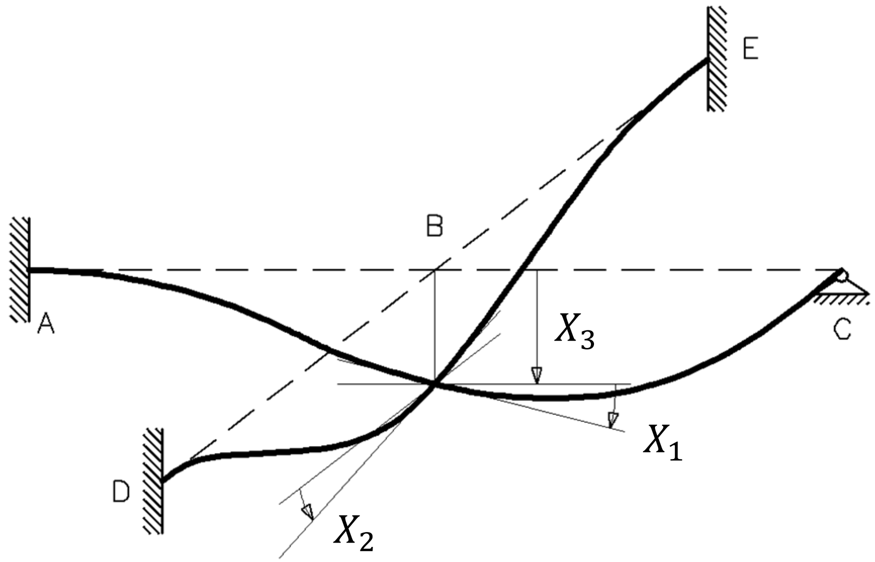
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Emparrillados Planos

