DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS HORIZONTALES EN ESTRUCTURAS DE UN NIVEL CON DIAFRAGMA RÍGIDO

1 CASO GENERAL

Considérese una estructura de una planta formada por n elementos estructurales con rigidez a desplazamiento horizontal vinculados por medio un diafragma rígido a nivel de entrepiso (Ver Figura 1). Debido a la acción de un sistema de fuerzas externo F_x y F_y actuando en el punto CM, el diafragma experimentará desplazamientos horizontales y una rotación en su plano. Los elementos vinculados al diafragma se deformarán y se generarán esfuerzos en ellos.

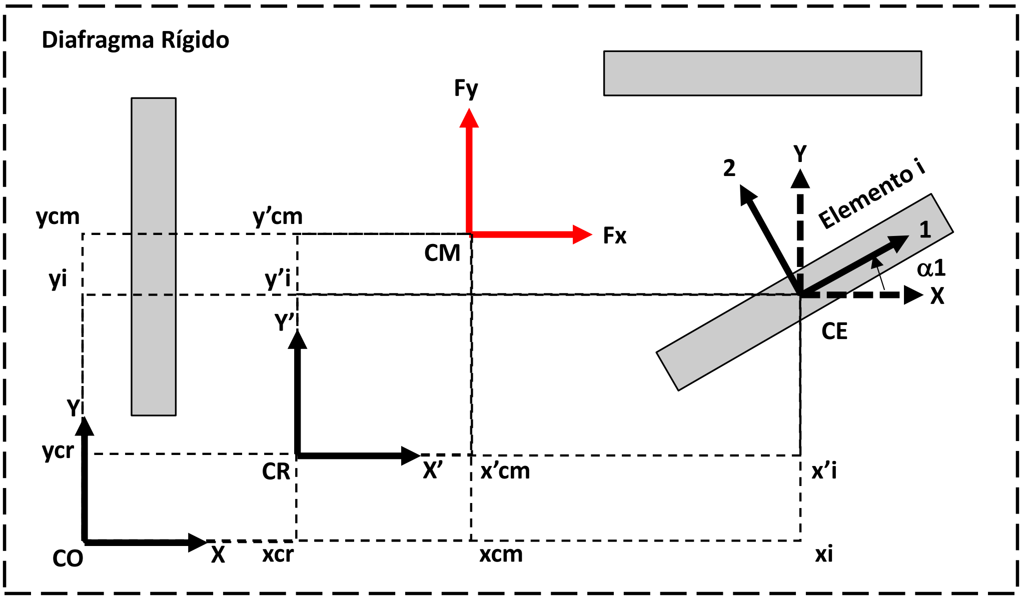

Figura 1: Estructura de un nivel con diafragma rígido

Para cada elemento e se define un sistema de ejes local ubicado en su centro (Punto CE). Este sistema (Ejes 1 y 2) se encuentra orientado según las direcciones principales del elemento un ángulo α con respecto al sistema global XY. Los vectores de desplazamientos y de fuerzas para el elemento, medidos en este sistema local, se definen de la siguiente manera:

$$\bar{u}_e = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.)$$

$$\bar{p}_e = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (2.)$$

donde los términos dentro de cada vector representan, respectivamente, los desplazamientos y las fuerzas del elemento según las dos direcciones principales. Ambos vectores se encuentran relacionados por medio de la matriz de rigidez del elemento según la siguiente expresión:

$$\bar{p}_e = \bar{k}_e . \bar{u}_e \quad (3.)$$

$$\bar{k}_e = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (4.)$$

donde los términos k_1 y k_2 representan las rigideces a desplazamientos horizontales del elemento según las direcciones principales del mismo.

Los desplazamientos medidos en este sistema local pueden ser expresados a partir de los desplazamientos según las direcciones globales XY por medio de la siguiente ecuación de transformación:

$$\bar{u}_e = a_e . u_e \tag{5.}$$

donde

$$u_e = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{6.}$$

y

$$a_e = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.}$$

Por teorema de contragradiencia, las fuerzas del elemento y su relación con los desplazamientos, ambos medidos en el sistema global, pueden ser expresadas como:

$$p_e = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = a_e^T . \bar{p}_e \tag{8.}$$

y

$$p_e = k_e . u_e \tag{9.}$$

donde

$$k_e = a_e^T . \bar{k}_e . a_e = \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{pmatrix} \tag{10.}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha & (k_1 - k_2)\cos\alpha\sin\alpha \\ (k_1 - k_2)\cos\alpha\sin\alpha & k_2\cos^2\alpha + k_1\sin^2\alpha \end{pmatrix} \tag{11.}$$

Considérese ahora los corrimientos del diafragma rígido que vincula a los elementos de la planta. Estos corrimientos (dos traslaciones y una rotación) pueden ser medidos en un sistema de referencia arbitrario ubicado en el punto CO. El vector de corrimientos del diafragma medidos en este sistema se define como:

$$U = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ \theta_z \end{pmatrix} \tag{12.}$$

