



APROVECHAMIENTOS HIDRÁULICOS

TRABAJO FINAL DE CÁTEDRA

- Comportamiento hidráulico de las
turbinas Pelton -

Alumno: Francisco Canatella (12126)

Año: 2021

Contenido

1. Introducción	2
2. Función y componentes del inyector	3
3. Comportamiento hidráulico del inyector	3
3.1. Velocidad teórica	3
3.2. Campo de velocidades en la tobera	4
3.3. Caudal en el inyector	5
3.3.1. Coeficiente de descarga ϕ_{D0}	5
3.3.2. Ecuación característica del inyector	6
3.3.3. Extrapolación para un inyector cualquiera	8
3.3.4. Factor de conversión geométrica	9
3.3.5. Influencia del nivel estático – Reynolds Number effect	10
4. Fuerzas hidráulicas actuantes en el inyector – Dimensionado del servomotor	11
4.1. Servomecanismo externo	11
4.1.1. Fuerza en la superficie de la aguja de regulación	11
4.1.2. Fuerza de retroceso	13
4.1.3. Fuerza en el pistón de alivio	17
4.1.4. Fuerza del resorte	17
4.1.5. Variación de las fuerzas con la carrera de la aguja s	18
4.1.6. Fuerza equilibrante del servomotor	19
4.2. Servomecanismo interno	20
5. Ley de variación temporal de cierre del inyector – Golpe de Ariete	21
6. Impacto del chorro de salida	24
6.1. Geometría de los cangilones	24
6.2. Diagrama de velocidades	25
6.3. Transferencia energética	25
6.4. Máxima utilización de la energía	26
6.5. Número de chorros por rodete	27
7. Elección del diámetro del rodete	29
8. Conclusiones generales	31
9. Bibliografía	31

1. Introducción

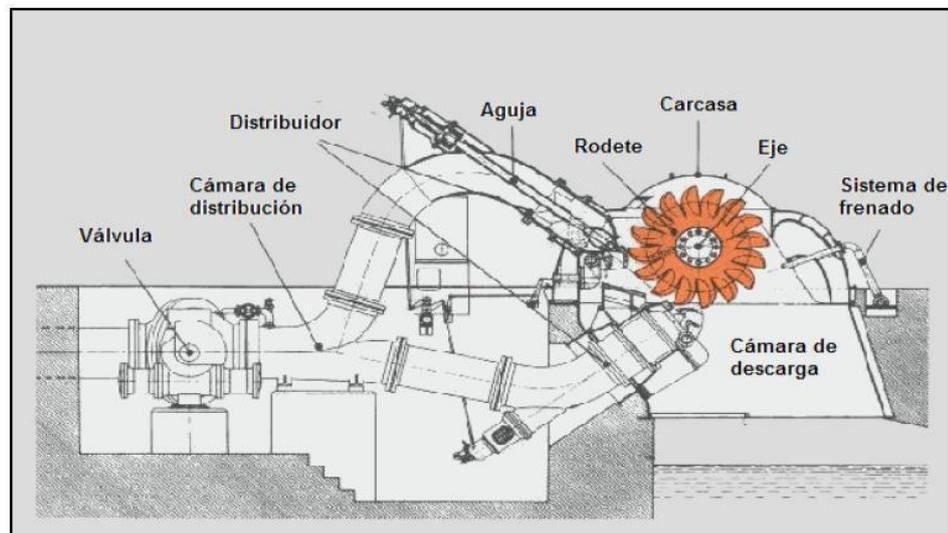
La turbina Pelton es una turbomáquina motora de acción, de flujo tangencial y admisión parcial que consiste en una rueda (*rodete*) dotada de *cangilones* rígidamente unidos en su periferia y unida solidariamente al *rotor* de un generador a través de un *eje*, y está diseñada para transformar la energía cinética de un chorro de agua que impacta sobre los cangilones en energía eléctrica como corriente alterna a través de la rotación conjunta del rodete, el eje y el rotor del generador. Las turbinas Pelton son las turbomáquinas más adecuadas para generar energía en aprovechamientos de *grandes saltos* y *bajos caudales*.

El objetivo del presente informe es realizar un análisis teórico del comportamiento hidráulico de las turbinas Pelton aplicando conceptos de cálculo diferencial, mecánica clásica e hidráulica general para deducir premisas generales que serán de aplicación práctica en el diseño eficiente de sus componentes.

El esquema genérico de un aprovechamiento hidroeléctrico general suele constituirse de una *obra de toma*, *sección de control*, *galería a presión con chimenea de equilibrio* (pudiendo prescindir de estos en algunas ocasiones) y *tubería forzada*. El desarrollo del presente trabajo estará enfocado en el estudio del comportamiento específicamente asociado a turbinas Pelton, comenzando aguas abajo de la tubería forzada, involucrando a los siguientes componentes: el *inyector*, los *cangilones* y el *rodete*.

En la figura 1.1 se muestra un esquema de una turbina Pelton aguas abajo de la tubería forzada, incluyendo los cangilones y los inyectores.

Figura 1.1: Esquema de turbina Pelton equipada con 2 inyectores



Se comenzará analizando en detalle el inyector, indicando su función y sus partes, así como las características hidráulicas de su funcionamiento. También se determinarán las fuerzas actuantes sobre el mismo en estado de servicio, que servirán para el dimensionamiento de los servomotores, y se estudiará el mecanismo de regulación de flujo relacionado con el fenómeno del golpe de Ariete.

Se procederá luego a realizar un estudio de la salida del agua (en forma de chorro) y su impacto sobre los cangilones para la transferencia de energía, considerando la influencia de la geometría de los mismos y relacionando las velocidades involucradas con la eficiencia energética y el diámetro del rodete.

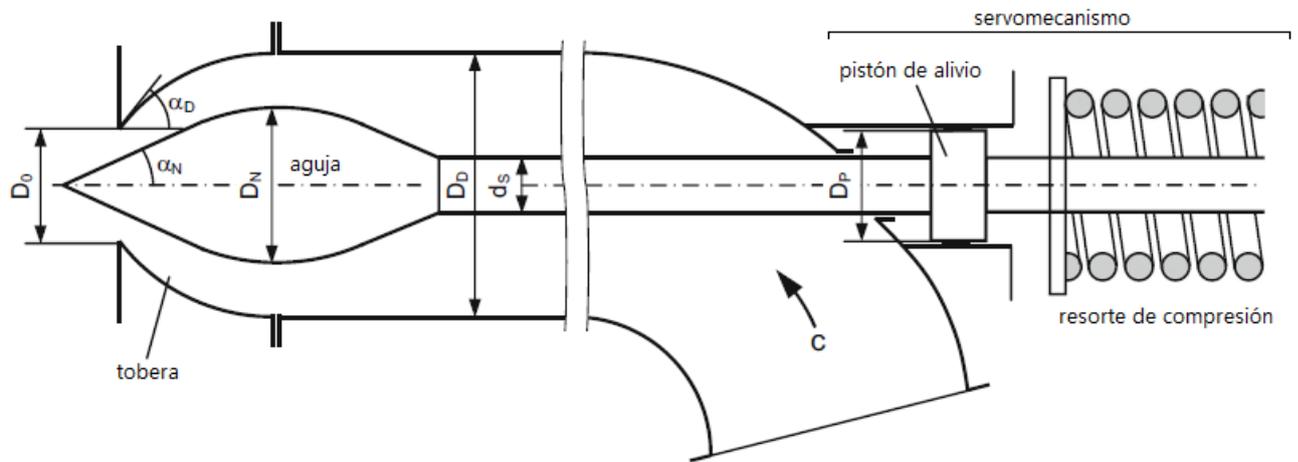
2. Función y componentes del inyector

Las turbinas Pelton pueden contener uno o más inyectores para alimentar el rodete, todos derivados de la *cámara de distribución*, prolongación de la tubería forzada a la que llega el flujo de agua a alta presión (ver figura 1.1).

La misión del inyector es transformar la energía de presión del agua en la cámara de distribución en energía cinética en forma de chorro de agua a presión atmosférica, así como regular el flujo pasante a los efectos de adaptar la generación de energía a las demandas reales de la red.

Cada inyector de la turbina se compone de una *tobera* y una *aguja de regulación* conectada a un *servomecanismo*. Respondiendo a parámetros de diseño hidráulico, la tobera suele ser materializada con un ángulo α_D comprendido entre 42° y 45° y el extremo de la aguja de regulación suele terminar en un ángulo α_N de aproximadamente 25° . En la figura 2.1 a continuación se aprecian los componentes anteriormente nombrados y sus dimensiones.

Figura 2.1: Componentes del inyector de una turbina Pelton



3. Comportamiento hidráulico del inyector

3.1. Velocidad teórica

Las turbinas Pelton son consideradas turbinas *de impulso*. Esto quiere decir que trabajan transformando la energía cinética del agua, que llega sin altura de presión (es decir, a presión atmosférica).

Sea para un inyector, C_0 la velocidad media del chorro de agua y H la energía potencial de posición total del aprovechamiento (salto bruto), haciendo uso del Teorema de Bernoulli al nivel del embalse y a la salida del inyector considerando las pérdidas de carga en la conducción Δ , se puede determinar la velocidad de salida del chorro mediante la ecuación 3.1:

$$H + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{0^2}{2g} = 0 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{C_0^2}{2g} + \Delta \rightarrow C_0 = \sqrt{2gH_N} \quad (ec. 3.1)$$

Siendo $H_N = H - \Delta$ el salto neto del aprovechamiento. La expresión para C_0 de la ecuación 3.1 es una expresión teórica de la velocidad, suponiendo que las pérdidas de carga a la salida del inyector son despreciables y que la sección del chorro es constante. En la realidad, existen pérdidas de carga a la salida del orden del 1% del salto neto y observaciones fotográficas muestran que la sección del chorro puede ser variable (coeficientes de ajuste para la velocidad teórica serán aplicados en apartados subsiguientes).

3.2. Campo de velocidades en la tobera

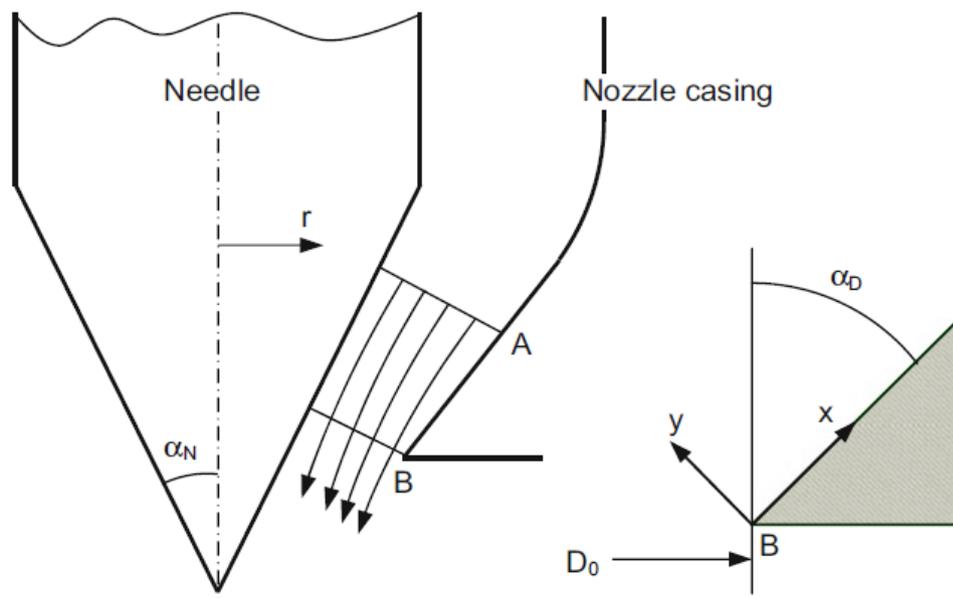
Conocer el campo de velocidades desarrollado dentro del inyector es de suma utilidad tener un anticipo de las velocidades máximas que se pueden desarrollar y así prevenir fenómenos de erosión, desgaste y calcular la vida útil así como definir un plan de mantenimiento de los componentes. En el siguiente apartado se estudiará como varían las velocidades de circulación del agua dentro de la tobera.

