

ANALISIS ESTRUCTURAL I

Estructuras de Barras
Método de la Rigidez Directa

Daniel E. López
Ingeniero Civil
Magíster en Ing. Estructural

Contenido

- **Introducción**
- **Análisis Estructural**
- **Métodos Matriciales (MRD)**
- **Principio de Contragradencia o DEC. (Diag. Tonti)**
- **Introducción al Método de la Rigidez Directa**
- **Hipótesis Método Rigidez Directa**
- **Convención de signos**
- **Desarrollo Método Rigidez Directa Estructuras Planas**
 - Nodos articulados
 - Nodos rígidos
- **Desarrollo Método Rigidez Directa Estructuras Espaciales**
- **Distribución de Fuerzas Sísmicas**

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Introducción

- **Análisis Estructural**

Estructura real, modelo matemático, discretización, modelo de análisis.

Problemas en 1D, 2D y 3D.

- **Campo de aplicación de los métodos matriciales en AEI**

- **Desarrollo Método Rigidez Directa**

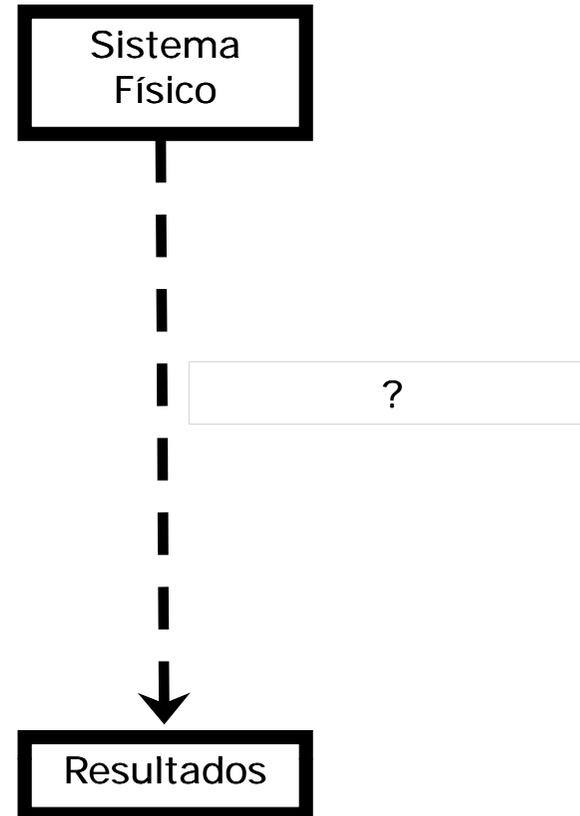
Utilizamos conceptos conocidos e introduciremos algunos nuevos

Aplicación MRD para solución de estructuras de barras dispuestas en 2D y 3D.

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Análisis Estructural

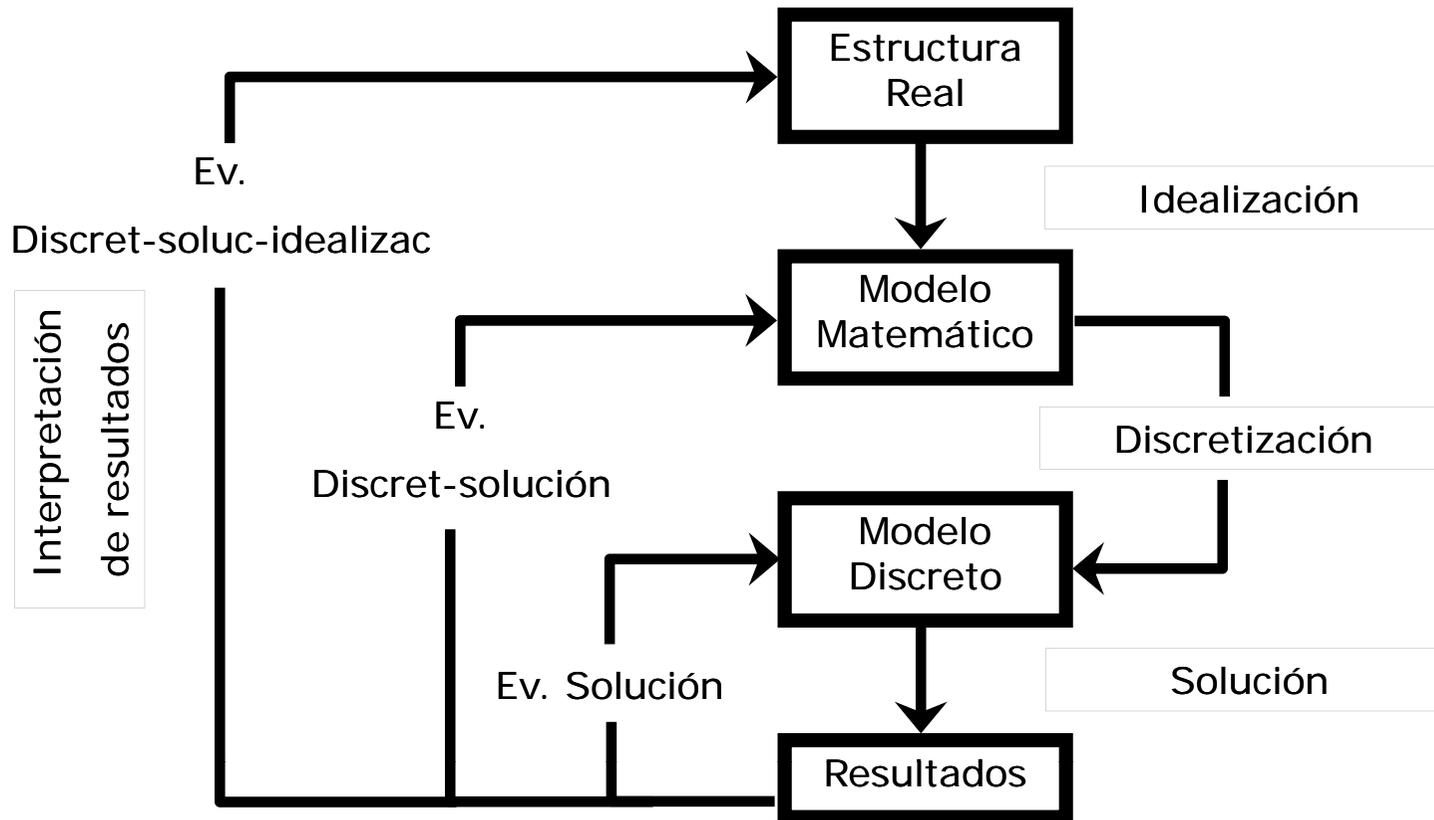
Proceso de Análisis



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Análisis Estructural

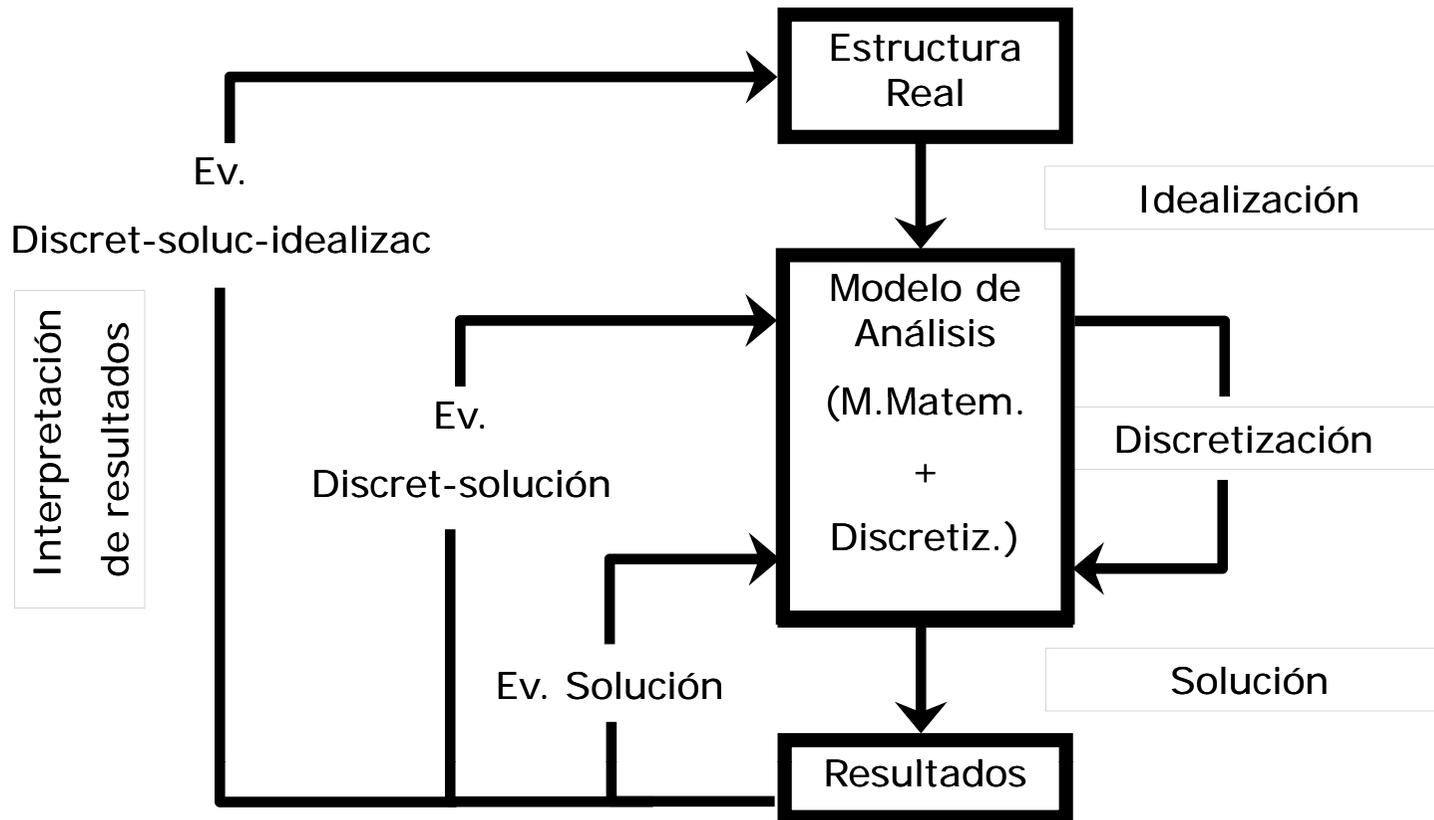
Proceso de Análisis



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Análisis Estructural

Proceso de Análisis



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

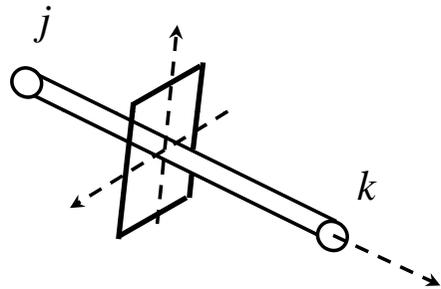
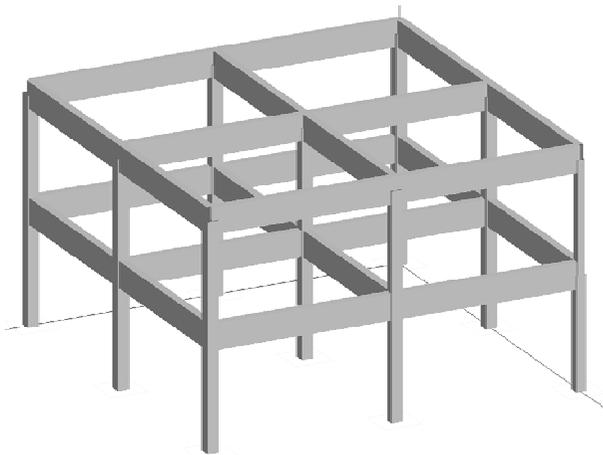
**ESTRUCTURA
(SISTEMA FÍSICO)**

**Indep. Tiempo
Mat. Elásticos
Mat. Homogéneos
Mat. Isótropos**

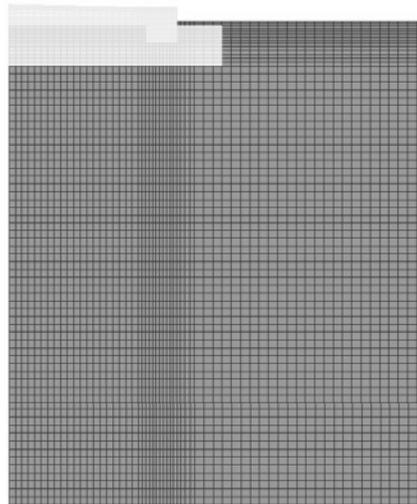
**Mat. Simples
Peq. Deformaciones
Peq. Desplazamientos**



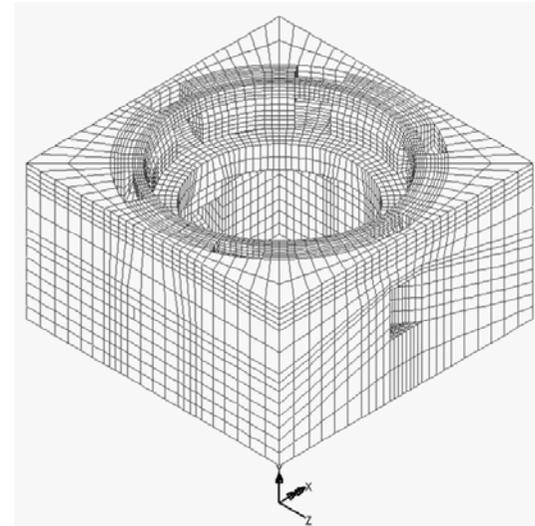
Reticulados planos y 3D
 Vigas continuas
 Pórticos planos y 3D