E. Original



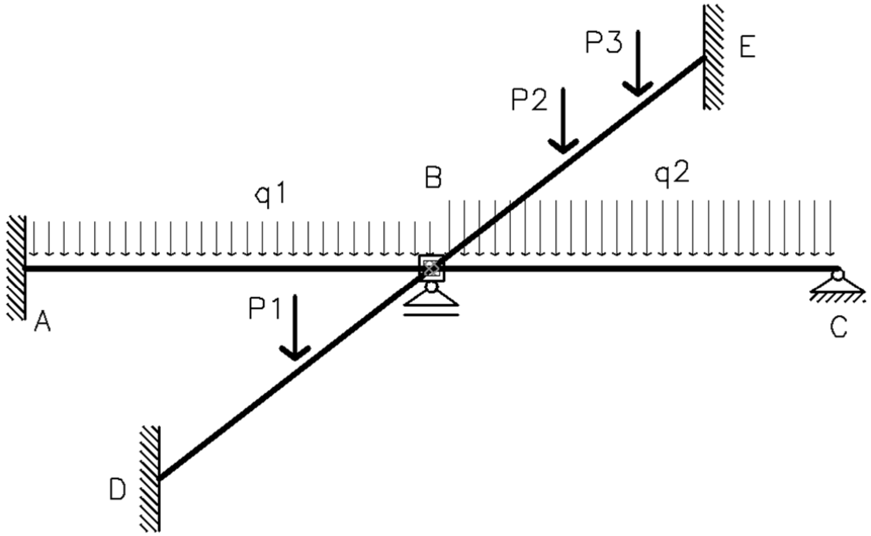
Elástica. Incógnitas



MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

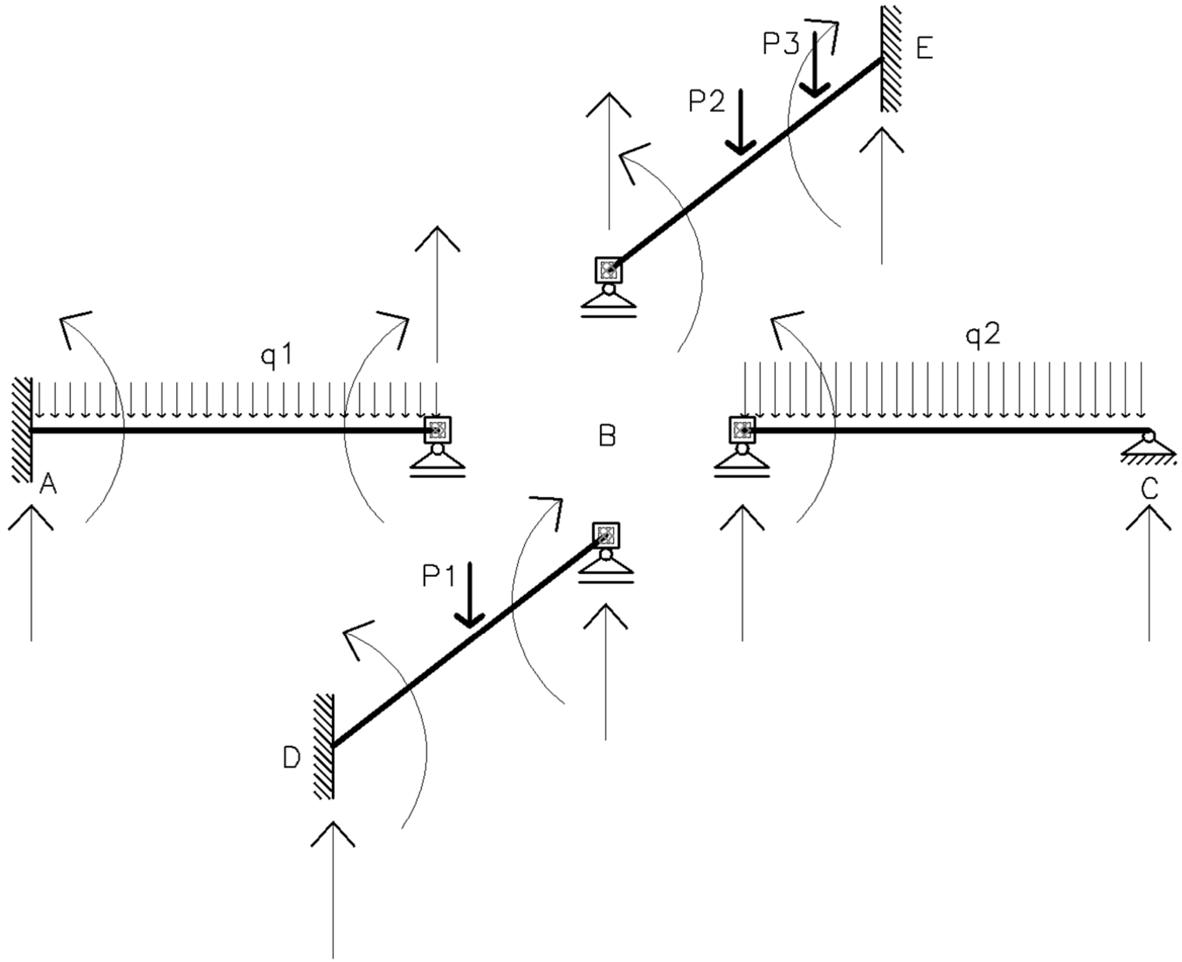
Emparrillados Planos. R_{i0}

SF



R_{i0}

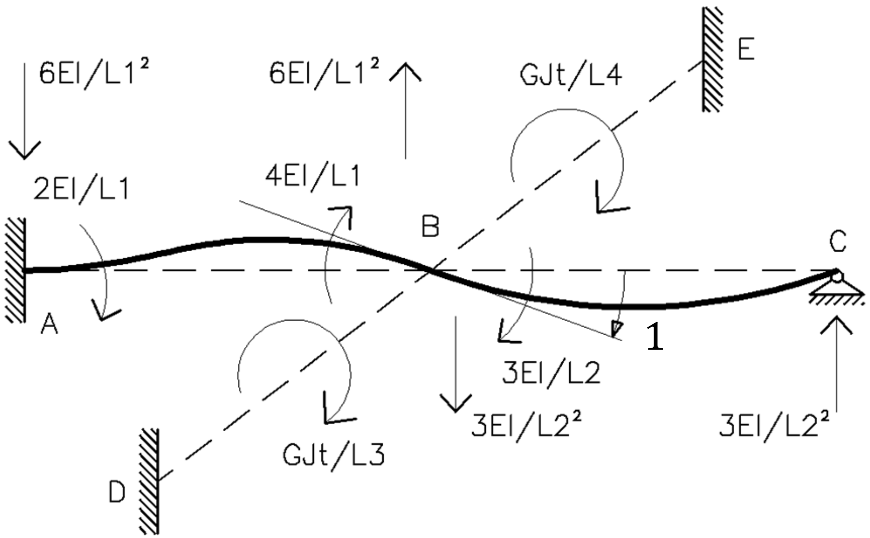