Conocido el caudal pasante por el inyector Q (constante), siendo la sección del flujo A y C_m la velocidad media para una sección de la tobera a una distancia x de la salida, la variación de la velocidad con la distancia viene dada por la ecuación 3.2.

$$\frac{dC_m}{dx} = \frac{d\left(\frac{Q}{A}\right)}{dx} = -\frac{Q}{A^2} * \frac{dA}{dx} = -\frac{C_m}{A} * \frac{dA}{dx} \quad (ec. 3.2)$$

En la figura 3.1 a continuación se muestra el esquema de las líneas de corriente a lo largo de la tobera y el sistema de referencia adoptado.

Figura 3.1: Líneas de corriente en la tobera



Observando la figura 3.1 se observa que en la sección A, la distribución de velocidades resulta uniforme. En la salida B, verificaría $C_m=C_0$ de ser la velocidad uniforme. Pero en la adyacencia de la aguja, la velocidad resulta menor y por ende la distribución de velocidades no es uniforme. En consecuencia, la aceleración del flujo en la sección es inhomogénea, siendo más pequeña en la adyacencia de la aguja.

Definiendo en un punto del plano xy de la figura 3.1 y siendo c_x y c_y las respectivas componentes de la velocidad en ambas direcciones ortogonales para ese punto, la ecuación diferencial de las líneas de corriente viene dada por la ecuación 3.3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_y}{c_x} \quad (ec. 3.3)$$

Diferenciando la ecuación 3.3 respecto a x , aplicando la regla de la cadena se llega a la ecuación 3.4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c_x^2} \left(c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_x \frac{\partial c_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} - c_y \frac{\partial c_x}{\partial x} - c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \quad (ec. 3.4)$$

Asumiendo la condición de *flujo irrotacional*, debe cumplirse la ecuación 3.5 para las velocidades ortogonales.

$$\frac{\partial c_y}{\partial x} = \frac{\partial c_x}{\partial y} \quad (ec. 3.5)$$

Asimismo, la *ecuación de continuidad* debe verificarse para cualquier punto en cualquier línea de corriente conforme a la ecuación 3.6.

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0 \quad (ec. 3.6)$$

Reemplazando 3.5 y 3.6 en 3.4 se simplifica la expresión a la ecuación 3.7.

$$c_x \frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 - \frac{c_y^2}{c_x^2} \right) \frac{\partial c_x}{\partial y} - 2 \frac{c_y}{c_x} \frac{\partial c_x}{\partial x} \quad (ec. 3.7)$$

Definiendo un nuevo sistema de coordenadas $\xi - \eta$ con ξ tangente a la línea de corriente y η normal a esta, se definen las velocidades $c_\eta = 0$ y $c_\xi = c$ y la ecuación 3.4 se convierte en la ecuación 3.8.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{c} \frac{dc}{d\eta} \quad (ec. 3.8)$$

Donde $dc/d\eta \neq 0$ debido a que la distribución de velocidad es no uniforme. Además, como se observa en la figura 3.1, entre A y B las líneas de corriente se curvan, por lo que $d^2\eta / d\eta\xi^2 \neq 0$.

3.3. Caudal en el inyector

3.3.1. Coeficiente de descarga ϕ_{D0}

Como se mencionó en apartados anteriores, una de las funciones del inyector es regular el flujo pasante a los efectos de ajustar la generación de energía a las demandas en cada instante. La regulación se logra a partir de ajustar la carrera de la aguja dentro de la tobera.

El caudal pasante por la salida del inyector Q_{jet} se calcula a partir de la variable auxiliar definida como *coeficiente de descarga* ϕ_{D0} cuyo valor viene dado por la expresión 3.9.

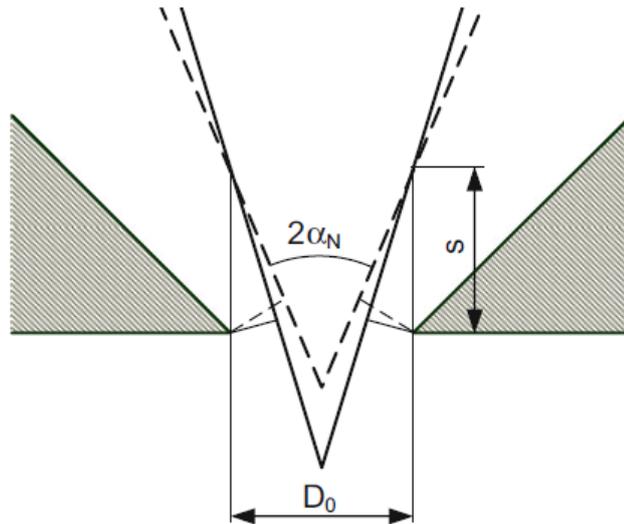
$$\phi_{D0} = \frac{Q_{jet}}{Q_{D0}} = \frac{Q_{jet}}{A_{D0} * C_0} = \frac{Q_{jet}}{0,25 \pi D_0^2 \sqrt{2gH}} \quad (ec. 3.9)$$

Siendo:

- Q_{jet} el caudal real que posee el chorro de salida
- Q_{D0} el caudal teórico de flujo pasante por la sección A_{D0} a una velocidad media C_0 .
- $A_{D0} = 0,25 \pi D_0^2$ el área de la salida de la tobera (sección circular).
- $C_0 = \sqrt{2gH}$ la velocidad máxima teórica del chorro (ecuación 3.1).
- D_0 el diámetro de la salida de la tobera.

En la figura 3.2 se aprecia un esquema de la boquilla de salida de la tobera de diámetro D_0 junto con la aguja. La carrera se denota numéricamente como s y se define según se especifica en la figura.

Figura 3.2: Boquilla de la tobera, aguja de regulación y definición de s



Considerando al caudal como el producto entre la velocidad y la sección, suponiendo un diámetro del chorro a la salida d_0 a la velocidad C_0 definida en la ecuación 3.1, la expresión analítica de Q_{jet} viene dada por la ecuación 3.10.

$$Q_{jet} = 0,25\pi d_0^2 \sqrt{2gH} \quad (ec. 3.10)$$

Reemplazando la ecuación 3.10 en la ecuación 3.9 se llega a la expresión simplificada del coeficiente de descarga en la ecuación 3.11.

$$\phi_{D_0} = \frac{d_0^2}{D_0^2} \quad (ec. 3.11)$$

NOTA: Cabe recordar que se ha llegado a la ecuación 3.11 considerando válida la ecuación 3.1, a partir de suponer las pérdidas de carga en el inyector despreciables. Una expresión real más ajustada surge de computar las pérdidas singulares a la salida h_v y se muestra a continuación.

$$\phi_{D_0} = \frac{d_0^2}{D_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h_v}{H} \right) \quad (ec. 3.11 - bis)$$

Donde en la práctica el cociente $h_v/H \rightarrow 0$, lo que permite utilizar con buena precisión la ecuación 3.11.

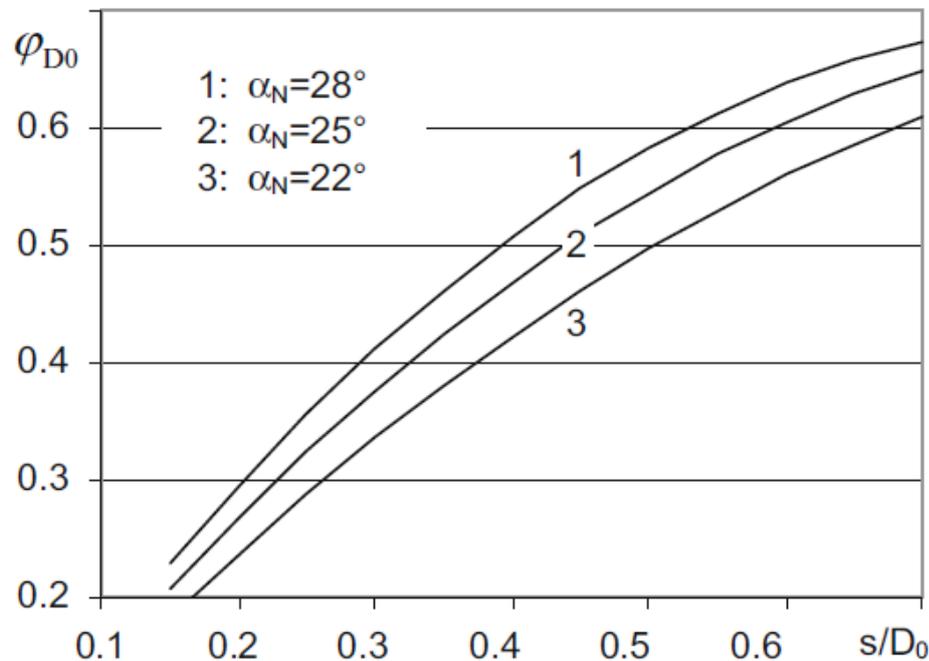
3.3.2. Ecuación característica del inyector

Como anteriormente se mencionó, el coeficiente de descarga es función de la carrera s de la aguja de regulación, pero también depende de la forma de la terminación de la aguja. Esto se ilustra en la figura 3.2, donde visualmente se deduce que para ángulos α_N mayores, la sección neta de salida A_D es mayor para igual valor de s (línea de trazo).

Las curvas mostradas a continuación en la figura 3.3 fueron obtenidas experimentalmente y representan la relación entre la carrera de la aguja con el coeficiente de descarga. Estas curvas

son útiles para el diseño del inyector, ya que permite definir para cada porcentaje del caudal máximo (ϕ_{D0}), la posición respectiva que debe fijarse en la aguja.