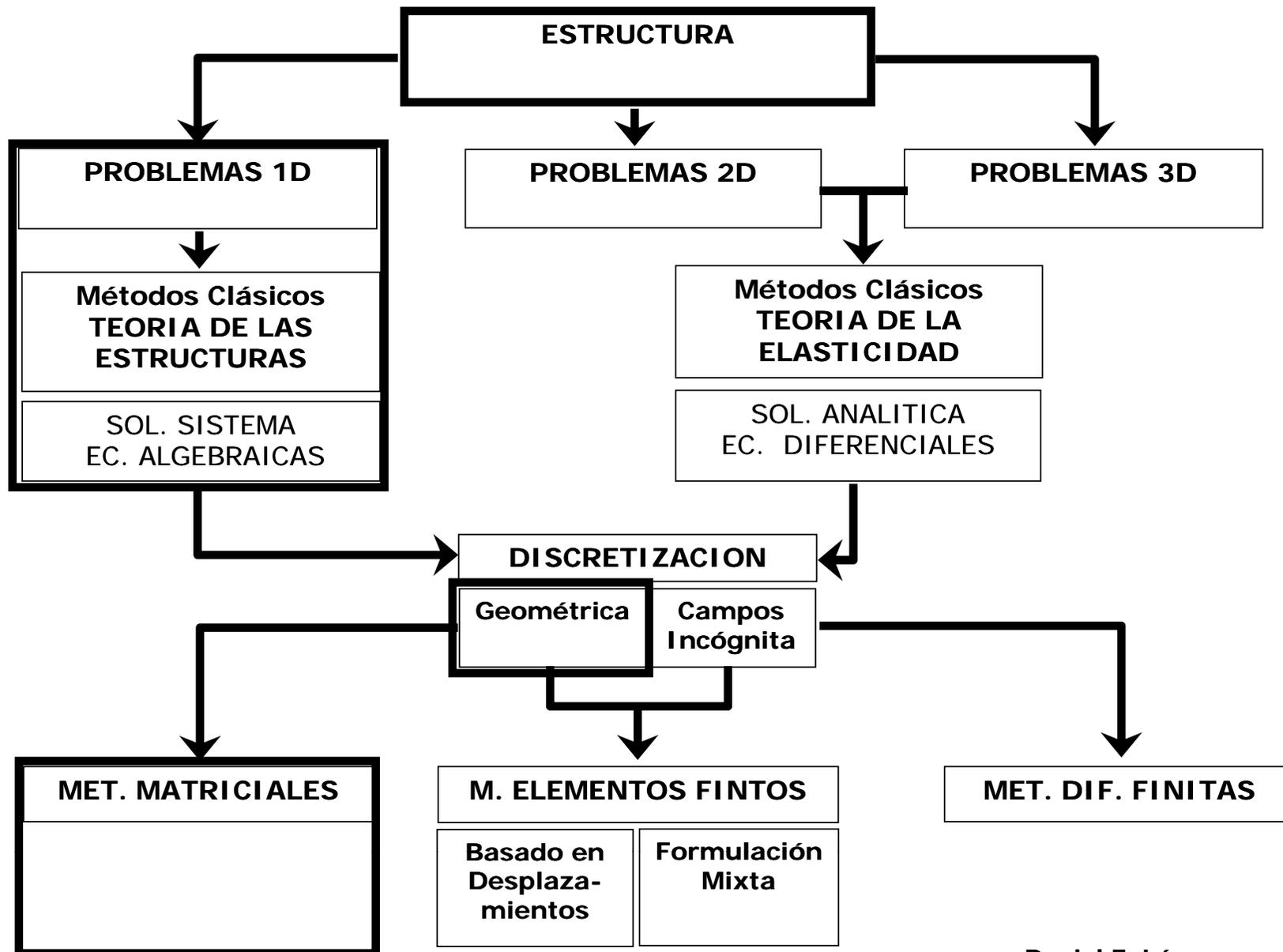


Est. Plano Tensiones
 Est. Plano Deformaciones.
 Axial Simetría.



Sólidos
 Fluidos (líquidos y gaseosos)
 Propagación Ondas





Daniel E. López
 Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Métodos Matriciales

Introducción

- Los métodos matriciales tienen su origen en la década de 1940. Levy (1947) publica el método de la Flexibilidad o Fuerzas.
- Turner, Clough y Martin (1956) publican el método de la Rigidez o Desplazamientos
- Las ideas propuestas y el desarrollo en informática provocan un gran avance en el ámbito del análisis de estructuras de barras.
- En nuestros días se considera un tema cerrado desde el punto de vista de la investigación.

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Métodos Matriciales

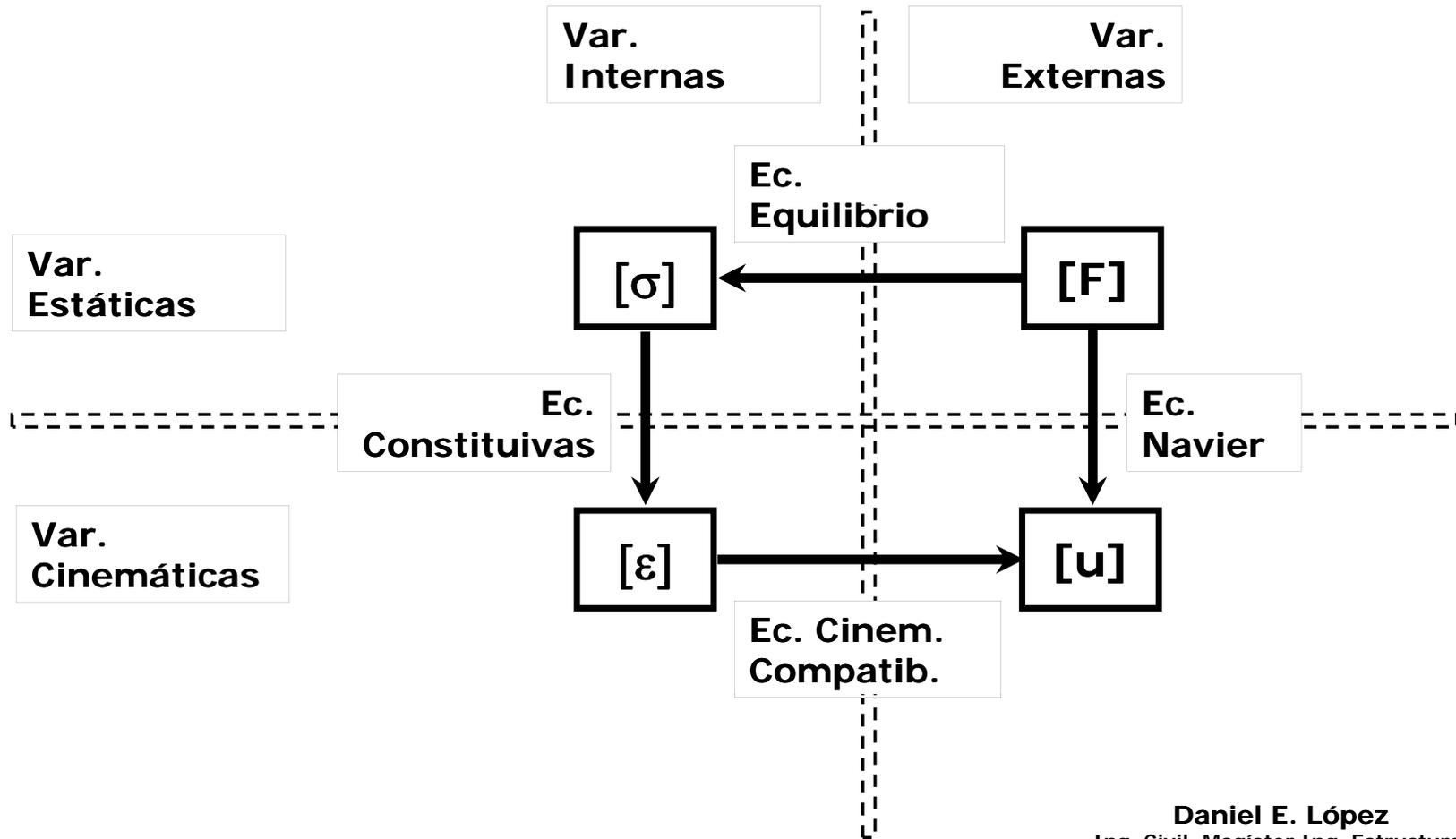
Introducción

- Los métodos matriciales, entre ellos el de la Rigidez Directa, consisten en reemplazar la estructura real por un modelo de análisis discreto, constituido por elementos de propiedades conocidas que pueden ser resumidas en forma de matrices.
- Luego las propiedades de toda la estructura se resumen en una única matriz por ensamblaje de las matrices elementales.
- Para obtener el campo de corrimientos incógnita se resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas.
- Finalmente conocidos los corrimientos se pueden calcular esfuerzos internos, reacciones y otras variables de interés.

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Ppio. de Contragradiencia o D.E.C.

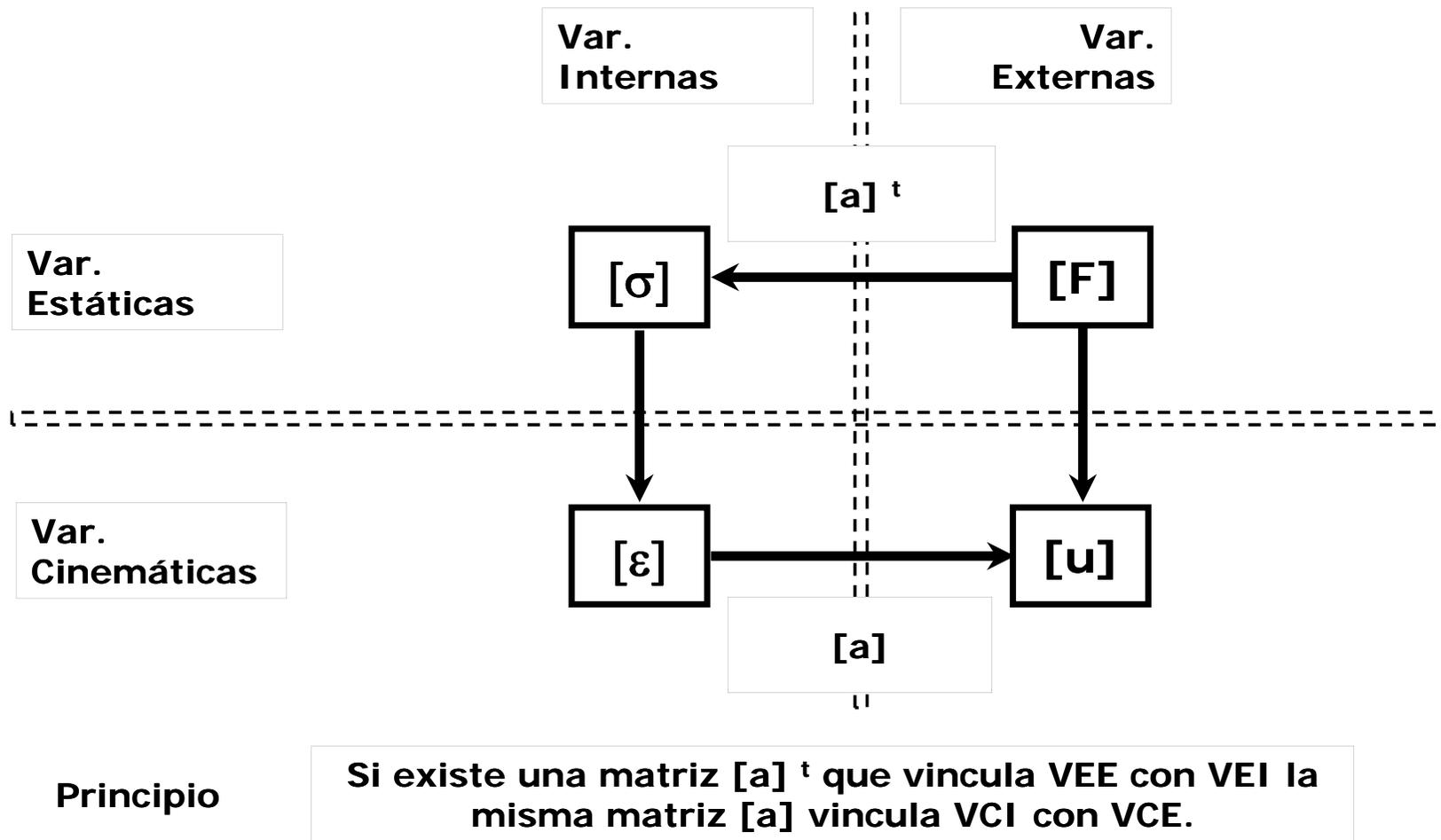
Introducción



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

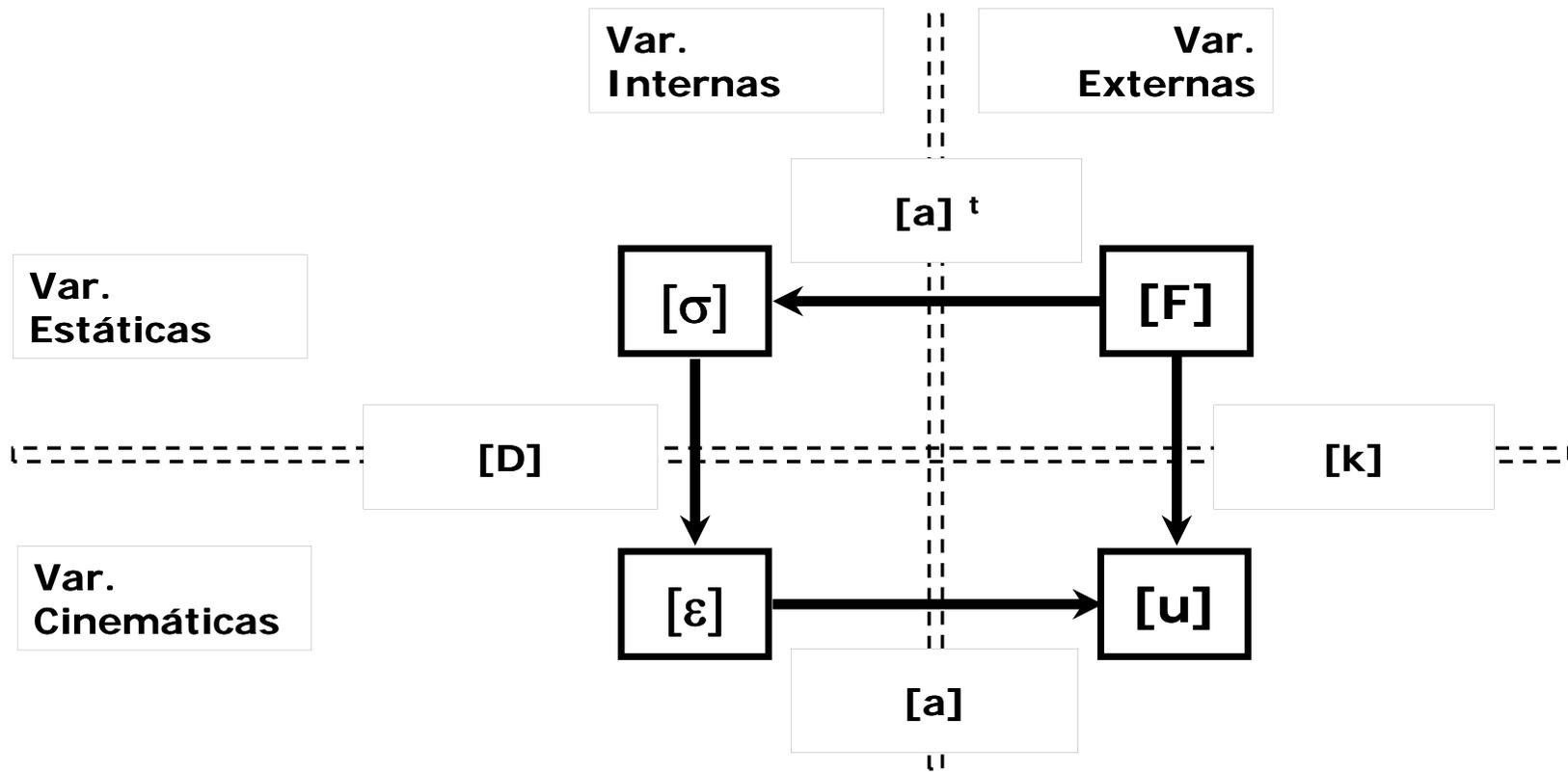
Ppio. de Contragradiencia o D.E.C.

