

ANALISIS ESTRUCTURAL I

Análisis No Lineal de Estructuras de Barras

Daniel E. López

Ingeniero Civil

Magíster en Ing. Estructural

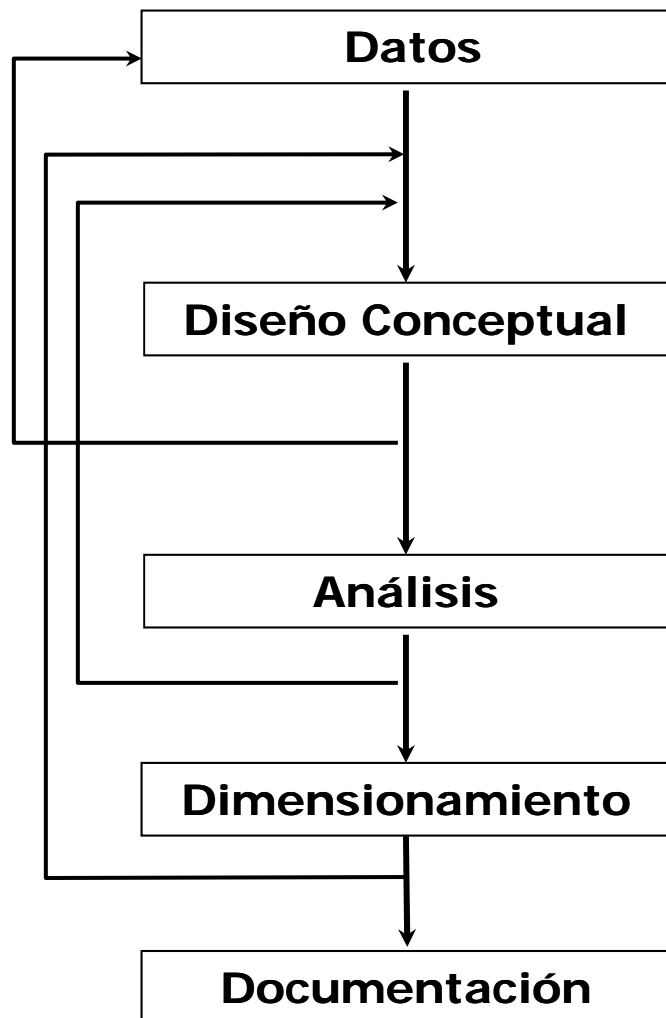
Análisis NL de Estructuras de Barras

Contenido

- **Introducción**
- **Objetivos**
- **Campo de aplicación**
- **Definiciones. Ejemplos**
- **Teoremas fundamentales. Ejemplos**
- **Software para análisis no-lineal**
- **Aplicaciones**

Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción. Análisis y Diseño de Estructuras



- Destino
- Emplazamiento
- Anteproy. Arquít.

- Tipología
- Materiales
- Tec. Construct.
- Predimensionado

- M. Barras, Continuos
- Corrimientos
- Esfuerzos internos
- Reacciones

- Dimens. definitivas
- Particip. Volumét.

- Memorias
- Planos, planillas
- Especificaciones
- Detalles

Destino

Cargas muertas, Acciones de Uso

Emplazamiento

Acciones del Medio Ambiente
Materiales
M de O y Equipamiento

Estructuras de Barras (1D)

Reticulados, Pórticos

Estructuras Continuas (2 -3D)

Plateas y Losas, Cúpulas, Presas,
Pavimentos, Muros de Ho o Ma,
Tuneles, Conductos.

Otros

Estructuras de Barras (MRD)

Número Finito DOF

Estructuras Continuas (MEF)

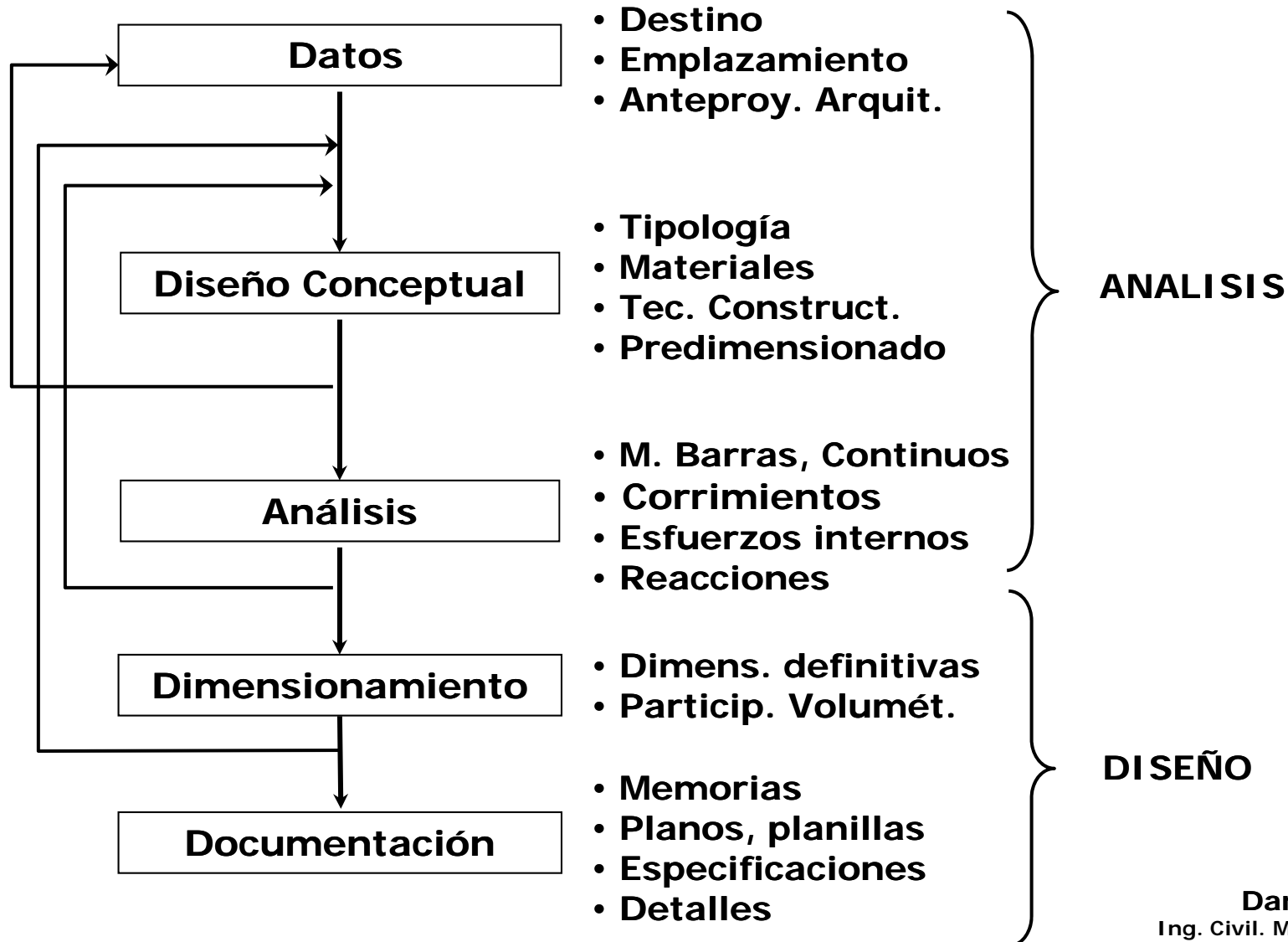
Campo de la M.M.C.
Número Infinito DOF

Daniel E. López

Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción. Análisis y Diseño de Estructuras



Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción. Análisis y Diseño de Estructuras

- **Métodos de Análisis**

- **Estructuras de Barras (1D)**

- Teoría de las Estructuras. Método de la Rigidez Directa. Análisis Estructural I

- **Estructuras Continuas (2D y 3D)**

- Teoría de la Elasticidad. Método de los Elementos Finitos. A.Est. II, Est.Laminares

- **Métodos Diseño**

- **Estructuras de Ho Ao**

- Hormigón I y II

- **Estructuras Metálicas y de Madera**

- Construcciones Metálicas y de Madera I y II

- **Estructuras Fundaciones y Geomateriales**

- Mecánica de Suelos y Rocas.

Daniel E. López

Ing. Civil. Magíster Ing. Estructural

Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción

- En las dos última década se han desarrollado nuevos métodos para diseño sísmico de estructuras que se pueden aplicar a rehabilitación de estructuras existentes o a nuevas construcciones.
- Estos métodos involucran simultáneamente los procesos de Análisis y Diseño Estructural. Requieren determinación de resistencia y deformabilidad de la estructura.
- El CCSR '87, para rehabilitación de estructuras, exige la determinación de la resistencia última del sistema estructural.
- Los métodos DBD y DBP requieren una adecuada evaluación de la resistencia y rigidez de la estructura (incluyen como variable fundamental del problema a la deformabilidad de las estructuras).
- Esos atributos estructurales están gobernados por las características geométricas y las propiedades mecánicas de los elementos estructurales (configuración, forma y dimensiones de secciones, materiales, adherenc.-deslizam., etc.)