Figura 3.3: Coeficiente de descarga en función de s y α_N



Las curvas 1, 2 y 3 de la figura 3.3 responden a una ley de variación cuadrática en función de dos coeficientes de calibración a y b como se muestra en la ecuación 3.12, conocida como la *ecuación característica del inyector*.

$$\phi_{D0} = a \left(\frac{s}{D_0} \right) + b \left(\frac{s}{D_0} \right)^2 \quad (\text{ec. 3.12})$$

Aplicando la ecuación 3.9 considerando el punto operativo nominal de la turbina, se obtiene el coeficiente de descarga nominal $\phi_{D0,N}$ como sigue:

$$\phi_{D0,N} = \frac{Q_{jet,N}}{0,25 \pi D_0^2 \sqrt{2gH_N}} \quad (\text{ec. 3.9 - bis})$$

Donde H_N es el salto neto nominal y $Q_{jet,N}$ es el caudal nominal del inyector, que corresponde a la apertura máxima s_{max} , de modo que al aplicar la ecuación 3.12 queda:

$$\phi_{D0,N} = a \left(\frac{s_{max}}{D_0} \right) + b \left(\frac{s_{max}}{D_0} \right)^2 \quad (\text{ec. 3.12 - bis})$$

Finalmente, combinando las ecuaciones 3.9 y 3.12 para un punto operativo cualquiera y el punto operativo nominal, se puede operar algebraicamente y llegar a la ecuación 3.13 del *gasto relativo*.

$$\frac{Q_{jet}}{Q_{jet,N}} = \frac{s}{s_{max}} \left(k_1 + k_2 \frac{s}{s_{max}} \right) \sqrt{\frac{H}{H_N}} \quad (3.13)$$

Siendo H_N el salto neto nominal y $Q_{jet,N}$ el caudal nominal del inyector, y las constantes k_1 y k_2 vienen dadas por las ecuaciones 3.14 - a y 3.14 - b en función de las constantes de calibración a y b .

$$k1 = \frac{a}{\phi_{D0,N}} \left(\frac{s_{max}}{D_0} \right) \quad (ec. 3.14 - a)$$

$$k2 = \frac{b}{\phi_{D0,N}} \left(\frac{s_{max}}{D_0} \right)^2 \quad (ec. 3.14 - b)$$

Otra forma de expresar la ecuación característica del inyector es, en lugar de que esté en función del coeficiente de descarga, ponerla directamente en función del caudal del chorro Q_{jet} . A partir de la ecuación 3.13 operando se llega a la ecuación 3.15, que también es la *ecuación característica del inyector*.

$$\frac{Q_{jet}}{\sqrt{H}} = \frac{s}{s_{max}} \left(m1 + m2 \frac{s}{s_{max}} \right) \quad (ec. 3.15)$$

Donde:

$$m1 = k1 \frac{Q_{jet,N}}{\sqrt{H_N}} \quad (ec. 3.16 - a)$$

$$m2 = k2 \frac{Q_{jet,N}}{\sqrt{H_N}} \quad (ec. 3.16 - b)$$

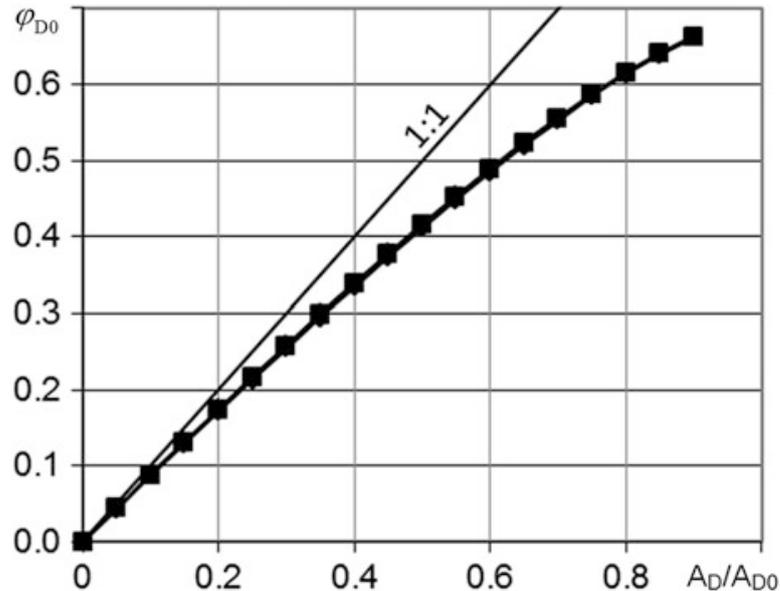
La ecuación característica del inyector presentada en la ecuación 3.15 presenta el inconveniente de que las constantes $m1$ y $m2$ no son adimensionales.

3.3.3. Extrapolación para un inyector cualquiera

Las ecuaciones expuestas anteriormente son aplicables para un determinado tipo de inyector. A continuación se trata de buscar una expresión general para el caudal aplicable para cualquier tipo de inyector. De la observación de la figura 3.2, puede deducirse por geometría que la sección neta de salida A_D puede expresarse en función de s y α_N según la ecuación 3.17.

$$A_D = \pi \left[1 - \frac{s}{2D_0} \text{sen}(2\alpha_N) \right] D_0 \cdot s \cdot \text{sen}(\alpha_N) \quad (ec. 3.17)$$

La expresión 3.13 expone que, las dos variables que definen el coeficiente de descarga, s y α_N (ver figura 3.3), definen a su vez de forma unívoca al parámetro A_D . Esto permitiría expresar las curvas de la figura 3.3 en función de s y α_N como una sola curva para ϕ_D en función de A_D . Dicha curva es la que se muestra en la figura 3.4.

Figura 3.4: Coeficiente de descarga en función de A_D 

Se concluye de la figura 3.4 que la única variable que define el coeficiente de descarga es la sección neta de salida A_D , que es función del tipo de aguja (α_N) y de la carrera (s).

3.3.4. Factor de conversión geométrica

El coeficiente de descarga ϕ_{D0} definido en el apartado 3.3.1 está expresado en función del área de la salida de la tobera A_{D0} , como se muestra en la ecuación 3.9. De observar la figura 3.4 se infiere que al existir una relación biunívoca entre el caudal (coeficiente de descarga) y el área neta de salida A_D , podría perfectamente definirse un nuevo coeficiente de descarga normalizado en función de dicha área ϕ_D , como se propone en la ecuación 3.18.

$$\phi_D = \frac{Q_{jet}}{Q_D} = \frac{Q_{jet}}{A_D * C_0} \quad (ec. 3.18)$$

Siendo:

- Q_D el caudal teórico de flujo pasante por la sección A_D a una velocidad media C_0 .
- A_D el área neta de salida de la tobera (ecuación 3.17)
- $C_0 = \sqrt{2gH}$ la velocidad máxima del chorro (ecuación 3.1).

Comparando las ecuaciones 3.9 y 3.18 se llega a la relación recíproca presentada en la ecuación 3.19.

$$\frac{\phi_{D0}}{\phi_D} = \frac{A_D}{A_{D0}} \quad (ec. 3.19)$$

La ecuación 3.19 representa un *factor de conversión geométrica* y tiene la siguiente utilidad práctica. Supónganse dos inyectores diferentes con ángulos en la terminación de las agujas α_{N1} y α_{N2} , y supóngase conocida la curva del coeficiente de descarga para el inyector 1, como se muestra en la ecuación 3.20.

$$\phi_{D0(1)} = f\left(\frac{s}{D_0}, \alpha_{N1}\right) \quad (ec. 3.20)$$

Conociendo la geometría del inyector 1 se puede conocer el área neta de apertura $A_{D(1)}$ (ecuación 3.17) y aplicando la ecuación 3.19 se conoce el coeficiente de descarga normalizado $\phi_{D(1)}$ dado por la ecuación 3.21.

$$\phi_{D(1)} = \phi_{D0(1)} \frac{A_{D0}}{A_{D(1)}} \quad (\text{ec. 3.21})$$

Pero como el coeficiente de descarga normalizado solamente depende del área neta de apertura y no de la geometría propiamente, entonces es independiente de α_N e igual para ambos inyectores. Matemáticamente se puede afirmar lo expresado en la ecuación 3.22.

$$\phi_{D(1)} = \phi_{D(2)} = \phi_D \quad (\text{ec. 3.22})$$

Por último, luego de conocido ϕ_D se puede conocer la curva del coeficiente de descarga para el inyector 2 aplicando la ecuación 3.19 y despejando, resultando en la ecuación 3.23.

$$\phi_{D0(2)} = \phi_D \frac{A_{D(2)}}{A_{D0}} = \phi_{D0(1)} \frac{A_{D0}}{A_{D(1)}} \frac{A_{D(2)}}{A_{D0}} = \phi_{D0(1)} \frac{A_{D(2)}}{A_{D(1)}} \quad (\text{ec. 3.23})$$

Con $A_{D(2)}$ determinado por la ecuación 3.17 y A_{D0} ya conocida.

Expresada de forma genérica, la ecuación 3.23 representa la *Ley de conversión de la característica del inyector* (ecuación 3.24), a través de la cual conocida la curva del coeficiente de descarga de un inyector j se puede conocer la de otro i con geometría diferente.

$$\phi_{D0(i)} = \phi_{D0(j)} \frac{A_{D(i)}}{A_{D(j)}} \quad (\text{ec. 3.24})$$

En situaciones prácticas, el inyector j mencionado en la ecuación 3.24 podría ser un modelo calibrado de laboratorio.

3.3.5. Influencia del nivel estático – Reynolds Number effect

Con las ecuaciones y gráficos presentados en los apartados 3.3.1 a 3.3.4 se puede calcular el caudal pasante por un inyector aplicando el coeficiente de descarga. Todas las ecuaciones presentadas son independientes del nivel estático en el embalse, lo que implicaría que no habría ninguna diferencia al tratarse de saltos bajos (modelos de laboratorio) o altos (aprovechamientos reales) teniendo las ecuaciones la misma validez.

Sin embargo, numerosas observaciones han reportado que para prototipos reales instalados con saltos altos, los coeficientes de descarga medidos resultan deficitarios respecto a los respectivos modelos de laboratorio a escala, con saltos bajos. Dicha diferencia puede alcanzar hasta un 5%. Dado a que, como ya se mencionó, las pérdidas singulares son muy pequeñas, se deduce que la discrepancia no es debido a ellas, sino a la sección transversal del chorro de salida. Dicha hipótesis es respaldada con observaciones fotográficas y equipos láser. Estos efectos son debidos a configuración diferente que adoptan las líneas de corriente por el efecto la capa límite en las adyacencias de la tobera, que también se debe al escalado de dimensiones del modelo. Por esta razón, el fenómeno se ha nombrado como el *Efecto del número de Reynolds*.

4. Fuerzas hidráulicas actuantes en el inyector – Dimensionado del servomotor

En el apartado a continuación se realiza un estudio cuantitativo de las fuerzas que se ejercen sobre el inyector mientras este está en servicio en la turbina, a los efectos de asegurar que el servomecanismo sea capaz de mover la aguja contrarrestando a las fuerzas opuestas generadas por el fluido y así ser capaz de cumplir su propósito de regulación.

Un criterio de diseño comúnmente aceptado es que la resultante de todas las fuerzas activas actuantes en la aguja presente una *tendencia al cierre*, de esa manera cualquier desperfecto mecánico del servomecanismo puede asegurar un corte automático del flujo y evitar sobrevelocidades excesivas.

Para el cómputo de las fuerzas se discriminan dos criterios de diseño distintos: Servomecanismo externo y servomecanismo interno.

4.1. Servomecanismo externo

El servomotor y sus componentes se encuentran por fuera de la tubería, como se muestran en la figura 2.1. Tiene la ventaja de que se garantiza un fácil acceso al mismo en caso de eventuales tareas de reparación y mantenimiento, y la desventaja de que la tubería debe curvarse pronunciadamente a la llegada de la tobera, influyendo en la calidad del chorro.

Las fuerzas actuantes que a continuación se analizan y deben estar en equilibrio con la fuerza de reacción del servomotor son: La fuerza en la superficie de la aguja de regulación, la fuerza de retroceso, la fuerza sobre el pistón de alivio y la fuerza del resorte.