Enunciado



Ppio. de Contragradiencia o D.E.C.

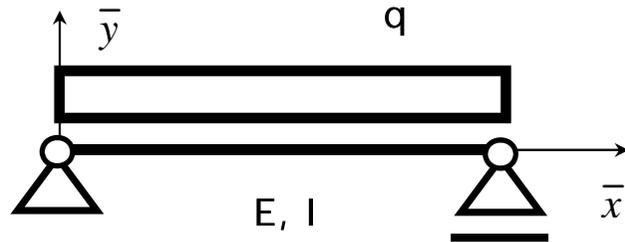
Aplicación



$$[F] = [a]^t [\sigma] \quad [\sigma] = [D] [\varepsilon] \quad [\varepsilon] = [a] [u] \quad [F] = [a]^t [D] [a] [u] \quad [k] = [a]^t [D] [a]$$

Ppio. de Contragradiencia o D.E.C.

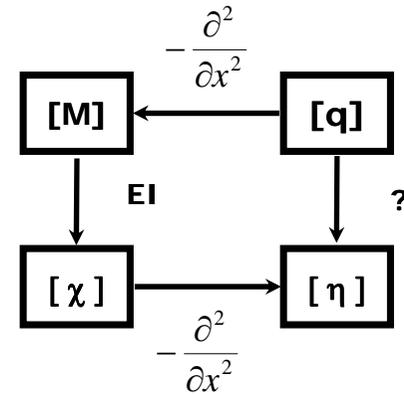
Ejemplo



$$[q] = [a]^t [M]$$

$$[M] = [EI] [\chi]$$

$$[\chi] = [a] [\eta]$$



$$q = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} M$$

$$q = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \chi$$

$$M = EI \chi$$

$$q = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$$

$$\chi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$$

$$q = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \eta$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Hipótesis

- Trabajamos con Pequeñas Deformaciones y Pequeños Desplazamientos.

Ecuaciones Cinemáticas o Compatibilidad son Lineales

Existe Linealidad Geométrica

- Trabajamos en el ámbito de la Ley de Hooke.

Ecuaciones Constitutivas son Lineales

Existe Linealidad Mecánica

- Las secciones planas y perpendiculares al eje de la barra antes de la deformación permanecen planas y perpendiculares al eje de la barra deformada.

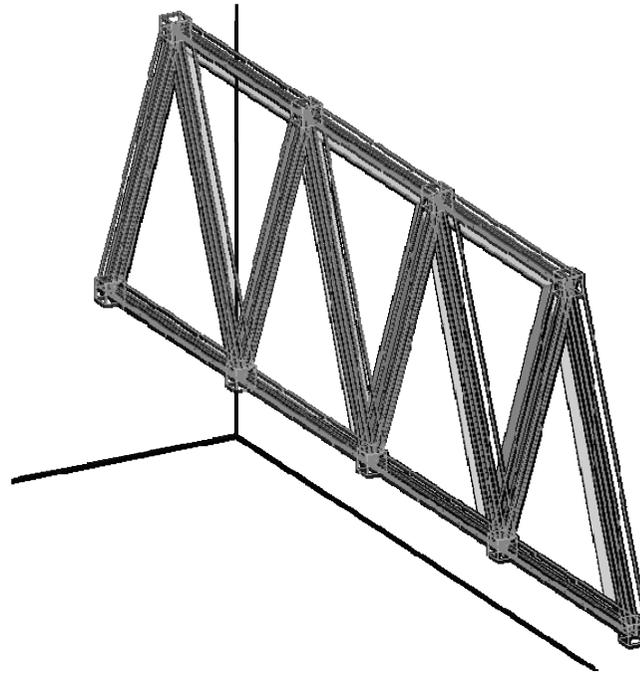
Elementos de Euler-Bernoulli

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Discretización

- Las estructuras de barras están compuestas por nodos y elementos de barra.
- Los nodos constituyen puntos característicos de las estructuras.



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Discretización

- Las estructuras de barras están compuestas por nodos y elementos de barra.
- Los nodos constituyen puntos característicos de las estructuras.
- Los elementos de barra poseen una dimensión preponderante frente a las otras dos. Su posición coincide con el eje definido por el baricentro geométrico de las secciones transversales.
- El campo incógnita está constituido por desplazamientos nodales.
- La solución se expresa a través de las variables nodales.
- Las variables nodales están constituidas por desplazamientos y fuerzas.
- Las variables de barra son esfuerzos internos y deformaciones.

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Pasos del Método

- Identificación estructural
- Determinación de la Matriz de Rigidez de Barra
 - Coordenadas Locales
 - Coordenadas Globales
- Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global de la Estructura
- Ensamblaje del Vector de Cargas
- Introducción de las Condiciones de Contorno
- Solución del Sistema de Ecuaciones (obtención de corrimientos)
- Cálculo de Reacciones
- Determinación de Esfuerzos Característicos y Deformaciones

Método de la Rigidez Directa

Identificación Estructural

- Identificación de nodos y elementos del modelo de análisis.
- Definición de Sistemas de Coordenadas Locales, uno por barra.
- Definición del Sistema de Coordenadas Global, uno para toda la estruct.
- Identificación de los grados de libertad de la estructura.

Grados de Libertad

Conjunto de corrimientos linealmente independientes necesarios para definir en forma completa la configuración deformada de la estructura.

Estructuras reticuladas planas: $GL = 2 n$

Estructuras reticuladas 3D: $GL = 3 n$

Estructuras pórticos planos: $GL = 3 n$

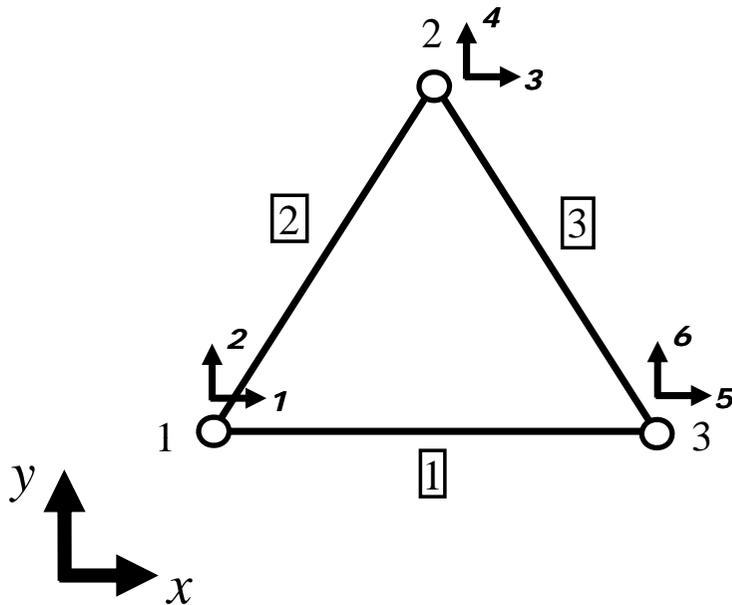
Estructuras pórticos 3D: $GL = 6 n$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Identificación Estructural

- Identificación de nodos y elementos del modelo de análisis
- Definición de Sistemas de Coordenadas Locales, uno por barra.
- Definición del Sistema de Coordenadas Global, uno para toda la estruct.
- Identificación de los grados de libertad de la estructura.
- Definición de Conectividades



Barra	Nodos	
	j	k
1	1	3
2	1	2

Método de la Rigidez Directa

Convención de Signos

Cantidades de Barras

- Estruct. de Nodos Articulados:

Esfuerzos Tracción (+)

- Estruct. de Nodos Rígidos 2D y 3D

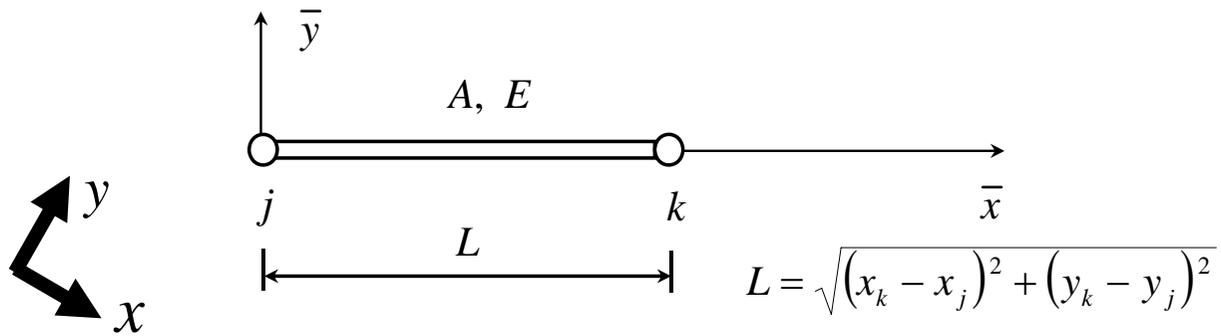
Esfuerzos Tracción (+), Momentos Mano derecha (+)

Cantidades Nodales

- Fuerzas (+) : dirección y sentido coincide con la del semieje global (+)
- Corrimientos Lineales (+) dirección y sentido coincide con la del semieje global (+)
- Corrimientos Angulares (giros) (+) cuando el vector giro (perp. al plano del giro) coincide con el semieje global (+)

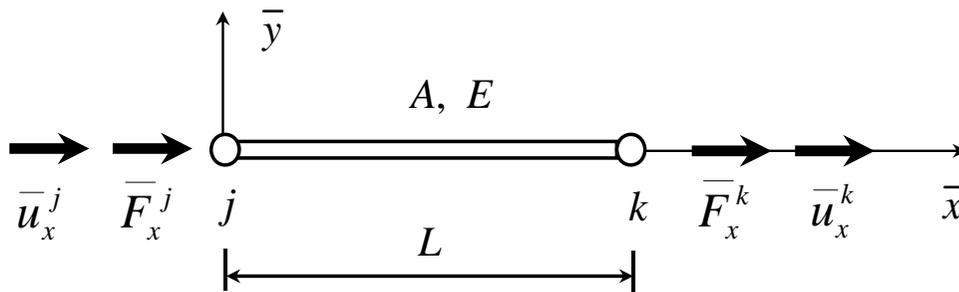
Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



- **Ec. Constitutivas** (dirección \bar{x})

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{\bar{F}_k}{A} = E \frac{\bar{u}_k - \bar{u}_j}{L}$$

$$\bar{F}_k = -\frac{AE}{L} (\bar{u}_j - \bar{u}_k)$$

- **Equilibrio Local** (dirección \bar{x})

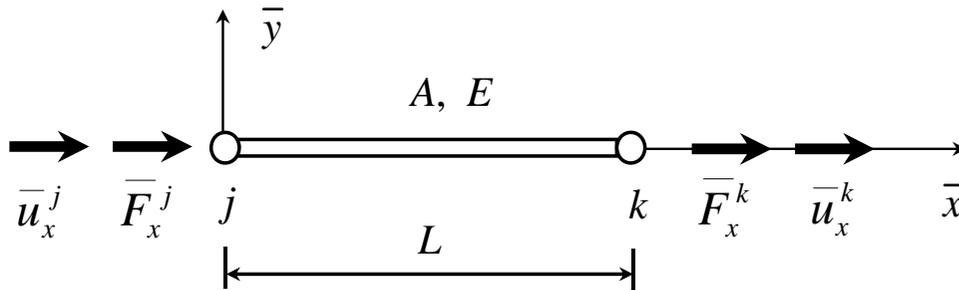
$$\bar{F}_k + \bar{F}_j = 0$$

$$\bar{F}_j = -\bar{F}_k$$

$$\bar{F}_j = \frac{AE}{L} (\bar{u}_j - \bar{u}_k)$$

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



- Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_x^j \\ \bar{F}_x^k \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_x^k \end{bmatrix}$$

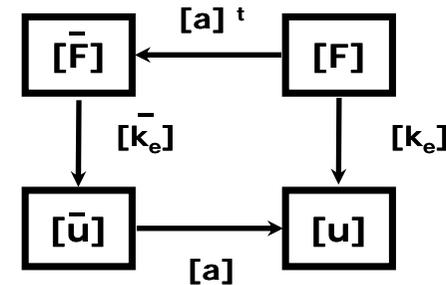
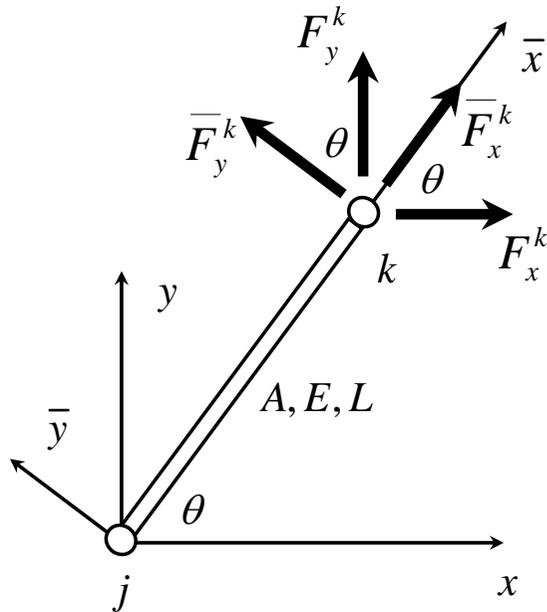
- Extendida a las dos direcciones locales

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_x^j \\ \bar{F}_y^j \\ \bar{F}_x^k \\ \bar{F}_y^k \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [\bar{u}]$$

