

PÓRTICO CON CARGA CONCENTRADA HORIZONTAL

Calcular el pórtico de la figura, con las cargas y dimensiones indicadas en la misma, mediante el método de los desplazamientos. Suponga que las barras son axialmente rígidas. Exprese los resultados en función de los valores genéricos.

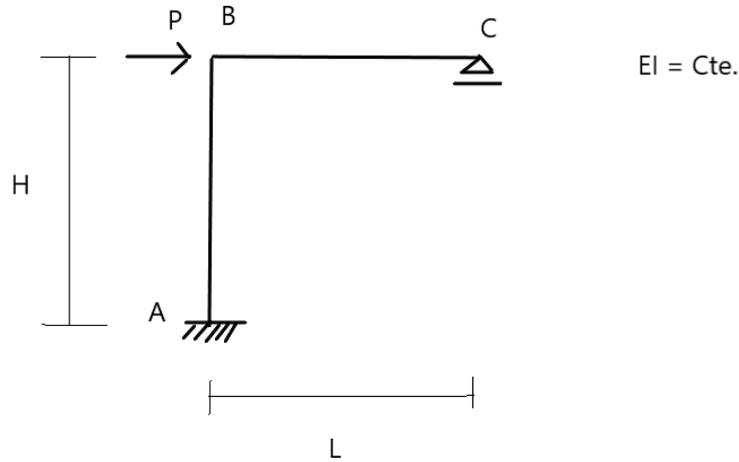


Figura 1: Geometría y datos de la estructura

1. Sistema Fundamental e Incógnitas

En este caso es relativa simple identificar las incógnitas del problema. La primera es el giro nodal X_1 y la segunda el desplazamiento de piso X_2 . Por razones didácticas las incógnitas, las rigideces y los términos independientes se indican con color verde. La carga con color azul.

Sistema Fundamental

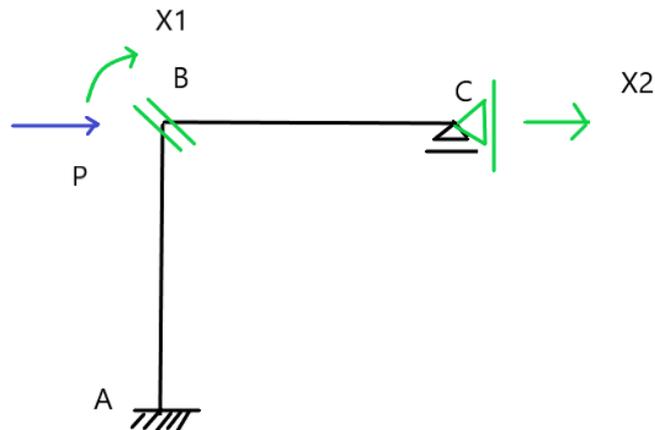


Figura 2: Sistema Fundamental e incógnitas cinemáticas

Es importante resaltar un aspecto clave. Una vez definido el sentido positivo de las incógnitas cinemáticas, se debe elegir el mismo sentido para las rigideces. Por ese motivo, además, no es conveniente tomar dos incógnitas cinemáticas del mismo tipo con diferentes sentidos.

2. Cálculo de las rigideces r_{11} y r_{21}

Para calcular las rigideces se impone un giro unitario $\bar{X}_1 = 1$ como se indica en la figura

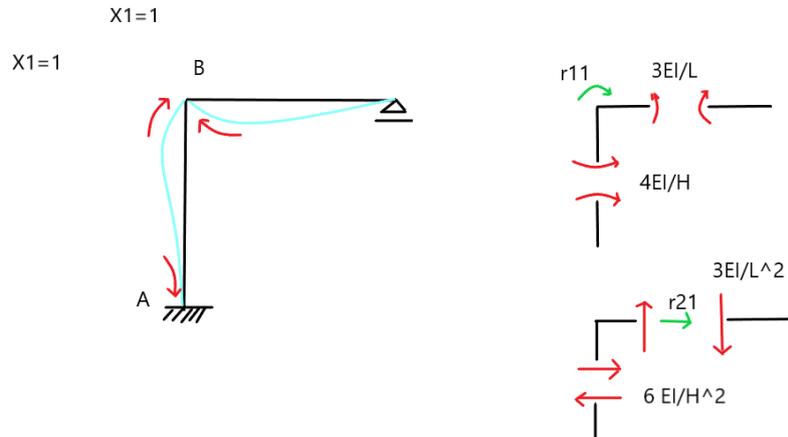


Figura 2: Elástica y esfuerzos extremos de pieza para $\bar{X}_1 = 1$

De la observación del esquema de la figura 2, resulta claro, como se indicó en el punto 1 que X_2 y r_{21} tienen el mismo sentido positivo. De la observación del mismo esquema surge:

$$r_{11} = \frac{4EI}{H} + \frac{3EI}{L}$$

El cálculo de la rigidez r_{21} es más laborioso. Hay que calcular la reacción en la dirección del apoyo móvil ficticio debido al giro unitario $\bar{X}_1 = 1$. Para ello primero se deben calcular los esfuerzos de corte en la columna inclinada y en la viga, Q_c y Q_v , respectivamente.

A partir de los momentos extremos de pieza, que se muestran en el esquema de figura 2, se obtienen los cortes extremos de pieza:

$$Q_c = \frac{1}{H} \left(\frac{4EI}{H} + \frac{2EI}{H} \right) = \frac{6EI}{H^2}$$

$$Q_v = \frac{1}{L} \left(\frac{3EI}{L} \right) = \frac{3EI}{L^2}$$

El cálculo de r_{21} se obtiene a partir del equilibrio del nudo a la traslación. Para ello se tiene en cuenta el esquema de la figura 3:

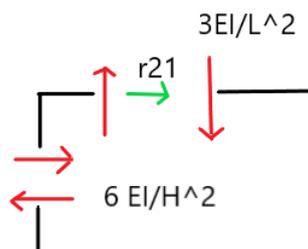


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre del Nudo para $\bar{X}_1 = 1$.

Corresponde observar que el equilibrio del nudo a la traslación impone que la suma de la rigidez r_{21} indicada en verdes y el corte en la columna Q_c sindicado en rojo en el gráfico de la figura 3 debe ser nula. Luego resulta:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{6 E I}{H^2} + r_{21} = 0 \Rightarrow r_{21} = - \frac{6 E I}{H^2}$$

Es importante destacar que r_{21} tiene sentido opuesto al que supuso inicialmente y por eso lleva el signo menos.

3. Cálculo de las rigideces r_{12} y r_{22}

Para calcular las rigideces r_{12} y r_{22} se impone un desplazamiento unitario $\bar{X}_2 = 1$ como se indica en la figura 4. De la observación de la misma se obtienen las pares y cortes extremos de pieza. Nótese que el corte extremo de pieza de la columna tiene el mismo sentido que $\bar{X}_2 = 1$.

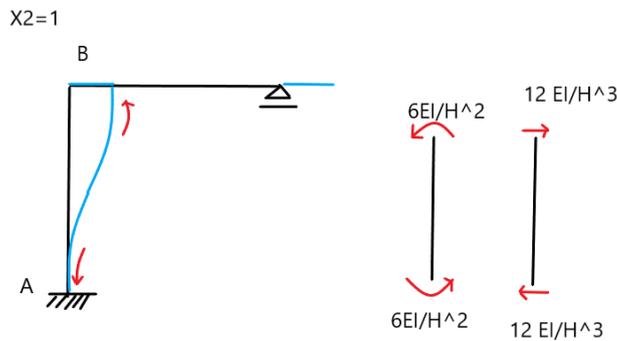


Figura 4: Elástica y esfuerzos extremos de pieza para $\bar{X}_2 = 1$

$$M_c = \frac{6 E I}{H^2}$$

$$Q_c = \frac{1}{H} \left(\frac{6 E I}{H^2} + \frac{6 E I}{H^2} \right) = \frac{12 E I}{H^3}$$

La rigidez r_{12} se obtiene a partir del par extremo de pieza de la columna, como se observa en la figura 5.