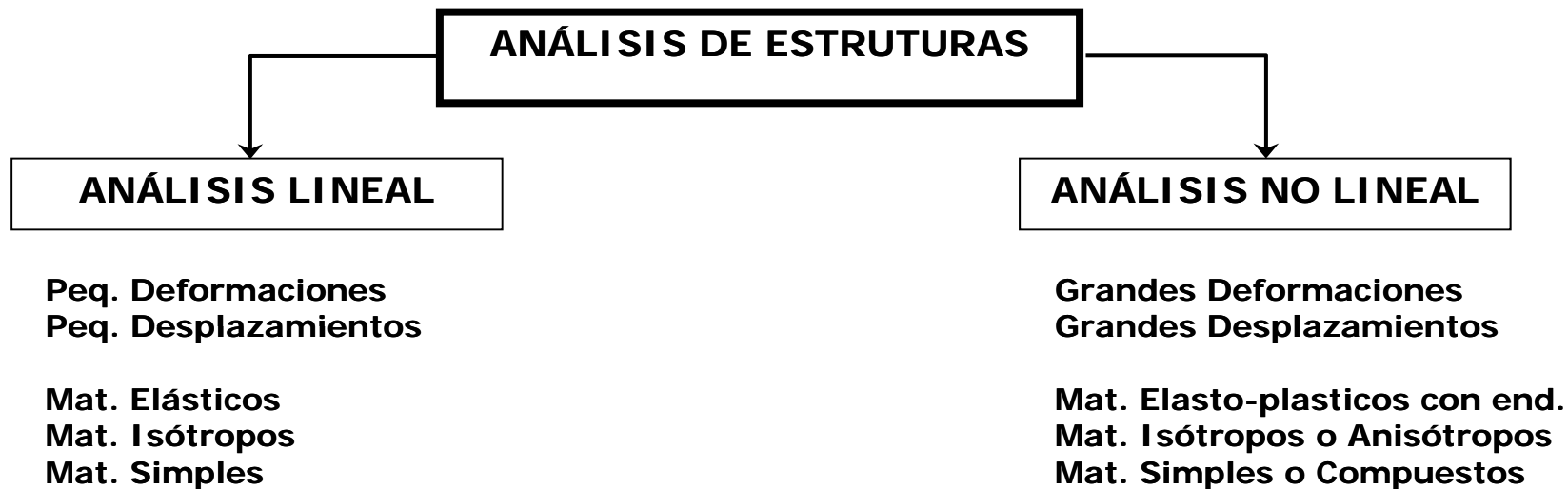
Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción

- Hasta este momento se ha considerado que el comportamiento del material constitutivo de los distintos elementos que componen una estructura es Elástico, responde a la ley Hooke *“Ut tensio sic vis”*.
- Para calcular la capacidad resistente (carga última) de un sistema estructural debemos abandonar la hipótesis de comportamiento elástico del material.
- No existe una única constante de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. La relación $\sigma - \varepsilon$ es NO LINEAL.
- Resulta muy importante poder simular el comportamiento estructural a escala macroestructural, utilizando hipótesis simplificativas para definir el comportamiento del material.
- Hay varios tipos de No Linealidad. En AEI trataremos problemas con No Linealidad Mecánica, es decir que el comportamiento No Lineal se debe exclusivamente a las propiedades del material.

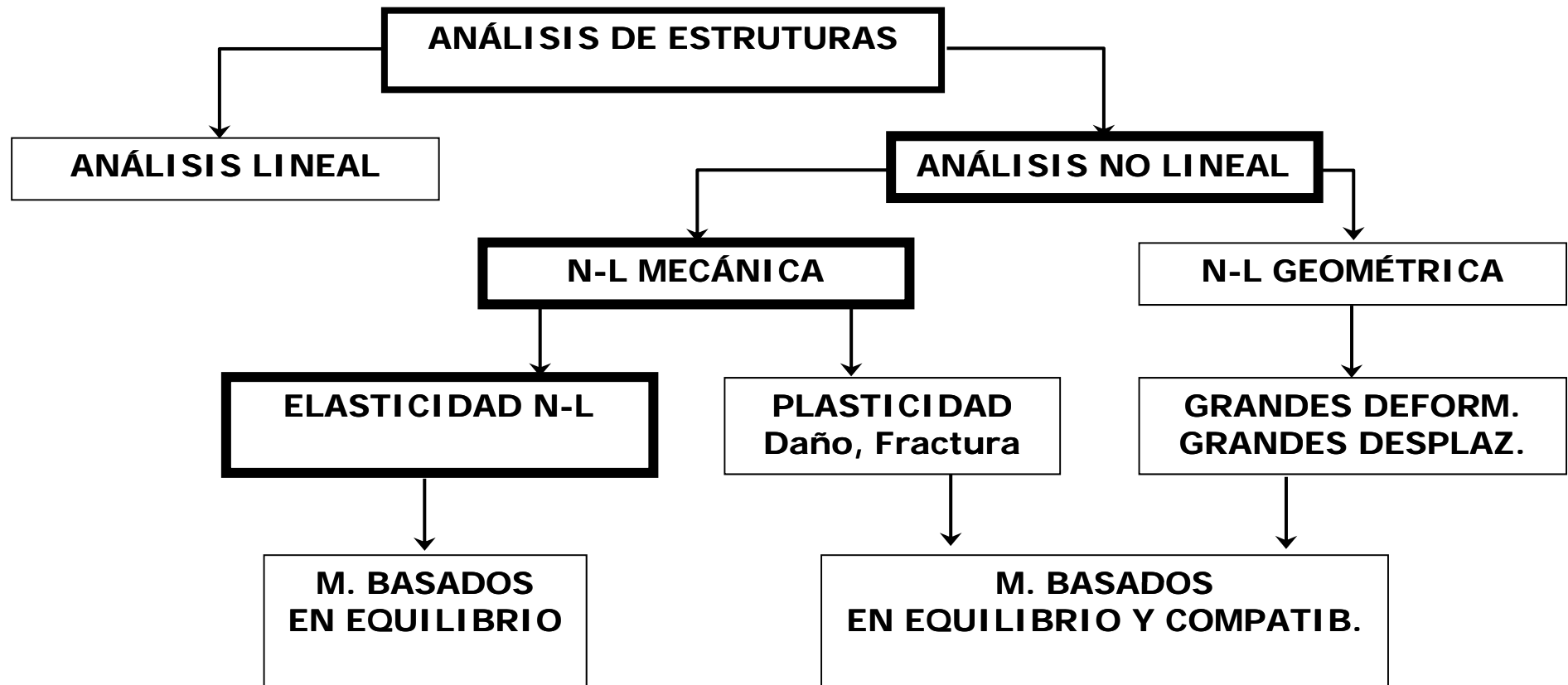
Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción



Análisis NL de Estructuras de Barras

Introducción



Análisis NL de Estructuras de Barras

Objetivos

- **Desarrollar el marco teórico para el análisis de estructuras de barras (1D) con No Linealidad Mecánica basada en modelos elásticos no lineales.**
- **Desarrollar las herramientas necesarias para determinar en forma manual la carga última de sistemas estructurales simples.**
- **Utilizar herramientas numéricas para determinar la carga última de sistemas estructurales complejos.**

Análisis NL de Estructuras de Barras

Campo de Aplicación

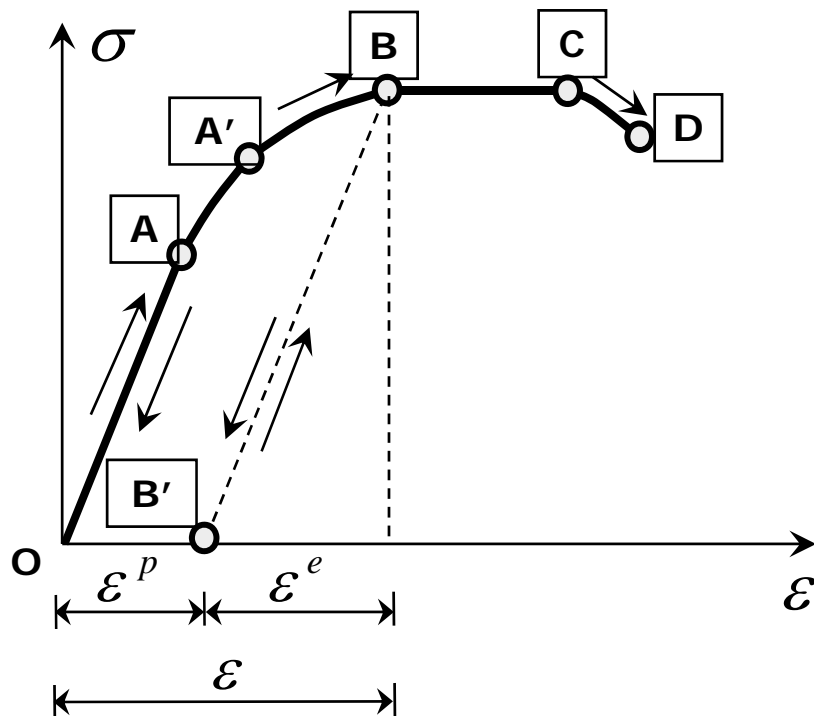
- Estructuras de barras. Problemas unidimensionales
- Materiales isótropos, homogéneos y simples.
- Los resultados obtenidos se basan en ecuaciones de equilibrio. En general no es posible cuantificar deformaciones o corrimientos.
- La magnitud de los corrimientos y deformaciones en ciertos puntos de la estructura cuando las cargas están próxima a su valor último provocan fisuración, aplastamiento y otros daños que NO son admisibles para el estado de servicio.
- No se utiliza el marco teórico de la Teoría de la Plasticidad.
- No se consideran fenómenos de inestabilidad local, ni global, pandeo, abollamiento, etc.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Definiciones