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales



- **Ec. Equilibrio** (nodo k)

$$F_x^k = \bar{F}_x^k \cos \theta - \bar{F}_y^k \text{sen} \theta$$

$$F_y^k = \bar{F}_x^k \text{sen} \theta + \bar{F}_y^k \cos \theta$$

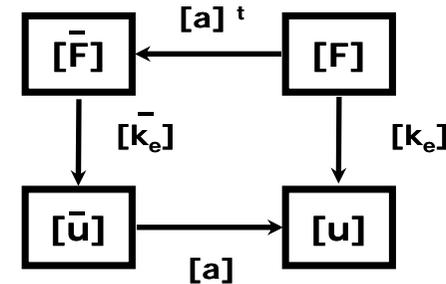
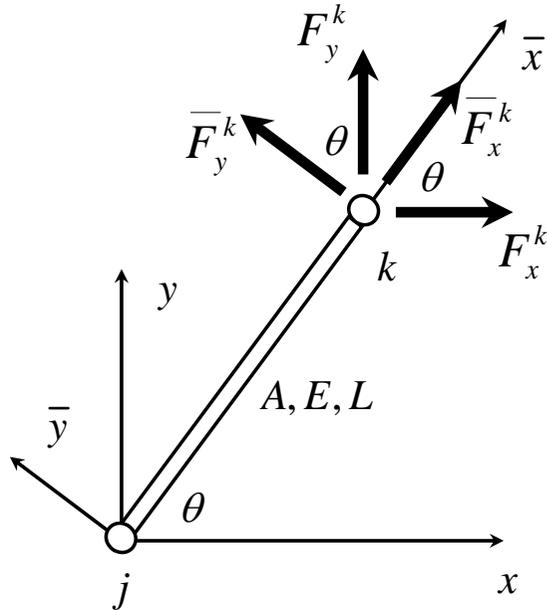
$$\begin{bmatrix} F_x^k \\ F_y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_x^k \\ \bar{F}_y^k \end{bmatrix}$$

Daniel E. López

Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales



- Extendida a los dos Nodos

$$\begin{bmatrix} F_x^j \\ F_y^j \\ F_x^k \\ F_y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_x^j \\ \bar{F}_y^j \\ \bar{F}_x^k \\ \bar{F}_y^k \end{bmatrix}$$

$$[F] = [a]^t [\bar{F}]$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

- Ec. Cinemáticas

$$[\bar{u}] = [a] [u]$$

- Reemplazando $[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [\bar{u}] \quad [F] = [a]^t [\bar{F}]$

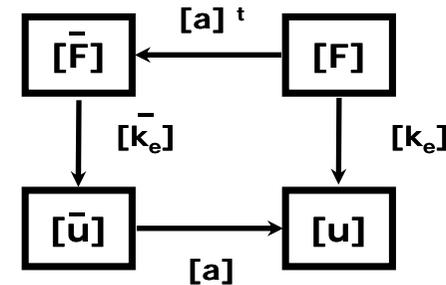
$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [\bar{u}]$$

- Reemplazando $[\bar{u}] = [a] [u]$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[F] = [k_e] [u]$$

$$[k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$

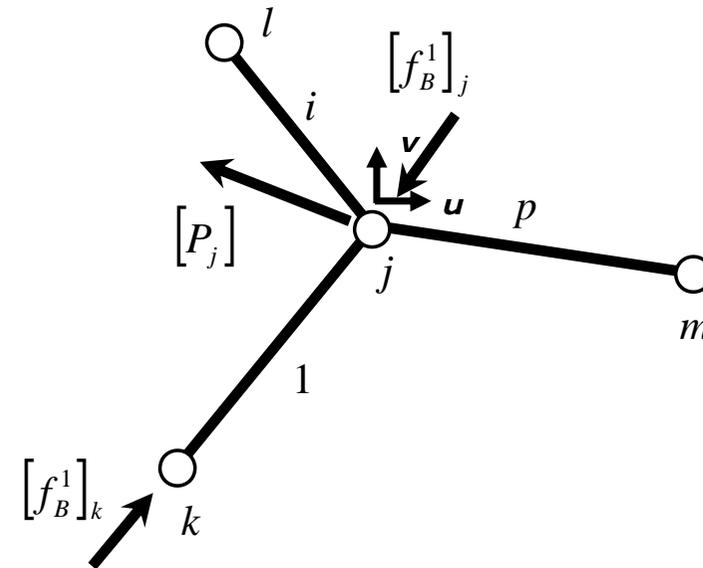
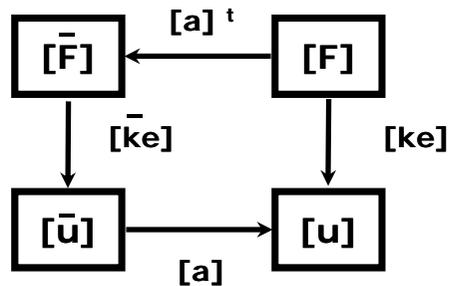


Método de la Rigidez Directa

Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

- Condición de Equilibrio

$$[P_j] = \sum_{i=1}^p [F_j^i]$$



$$\begin{bmatrix} [F_j] \\ [F_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^1] & [k_{jk}^1] \\ [k_{kj}^1] & [k_{kk}^1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_j] \\ [u_k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [f_B^1]_j \\ [f_B^1]_k \end{bmatrix}$$

$$[F_j] = [k_{jj}^1] [u_j] + [k_{jk}^1] [u_k] + [f_B^1]_j$$

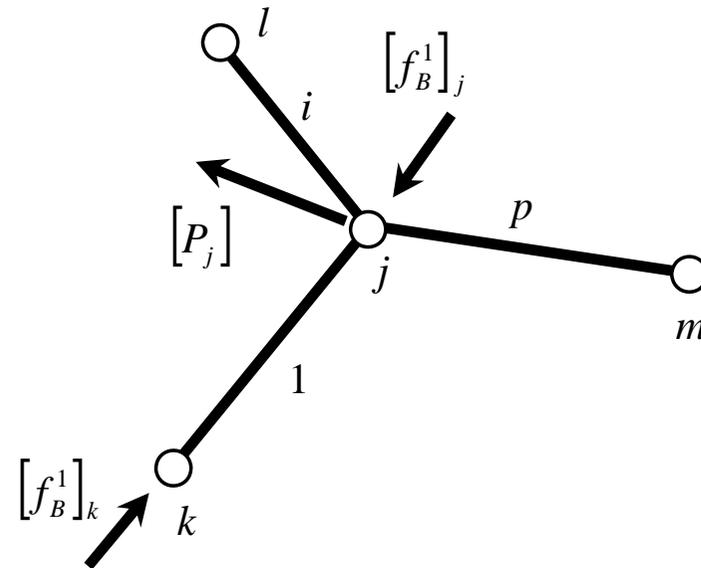
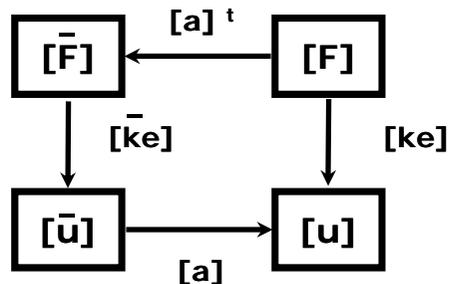
Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

- Condición de Equilibrio

$$[P_j] = \sum_{i=1}^p [F_j^i]$$



$$\begin{bmatrix} [F_j] \\ [F_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^1] & [k_{jk}^1] \\ [k_{kj}^1] & [k_{kk}^1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_j] \\ [u_k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [f_B^1]_j \\ [f_B^1]_k \end{bmatrix}$$

$$[P_j] - \{ [f_B^1]_j + \dots + [f_B^i]_j + \dots + [f_B^p]_j \} = \{ [k_{jj}^1] + \dots + [k_{jj}^i] + \dots + [k_{jj}^p] \} [u_j] + [k_{jk}^1] [u_k] + \dots + [k_{jl}^i] [u_l] + \dots + [k_{jm}^p] [u_m]$$

$[K_{jj}]$

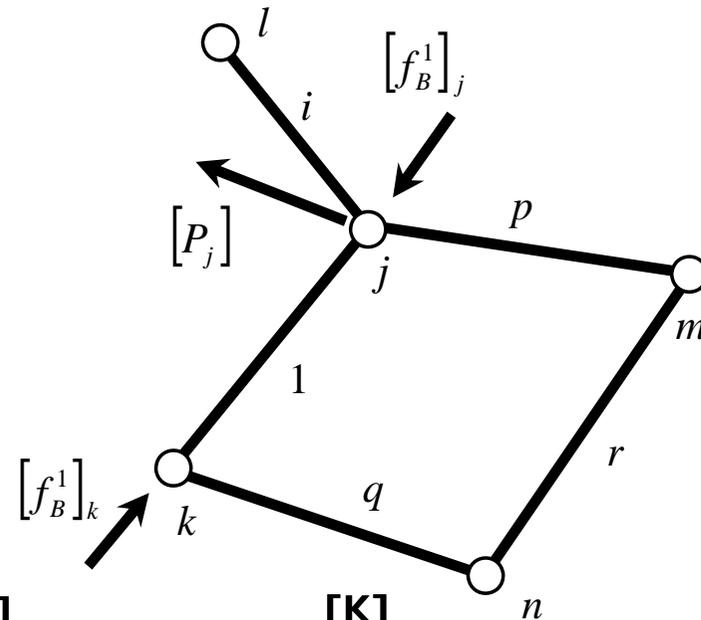
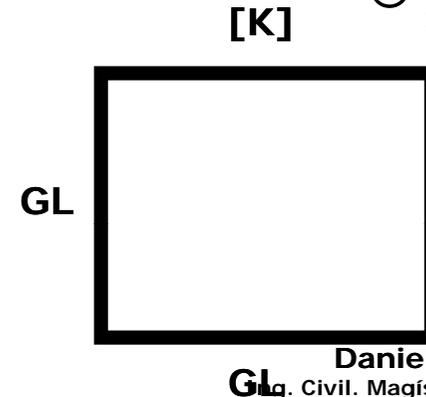
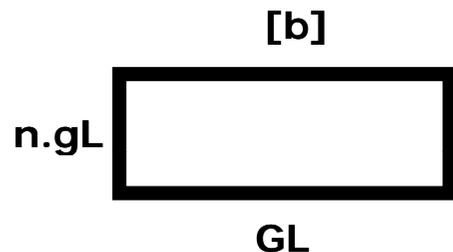
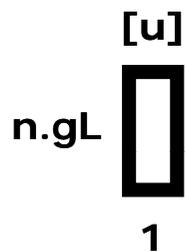
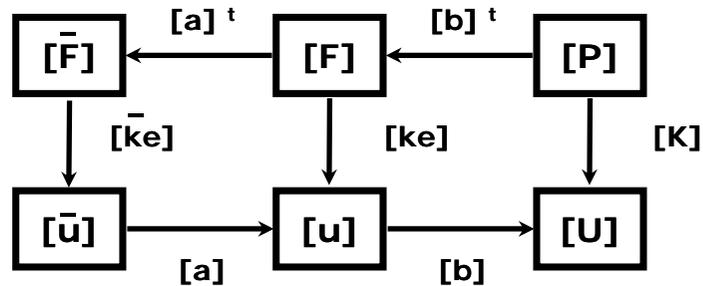
Daniel E. López
Ing. Civil. Magister Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

- Condición de Equilibrio

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_i] \\ [P_n] \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_i] \\ [u_n] \end{bmatrix}$$



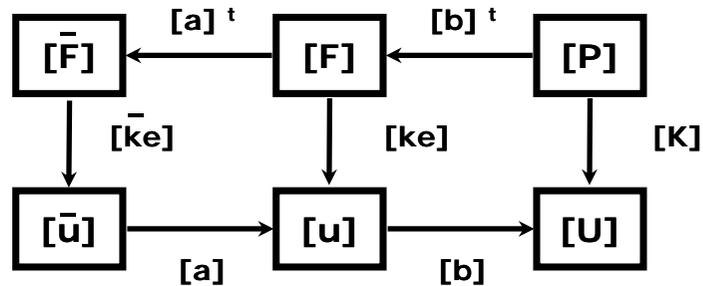
Daniel E. López
 Ing. Civil. Magister Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

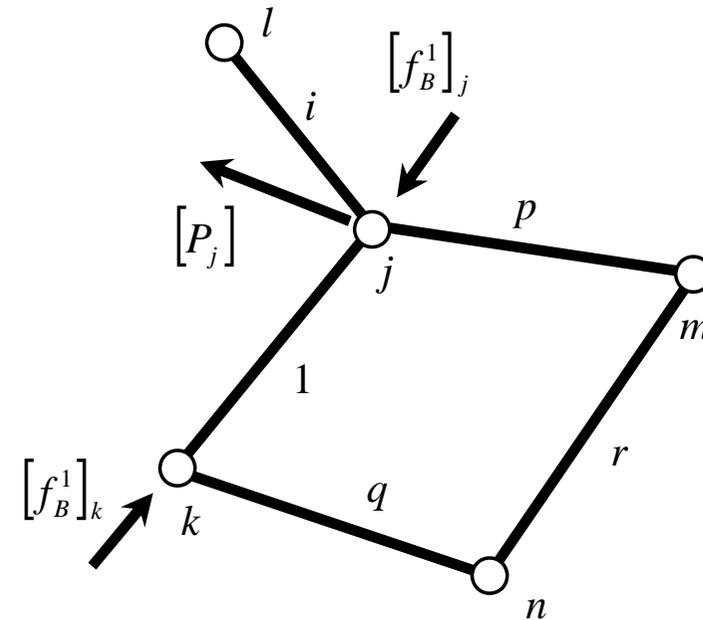
Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

- Condición de Equilibrio

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_i] \\ [P_n] \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_i] \\ [u_n] \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} [P_1] \\ \cdot \\ [P_j] \\ \cdot \\ [P_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \cdot & [K_{1j}] & \cdot & [K_{1n}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [K_{j1}] & \cdot & [K_{jj}] & \cdot & [K_{jn}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [K_{n1}] & \cdot & [K_{nj}] & \cdot & [K_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_1] \\ \cdot \\ [U_j] \\ \cdot \\ [U_n] \end{bmatrix}$$



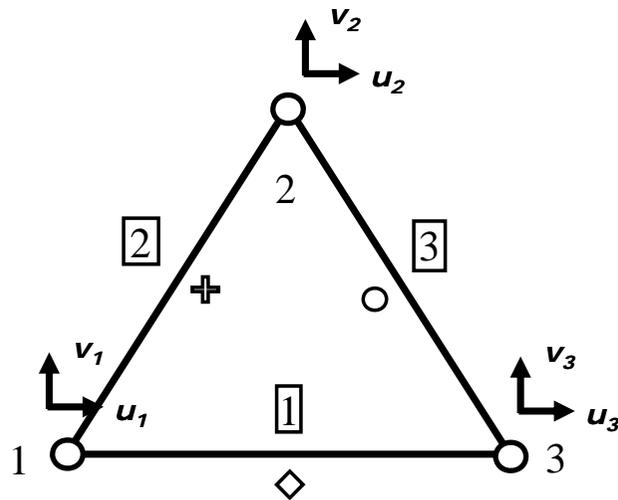
$$[P] = [K] [U]$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Esquemáticamente