Tablas. Vale PIASE



MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Emparrillados Planos. r_{ij}

X1= 1

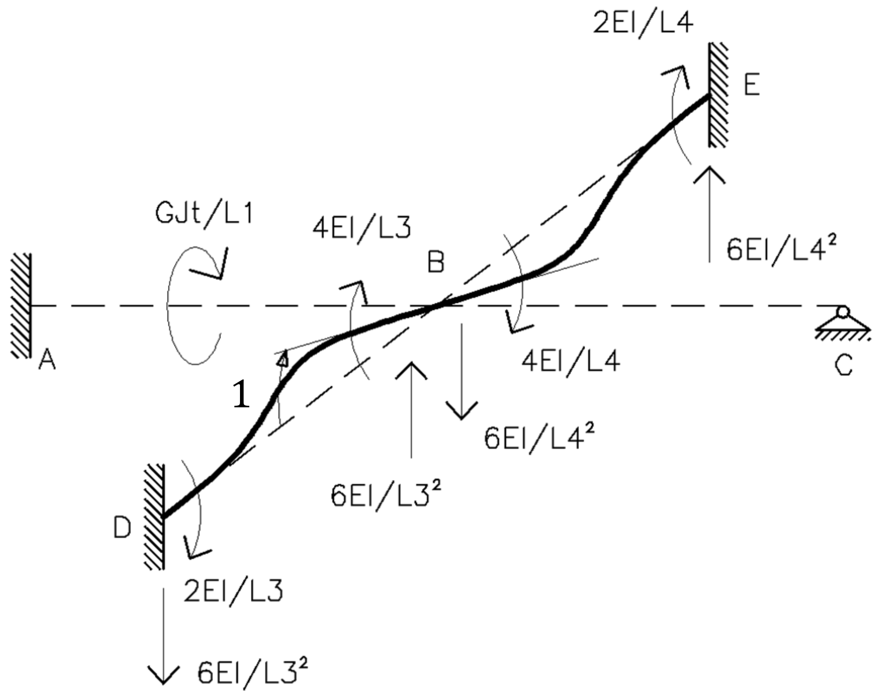


$$r_{11} = \frac{4\ EI}{L1} + \frac{3\ EI}{L2} + \frac{GJt}{L3} + \frac{GJt}{L4}$$