- **Comportamiento más allá del Límite Elástico**

Consideramos un punto material en el interior de un elemento estructural, cuyo comportamiento uniaxial se puede representar mediante un diagrama σ vs ϵ

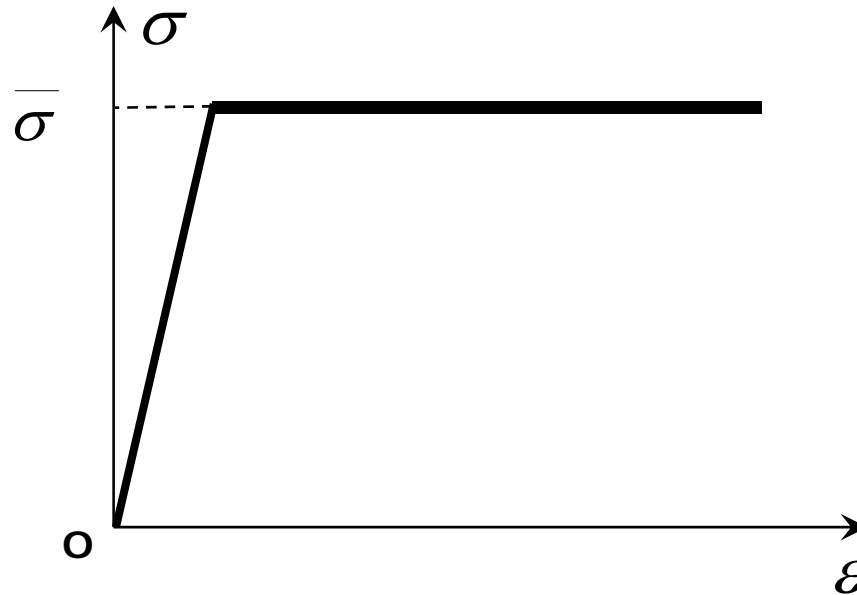


- O A zona de proporcionalidad.
- O A' zona elástica. σ_y
- A' B zona plástica con endurecimiento.
- B C zona perfectamente plástica.
- C D zona plástica con ablandamiento.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Definiciones

- Material perfectamente plástico

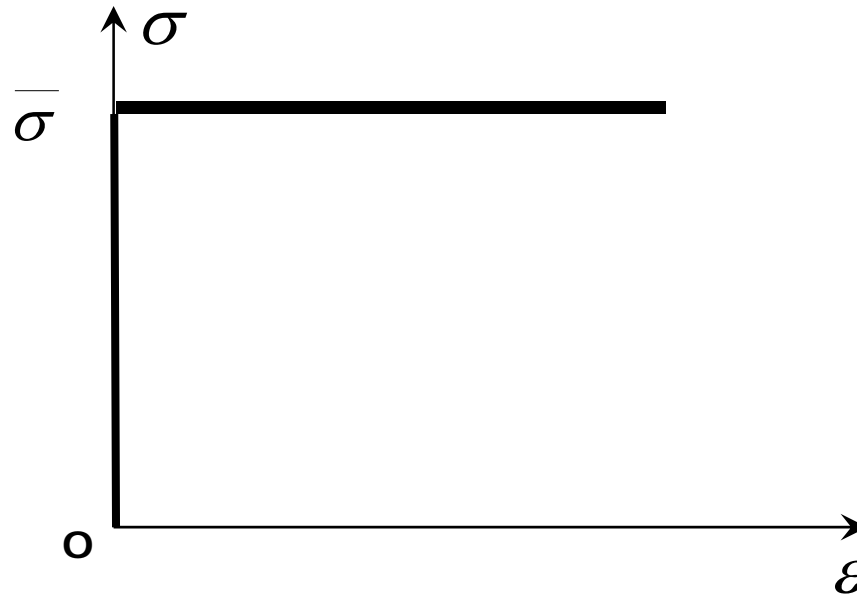


El comportamiento uniaxial se caracteriza por un aumento de tensión en forma proporcional a la deformación del punto material hasta un cierto valor en que se alcanza la tensión de fluencia que coincide con la de rotura debido a que no existen fenómenos de endurecimiento o ablandamiento.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Definiciones

- **Material rígido-plástico**



El comportamiento uniaxial se caracteriza por un aumento de tensión sin deformación del punto material hasta un cierto valor en que se alcanza la tensión de fluencia que coincide con la de rotura debido a que no existen fenómenos de endurecimiento o ablandamiento.

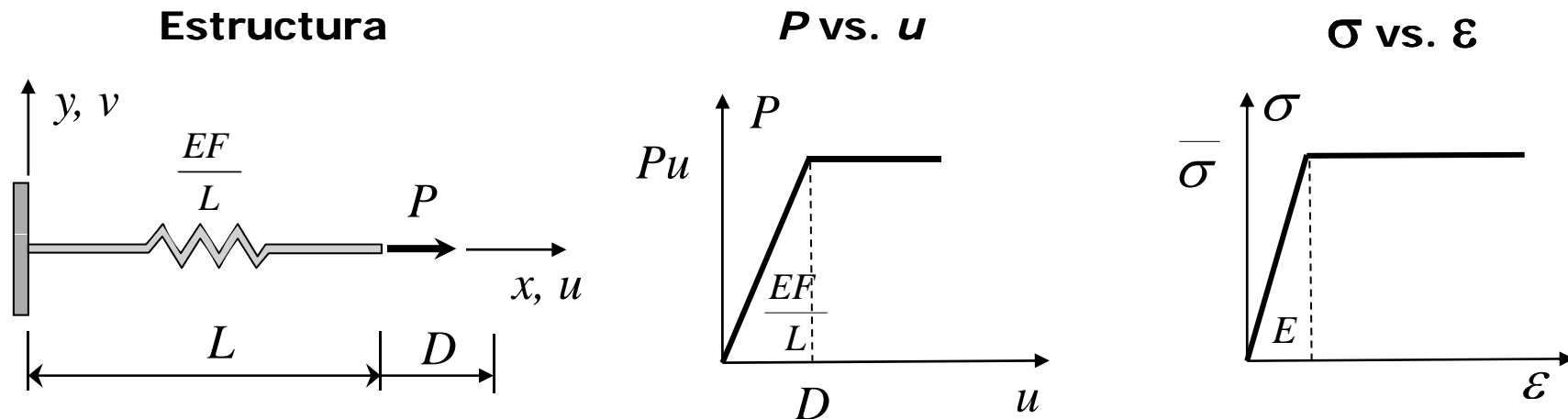
Análisis NL de Estructuras de Barras

Definiciones

- **Estado Crítico**

En el se pueden producir grandes deformaciones plásticas (muy superiores a las elásticas) con nulo o muy pequeño aumento de carga. Para materiales perfectamente plásticos o rígido-plásticos este estado se llama Flujo Plástico Irrestricto y la carga para el cual se produce se llama *Carga Límite o Última*.