K

		1		2		3	
		u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3
1	u_1	◇	◇	+	+	+	+
	v_1	◇	◇	+	+	◇	◇
2	u_2	+	+	○	○	+	+
	v_2	+	+	○	○	○	○
3	u_3	◇	◇	○	○	◇	◇
	v_3	◇	◇	○	○	◇	◇

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

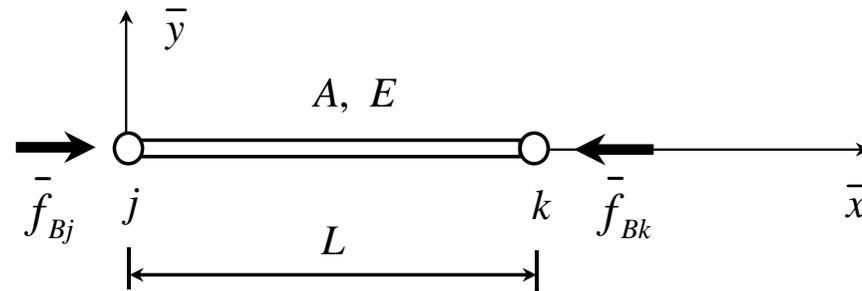
Método de la Rigidez Directa

Estructuras Autodeformadas

- Son aquellas sometidas a esfuerzos internos debidos al efecto de la temperatura o por razones constructivas.

$$\frac{\bar{f}_B}{A} = E\varepsilon \quad \varepsilon = \begin{cases} \alpha\Delta t \\ \frac{\Delta l}{L} \end{cases}$$

$$\bar{f}_B = EA\varepsilon$$



- **Coordenadas Locales**

$$[\bar{f}_B] = EA\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Coordenadas Globales**

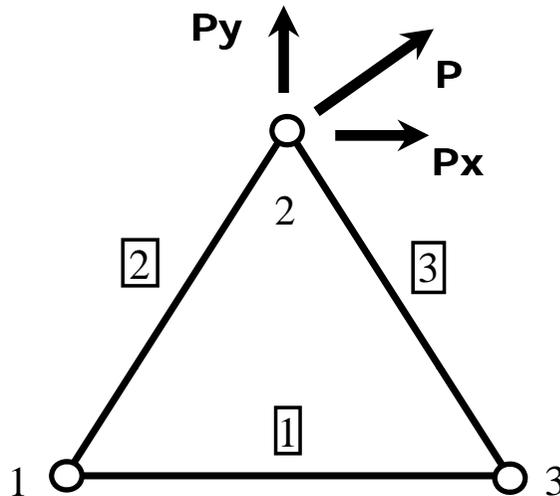
$$[f_B] = [a]^t [\bar{f}_B] = [a]^t EA\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = EA\varepsilon \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ -\cos\theta \\ -\text{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Ensamblaje Vector de Cargas

- Consiste en introducir las cargas aplicadas sobre los nodos de la estructura según los grados de libertad en el sistema de referencia global.
- Si las cargas tienen direcciones distintas de las del sistema global de referencia se debe aplicar la transformación de coordenadas $[a]^t$.
- Si las cargas están aplicadas sobre las barras se deben transformar en acciones nodales equivalentes.



$$[P] = \begin{matrix} P_x \\ P_y \\ \hline P_x \\ P_y \\ \hline P_x \\ P_y \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Condiciones de Contorno

- Las condiciones de contorno se expresan en términos de corrimientos nodales conocidos, pueden ser traslaciones y/o rotaciones. Por ello se las denomina condiciones de contorno cinemáticas.
- Si los valores prescritos de los corrimientos nodales son nulos, las condiciones de contorno se denominan HOMOGENEAS. Caso de apoyos
- Si los valores prescritos de los corrimientos nodales son distintos de cero, las condiciones de contorno se denominan INHOMOGENEAS. Caso de corrimientos impuestos

$$U = \begin{cases} \text{Conocidos} \begin{cases} = 0 & \text{Apoyos} & \text{Cond. Homogéneas} \\ \neq 0 & \text{Corrim. impuestos (desc. apoyos)} & \text{Cond. Inhomogéneas} \end{cases} \\ \text{Incognitas} \end{cases}$$

Corrimientos conocidos $[U_f]$

Corrimientos incognita $[U_l]$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Condiciones de Contorno

De la ecuación de equilibrio global

$$[P] = [K] [U]$$

$$\begin{bmatrix} [P_l] \\ [P_f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lf}] \\ [K_{fl}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_l] \\ [U_f] \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Incognitas} \\ \text{Apoyos o Corr. impuestos} \end{array}$$

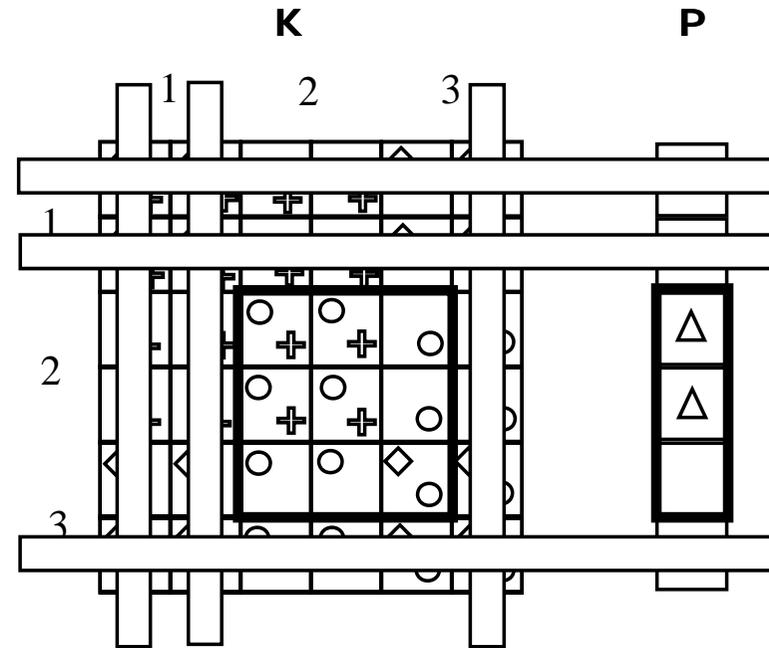
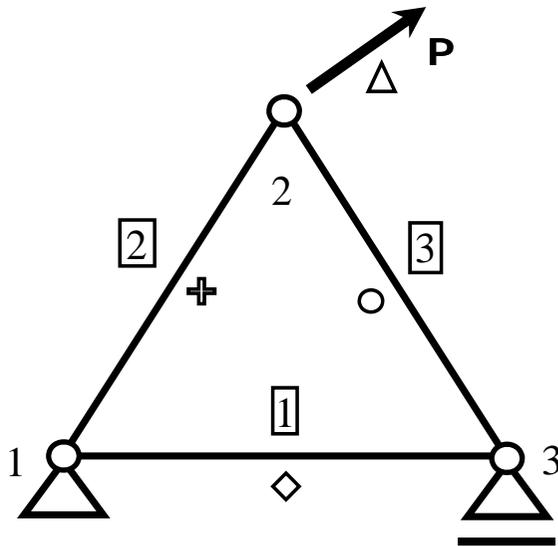
$$[P_l] = [K_{ll}] \cdot [U_l] + [K_{lf}] [U_f] \Rightarrow [U_l]$$

$$[P_f] = [K_{fl}] \cdot [U_l] + [K_{ff}] [U_f]$$

Método de la Rigidez Directa

Solución del Sistema

Esquemáticamente



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Cálculo de Reacciones

Con los corrimientos incógnita

$$[P_f] = [K_{fl}] \cdot [U_l] + [K_{ff}] \cdot [U_f]$$

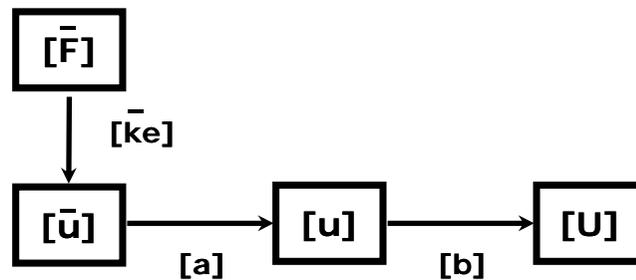
Otra forma

$$[P] = [K] [U]$$

Método de la Rigidez Directa

Cálculo de Esfuerzos Internos

D.E.C.



$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [\bar{u}]$$

$$[\bar{u}] = [a] \cdot [u]$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [a] \cdot [u]$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [a] \cdot [b] \cdot [U]$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Ejemplos

Método de la Rigidez Directa

Ejercicios

Método de la Rigidez Directa

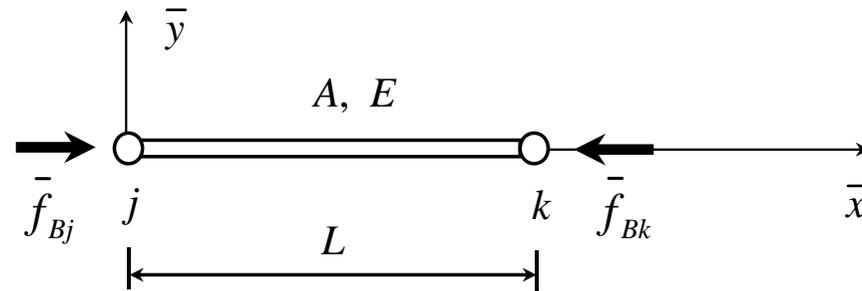
Método de la Rigidez Directa

Estructuras Autodeformadas

- Son aquellas sometidas a esfuerzos internos debidos al efecto de la temperatura o por razones constructivas.

$$\frac{\bar{f}_B}{A} = E\varepsilon \quad \varepsilon = \begin{cases} \alpha\Delta t \\ \frac{\Delta l}{L} \end{cases}$$

$$\bar{f}_B = EA\varepsilon$$



- Coordenadas Locales

$$[\bar{f}_B] = EA\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas Globales

$$[f_B] = [a]^t [\bar{f}_B] = [a]^t EA\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = EA\varepsilon \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ -\cos\theta \\ -\text{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

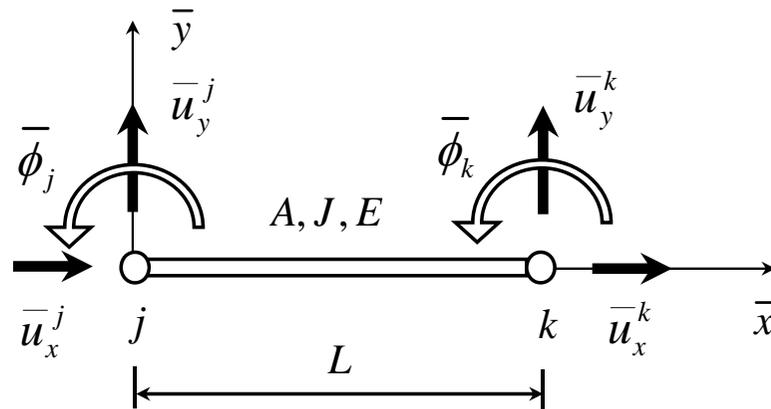
Método de la Rigidez Directa

Pasos del Método

- Identificación estructural
- Determinación de la Matriz de Rigidez de Barra
 - Coordenadas Locales
 - Coordenadas Globales
- Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global de la Estructura
- Ensamblaje del Vector de Cargas
- Introducción de las Condiciones de Contorno
- Solución del Sistema de Ecuaciones (obtención de corrimientos)
- Cálculo de Reacciones
- Determinación de Esfuerzos Característicos y Deformaciones

Método de la Rigidez Directa

Estructuras de Nodos Rígidos



No deducimos la matriz de rigidez en coordenadas locales

Utilizamos las expresiones conocidas

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

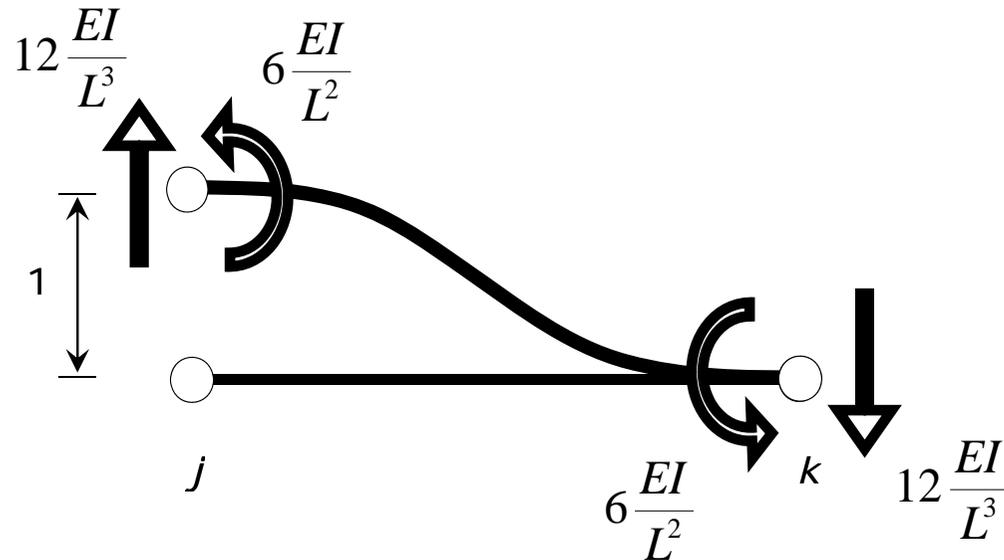
Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales

$$\left[\bar{k}_e \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{\phi}_j \\ \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \\ \bar{\phi}_k \end{matrix}$$

Daniel E. López
 Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Las componentes de corrimientos en el SL en función de las correspondientes al SG

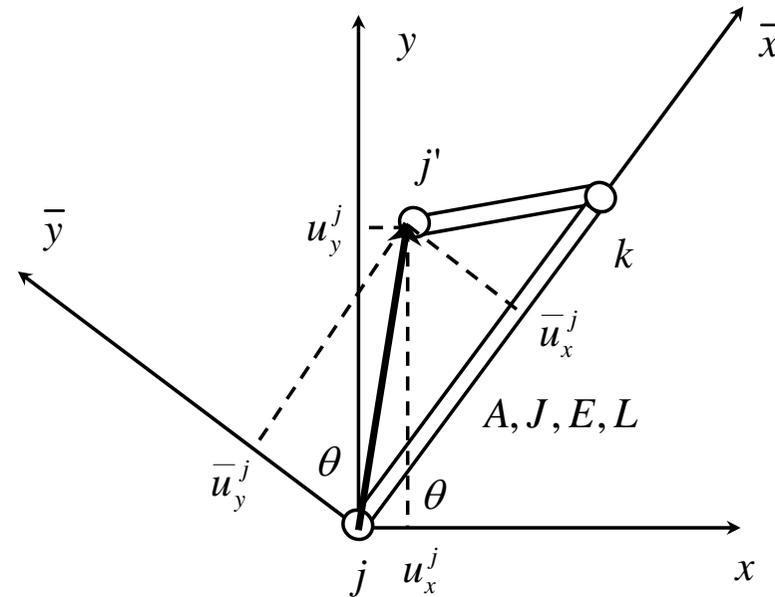
$$\bar{u}_x^j = u_x^j \cos \theta + u_y^j \text{sen} \theta$$

$$\bar{u}_y^j = u_x^j (-\text{sen} \theta) + u_y^j \cos \theta$$

$$\bar{\phi}_j = \phi_j$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{\phi}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x^j \\ u_y^j \\ \phi_x \end{bmatrix}$$