4.1.1. Fuerza en la superficie de la aguja de regulación

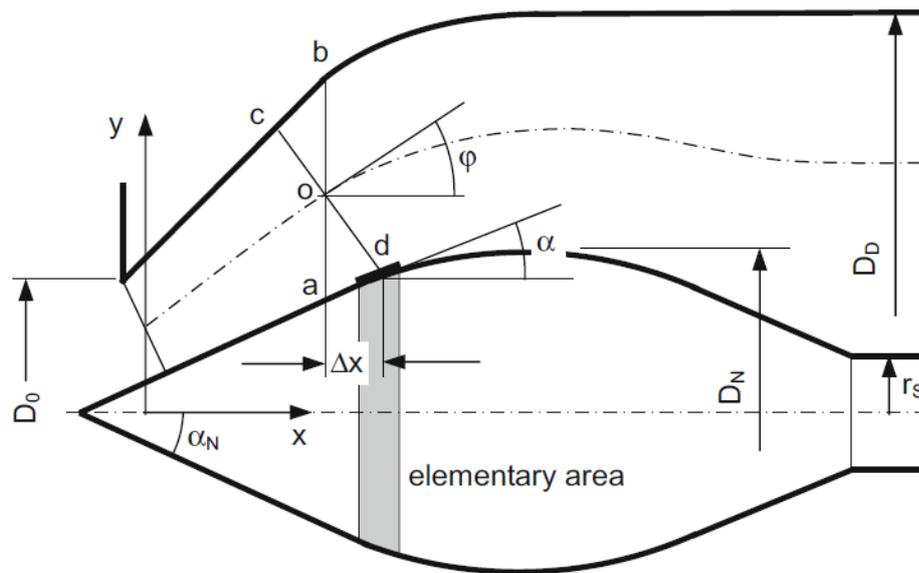
Su resultante se obtiene de la integración de las presiones en la superficie de la cabeza de la aguja, empleando generalmente métodos numéricos discretizando la aguja en segmentos suficientemente pequeños como se muestra en la figura 4.1.

Suponiendo una carrera genérica de la aguja s , observando la figura 4.1, por geometría se deduce que el área cónica A correspondiente a la coordenada x del segmento en estudio por donde circula el fluido responde a la ecuación 4.1.

$$A = \frac{\pi(y_c - y_d)}{\cos(\phi)} \quad (ec. 4.1)$$

Siendo y_c e y_d las coordenadas Y de los puntos c y d respectivamente.

Figura 4.1: Discretización de la aguja



Aplicando el teorema de Bernoulli entre la sección considerada y el embalse (considerando las pérdidas de carga utilizando el salto neto), queda la ecuación 4.2.

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{\left(\frac{Q_{jet}}{A}\right)^2}{2g} = H_N + \frac{p_{atm}}{\gamma} \quad (ec. 4.2)$$

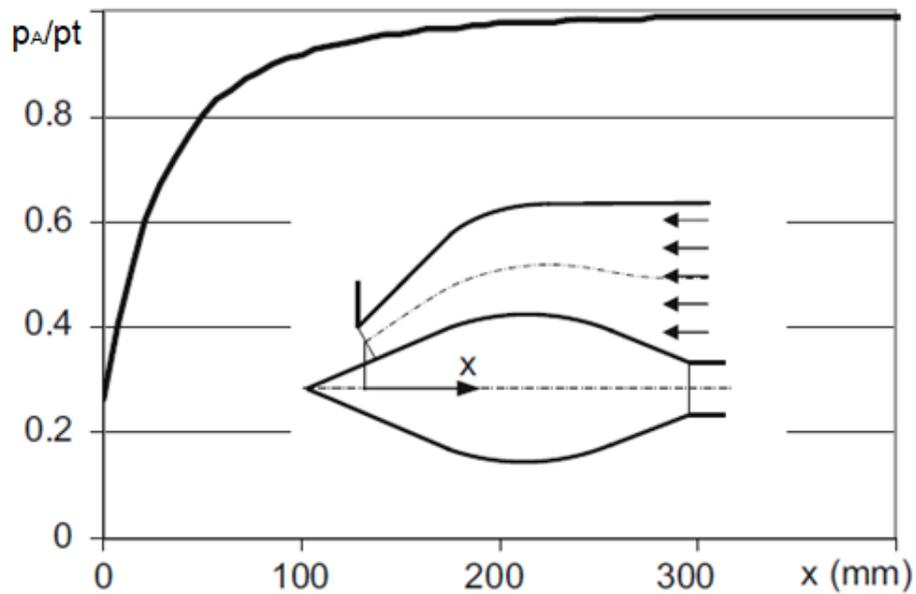
Donde:

- p_A es la presión correspondiente a la sección en estudio, incluyendo la atmosférica.
- p_{atm} es la presión atmosférica.
- H_N es el salto neto.
- Q_{jet} es el caudal pasante por el inyector, determinado como se vio en el apartado 3.3.

Despejando de la ecuación 4.2 y multiplicando por $\gamma = \rho g$, se obtiene la expresión para calcular la presión en la aguja, dada por la ecuación 4.3.

$$p_A = (p_N + p_{atm}) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_{jet}}{A}\right)^2 \quad (ec. 4.3)$$

Siendo $p_N = H_N \cdot \gamma$ la presión neta en la tobera. Observar que en la determinación de p_A se incluye la presión atmosférica, que no ha sido hasta ahora numéricamente cancelada. En la figura 4.2 se muestra la variación de presiones p_A en la superficie de la cabeza de la aguja de regulación.

Figura 4.2: Diagrama de presiones sobre la aguja normalizado respecto a la presión de entrada p_i 

Con el valor de la presión obtenido en la ecuación 4.3 se puede calcular para el i – ésimo segmento considerado la fuerza tributaria ΔF_i en dirección X con la ecuación 4.4.

$$\Delta F_i = p_{Ai} * A_i * [-\text{sen}(\alpha_i)] \quad (\text{ec. 4.4})$$

Donde A_i se refiere al área de contacto de la faja en estudio y el seno de α se coloca negativo debido a la convención de signos adoptada para este caso: La fuerza horizontal será *positiva* si presenta *tendencia al cierre*.

Por último, la integral de las fuerzas resultantes en toda la superficie se realiza en forma discreta mediante la ecuación 4.5 para obtener la *Fuerza en la superficie de la aguja de regulación*.

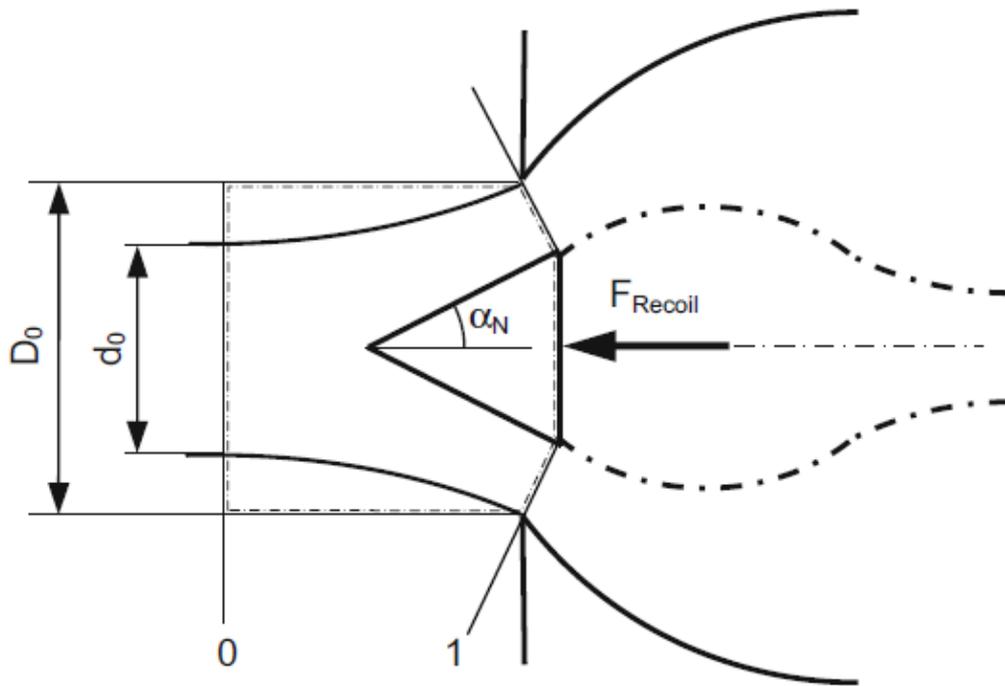
$$F1 = \sum \Delta F_i = \sum p_{Ai} * A_i * [-\text{sen}(\alpha_i)] \quad (\text{ec. 4.5})$$

4.1.2. Fuerza de retroceso

Esta fuerza aparece aplicada en el extremo de la cabeza de la aguja de regulación en dirección puramente horizontal con tendencia a la apertura (retroceso de la aguja), y es producto de la contracción de las líneas de corriente debido al estrangulamiento de la sección de flujo pasante.

Para su determinación analítica se recurre al principio de conservación del momento lineal. Considérese el esquema mostrado en la figura 4.3, donde se toma como 1 a la sección de salida de la tobera y como 0 a la sección de chorro estable con diámetro d_o .

Figura 4.3: Fuerza de retroceso (recoil)



El área neta de salida en la sección 1 (A_1) se calcula como ya se vio empleando la ecuación 3.17, que se repite a continuación por conveniencia.

$$A_1 = \pi \left[1 - \frac{s}{2D_0} \text{sen}(2\alpha_N) \right] D_0 \cdot s \cdot \text{sen}(\alpha_N) \quad (\text{ec. 3.17})$$

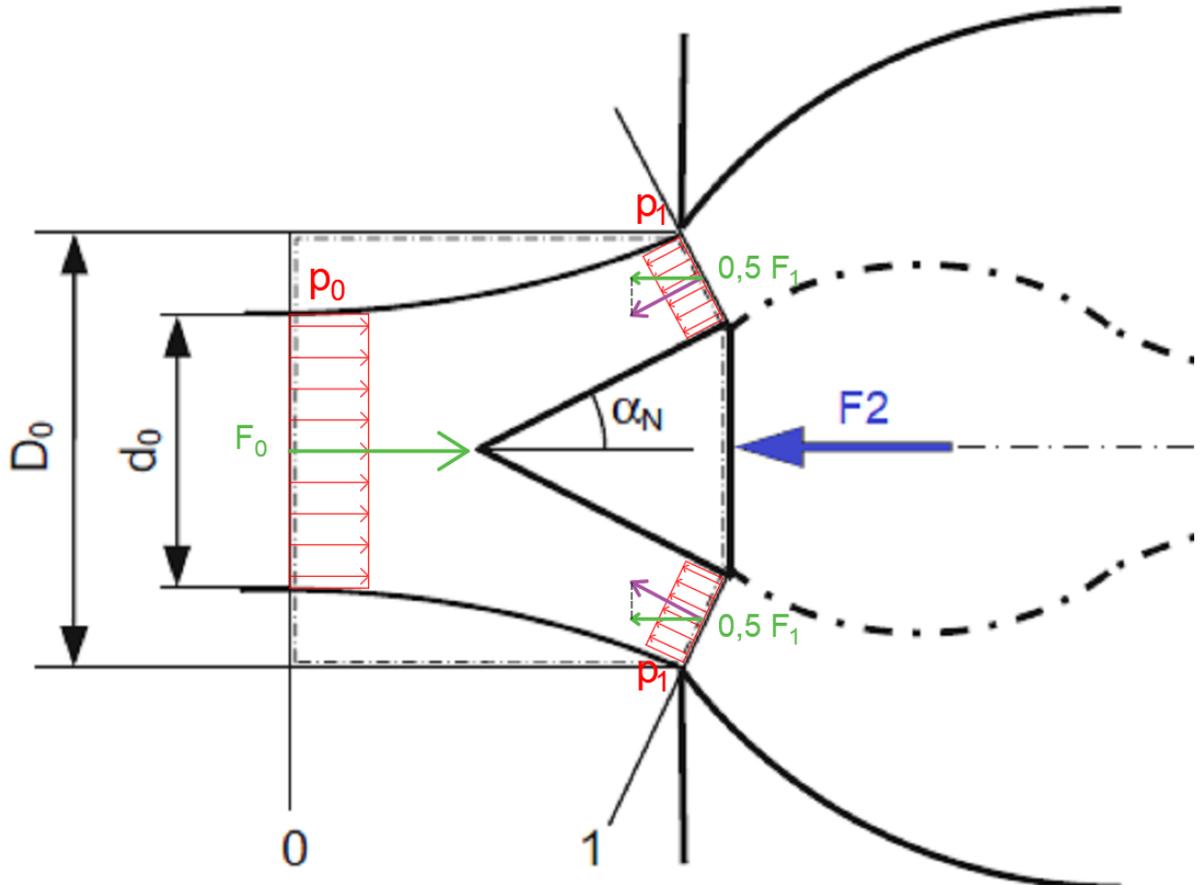
Mientras que el área del chorro en la sección 0 se determina como una sección circular en función de su diámetro d_0 .