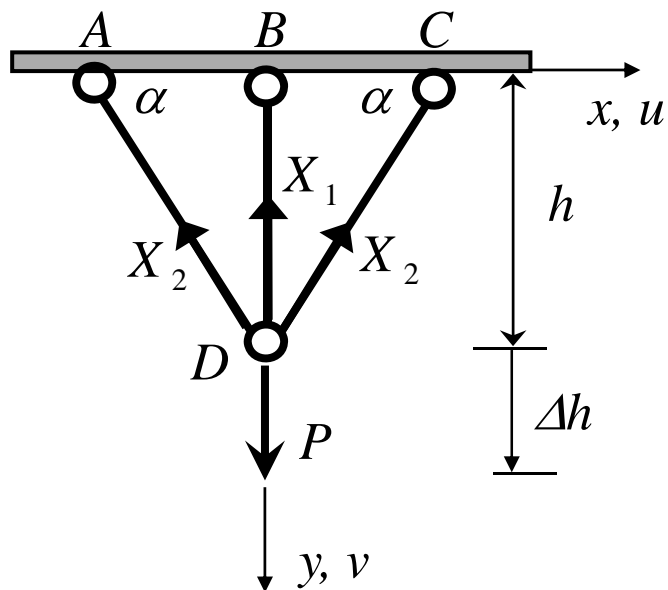
- **Ejemplos: Barra en Tracción**



Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $\sigma < \bar{\sigma}$



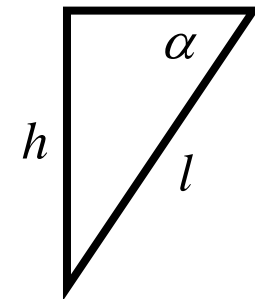
$$\overline{AD} = \overline{CD} = l \quad E, F$$

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\frac{X_1}{F} = E \frac{\Delta h}{h}$$

$$h = l \cdot \sin \alpha$$

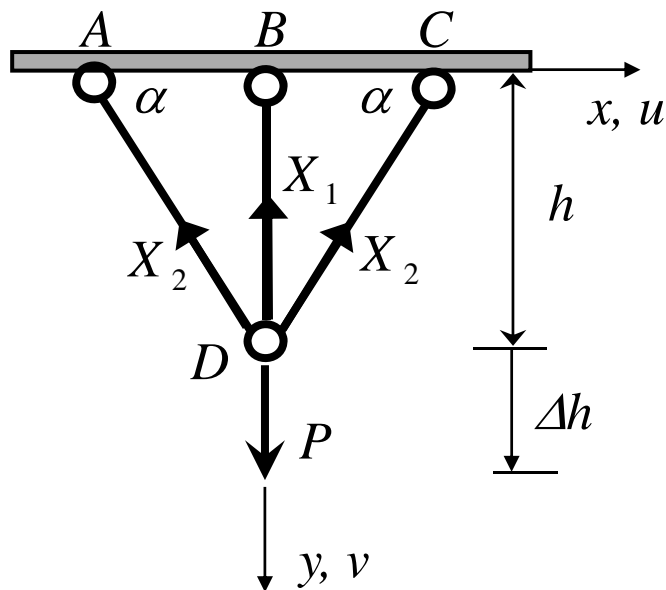
$$\Delta h = \frac{X_1 h}{EF} = \frac{X_1 l \cdot \sin \alpha}{EF}$$



Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $\sigma < \bar{\sigma}$



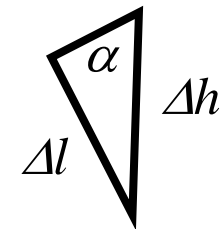
$$\Delta h = \frac{X_1 h}{EF} = \frac{X_1 l \cdot \text{sen } \alpha}{EF}$$

$$\Delta l = \frac{X_2 l}{EF} \quad \Delta l = \Delta h \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\frac{X_2 l}{EF} = \frac{X_1 l \cdot \text{sen } \alpha}{EF} \text{sen } \alpha$$

$$X_2 = X_1 \text{sen}^2 \alpha$$

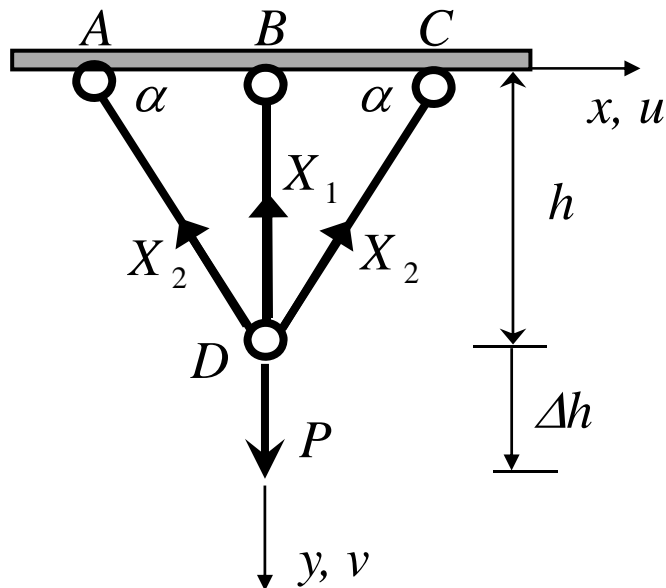
$$X_2 < X_1$$



Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $\sigma < \bar{\sigma}$

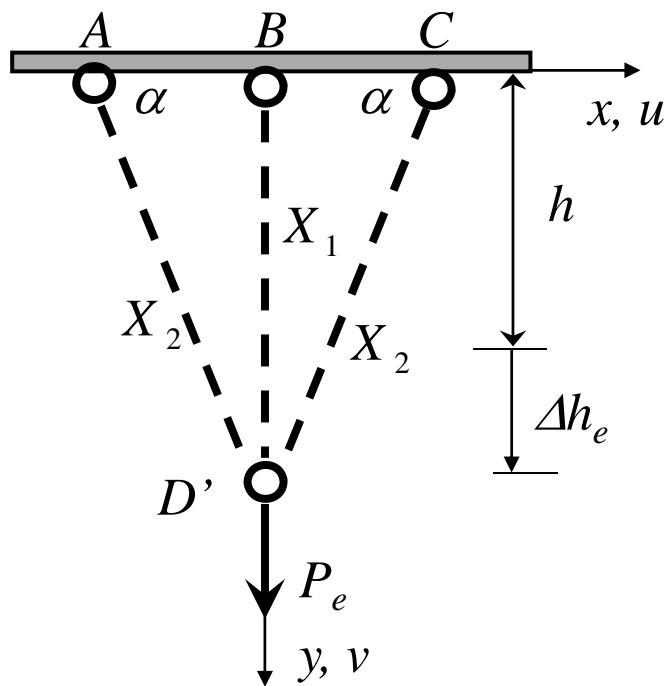


$$P = X_1 + 2X_2 \operatorname{sen} \alpha$$
$$P = X_1 + 2X_1 \operatorname{sen}^3 \alpha = X_1 (1 + 2 \operatorname{sen}^3 \alpha)$$
$$P = X_1 (1 + 2 \operatorname{sen}^3 \alpha)$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $X_1 = \bar{\sigma} F$



$$P = X_1 + 2 X_2 \text{sen } \alpha$$

$$P = X_1 + 2 X_1 \text{sen}^3 \alpha = X_1 (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)$$

$$P = X_1 (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)$$

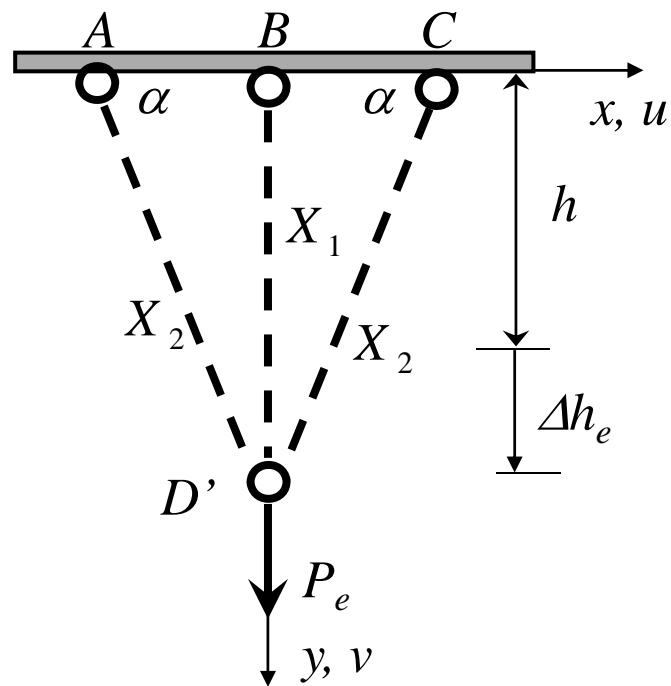
$$P_e = \bar{\sigma} F (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)$$