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

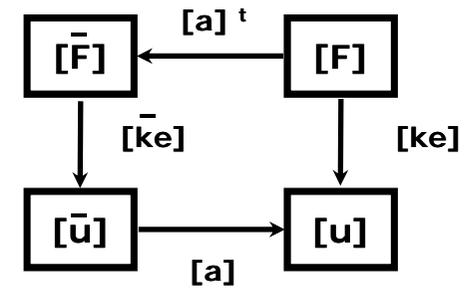
Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Ec. Cinemática

$$[\bar{u}] = [a] \cdot [u]$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Daniel E. López
 Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Aplicando las relaciones conocidas

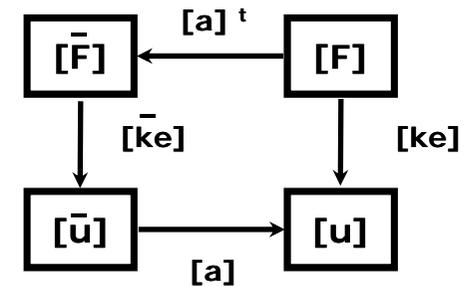
$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [\bar{u}] \quad [F] = [a]^t [\bar{F}] \quad [\bar{u}] = [a] \cdot [u]$$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [\bar{u}]$$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[F] = [k_e] [u]$$

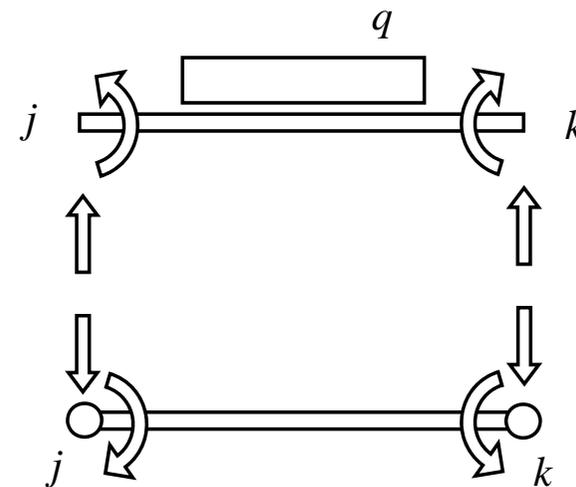
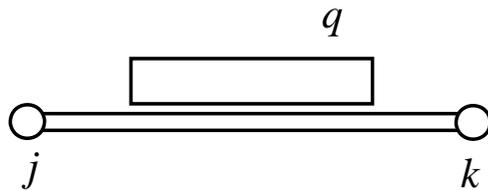
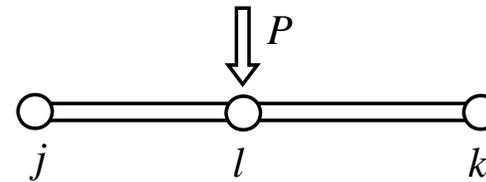
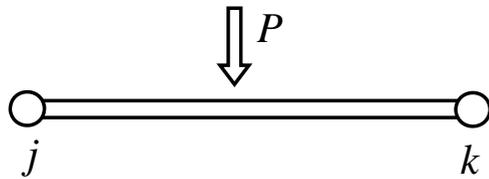
$$[k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$



Método de la Rigidez Directa

Casos Especiales

- Cargas sobre las barras



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

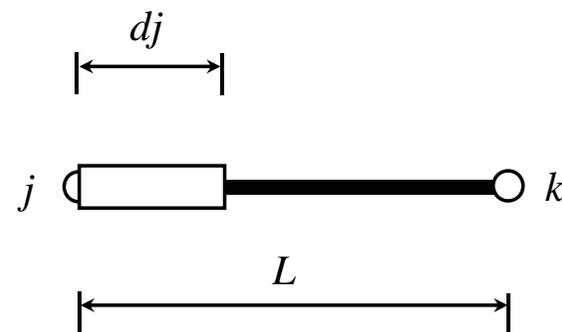
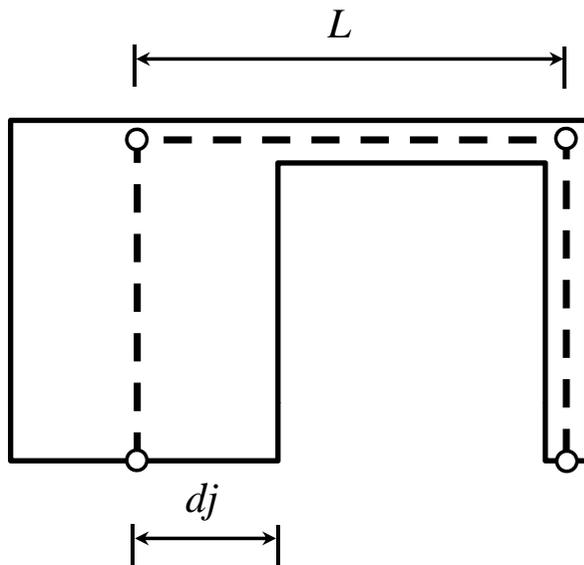
Método de la Rigidez Directa

Casos Especiales

- Barras con extremos infinitamente rígidos

En algunas estructuras aparecen barras que se encuentran adyacentes a otras con propiedades geométricas muy distintas.

En estos casos puede ser conveniente considerar los extremos de las barras como infinitamente rígidos.

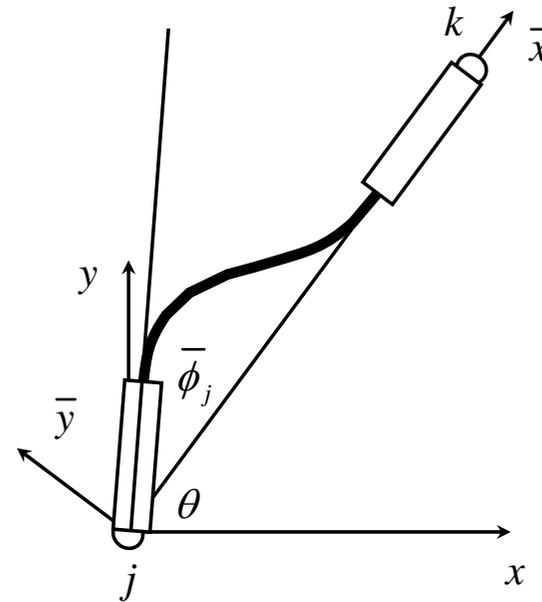
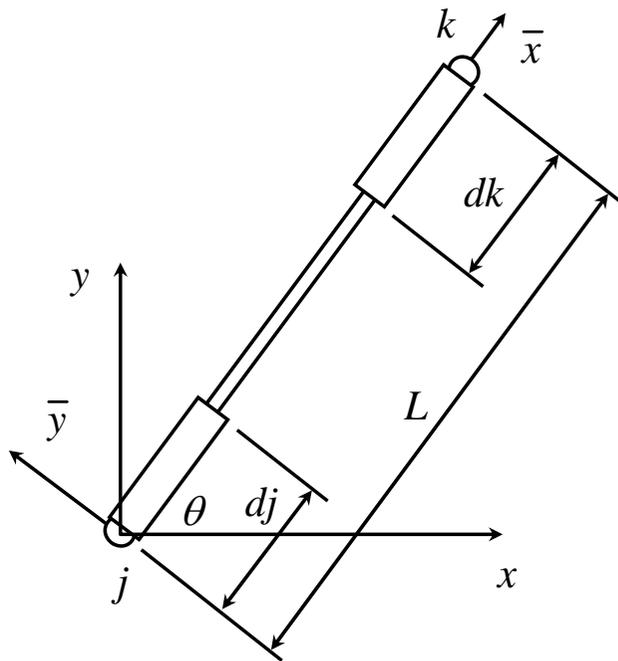


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Direçta

Casos Especiales

- Barras con extremos infinitamente rígidos

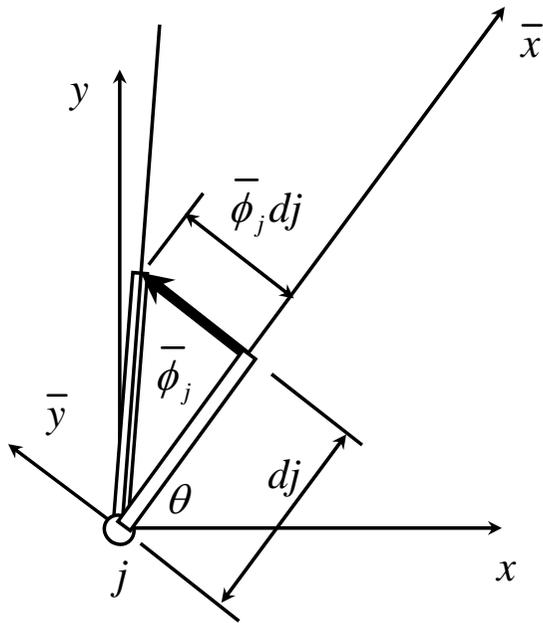


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Casos Especiales

- Barras con extremos infinitamente rígidos



$$\bar{u}_x^j = u_x^j \cos \theta + u_y^j \text{sen } \theta$$

$$\bar{u}_y^j = u_x^j (-\text{sen } \theta) + u_y^j \cos \theta + \bar{\phi}_j dj$$

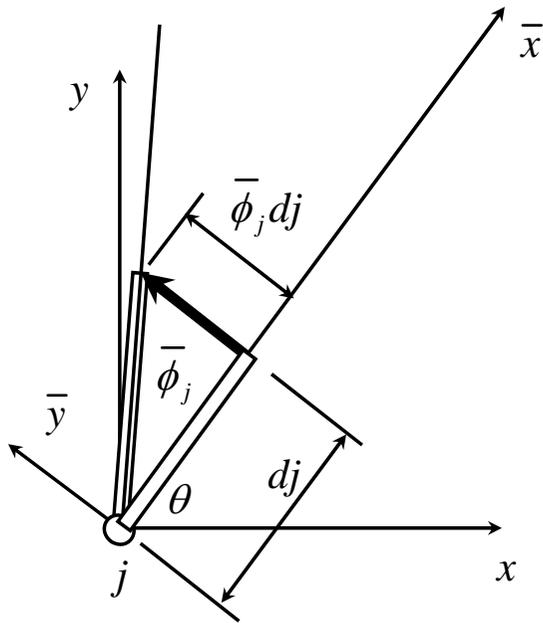
$$\bar{\phi}_j = \phi_j$$

$$[\bar{u}] = [a].[u]$$

Método de la Rigidez Directa

Casos Especiales

- Barras con extremos infinitamente rígidos



$$\bar{u}_x^j = u_x^j \cos \theta + u_y^j \text{sen } \theta$$

$$\bar{u}_y^j = u_x^j (-\text{sen } \theta) + u_y^j \cos \theta + \bar{\phi}_j dj$$

$$\bar{\phi}_j = \phi_j$$

$$[\bar{u}] = [a] \cdot [u]$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & dj & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & -dk \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez Directa

Casos Especiales

- Influencia de la Deformación por Corte

$$4\frac{EJ}{L} \Rightarrow 2\frac{EJ}{L} \left(\frac{2 + \beta}{1 + 2\beta} \right)$$

$$2\frac{EJ}{L} \Rightarrow 2\frac{EJ}{L} \left(\frac{1 - \beta}{1 + 2\beta} \right)$$

$$\beta = 6\chi \frac{EJ}{GAL^2}$$

Método de la Rigidez Directa

Propiedades Matriz de Rigidez

- Físicamente representa las fuerzas necesarias para crear un campo de desplazamientos específico.
- En virtud del Teorema de Maxwell-Betti, la matriz de rigidez es simétrica

$$K_{ij} = K_{ji}$$

- La matriz de rigidez es, además, positiva definida

Sea $[X]$ un autovector de $[A]$. $[A]$ es positiva definida si:

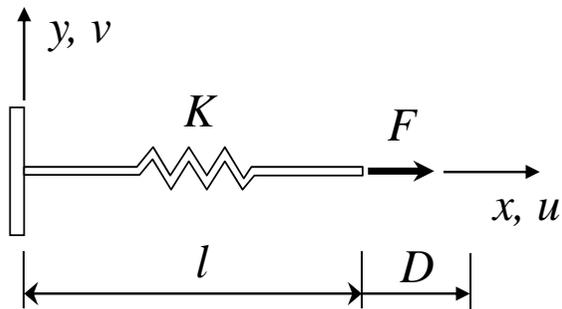
$$[X]^t \cdot [A] \cdot [X] > 0$$

Esta propiedad implica que si logramos el equilibrio del sistema este será estable.