La segunda ley de Newton establece que el momento lineal de un sistema P permanece constante salvo que se ejerza sobre el mismo una fuerza externa con resultante distinta de cero. En dicho caso, la resultante de las fuerzas actuantes $\sum F$ tiene una magnitud igual a la variación del momento lineal, dada por la ecuación 4.6.

$$\sum F = \Delta P = P_0 - P_1 \quad (\text{ec. 4.6})$$

Denotando a la fuerza de retroceso como F_2 , se muestra en la figura 4.4 el esquema de fuerzas horizontales actuando en el fluido.

Figura 4.4: Fuerzas horizontales actuantes



De la figura 4.4 se deduce que:

$$F_0 = p_0 * A_0 \quad (ec. 4.7 - a)$$

$$F_1 = p_1 * A_1 * \cos(\alpha_N) \quad (ec. 4.7 - b)$$

Asimismo, el momento lineal en las secciones 0 y 1 resulta del producto de la masa por la velocidad \$C\$ del fluido y queda expresado como en la ecuación 4.8 (al ser régimen permanente, se supone un tiempo \$\Delta t\$ de magnitud unitaria).

$$P = m * C$$

$$P = (\rho * vol) * C$$

$$P = [\rho * (Q_{jet} * \Delta t)] * C$$

$$P = [\rho * (C * A * 1)] * C$$

$$P = \rho * A * C^2 \quad (ec. 4.8)$$

De esta forma se plantea el principio de conservación del momento lineal reescribiendo la ecuación 4.6 como sigue:

$$F_2 + F_1 - F_0 = P_0 - P_1 \quad (ec. 4.9 - a)$$

$$F_2 + p_1 * A_1 * \cos(\alpha_N) - p_0 * A_0 = \rho * [A_0 * C_0^2 - Q_{jet} * C_1 \cos(\alpha_N)] \quad (ec. 4.9 - b)$$

Obsérvese que en la ecuación 4.9 – b se prefirió reemplazar el término $A_1 * C_1^2$ por el término equivalente $Q_{jet} * C_1$ para introducir como variable el caudal del inyector. Además se multiplica la velocidad C_1 por el coseno de α_N para considerar la proyección en la dirección horizontal

De la ecuación 4.9 se puede despejar y queda la ecuación 4.10.

$$F2 = \rho * [A_0 * C_0^2 - Q_{jet} * C_1 * \cos(\alpha_N)] - p_1 * A_1 * \cos(\alpha_N) + p_0 * A_0 \quad (ec. 4.10)$$

Aplicando el teorema de Bernoulli entre la sección 1 (a presión p_1) y el embalse, (considerando las pérdidas de carga a través del salto neto), queda la ecuación 4.11.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{C_1^2}{2g} = H_N + \frac{p_{atm}}{\gamma} \quad (ec. 4.11)$$

Donde:

- p_{atm} es la presión atmosférica.
- H_N es el salto neto.
- C_1 la velocidad del fluido en la sección 1.

Despejando de la ecuación 4.11 y multiplicando por $\gamma = \rho g$, se obtiene una expresión para p_1 dada por la ecuación 4.12.

$$p_1 = (p_N + p_{atm}) - \frac{\rho}{2} C_1^2 = p_N + p_{atm} - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_{jet}}{A_1} \right)^2 \quad (ec. 4.12)$$

Siendo $p_N = H_N * \gamma$ la presión neta en la tobera.

Recordando la expresión para C_0 representada en la ecuación 3.1 y aplicando nuevamente la definición de presión neta $p_N = H_N * \gamma$, multiplicando y dividiendo por $\gamma = \rho g$ se llega a la expresión 4.13 para la velocidad del chorro en la sección 0.

$$C_0 = \sqrt{2gH_N} = \sqrt{2 * \left(\frac{g}{\gamma} \right) (H_N * \gamma)} \rightarrow C_0^2 = \frac{2}{\rho} * p_N \quad (ec. 4.13)$$

Por último, recordando que $p_0 = p_{atm}$, reemplazando las ecuaciones 4.12 y 4.13 en la ecuación 4.10 se obtiene la expresión definitiva para la *Fuerza de retroceso* dada por la ecuación 4.14.

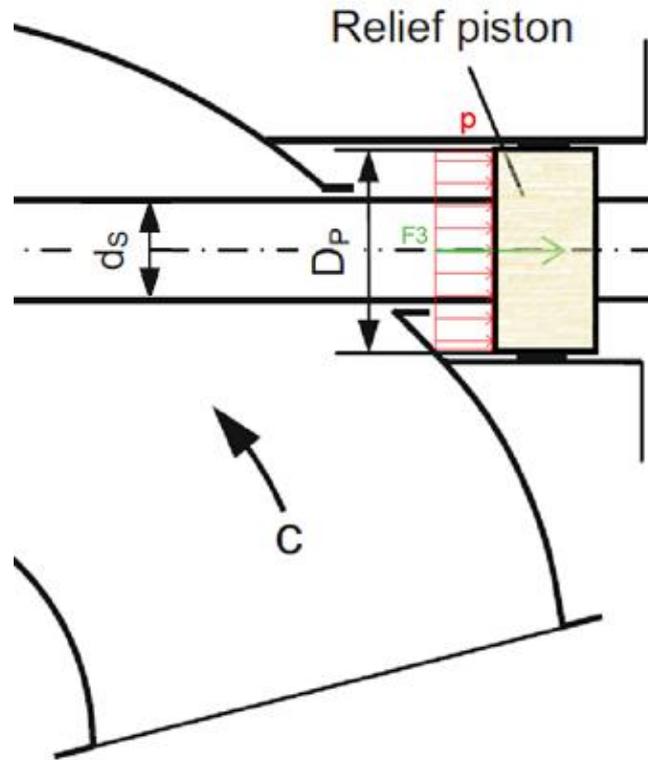
$$F2 = p_N [2A_0 - A_1 \cos(\alpha_N)] + p_{atm} [A_0 - A_1 \cos(\alpha_N)] - \frac{\rho}{2} * \frac{Q_{jet}^2}{A_1} * A_1 \cos(\alpha_N) \quad (ec. 4.14)$$

Es importante destacar de la expresión 4.15 que la presión atmosférica p_{atm} no se cancela e influye en la determinación de la fuerza total de retroceso. También se pone de manifiesto que, como se observa en la figura 4.4, la fuerza de retroceso $F2$ actúa en dirección positiva +X en el fluido. A causa del principio de acción y reacción, el fluido ejerce una fuerza sobre la aguja de igual magnitud y sentido contrario, con tendencia a la apertura. Este será el sentido de la fuerza considerado para posteriormente verificar el equilibrio global.

4.1.3. Fuerza en el pistón de alivio

En la figura 2.2 se observa la ubicación del pistón de alivio de diámetro D_p . Al estar rodeado del fluido circulante a presión, actúa sobre el mismo una carga distribuida uniformemente en toda su superficie como se muestra en la figura 4.5.

Figura 4.5: Presión actuante y fuerza resultante en el pistón de alivio



El valor de la presión p actuando se puede determinar aplicando el teorema de Bernoulli respecto al embalse, siendo C la velocidad de circulación con la ecuación 4.15.

$$\frac{(p + p_{atm})}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = H_N + \frac{p_{atm}}{\gamma} \quad (ec. 4.15)$$

Considerando a la altura de velocidad despreciable frente a los demás términos de la ecuación 4.15 se despeja el valor de p como se muestra en la ecuación 4.16.

$$p = H_N * \gamma = p_N \quad (ec. 4.16)$$

Siendo $p_N = H_N * \gamma$ y la presión neta en la tobera. La fuerza resultante $F3$ acotada en la figura 4.5 se calcula integrando el diagrama de presiones en el área del pistón como se muestra en la ecuación 4.17.

$$F3 = \iint p \, dA = 0,25\pi (D_p^2 - d_s^2) p_N \quad (ec. 4.17)$$

Donde D_p y d_s se encuentran acotados en la figura 4.5.

4.1.4. Fuerza del resorte

Al comienzo del apartado 4 se mencionó que un correcto criterio de diseño del inyector requiere que la resultante de las fuerzas hidráulicas actuantes en la aguja presente una tendencia al

cierre. Esto no se cumple en todos los casos en especial para valores de carrera de la aguja s altos, por lo que las fuerzas activas del fluido presentarán una tendencia a la apertura y debe colocarse un resorte de compresión que tienda a empujar la aguja hacia la boquilla de la tobera.

La fuerza del resorte está en función de su constante de rigidez K [N/mm] y su deformación longitudinal total, dada por la carrera de la aguja s más una deformación de precompresión inicial s_0 . De esta manera, la fuerza resultante F_4 actuando en la cola de la aguja desde el pistón de alivio viene dada por la ecuación 4.18.

$$F_4 = K(s + s_0) \quad (\text{ec. 4.18})$$

4.1.5. Variación de las fuerzas con la carrera de la aguja s

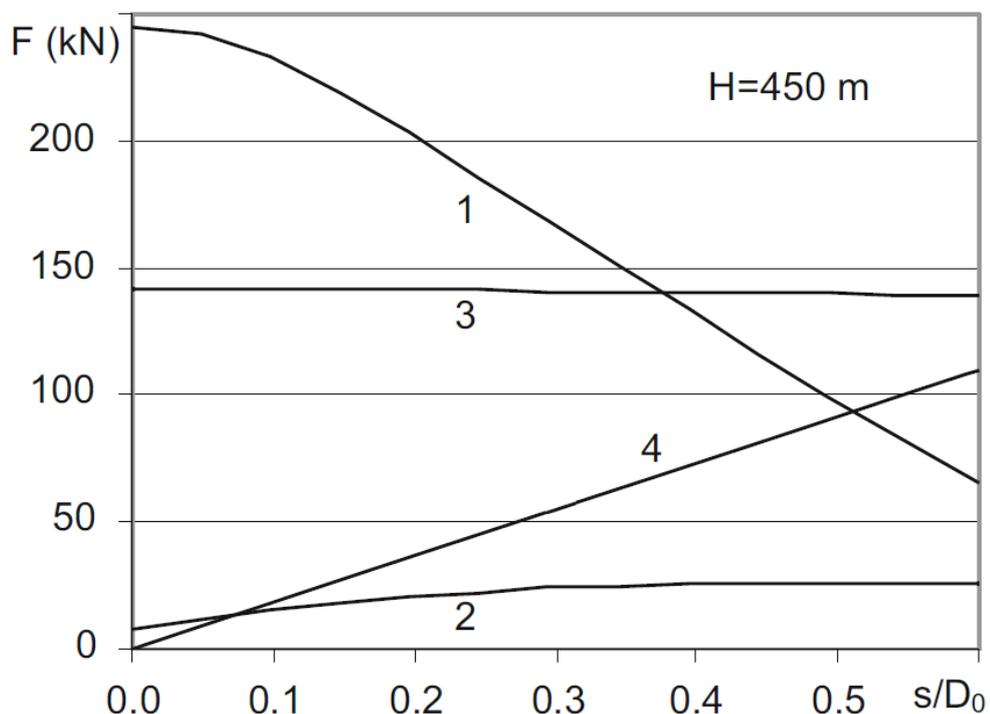
En los apartados 4.1.1 a 4.1.4 inclusive se determinaron las fuerzas actuantes F_1 a F_4 mediante procedimientos analíticos siguiendo las leyes de la mecánica, adoptando en el modelo físico la aguja sometida a la presión de un fluido circulante con una carrera s específica y constante.