P_e no es la carga última

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $X_1 = \bar{\sigma} F$



$$P_e = \bar{\sigma} F (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)$$

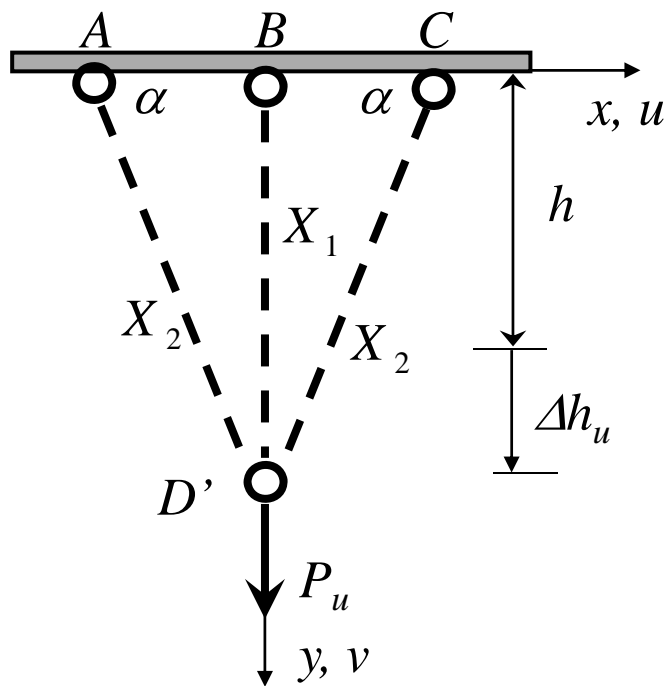
$$\Delta h = \frac{X_1 h}{EF}$$

$$\Delta h_e = \frac{\bar{\sigma} h}{E}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $X_2 = \bar{\sigma}F$



$$P = \bar{\sigma}F + 2X_2 \text{sen } \alpha$$

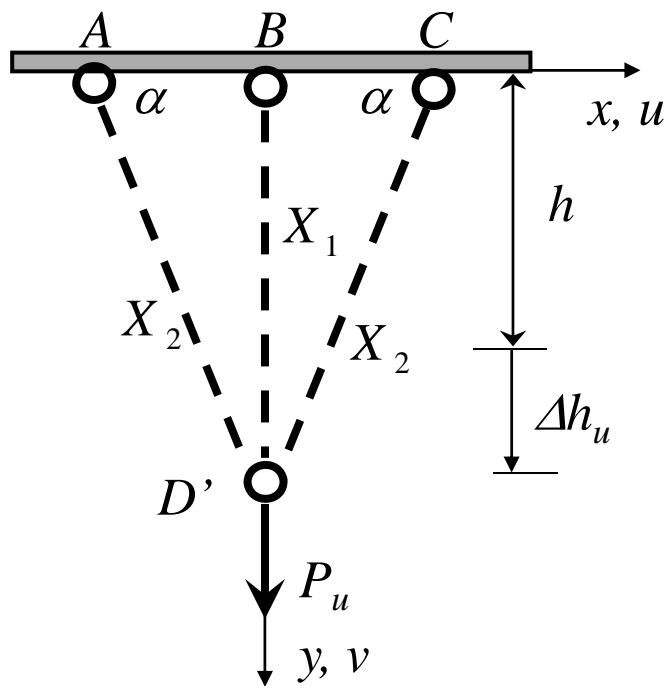
$$P_u = \bar{\sigma}F + 2\bar{\sigma}F \text{sen } \alpha$$

$$P_u = \bar{\sigma}F (1 + 2 \text{sen } \alpha)$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción $X_2 = \bar{\sigma} F$



$$P_u = \bar{\sigma} F (1 + 2 \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\Delta l = \frac{X_2 l}{EF}$$

$$\Delta l = \frac{\bar{\sigma} l}{E}$$

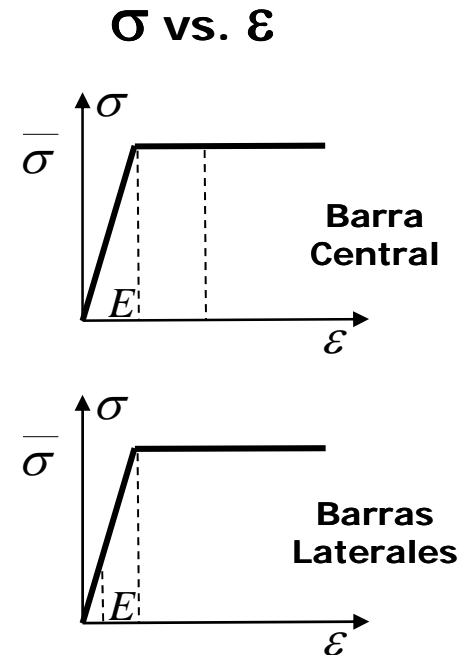
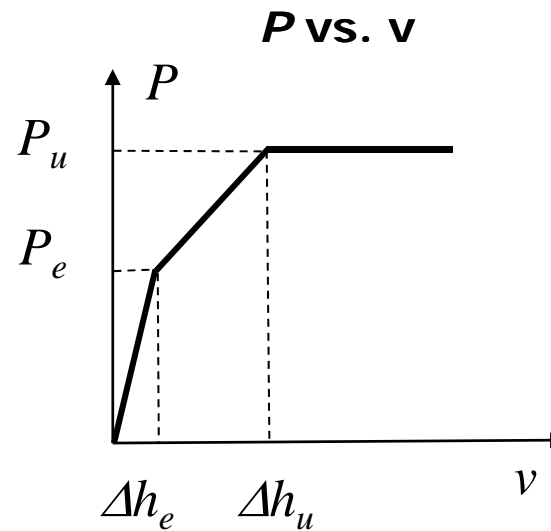
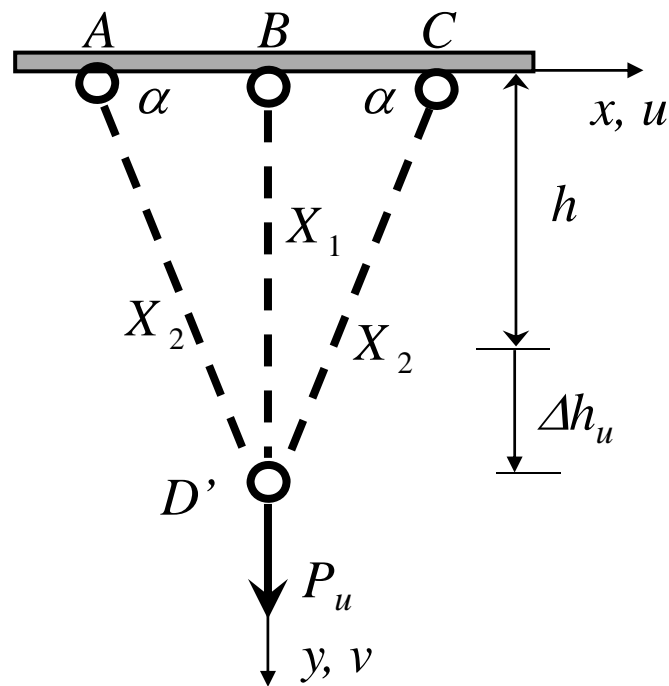
$$\Delta l = \Delta h \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad h = l \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Delta h_u = \frac{\bar{\sigma} h}{E \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

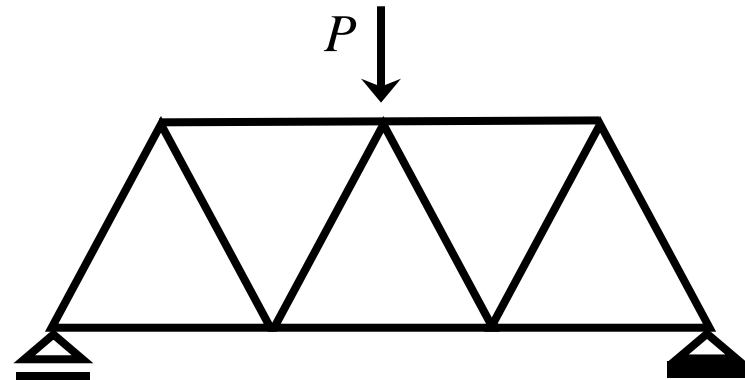
- Ejemplo: Tres Barras Concurrentes en Tracción



Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

Ejemplo: Estructuras de reticulados isostáticos



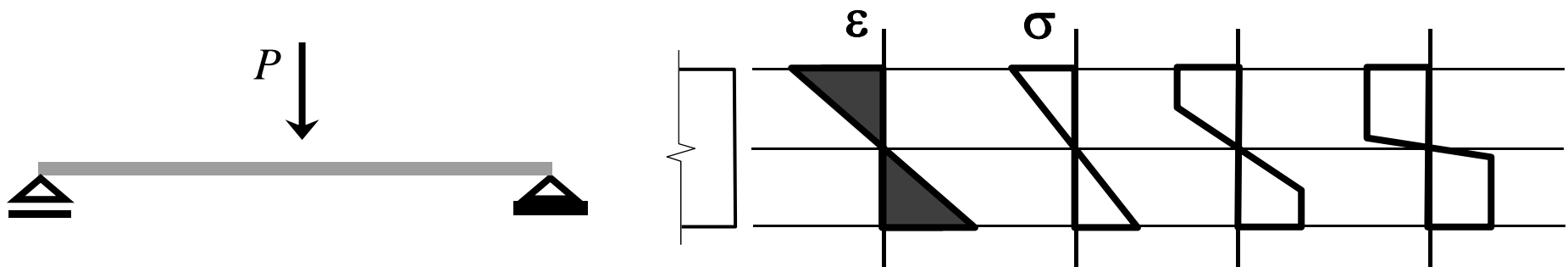
Todas las barras soportan esfuerzos axiales. Al aumentar la carga P aumentan los esfuerzos en las barras.