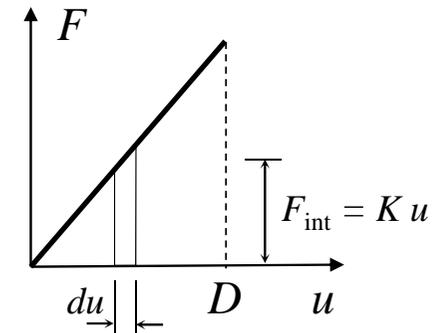
Método de la Rigidez Directa

Propiedades Matriz de Rigidez

Estructura



F vs. u



Energía Interna

$$U = \int_0^D F_{\text{int}} du = \int_0^D K u du$$

$$U = \frac{1}{2} K D^2 \quad U = \frac{1}{2} K u^2$$

Energía Externa

$$\Omega = \int_0^D F_{\text{ext}} du = \int_0^D F du$$

$$\Omega = F D \quad \Omega = P u$$

Daniel E. López

Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Propiedades Matriz de Rigidez

Potencial Total

$$\pi = \frac{1}{2}Ku^2 - Pu$$

Desp. de Equilibrio

$$D_{eq} = K^{-1}P$$

Condición de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{du} = Ku - P = 0$$

$$Ku - P = 0$$

$$(Ku - P)\delta D = 0 \quad \text{P.T.V.}$$

Condición de Estabilidad del Equilibrio

$$\frac{d^2\pi}{du^2} = K > 0$$

Método de la Rigidez Directa

Propiedades Matriz de Rigidez

- Error en la Solución

$$[K][U] = [F]$$

$$[K][U + \Delta U] = [F + \Delta F] \quad [K][\Delta U] = [\Delta F] \quad [\Delta U] = [K]^{-1} \cdot [\Delta F]$$

Desigualdad de Schwarz $\|K\| \cdot \|U\| \geq \|F\|$

$$\frac{1}{\|U\|} \leq \frac{\|K\|}{\|F\|}$$

$$\|\Delta U\| \leq \|K^{-1}\| \cdot \|\Delta F\|$$

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \leq \|K\| \|K^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|}$$

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \leq \text{Cond}(K) \cdot \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|}$$

Número de Condición $\text{Cond}(K) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Ejercicios

Método de la Rigidez Directa

Estructuras 3D

Valen las hipótesis introducidas para estructuras planas

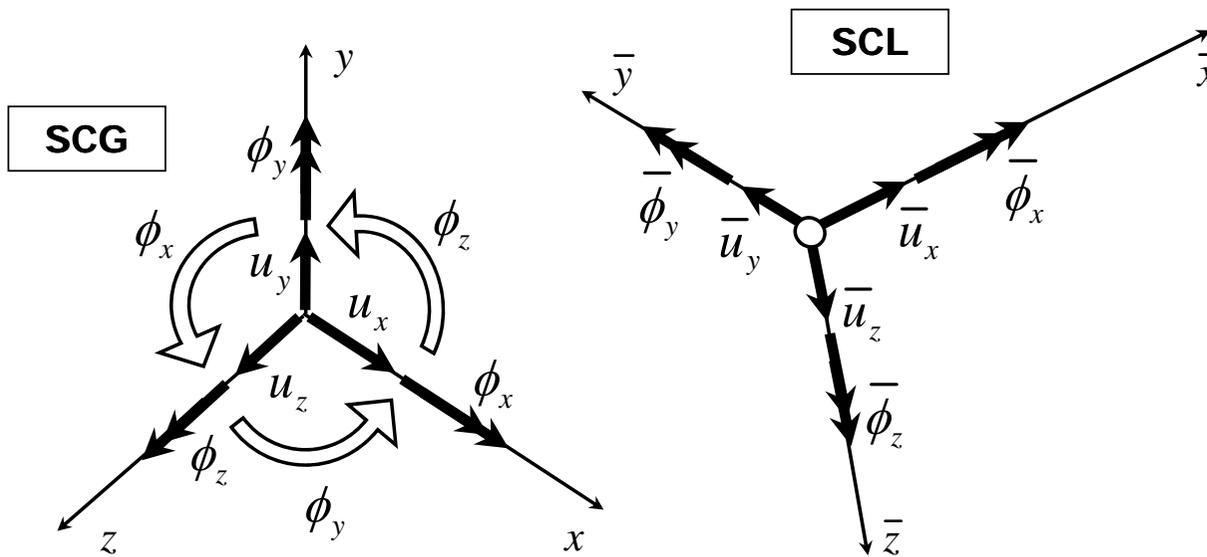
El método consta de los mismos pasos que en el caso de estructuras planas

Cada nodo en el espacio tiene 6 grados de libertad

Los giros positivos siguen la regla de la mano derecha

Método de la Rigidez Directa

Variables Cinemáticas Internas y Externas



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales

$$\left[\bar{k}_e \right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \bar{u}_x^j & \bar{u}_y^j & \bar{u}_z^j & \bar{\phi}_x^j & \bar{\phi}_y^j & \bar{\phi}_z^j \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} \\ 0 & 0 & 12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 \\ 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} \end{array} \right] \begin{array}{c} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{u}_z^j \\ \bar{\phi}_x^j \\ \bar{\phi}_y^j \\ \bar{\phi}_z^j \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} \\ 0 & 0 & -12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 \\ 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{u}_z^j \\ \bar{\phi}_x^j \\ \bar{\phi}_y^j \\ \bar{\phi}_z^j \\ \hline \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \\ \bar{u}_z^k \\ \bar{\phi}_x^k \\ \bar{\phi}_y^k \\ \bar{\phi}_z^k \end{array}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Ec. Cinemáticas $[\bar{u}] = [a] \cdot [u]$

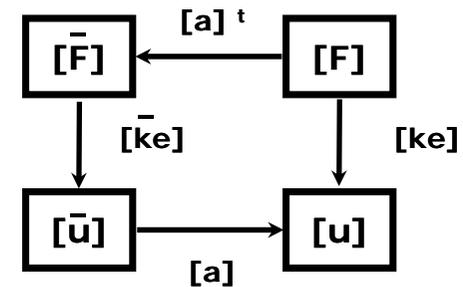
$$[\bar{u}] = [\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z \quad \bar{\phi}_x \quad \bar{\phi}_y \quad \bar{\phi}_z]^t$$

$$[u] = [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^t$$

$$[a] = \begin{bmatrix} L_j & 0 \\ 0 & L_k \end{bmatrix} \quad [L_j] = \begin{bmatrix} \lambda_j^u & 0 \\ 0 & \lambda_j^\phi \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_j^u] = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_j^\phi] = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix}$$



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Aplicando las relaciones conocidas

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [\bar{u}] \quad [F] = [a]^t [\bar{F}] \quad [\bar{u}] = [a] \cdot [u]$$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [\bar{u}] \quad [F] = [a]^t [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[F] = [k_e] [u] \quad [k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$

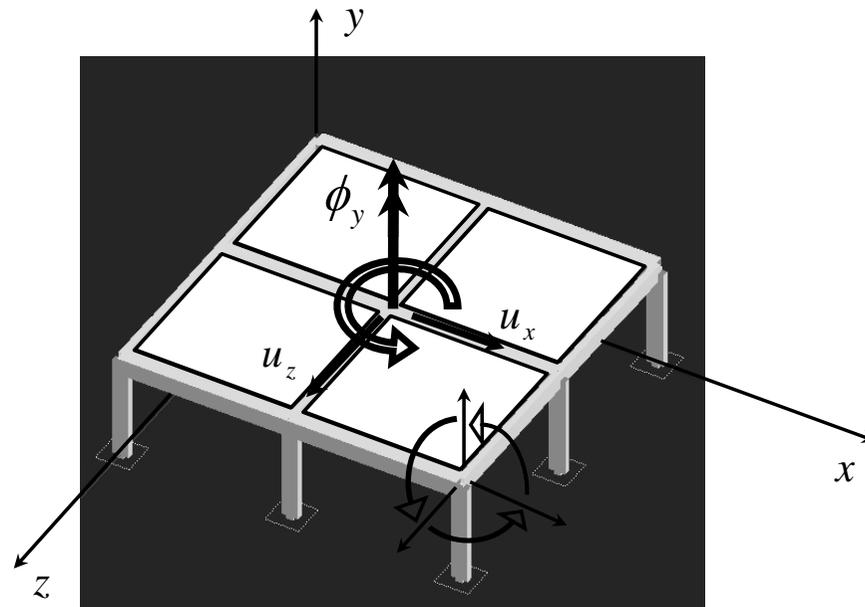
- **Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global de la Estructura**
- **Ensamblaje del Vector de Cargas**
- **Introducción de las Condiciones de Contorno**
- **Solución del Sistema de Ecuaciones (obtención de corrimientos)**
- **Cálculo de Reacciones**
- **Determinación de Deformaciones y Esfuerzos**

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Son estructuras donde la presencia de uno o mas elementos estructurales modifican las características cinemáticas del conjunto



- Todos los nodos conectados al diafragma poseen las mismas variables cinemáticas que ese diafragma en su propio plano

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- La presencia del diafragma en el sistema estructural provoca una disminución en el número total de grados de libertad del sistema
- El proceso de eliminación de los grados de libertad no deseados se denomina *Condensación Estática de la Matriz de Rigidez*

$$\begin{bmatrix} [F_l] \\ [F_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lr}] \\ [K_{rl}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_l] \\ [u_r] \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} [F_l] \\ [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lr}] \\ [K_{rl}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_l] \\ [u_r] \end{bmatrix}$$

$$[u_r] = -[K_{rr}]^{-1} \cdot [K_{rl}] \cdot [u_l]$$

$$\left\{ [K_{ll}] - [K_{lr}] \cdot [K_{rr}]^{-1} \cdot [K_{rl}] \right\} \cdot [u_l] = [F_l] \qquad [K^D][u_l] = [F_l]$$

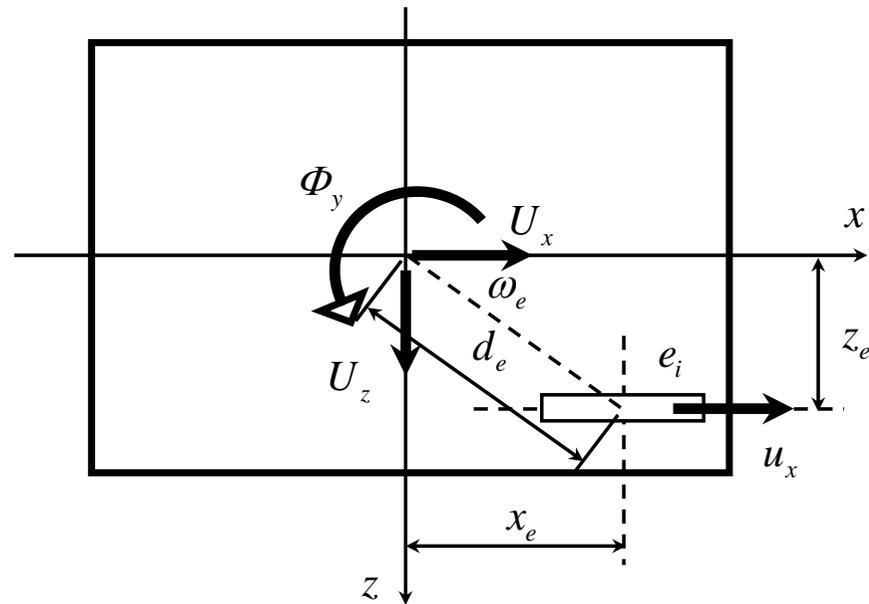
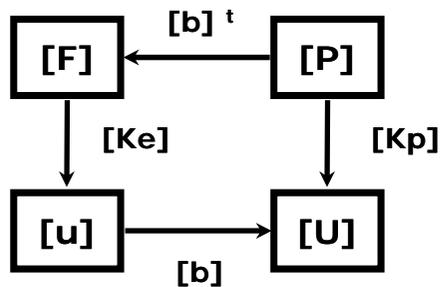
$$[K^D] = [K_{ll}] - [K_{lr}] \cdot [K_{rr}]^{-1} \cdot [K_{rl}]$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Una forma de considerar la presencia de diafragmas infinitamente rígidos es a través de la utilización de la Matriz de Rigidez Pseudotrídimensional.

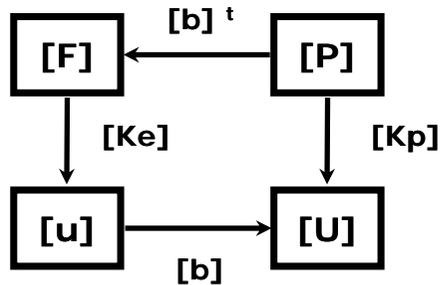


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

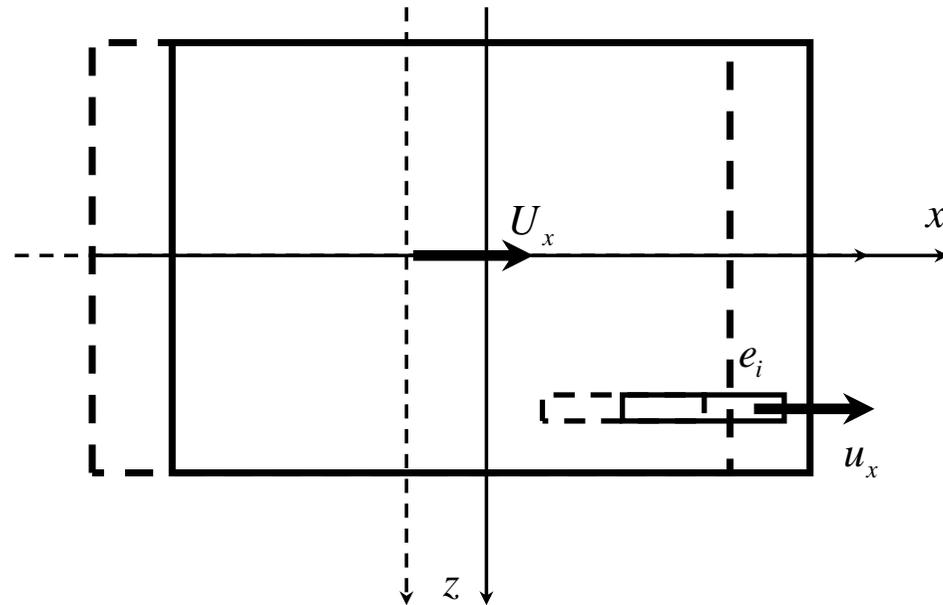
Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Ec. Cinemáticas



$$u_x = U_x$$

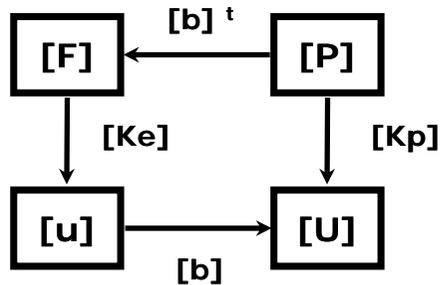


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

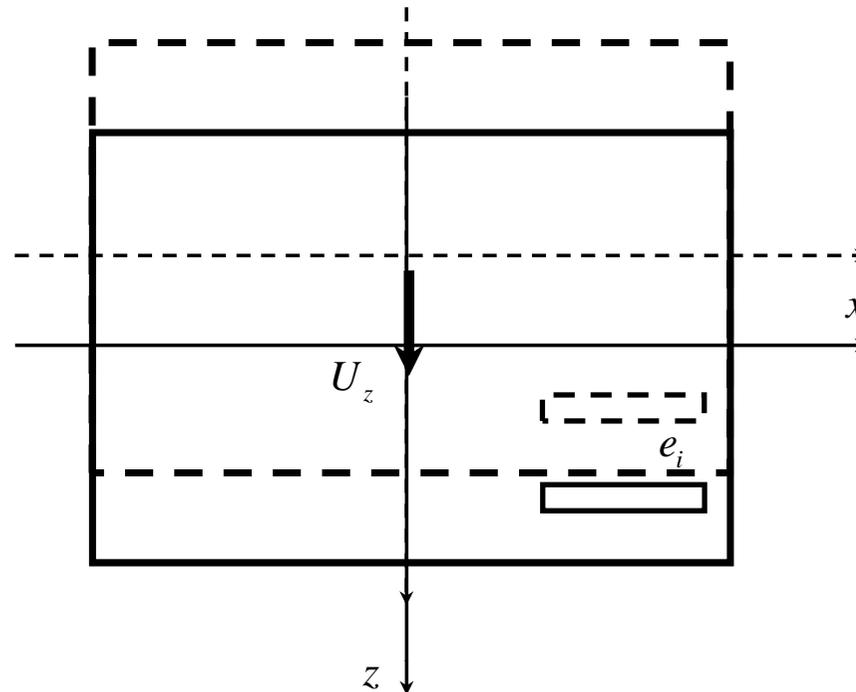
Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Ec. Cinemáticas