Hasta ahora la carrera de la aguja de regulación no ha sido una variable a tener en cuenta, pero las cuatro fuerzas involucradas sí dependen directamente del valor de s ya que define el campo de presiones y velocidades en el inyector.

Es de suma importancia para el diseño del inyector y del servomotor conocer con precisión las fuerzas actuantes para todo el rango de valores posibles de s , esto se logra repitiendo las rutinas de cálculo presentadas en los apartados 4.1.1 a 4.1.4 adoptando en cada iteración un valor distinto de s .

Luego de finalizado el procedimiento anteriormente mencionado pueden construirse curvas, como la presentada a continuación en la figura 4.6, que representan la ley de variación de cada una de las fuerzas con la carrera s .

Figura 4.6: Variación de las fuerzas actuantes sobre la aguja de regulación según s/D_0 para $H_N=450$ m (caso particular)



De la figura 4.6 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La todas las fuerzas tienden a incrementarse con s/D_0 , excepto $F1$ que tiende a disminuir.
- Como se evidenciaba de la ecuación 4.18, la variación de la fuerza del resorte es lineal y la pendiente de la recta es $K \cdot D_0$. Para el caso particular de la figura 4.6 se supone $s_0=0$.
- La fuerza en el pistón de alivio $F3$ es prácticamente independiente del parámetro s/D_0 . Esto respalda la hipótesis de que la altura de velocidad es despreciable frente la influencia que tiene la altura de presión, que para el caso de turbinas Pelton puede llegar a superar el kilómetro.

Como resultado de estudios analíticos y experimentales se ha encontrado que la fuerza resultante del fluido sobre la aguja (que consiste en la integral de las presiones $F1$ y la fuerza de retroceso $F2$) sigue una ley de variación como la presentada en la ecuación 4.19.

$$F1 + F2 = f\left(\frac{s}{D_0}\right) * H_N \quad (\text{ec. 4.19})$$

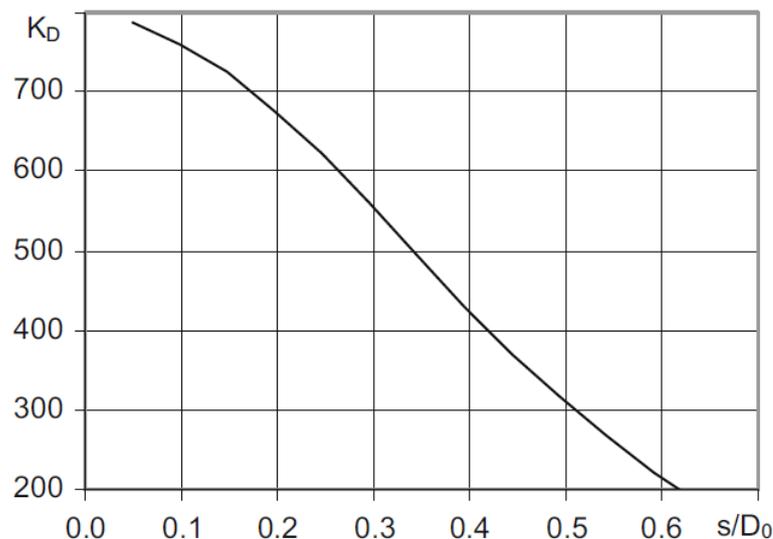
Lo que se pone de manifiesto en la ecuación 4.19 es que la sumatoria de las fuerzas $F1$ y $F2$ depende del parámetro s/D_0 (figura 4.6) y es directamente proporcional al salto neto. Una aproximación empírica utilizada en la práctica es la que se muestra en la ecuación 4.20.

$$F1 + F2 = K_D(D_0^2 - d_s^2) g H_N$$

Siendo:

- D_0 el diámetro de la boquilla de la tobera
- d_s el diámetro del eje de la aguja de regulación
- $K_D = f(s/D_0)$ una constante cuyo valor se puede determinar utilizando el ábaco de la figura 4.7.

Figura 4.7: Valores de K_D en función de s/D_0 para emplear en la ecuación 4.20



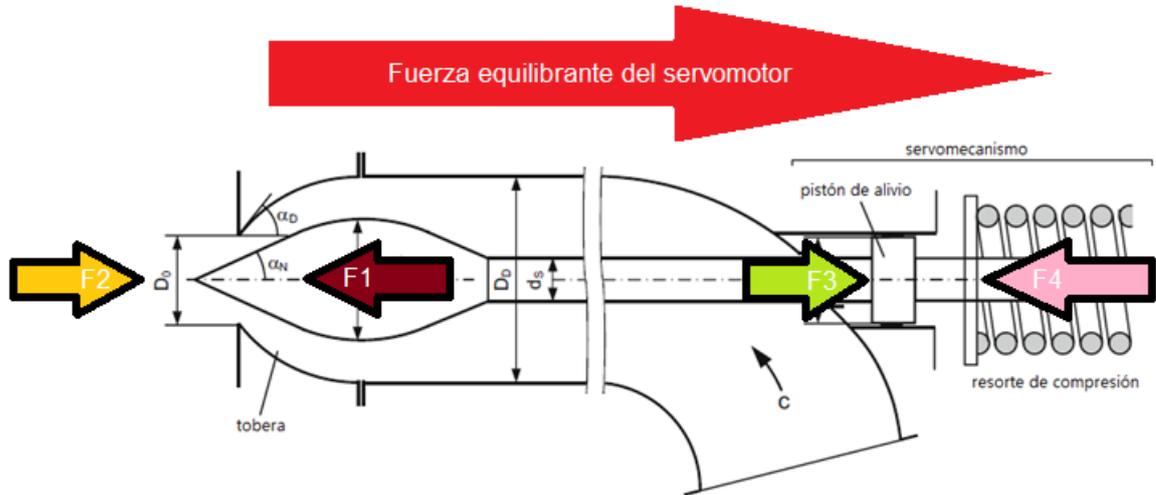
4.1.6. Fuerza equilibrante del servomotor

Un principio básico para el correcto funcionamiento del inyector es que la sumatoria de las fuerzas activas y reactivas en la aguja de regulación sea todo el tiempo igual a cero, es decir,

que la aguja esté en equilibrio para cualquier posición (s), lo que garantiza que se mantendrá estable en la posición deseada para abastecer el caudal requerido.

En la figura 4.8 se muestra el diagrama de cuerpo libre de la aguja de regulación con todas sus fuerzas puestas de manifiesto ($F1$ a $F4$) incluyendo la reacción del servomotor.

Figura 4.8: Diagrama de cuerpo libre equilibrado de la aguja de regulación



Por la forma en la que fueron analíticamente determinadas, las fuerzas $F1$ y $F4$ presentan una tendencia al cierre cuando son positivas y las fuerzas $F2$ y $F3$ presentan una tendencia a la apertura cuando son positivas.

Definiendo por convención que la fuerza equilibrante en el servomotor F_E será *positiva cuando equilibre una tendencia al cierre*, su magnitud puede ser calculada empleando la ecuación 4.21.

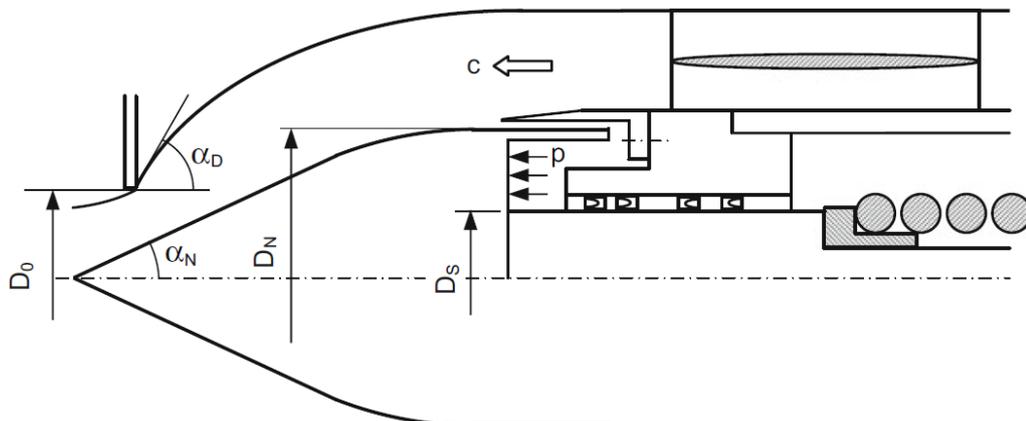
$$F_E(s) = F1 + F4 - F2 - F3 \quad (\text{ec. 4.21})$$

Se pone de manifiesto en la ecuación 4.21 que la fuerza del servomotor F_E es función de la carrera s , ya que todos los términos de la sumatoria son función de la misma.

4.2. Servomecanismo interno

En algunas ocasiones el servomecanismo se aloja en el interior de la tubería, como se muestra en la figura 4.9. La ventaja principal es que no obliga a la tubería de ingreso a curvarse, pero presenta la dificultad de que el acceso para reparación y mantenimiento resulta muy complicado.

Figura 4.9: Servomotor interno - Esquema



También resulta aplicable para este sistema el criterio de tendencia al cierre y el principio de equilibrio de la aguja de regulación en cada instante de tiempo.

Para este caso las fuerzas actuantes son las que se enumeran a continuación:

- F_1 : Resultante de la integración de las presiones en la superficie de la aguja (ídem servomotor externo).
- F_2 : Fuerza de retroceso (ídem servomotor externo).
- F_3 : Fuerza de cierre en la parte trasera p (figura 4.9)
- F_4 : Fuerza del resorte de compresión (ídem servomotor externo).

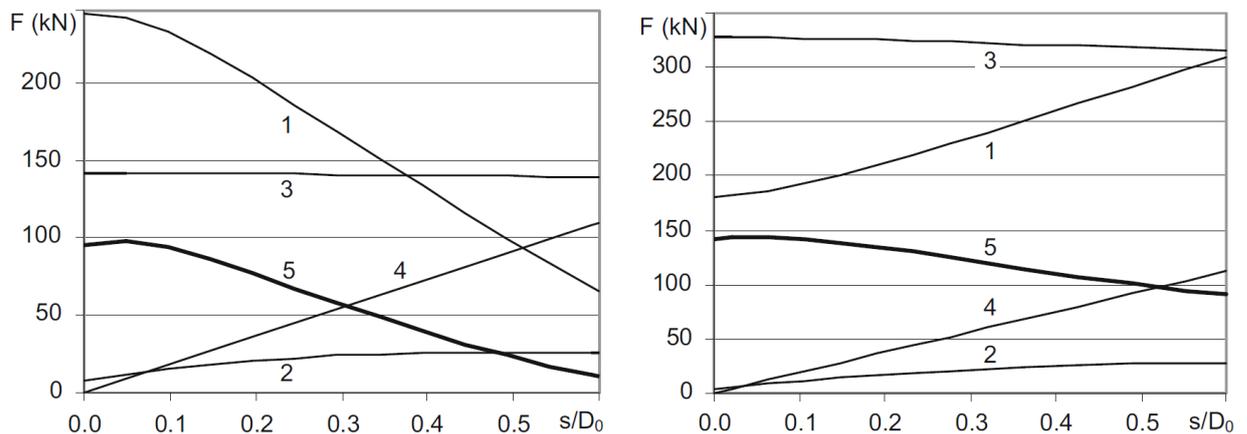
La fuerza F_3 en este caso no es igual que para el caso anterior, debido a que aquí no existe pistón de alivio. Su equivalente en este caso es una fuerza de presión hidráulica actuante en la parte trasera de la aguja que produce una tendencia al cierre y su expresión viene dada por la ecuación 4.22.

$$F_3 = p * A = \left[(p_N + p_{atm}) - \frac{\rho}{2} C^2 \right] * [0,25\pi(D_N^2 - D_s^2)] \quad (\text{ec. 4.22})$$

Donde el primer factor del producto es la presión actuante determinada mediante el Teorema de Bernoulli como ya se ha hecho anteriormente para otros casos, y el segundo factor del producto es el área de contacto, determinada geoméricamente a partir de la figura 4.9.