Cuando el esfuerzo en la barra más solicitada provoca una tensión en la misma igual a la de fluencia la barra seguirá deformándose sin aumento de las cargas exteriores.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

Ejemplo: Estructuras isostáticas con esfuerzos de flexión



La acción de P provoca distribuciones de deformaciones y tensiones bitriangulares.

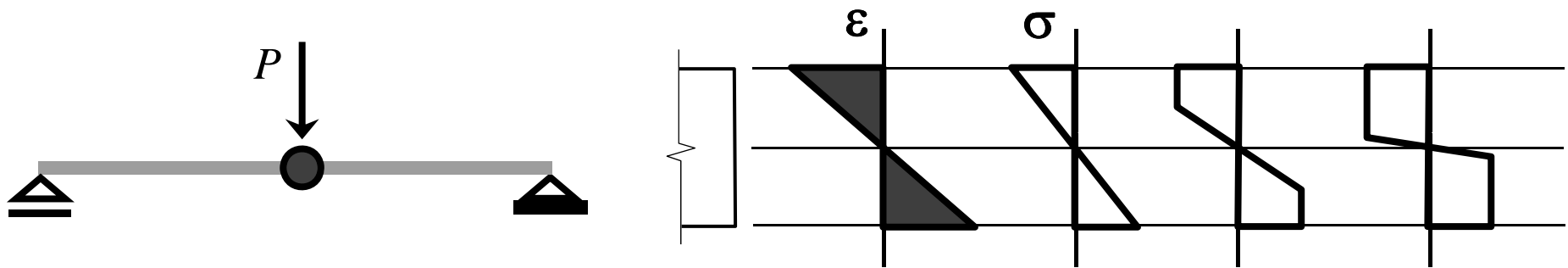
Si P comienza a crecer, en las fibras extremas de la sección aparecerán valores de tensiones iguales a la tensión de fluencia.

Si P sigue aumentando la distribución de tensiones dejará de ser bitriangular y tenderá a una distribución birectangular.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos

Ejemplo: Estructuras isostáticas con esfuerzos de flexión



Para alcanzar una distribución de tensiones birectangular la curvatura en la sección mas solicitada debería crecer hasta infinito.

Cuando la distribución de tensiones en la sección mas solicitada es bi-rectangular se forma en la misma una "Rótula Plástica".

La estructura se sigue deformando sin aumento de la carga exterior

Análisis NL de Estructuras de Barras

Definiciones

- **Mecanismo de Colapso**

Es un sistema estructural similar al original, con una configuración geométrica idéntica, donde se introducen rótulas plásticas en secciones características de modo tal de obtener un sistema con un grado de libertad, sobre el que actúa un patrón de cargas proporcional al original.

Es un mecanismo cinemáticamente admisible en estado crítico.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Definiciones

- **Estado Estáticamente Admisibile**

Todo aquel en que se verifica:

- i. Satisface las condiciones de contorno en términos de fuerzas.
- ii. En todos los puntos se cumple. $\sigma \leq \bar{\sigma}$ No viola la condición de fluencia
- iii. Está en equilibrio con las fuerzas externas.

- **Mecanismo de Fluencia Cinemáticamente Admisibile**

Todo aquel en que se verifica:

- i. Satisface las condiciones de contorno cinemáticas.
- ii. Las cargas no cambian de dirección. Las cargas dan pot. Disipat. Positiva
- iii. El trabajo de las fuerzas externas es igual al de las internas.

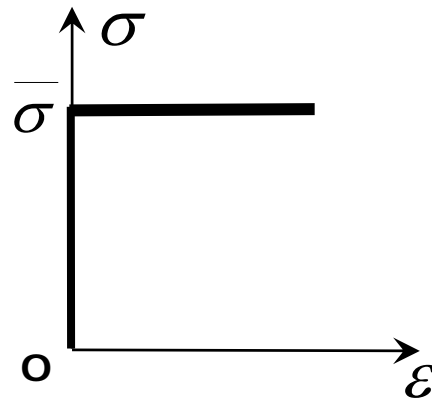
Análisis NL de Estructuras de Barras

Hipótesis

- **Carga proporcional**

Las cargas exteriores crecen todas en la misma proporción.

- **Material Rígido-Perfectamente Plástico**



- **Vale el Principio de la Máxima Disipación**

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*\right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{Vale para materiales con flujo asociado})$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Teoremas

- **Teorema Estático o del Extremo Superior**

La carga última P_U es el extremo superior de todas las cargas P_{EST} correspondientes a estados estáticamente admisibles ($P_{EST} \leq P_U$)

La carga última P_U calculada a través de un estado estáticamente admisible es una cota inferior de la carga límite.

Demostración

Análisis NL de Estructuras de Barras

Teoremas

- **Teorema Cinemático o del Extremo Inferior**

La carga última P_U es el extremo inferior de todas las cargas P_{CIN} correspondientes a estados cinemáticamente admisibles ($P_{CIN} \geq P_U$)

La carga última P_U calculada a través de un mecanismo cinemáticamente admisible es una cota superior de la carga límite.

Demostración

Análisis NL de Estructuras de Barras

Teoremas

Mecanismo de Fluencia Cinemáticamente Admisible



Cota Superior

CARGA ÚLTIMA O LÍMITE



Cota Inferior



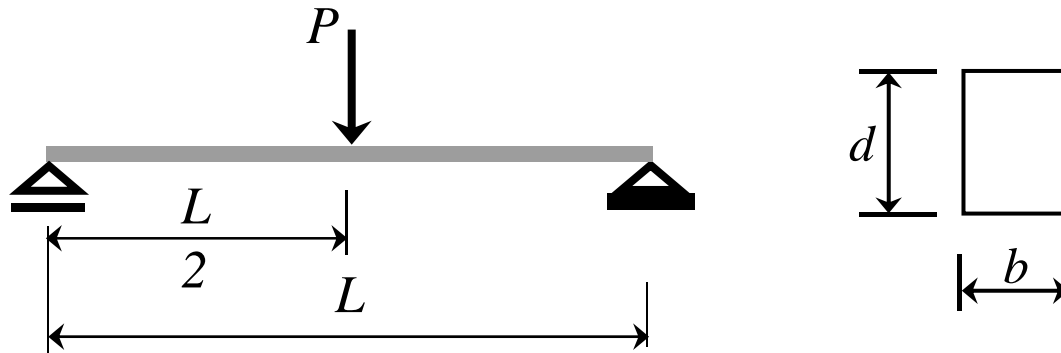
Estado Estáticamente Admisible

- **Teorema de Unicidad**

Si las cargas obtenidas por ambos teoremas son iguales, entonces son iguales a la Carga Última o Límite.

Análisis NL de Estructuras de Barras

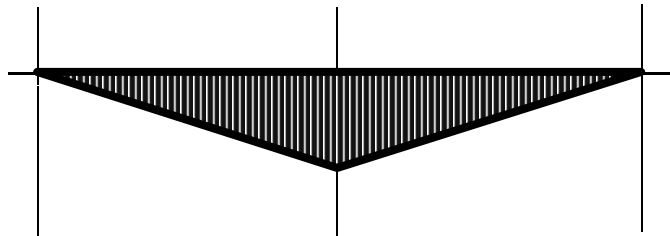
Ejemplos. Viga simplemente apoyada.



Hipótesis:

- Material rígido-plástico

i. Estado Estáticamente Admisible

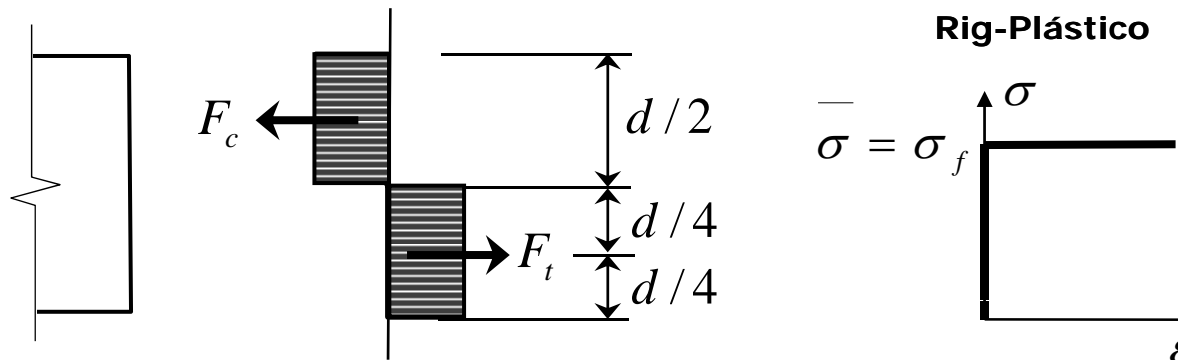


$$M_{\max}^e = M_{l/2}^e = \frac{PL}{4}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga simplemente apoyada.