$$r_{21} = 0$$

$$r_{31} = -\frac{6\ EI}{L1^2} + \frac{3\ EI}{L2^2}$$

X2= 1



$$r_{12} = 0$$

$$r_{22} = \frac{4\ EI}{L3} + \frac{4\ EI}{L4} + \frac{GJt}{L1}$$

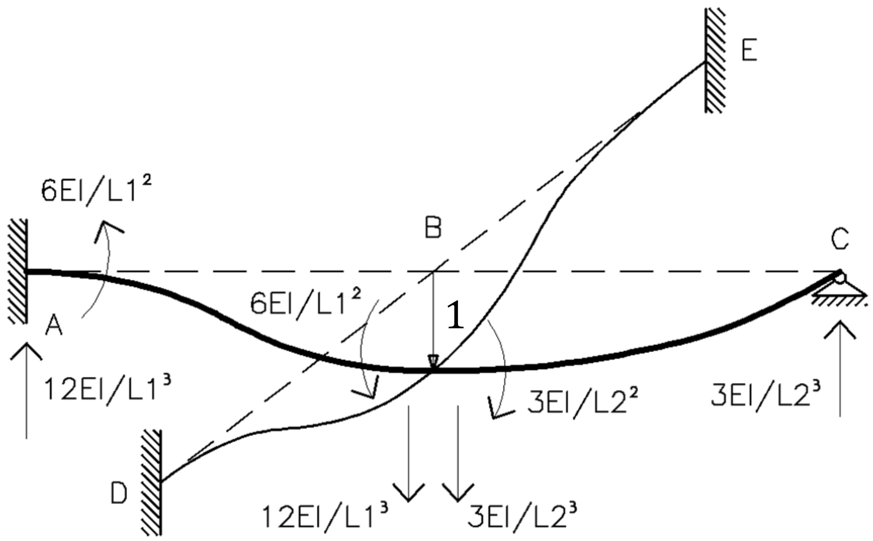
$$r_{32} = -\frac{6\ EI}{L3^2} + \frac{6\ EI}{L4^2}$$

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

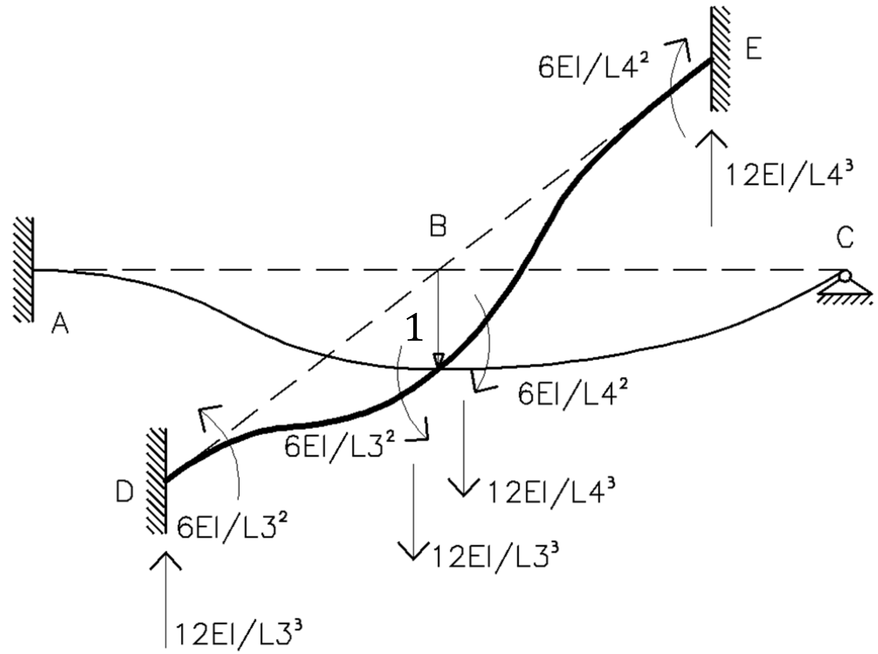
Emparrillados Planos. r_{ij}

X3= 1

Plano vertical, pasa por AC



Plano vertical, pasa por DE



$$r_{13} = -\frac{6\ EI}{L1^2} + \frac{3EI}{L2^2}$$

$$r_{23} = -\frac{6\ EI}{L3^2} + \frac{6\ EI}{L4^2}$$

$$r_{33} = \frac{12\ EI}{L1^3} + \frac{3\ EI}{L2^3} + \frac{12\ EI}{L3^3} + \frac{12\ EI}{L4^3}$$