$$u_x = 0$$

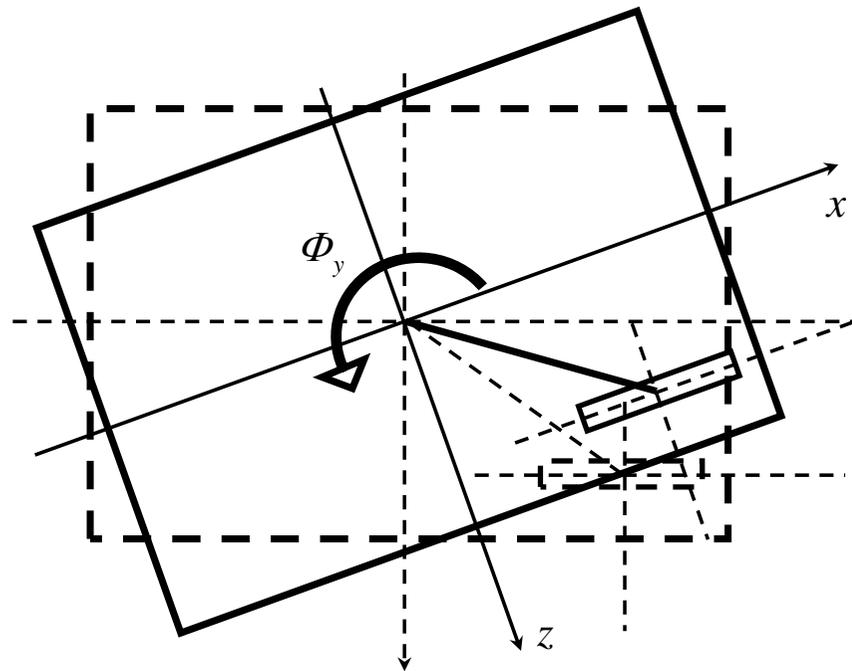
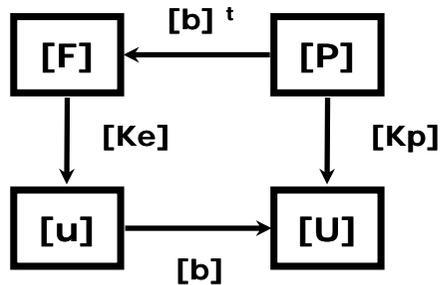


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Ec. Cinemáticas

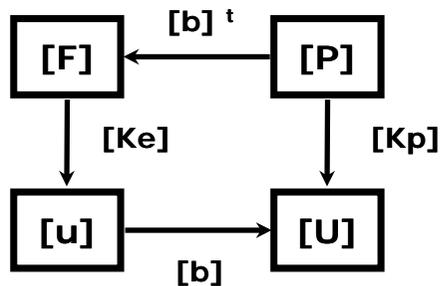


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

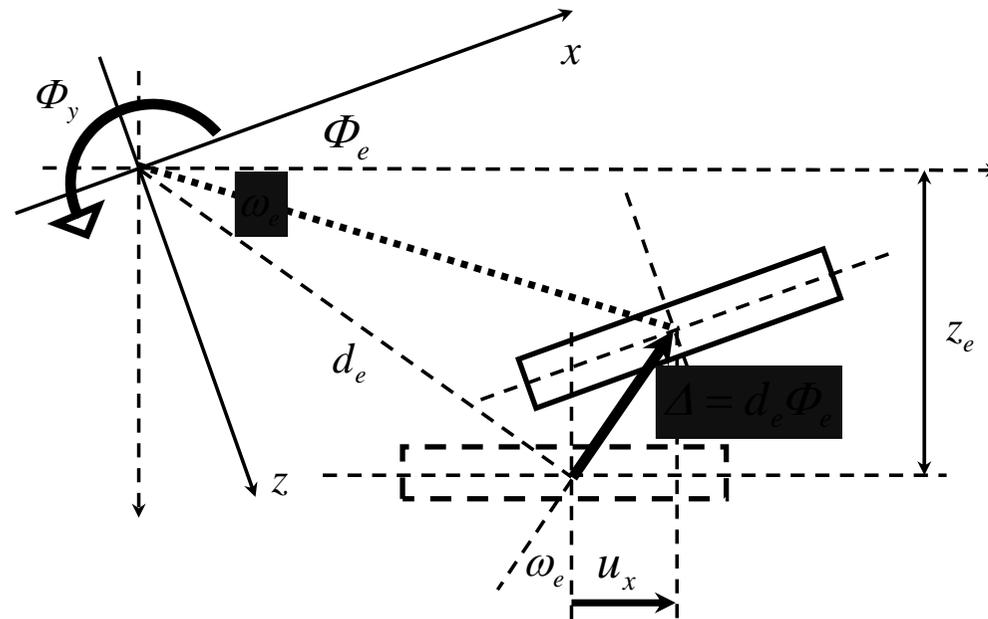
- Ec. Cinemáticas



$$u_x = \Delta \text{sen } \omega_e$$

$$u_x = \Phi_e d_e \text{sen } \omega_e$$

$$u_x = \Phi_e z_e$$

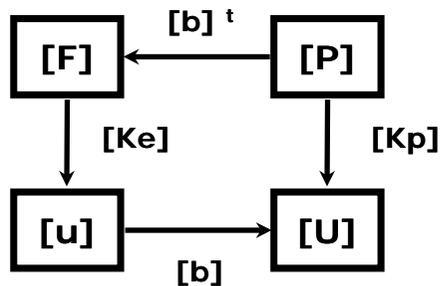


Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Ec. Cinemáticas

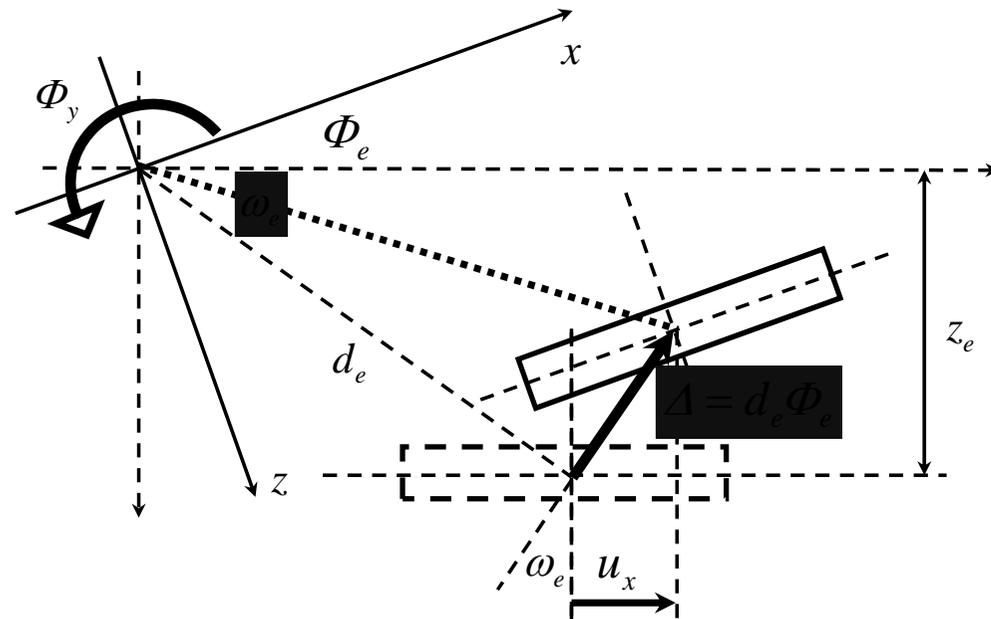


$$u_x = 1.U_x + 0.U_y + \Phi_e z_e$$

Para n Niveles

$$[u_x] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [z_e] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_x] & [U_y] & [\Phi_e] \end{bmatrix}^t$$

$$[u_x] = [b].[U] \quad [b] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [z_e] \end{bmatrix}$$



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

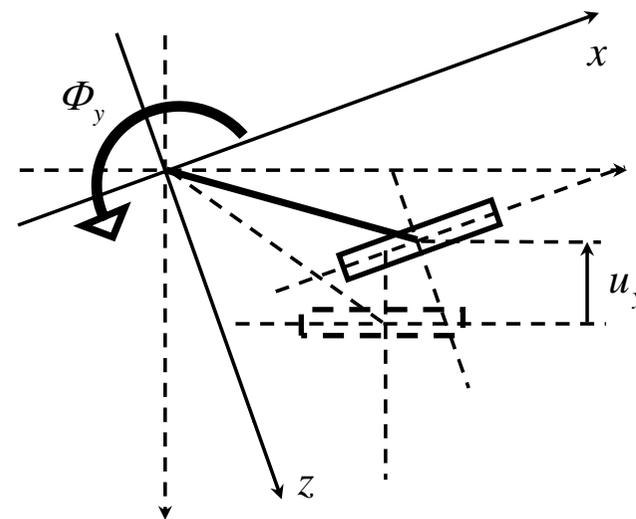
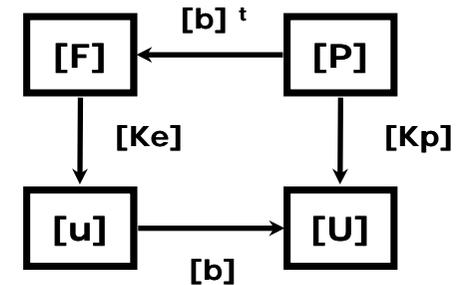
- Rigidez Psuedo 3D dirección x

$$[K_x^p] = [b]^t [K_x^e] [b]$$

$$[K_x^p] = \begin{bmatrix} [K_x^e] & [0] & [z_e][K_x^e] \\ [0] & [0] & [0] \\ [z_e][K_x^e] & [0] & [z_e][K_x^e][z_e] \end{bmatrix}$$

Analogamente para la dirección z

$$[b] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [-x_e] \end{bmatrix}$$



Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

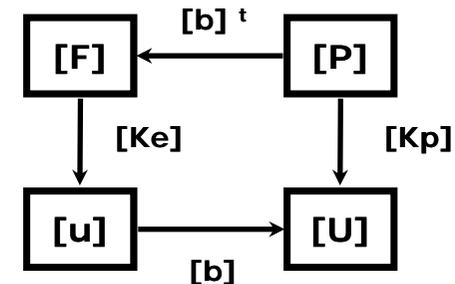
Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Rigidez Psuedo 3D dirección z

$$[K_z^p] = [b]^t [K_z^e] [b]$$

$$[K_z^p] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_z^e] & [-x_e][K_z^e] \\ [0] & [-x_e][K_e] & [-x_e][K_z^e] [-x_e] \end{bmatrix}$$



Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Psuedo 3D

$$[K^p] = [K_x^p] + [K_z^p]$$

$$[K^p] = \begin{bmatrix} [K_x^e] & [0] & [z_e][K_x^e] \\ [0] & [K_z^e] & [-x_e][K_z^e] \\ [z_e][K_x^e] & [-x_e][K_z^e] & [-x_e][K_z^e] [-x_e] + [z_e][K_x^e] [z_e] \end{bmatrix}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

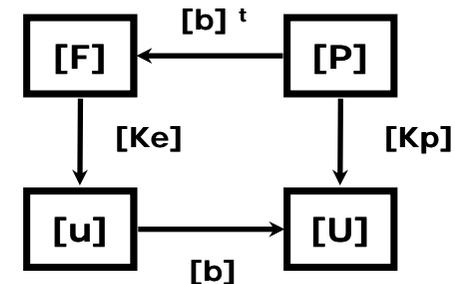
Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Rigidez Psuedo 3D dirección z

$$[K_z^p] = [b]^t [K_z^e] [b]$$

$$[K_z^p] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_z^e] & [-x_e][K_z^e] \\ [0] & [-x_e][K_e] & [-x_e][K_z^e] [-x_e] \end{bmatrix}$$



Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Psuedo 3D

$$[K^p] = [K_x^p] + [K_z^p]$$

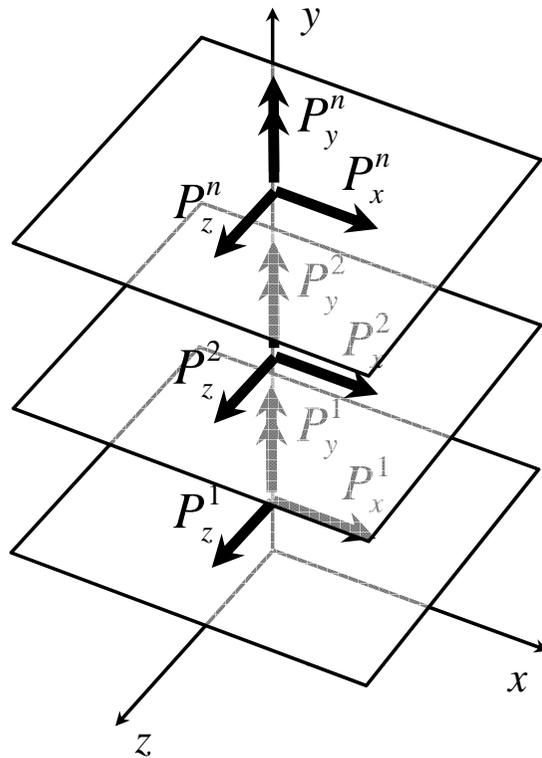
$$[K^p] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [0] & [K_{xy}] \\ [0] & [K_{zz}] & [K_{zy}] \\ [K_{yx}] & [K_{yz}] & [K_{yy}] \end{bmatrix}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Estructuras con Diafragmas Infinitamente Rígidos

- Vector de Cargas



$$[P] = \begin{bmatrix} P_x^n \\ \cdot \\ P_x^i \\ P_x^1 \\ P_z^n \\ \cdot \\ P_z^i \\ P_z^1 \\ P_y^n \\ \cdot \\ P_y^i \\ P_y^1 \end{bmatrix}$$

Daniel E. López
Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Método de la Rigidez Directa

Distribución de Fuerzas Horizontales

- Solución del Sistema

$$[P] = [K^p] [U] \Rightarrow [U]$$

- Variables Cinemáticas Internas

$$[u] = [b] [U]$$

- Fuerzas sobre los Elementos

$$[F_x^e] = [K_x^e] [u]$$

$$[F_z^e] = [K_z^e] [u]$$