i. Estado Estáticamente Admisible



$$F_c = F_t$$

$$F_c = b \frac{d}{2} \sigma_f$$

$$M_{\max}^i = \frac{\sigma_f b d}{2} \frac{d}{2}$$

$$M_{\max}^i = \frac{\sigma_f b d^2}{4}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga simplemente apoyada.

i. Estado Estáticamente Admisibile

$$M_{\max}^e = \frac{PL}{4}$$

$$M_{\max}^i = \frac{\sigma_f b d^2}{4}$$

$$\frac{P_{EST} L}{4} = \frac{\sigma_f b d^2}{4}$$

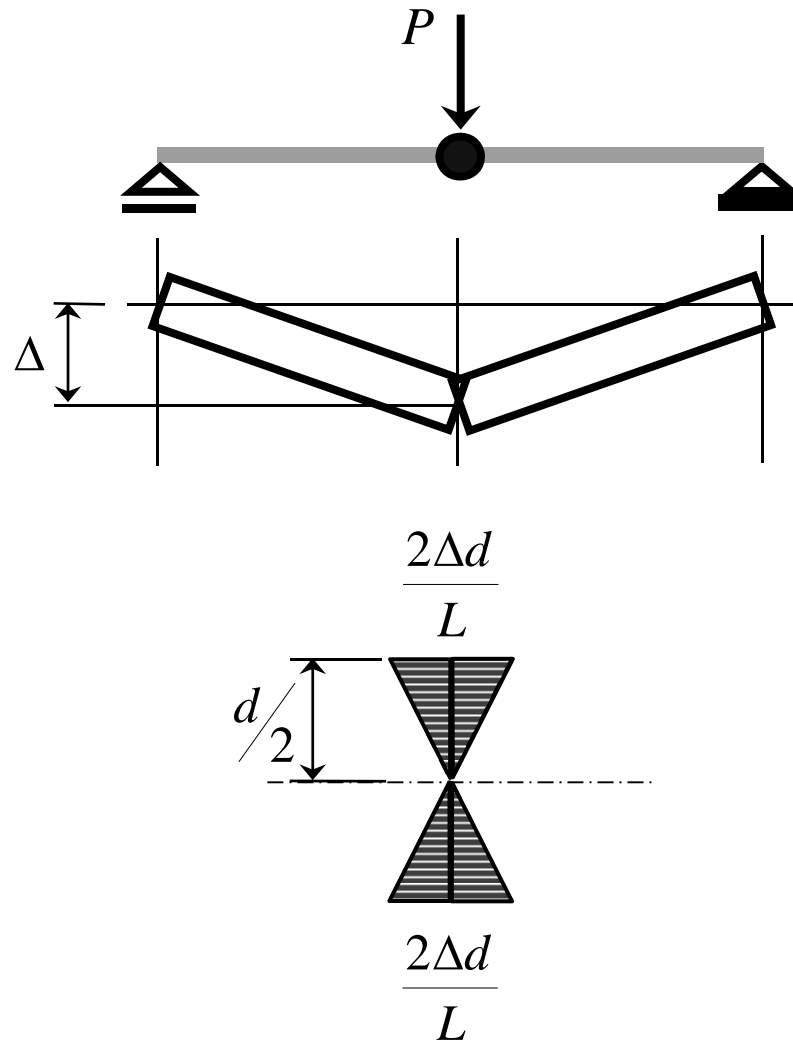
$$P_{EST} = \frac{\sigma_f b d^2}{L}$$

$$P_U \geq P_{EST}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga simplemente apoyada.

ii. Mecanismo Cinemáticamente Admisible



Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga simplemente apoyada.

ii. Mecanismo Cinemáticamente Admisible

$$T_e = P\Delta$$

$$T_i = 2 \frac{1}{2} \frac{bd}{2} \frac{2\Delta d}{L} \sigma_f$$

$$T_i = \frac{bd^2\Delta}{L} \sigma_f$$

$$T_e = T_i$$

$$P_{CIN} = \frac{\sigma_f bd^2}{L}$$

$$P_U \leq P_{CIN}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga simplemente apoyada.

iii. Determinación de P_U

$$P_{EST} = \frac{\sigma_f b d^2}{L}$$

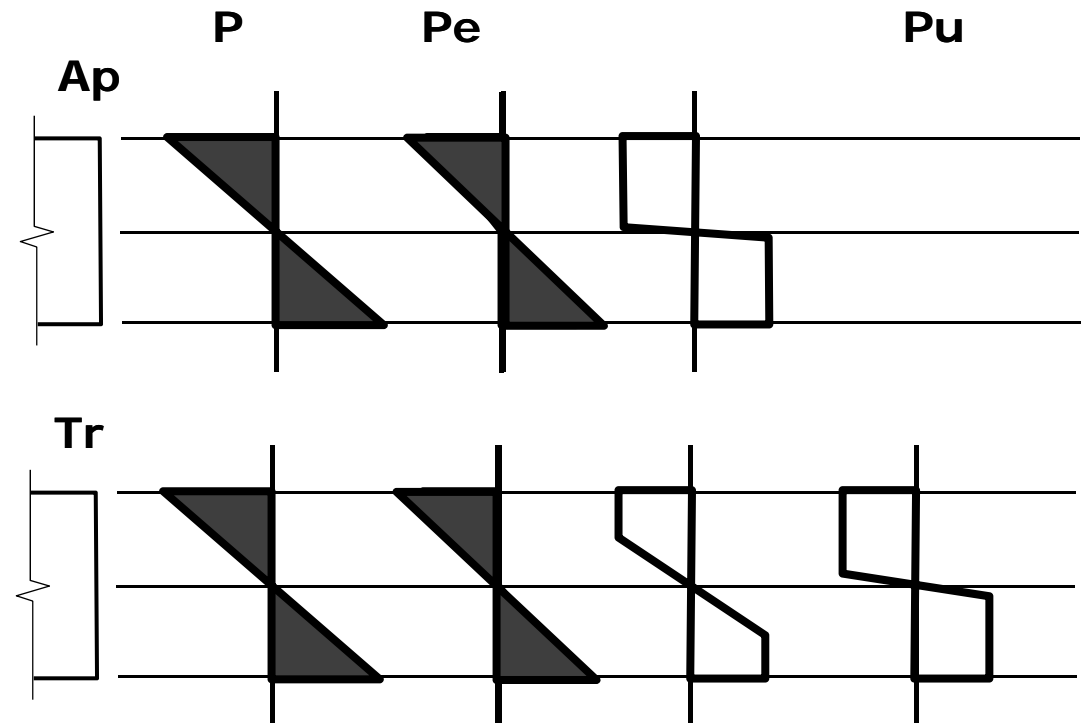
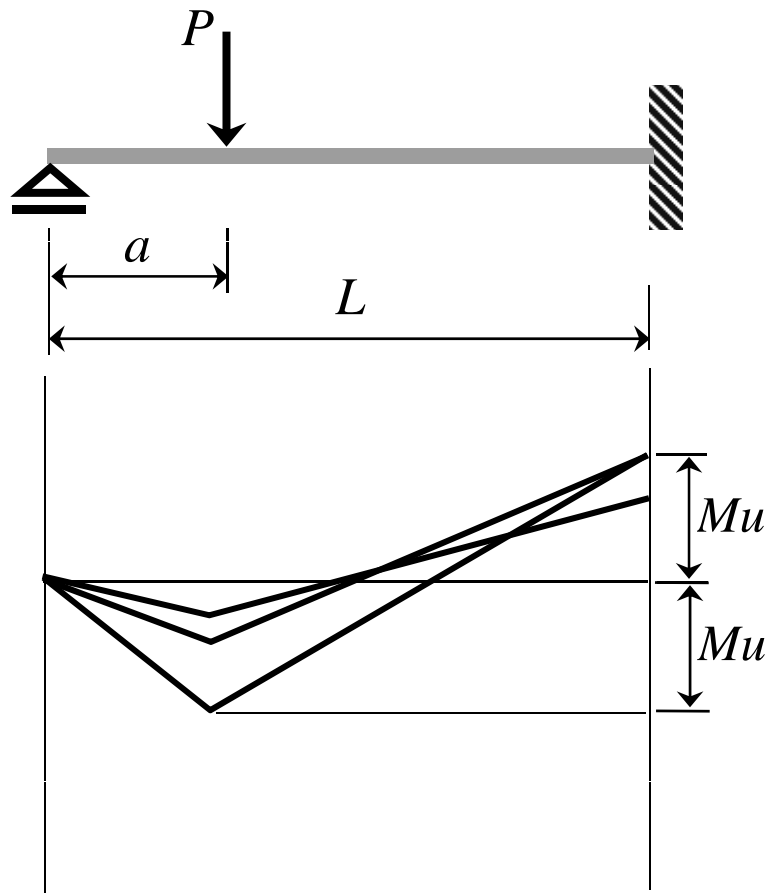
$$P_{CIN} = \frac{\sigma_f b d^2}{L}$$