$$[R_{i0}] + [r_{ij}]\,[X_j] = 0$$

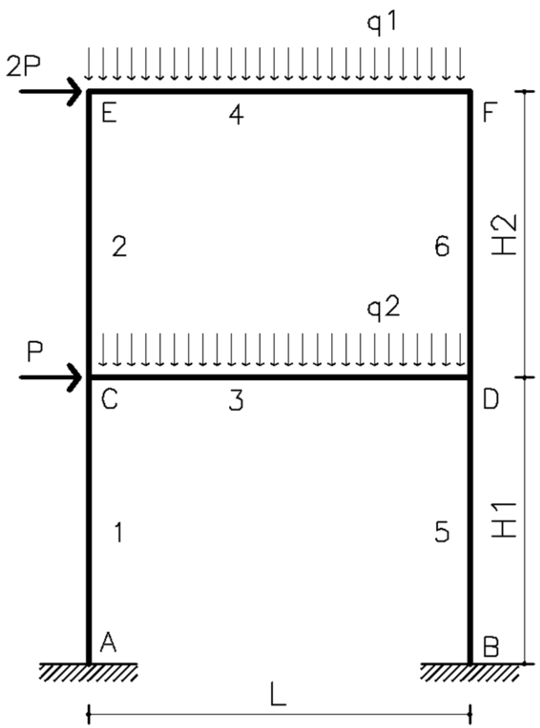
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

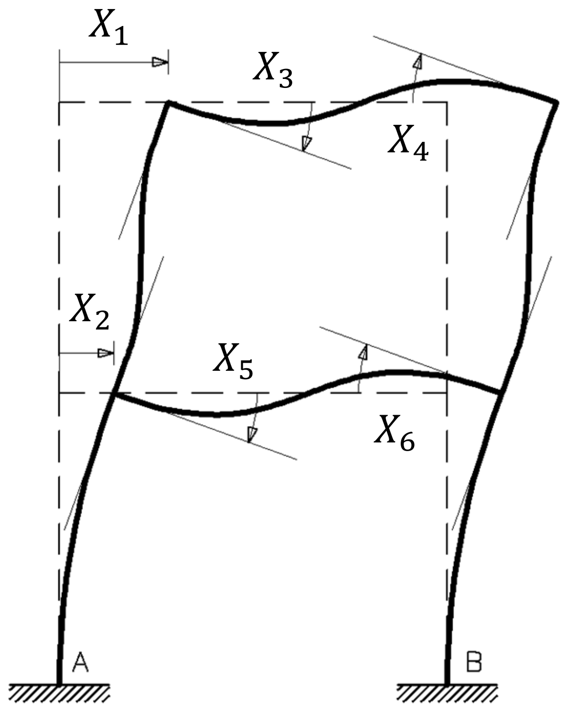
Condensación Estática de la Matriz de Rigidez

En algunos casos se requiere no considerar algunos grados de libertad de la estructura.

Es el caso de la matriz de rigidez a desplazamientos horizontales.

Para “eliminar” los grados de libertad no deseados se aplica la condensación estática de la matriz de rigidez.