La figura 4.10 compara simultáneamente las dos gráficas de variación de las fuerzas con s/D_0 , tanto para servomotor externo (la misma gráfica ya presentada en la figura 4.6) como para servomotor interno. Se ha agregado para esta figura además, la fuerza equilibrante del servomotor, denotada como 5.

Figura 4.10: Variación de las fuerzas actuantes sobre la aguja de regulación según s/D_0 (izq. – servomotor externo ; der. – servomotor interno)



5. Ley de variación temporal de cierre del inyector – Golpe de Ariete

El inyector es el órgano encargado de regular el flujo de acuerdo a la demanda energética, o cortarlo completamente en caso que sea necesario. Esto se logra mediante el ajuste de la carrera de la aguja de regulación s , la cual conforme se acerca a la boquilla de la tobera el gasto disminuye.

Debido a que las turbinas Pelton trabajan con saltos muy grandes (del orden del kilómetro e incluso más), la colocación de una chimenea de equilibrio se hace muy costosa debido a la

exagerada altura que la misma debería tener por culpa de la elevada cota del nivel estático. Por ello, se debe prestar especial cuidado al fenómeno del *Golpe de Ariete* ante una variación repentina del gasto, ya que los conductos son relativamente largos y la sobrepresión podría ser descontrolada, exigiendo un dimensionado muy costoso de los componentes de la central. Se define una *ley de variación temporal de cierre* adecuada para controlar el fenómeno del Golpe de Ariete mientras se regula el flujo.

En principio la solución más rápida e intuitiva sería adoptar una variación lineal de s en el tiempo, desde la apertura máxima hasta el cierre total. En la práctica dicha ley de variación origina una ley de variación de caudal que es no lineal (en función del coeficiente de descarga), dada por la ecuación 3.12 que a continuación se repite por conveniencia y se coloca apropiadamente en función del tiempo.

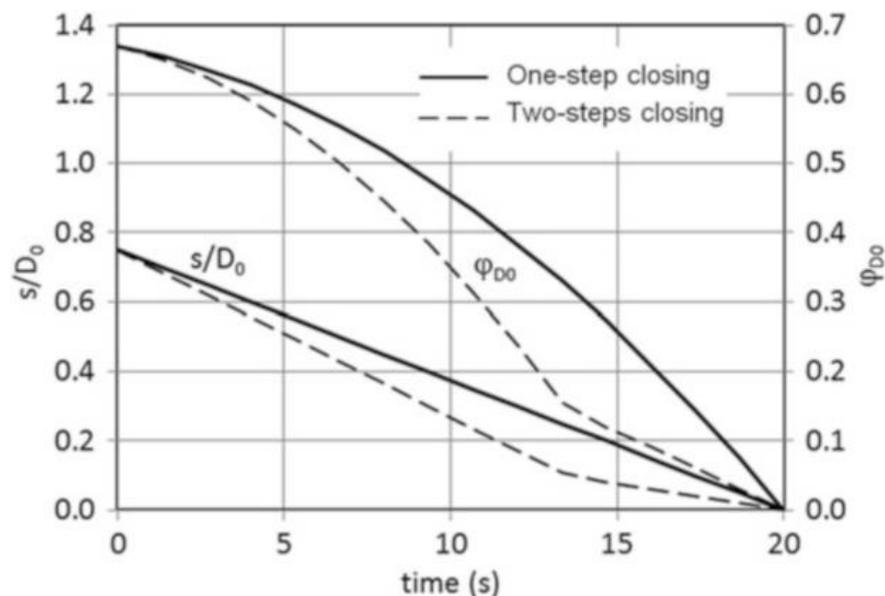
$$\phi_{D_0}(t) = a \left[\frac{s(t)}{D_0} \right] + b \left[\frac{s(t)}{D_0} \right]^2 \quad (\text{ec. 3.12})$$

La variación del caudal no lineal provoca que en el intervalo final del proceso de cierre la tasa de variación del caudal $d\phi_{D_0}/dt$ se eleve en demasía generando en consecuencia una mayor sobrepresión.

La solución al problema anteriormente planteado es definir una ley de variación no lineal, en dos pasos, de esa manera la variación de caudal cerca del instante de cierre se atenúa.

En la figura 5.1 a continuación se muestran las dos leyes de variación anteriormente presentadas y se muestra en simultáneo la variación del coeficiente de descarga.

Figura 5.1: Dos ejemplos de ley de variación temporal de cierre. Lineal y no lineal



De estudios experimentales y analíticos se deduce que la *Ley de variación temporal de cierre* más apropiada es la ley parabólica presentada en la ecuación 5.1.

$$s(t) = s_N - s_N \left(2 - \frac{t}{t_c} \right) \frac{t}{t_c} \quad (\text{ec. 5.1})$$

Con s_N la carrera de la aguja para el caudal nominal y t_c el tiempo de cierre adoptado para el cual $s(t_c)=0$.

El desafío de diseño consiste en definir un tiempo de cierre t_c que asegure un funcionamiento seguro de la central. Como criterio se impone que la *velocidad de cierre al comienzo del proceso sea menor que un valor máximo admisible*. Matemáticamente dicha restricción está gobernada por la ecuación 5.2.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = 2 \frac{s_N}{t_c} < MAX_{adm} \quad (ec. 5.2)$$

Si en lugar de partir de la apertura nominal s_N se parte de una apertura parcial s_P , la ley de variación debe ser la misma, con un tiempo de cierre menor t_p . Esto equivale a que la curva s vs. t está desplazada hacia la izquierda en el plano cartesiano. Matemáticamente, el corrimiento de la curva resulta en la ecuación 5.3

$$s(t) = s_N \left(\frac{t - t_p}{t_c}\right)^2 \quad (ec. 5.3)$$

Imponiendo en la ecuación 5.3 la condición de que $s(0) = s_P$, se puede despejar el tiempo de cierre resultando la ecuación 5.4.

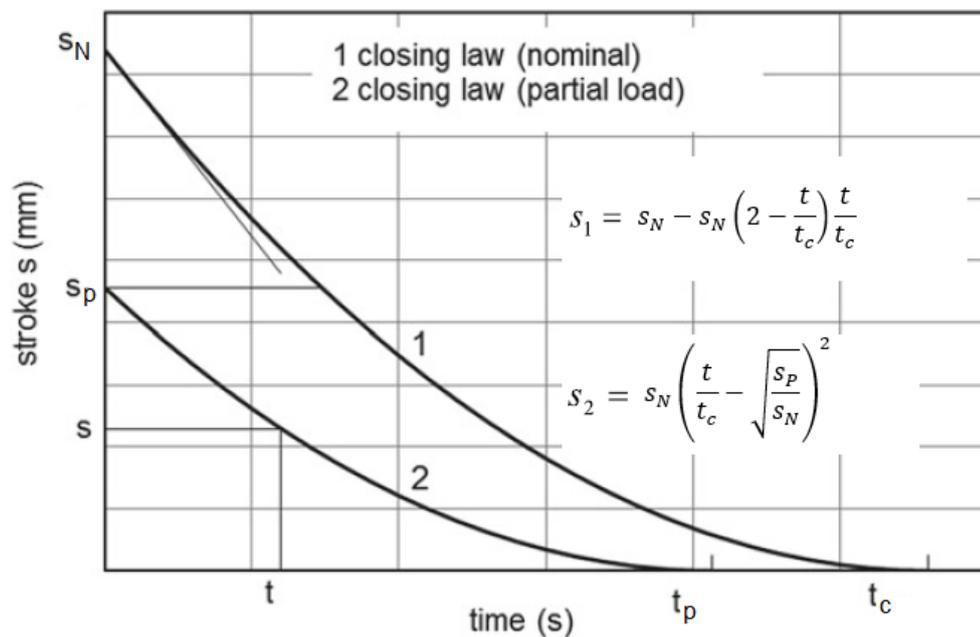
$$\frac{t_p}{t_c} = \sqrt{\frac{s_P}{s_N}} \quad (ec. 5.4)$$

Finalmente, reemplazando la ecuación 5.4 en la ecuación 5.3, queda la expresión de la *Ley de variación temporal de cierre a carga parcial* dada por la ecuación 5.5.

$$s(t) = s_N \left(\frac{t}{t_c} - \sqrt{\frac{s_P}{s_N}}\right)^2 \quad (ec. 5.5)$$

En la figura 5.2 se muestran graficadas las leyes de variación temporal de cierre tanto a carga nominal como parcial con sus respectivas ecuaciones 5.1 y 5.5.

Figura 5.2: Leyes de variación temporal de cierre parabólicas (ecs. 5.1 y 5.5)



6. Impacto del chorro de salida

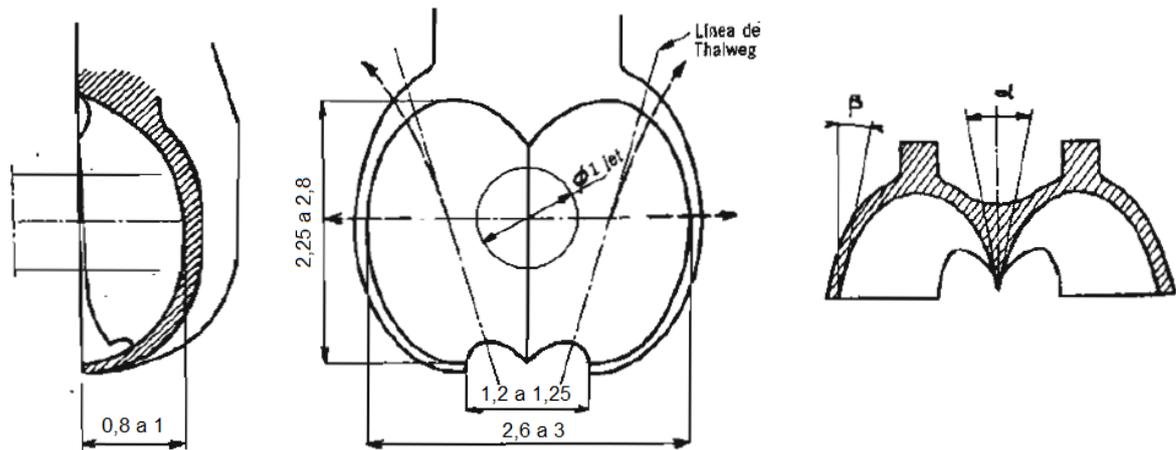
Luego de que el chorro de agua sale del inyector con alta energía cinética y energía potencial de presión nula, el mismo buscará en su recorrido el impacto sobre los cangilones en la periferia del rodete, a los efectos de impartirle al mismo un movimiento de rotación cediendo prácticamente la totalidad de su energía cinética y de esa manera movilizar al eje y al rotor del generador para generar energía eléctrica en forma de corriente alterna.