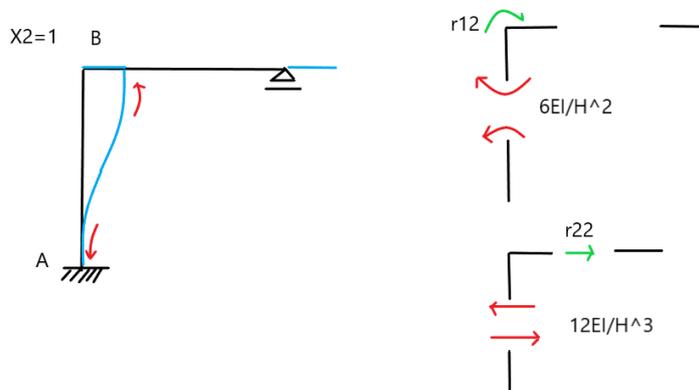


Figura 5: Elástica y diagramas de cuerpo libre del Nudo para $\bar{X}_2 = 1$

$$\frac{6 E I}{H^2} + r_{12} = 0 \Rightarrow r_{12} = - \frac{6 E I}{H^2}$$

Es importante señalar que r_{12} tiene el mismo valor que el obtenido para r_{21} .

El cálculo de la rigidez r_{22} se realiza de manera similar al de la rigidez r_{21} . En el diagrama de cuerpo se muestra en color verde la rigidez r_{22} y en rojo el corte extremo de pieza de la columna. También en este caso coinciden el sentido positivo r_{22} con el de X_2 . La suma de fuerzas en el nudo debe ser cero para asegurar el equilibrio en el Sistema Fundamental:

$$- \frac{12 E I}{H^3} + r_{22} = 0 \Rightarrow r_{22} = \frac{12 E I}{H^3}$$

En este caso, como es esperable, la rigidez directa tiene signo positivo.

4. Términos independientes r_{10} y r_{20}

El término independiente r_{10} es nulo porque no hay ninguna carga que genere un par en la dirección de la incógnita. Luego:

$$r_{10} = 0$$

El cálculo de r_{20} requiere nuevamente de un análisis similar al desarrollado para calcular r_{21} y r_{22} . En la Figura 6 se observa el diagrama de cuerpo libre correspondiente. En este caso se ha mantenido el color verde para el término independiente, cuyo sentido se supone positivo, es decir en la misma dirección de r_{22} . La carga P se indica en azul.

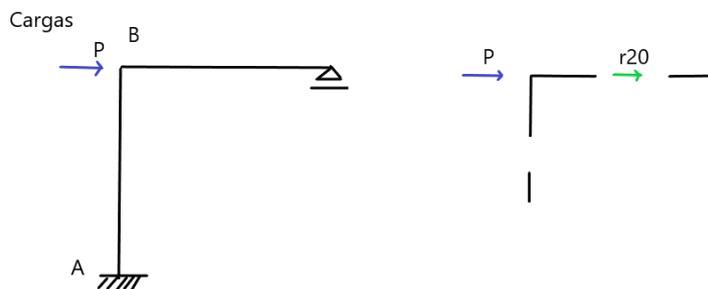


Figura 6: Diagrama de cuerpo libre del Nudo para las cargas de la estructura.

La nulidad de las cargas impone:

$$P + r_{20} = 0 \Rightarrow r_{20} = -P$$

5. Ecuaciones de equilibrio

En forma genérica las ecuaciones de equilibrio se escriben:

$$r_{10} + r_{11} X_1 + r_{12} X_2 = 0$$

$$r_{20} + r_{21} X_1 + r_{22} X_2 = 0$$

La primera ecuación, expresa la nulidad de la reacción del empotramiento móvil y la segunda el equilibrio de piso que impone la nulidad de la reacción del apoyo móvil.

Reemplazando los valores calculados de las rigideces r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} y los términos independientes r_{10} y r_{20} , resulta:

$$0 + \left(\frac{4EI}{H} + \frac{3EI}{L}\right) X_1 - \frac{6EI}{H^2} X_2 = 0$$

$$-P - \frac{6EI}{H^2} X_1 + \frac{12EI}{H^3} X_2 = 0$$

El sistema se expresa en forma matricial se como:

$$\begin{array}{cc} \frac{4EI}{H} + \frac{3EI}{L} & -\frac{6EI}{H^2} \\ -\frac{6EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^3} \end{array} \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ P \end{array}$$

Pueden asignarse valores a los momentos de inercia, longitudes, cargas, etc. para resolver el sistema. Una vez conocidas las incógnitas el trazado de los diagramas de esfuerzos característicos se realiza de la forma vista en clase y en los ejercicios previos.