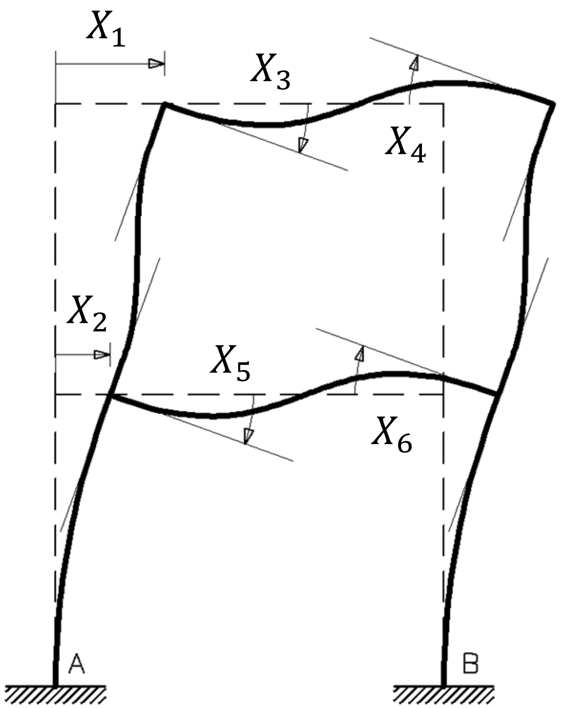


$$[R_{i0}] + [r_{ij}]\,[X_j] = 0$$

$$[r_{ij}] = [6\ x\ 6]$$

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Condensación Estática de la Matriz de Rigidez

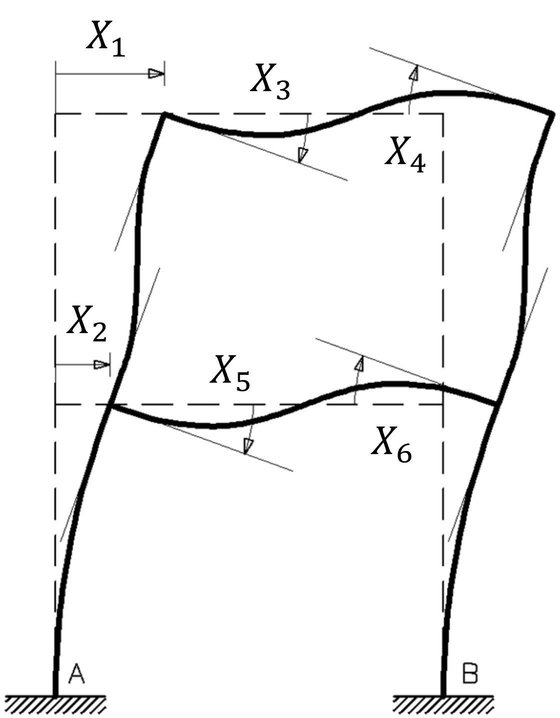


$$[r_{ij}] = [6\ x\ 6]$$

$$[r_{ij}] = \left[\begin{array}{cc|cccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ \hline r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{array}\right]$$

MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Condensación Estática de la Matriz de Rigidez



$$\begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{\delta\delta} & r_{\delta\theta} \\ r_{\theta\delta} & r_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\delta \\ X_\theta \end{bmatrix}$$

$$[0] = [r_{\theta\delta}][X_\delta] + [r_{\theta\theta}][X_\theta]$$

$$[X_\theta] = -[r_{\theta\theta}]^{-1}[r_{\theta\delta}][X_\delta]$$

$$[F] = [r_{\delta\delta}][X_\delta] + [r_{\delta\theta}][X_\theta]$$

$$[F] = [r_{\delta\delta}][X_\delta] - [r_{\delta\theta}][r_{\theta\theta}]^{-1}[r_{\theta\delta}][X_\delta]$$

$$[F] = \big[[r_{\delta\delta}] - [r_{\delta\theta}][r_{\theta\theta}]^{-1}[r_{\theta\delta}]\big][X_\delta]$$

$$[F] = [K_c][X_\delta]$$

$$\boxed{[K_c] = [r_{\delta\delta}] - [r_{\delta\theta}][r_{\theta\theta}]^{-1}[r_{\theta\delta}]}$$

BILIOGRAFÍA

- Cervera, Miguel y Blanco, Elena. “Mecánica de estructuras libro 2. Métodos de análisis”. UPC 2002. ISBN 84-8301-635-4. ISBN Obra completa 84-8301-623-0.

- Belluzzi, Odone. “Ciencia de la Construcción” T I, Ed. Aguilar, 1977. ISBN 84-03-20174-5

- Cudmani, R. “Teoría y Práctica de las Estructuras de Barra” EDUNT. 2007. ISBN 978-987-1366-03-3