$$P_{EST} = P_{CIN} = P_U$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

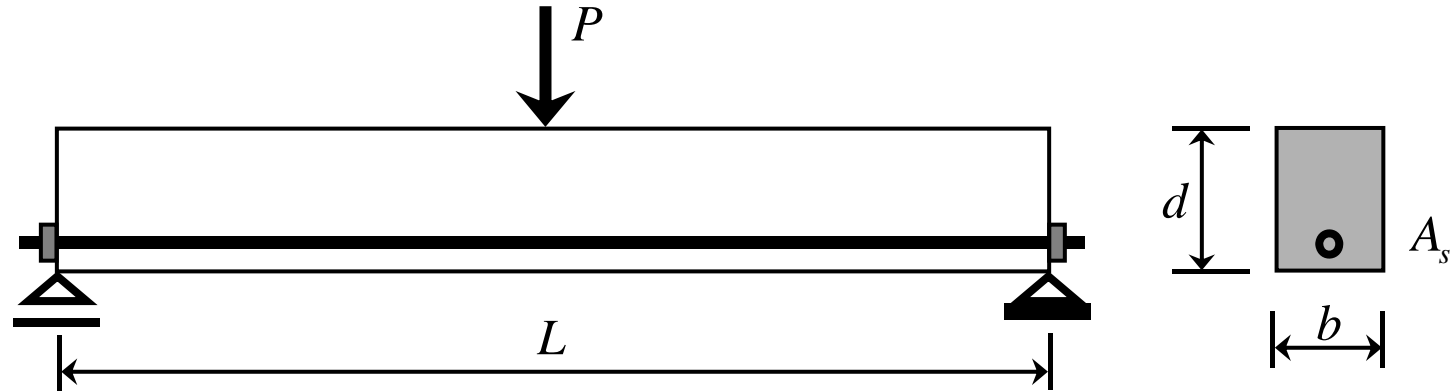
Ejemplos

- **Viga empotrada articulada**



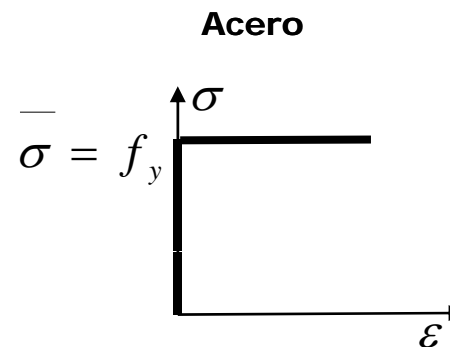
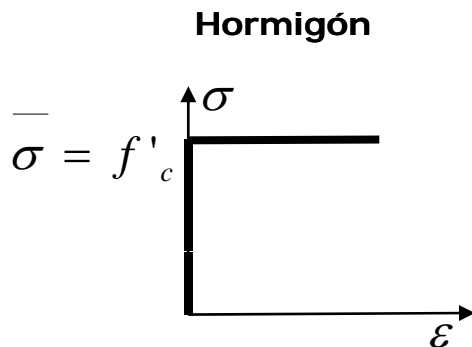
Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga postesada sin adherencia



Hipótesis:

- El hormigón no resiste tensiones de tracción.
- Tanto acero como hormigón son materiales rígido plásticos.

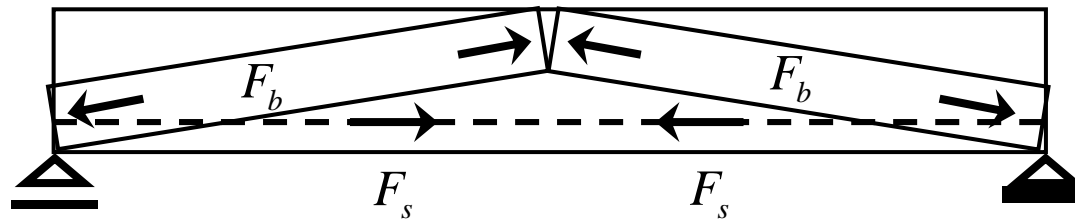


Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga postesada sin adherencia

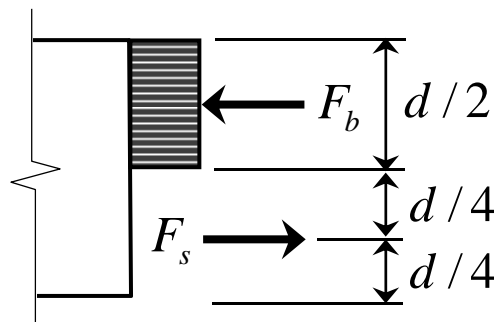
i. Estado Estáticamente Admisible

$$M_{\max}^e = M_{l/2}^e = \frac{PL}{4}$$



$$\sigma_c = f'_c$$

$$\sigma_s = f_y$$



$$F_b = f'_c b \frac{d}{2}$$

$$F_s = f_y A_s$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga postesada sin adherencia

i. Estado Estáticamente Admisible

$$\frac{f'_c bd}{2} = f_y A_s$$

$$M_{\max}^i = \frac{f'_c bd^2}{4} = \frac{f_y A_s d}{2}$$

$$M_{\max}^e = M_{\max}^i$$

$$\frac{P_{EST} L}{4} = \frac{f'_c bd^2}{4} = \frac{f_y A_s d}{2}$$

$$P_{EST} = \frac{f'_c bd^2}{L} = \frac{2 f_y A_s d}{L}$$

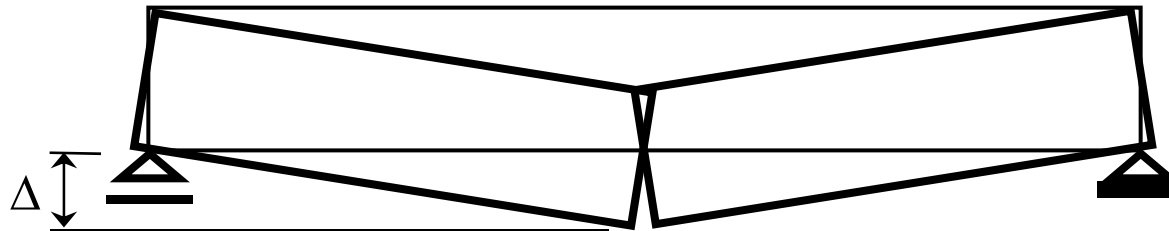
$$P_U \geq P_{EST}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

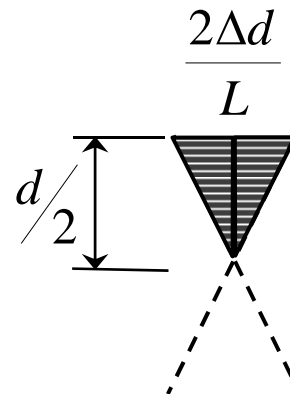
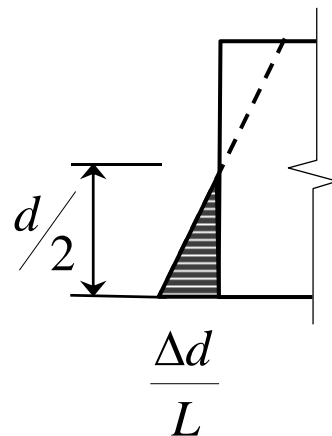
Ejemplos. Viga postesada sin adherencia

ii. Mecanismo Cinemáticamente Admisible

ii.a. El acero no se estira y el hormigón se aplasta en el centro y los extremos.



$$T_e = P\Delta$$



Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga postesada sin adherencia

ii. Mecanismo Cinemáticamente Admisible

ii.a. El acero no se estira y el hormigón se aplasta en el centro y los extremos.

$$T_e = P\Delta$$

$$T_i = 2 \frac{1}{2} \frac{bd}{2} \frac{\Delta d}{L} f'_c + \frac{1}{2} \frac{bd}{2} \frac{2\Delta d}{L} f'_c$$

$$T_i = \frac{bd^2}{L} \Delta f'_c$$

$$T_e = T_i$$

$$P_{CIN} = \frac{f'_c bd^2}{L}$$

$$P_U \leq P_{CIN}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga postesada sin adherencia

iii. Determinación de P_U

$$P_{CIN} = \frac{f'_c b d^2}{L} \quad P_U \leq P_{CIN}$$

Mecanismo Cinemáticamente Admisible



CARGA ÚLTIMA O LÍMITE

Cota Superior

$$P_{EST} = P_{CIN} = P_U$$

Cota Inferior



Estado Estáticamente Admisible

$$P_{EST} = \frac{f'_c b d^2}{L} \quad P_U \geq P_{EST}$$

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga postesada sin adherencia

ii. Mecanismo Cinemáticamente Admisible

ii.b. El acero se estira y el hormigón se aplasta en el centro.

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga articulada - empotrada

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Viga continua

Análisis NL de Estructuras de Barras

Ejemplos. Pórtico biempotrado