Los desplazamientos de cada uno de los elementos están relacionados con los desplazamientos del diafragma por medio de la siguiente expresión:

$$u_e = b_e . U \tag{13.}$$

donde

$$b_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & +x \end{pmatrix} \tag{14.}$$

Aplicando el teorema de contragradiencia, las fuerzas del elemento y su relación con los desplazamientos del diafragma, ambos medidos en el sistema CO, pueden ser obtenidas como:

$$P_e = b_e^T . p_e = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ m_z \end{pmatrix} \tag{15.}$$

y

$$P_e = K_e . U \tag{16.}$$

donde

$$K_e = b_e^T . k_e . b_e \tag{17.}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xy}x - k_x y \\ k_{xy} & k_y & k_y x - k_{xy} y \\ k_{xy}x - k_x y & k_y x - k_{xy} y & k_x y^2 + k_y x^2 - 2k_{xy}xy \end{pmatrix} \tag{18.}$$

La resultante de los esfuerzos de todos los elementos expresada según el sistema global en CO puede ser calculada entonces como:

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{pmatrix} = \sum_1^n P_e \tag{19.}$$

A partir de las ecuaciones 19 y 16 se obtiene la expresión resultante de la relación entre el vector total de esfuerzos y los desplazamientos de la planta expresados en el sistema global:

$$P = K.U \tag{20.}$$

donde

$$K = \sum_1^n K_e = \sum_1^n \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xy}x - k_x y \\ k_{xy} & k_y & k_y x - k_{xy} y \\ k_{xy}x - k_x y & k_y x - k_{xy} y & k_x y^2 + k_y x^2 - 2k_{xy}xy \end{pmatrix} \tag{21.}$$

se denomina matriz de rigidez de la estructura.

El vector de fuerzas total P debe ser, por equilibrio, igual al vector de fuerzas aplicadas a la estructura expresado en el mismo sistema global. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y x_{CM} - F_x y_{CM} \end{pmatrix} \tag{22.}$$

donde x_{cm} e y_{cm}, son las coordenadas del centro de aplicación de las fuerzas F_x y F_y medidas respecto del sistema global de referencia con origen en CO.

2 CASOS PARTICULARES

2.1 Elementos paralelos a los ejes XY

En el caso de que solo existan elementos en direcciones globales XY, los términos k_{xy} se anulan por lo que la matriz de rigidez queda expresada de la siguiente manera:

$$K = \sum_1^n \begin{pmatrix} k_x & 0 & -k_x y \\ 0 & k_y & k_y x \\ -k_x y & k_y x & k_x y^2 + k_y x^2 \end{pmatrix} \tag{23.}$$

2.2 Reducción al centro de rigidez

En el caso general, se consideró un sistema de referencia global CO arbitrario. Si se considera en un sistema de referencia ubicado en el centro de rigidez CR (Punto donde los momentos estáticos de las rigideces k_x y k_y son nulos) la matriz de rigidez y el vector de términos independientes quedan expresados como:

$$K = \sum_1^n \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xy}x \\ k_{xy} & k_y & k_{xy}y \\ k_{xy}x & k_{xy}y & k_x y^2 + k_y x^2 - 2k_{xy}xy \end{pmatrix} \quad (24.)$$

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y(x_{CM} - x_{CR}) - F_x(y_{CM} - y_{CR}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y e_{sx} - F_x e_{sy} \end{pmatrix} \quad (25.)$$

Las coordenadas del centro de rigidez CR respecto del sistema global ubicado en CO se calculan como:

$$x_{CR} = \frac{\sum_1^n k_y x}{\sum_1^n k_y} \quad (26.)$$

$$y_{CR} = \frac{\sum_1^n k_x y}{\sum_1^n k_x} \quad (27.)$$

2.3 Reducción al centro de rigidez y elementos paralelos a los ejes XY

En el caso de que realice la reducción al centro de rigidez y se tengan solamente elementos en las direcciones XY, la matriz de rigidez y el vector de términos independientes quedan expresados como:

$$K = \sum_1^n \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_x y^2 + k_y x^2 \end{pmatrix} \quad (28.)$$

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y(x_{CM} - x_{CR}) - F_x(y_{CM} - y_{CR}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y e_{sx} - F_x e_{sy} \end{pmatrix} \quad (29.)$$

3 PASOS PARA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

1. Seleccionar un sistema de referencia global CO. Se recomienda usar el centro de rigidez.
2. Calcular la matriz de rigidez del sistema K utilizando la expresión 21.
3. Calcular el vector de términos independientes P utilizando la expresión 22.
4. Calcular los desplazamientos de la planta U a partir de la ecuación 20.
5. Calcular los desplazamientos globales de cada elemento u_e utilizando la expresión 13.
6. Calcular los desplazamientos principales de cada elemento $\bar{u}_e$ utilizando la expresión 5.
7. Calcular los esfuerzos principales de cada elemento $\bar{p}_e$ utilizando la expresión 3.