En el apartado a continuación se realiza un estudio teórico – analítico detallado acerca del fenómeno de impacto y transferencia de energía, considerando tanto las características del chorro como de los cangilones

6.1. Geometría de los cangilones

Los cangilones se encuentran solidariamente unidos al rodete y son los encargados de recibir el impacto del chorro de agua para comenzar el movimiento del rodete. Tienen forma de doble cuchara como se muestra en la figura 6.1, donde todas las medidas están normalizadas respecto al diámetro del chorro ($d_0 = 1$).

Figura 6.1: Cangilón de rodete Pelton



La arista media divide al cangilón en dos partes exactamente iguales a los efectos de que la resultante de los empujes axiales (normales a la dirección del vector velocidad) sea nula y no haya esfuerzos transversales indeseados en el grupo. Lo ideal sería que el ángulo α acotado en la figura 6.1 (que suele ser del orden de 20°) fuera nulo a los efectos de minimizar la componente transversal del empuje que no contribuye a la velocidad de rotación del rodete, pero esto provocaría que la arista media tenga baja resistencia mecánica y sea incapaz de resistir los efectos abrasivos y presiones generadas por el agua.

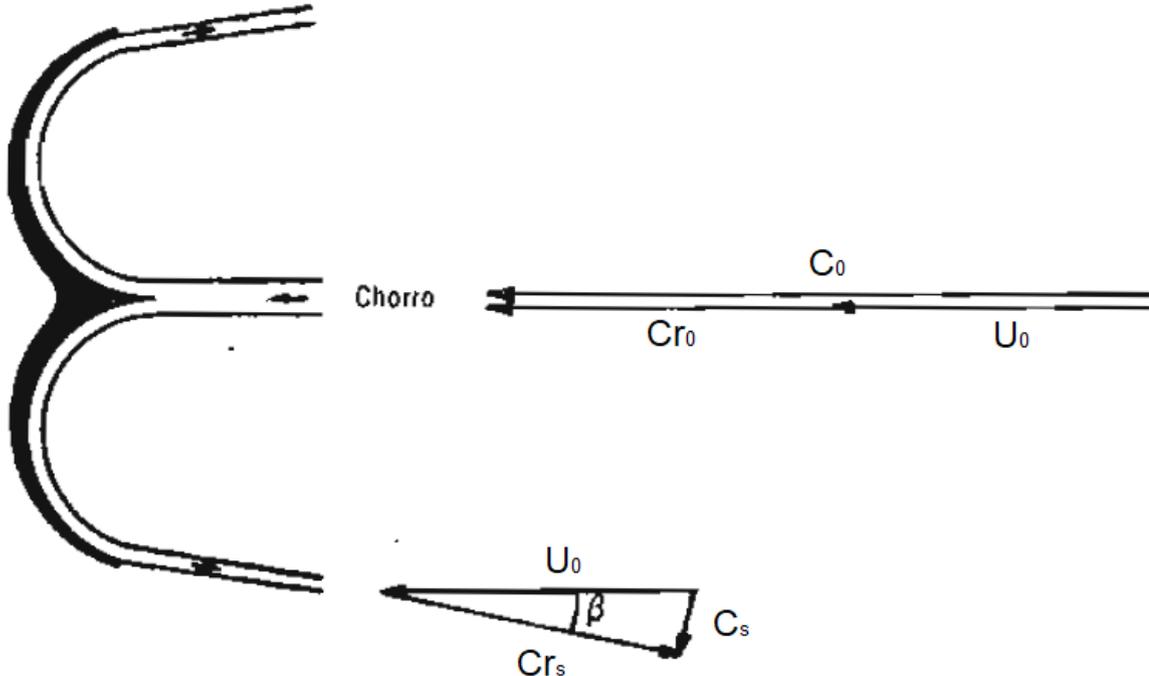
El ángulo β en los bordes del cangilón direcciona el flujo de salida una vez que el agua impactó y procede a abandonar el cangilón. Suele ser del rango de 8° a 12° para evitar la recirculación del agua y que la misma a la salida impacte en el extradós del cangilón adyacente frenando el giro.

Para un mejor aprovechamiento de la energía cinética del chorro, se tiende a colocar el inyector lo más cerca posible del cangilón. Para ello, se le realiza una entalladura en su parte inferior (figura 6.1) a los efectos de que durante su avance el mismo no interfiera en el impacto sobre el cangilón anterior desviando prematuramente el chorro. En las turbinas con alta velocidad específica los caudales son relativamente más elevados y por ende el diámetro del chorro mayor, lo que conlleva a una entalladura más pronunciada.

6.2. Diagrama de velocidades

En el presente subapartado se describe y analiza la cinemática del chorro en su recorrido desde la salida del inyector hasta el cangilón. En la figura 6.2 se muestra el esquema de velocidades de entrada y salida al momento del impacto.

Figura 6.2: Diagrama de velocidades en el impacto con el cangilón



Siendo C_0 la velocidad de salida del chorro de la boquilla de la tobera, el chorro ataca a la arista media del cangilón y se divide en dos partes iguales debido a la simetría. El agua recorre cada semi-cangilón en dirección transversal para abandonar el mismo en el borde con el flujo orientado un ángulo β de la dirección longitudinal.

Siendo Cr_0 la velocidad relativa del chorro respecto del cangilón y U_0 la velocidad tangencial del rodete, es decir la velocidad de avance del cangilón, entonces la relación entre las tres velocidades viene dada por la ecuación vectorial 6.1 – a.

$$\vec{C}_0 = \vec{Cr}_0 + \vec{U}_0 \quad (\text{ec. 6.1 – a})$$

Que al tratarse de vectores colineales se transforma en la ecuación escalar 6.1 – b

$$C_0 = Cr_0 + U_0 \quad (\text{ec. 6.1 – b})$$

En la salida, C_s es la velocidad absoluta y Cr_s la velocidad relativa del agua respecto del cangilón. Realizando la descomposición vectorial según el diagrama de la figura 6.2, la ecuación vectorial de velocidades toma la forma de la ecuación vectorial 6.2.

$$\vec{C}_s = \vec{Cr}_s + \vec{U}_0 \quad (\text{ec. 6.2})$$

6.3. Transferencia energética

La ecuación de transferencia de energía fluido – rodete en términos de componentes energéticas viene dada por la ecuación 6.3.

$$E = E_C + E_P = \left[\frac{C_0^2 - C_s^2}{2g} \right] + \left[\frac{U_0^2 - U_s^2}{2g} + \frac{Cr_s^2 - Cr_0^2}{2g} \right] \quad (ec. 6.3)$$

Al ser la turbina Pelton una turbina de impulso, la energía potencial E_p es nula ya que la transferencia completa de energía involucra exclusivamente energía cinética E_c , por lo que el segundo término de la ecuación 6.3 se anula, como en la ecuación 6.4.

$$\left[\frac{U_0^2 - U_s^2}{2g} + \frac{Cr_s^2 - Cr_0^2}{2g} \right] = 0 \quad (ec. 6.4)$$

Al ser la velocidad del cangilón constante $U_0 = U_s$, la ecuación 6.4 se transforma en:

$$\frac{Cr_s^2 - Cr_0^2}{2g} = 0 \rightarrow Cr_s = Cr_0 \quad (ec. 6.4 - bis)$$

Es decir, que la velocidad relativa del agua a la entrada y a la salida es igual en valor absoluto.

Se busca expresar la energía transferida E en función del ángulo de salida β . Para ello se expresan los módulos de las velocidades absolutas en función del mismo.

De la ecuación 6.1 – b se puede operar algebraicamente y obtener la ecuación 6.5 para C_0 .

$$C_0^2 = Cr_0^2 + U_0^2 + 2(Cr_0 * U_0) \quad (ec. 6.5)$$

De la composición vectorial de la ecuación 6.2 y la figura 6.2 se llega a la ecuación 6.6 para C_s .

$$C_s^2 = Cr_s^2 + U_0^2 - 2 \cos(\beta) (Cr_0 * U_0) \quad (ec. 6.6)$$

Combinando las ecuaciones 6.5 y 6.6 y teniendo en cuenta lo establecido en la ecuación 6.4 – bis se construye la ecuación 6.7.

$$C_0^2 - C_s^2 = 2 (Cr_0 * U_0) [1 + \cos(\beta)] \quad (ec. 6.7)$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones 6.4 y 6.7 en la ecuación 6.3 se llega a la *Ecuación de energía transferida en función del ángulo de salida*, dada por la ecuación 6.8.

$$E = \frac{Cr_0 * U_0}{g} [1 + \cos(\beta)] \quad (ec. 6.8)$$

6.4. Máxima utilización de la energía

Se define al *coeficiente de utilización* ε como la relación entre la energía transferida E y la energía total puesta en juego, incluyendo aquella energía residual no aprovechada en la generación, utilizada por el agua para abandonar el sistema en condiciones de flujo estable. Matemáticamente el coeficiente de utilización responde a la ecuación 6.9.

$$\varepsilon = \frac{E}{E + \frac{C_s^2}{2g}} \quad (ec. 6.9)$$

Siendo el segundo término del divisor de la ecuación 6.9 la energía cinética de salida del fluido, que no es aprovechada debido a que no fue transferida al rodete, ya que fue utilizada por el agua para abandonar el cangilón.

Reemplazando E en el numerador por su expresión determinada en la ecuación 6.8 y en el denominador por su expresión original de la ecuación 6.3 y operando se llega a la ecuación 6.10 para ε .

$$\varepsilon = (Cr_0 * U_0) \frac{[1 + \cos(\beta)]}{\frac{C_0^2}{2}} \quad (ec. 6.10)$$

Considerando la ecuación 6.1 – b se reemplaza en la ecuación 6.10 la velocidad relativa Cr_0 y se llega a la ecuación 6.11 para ε en función de la relación U_0 / Cr_0 .

$$\varepsilon = 2 \left[\frac{U_0}{C_0} - \left(\frac{U_0}{C_0} \right)^2 \right] [1 + \cos(\beta)] \quad (ec. 6.11)$$

Siendo el ángulo de salida β impuesto generalmente por consideraciones constructivas y funcionales como se explicó en el apartado 6.1, se trata al mismo como una constante. En consecuencia, interesa encontrar el valor de U_0 / C_0 para el cual la utilización de energía es máxima, es decir donde ε es máximo.

Derivando la expresión 6.11 e igualando a cero, se encuentra el máximo de la función como se muestra en la ecuación 6.12.

$$\frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{U_0}{C_0}\right)} = 2 [1 + \cos(\beta)] \left(1 - 2 \frac{U_0}{C_0} \right) = 0 \quad (ec. 6.12)$$

De lo impuesto en la ecuación 6.12 se llega a la conclusión de que la única forma de cumplir la igualdad es que se cumpla lo estipulado a continuación en la ecuación 6.13.

$$1 - 2 \frac{U_0}{C_0} = 0 \rightarrow \frac{U_0}{C_0} = \frac{1}{2} \quad (ec. 6.13)$$

La ecuación 6.13 establece que *La máxima utilización de energía se da cuando la velocidad del chorro de agua es el doble que la velocidad del cangilón.*

Aplicando lo implícito en la ecuación 6.13 en la ecuación 6.1 – b, queda:

$$C_0 = Cr_0 + 0,5 C_0 \rightarrow Cr_0 = 0,5 C_0 \quad (ec. 6.1 - c)$$

Y por la ecuación 6.14 – bis, se puede escribir la ecuación 6.14 para las velocidades relativas:

$$Cr_0 = Cr_s = U_0 \quad (ec. 6.14)$$

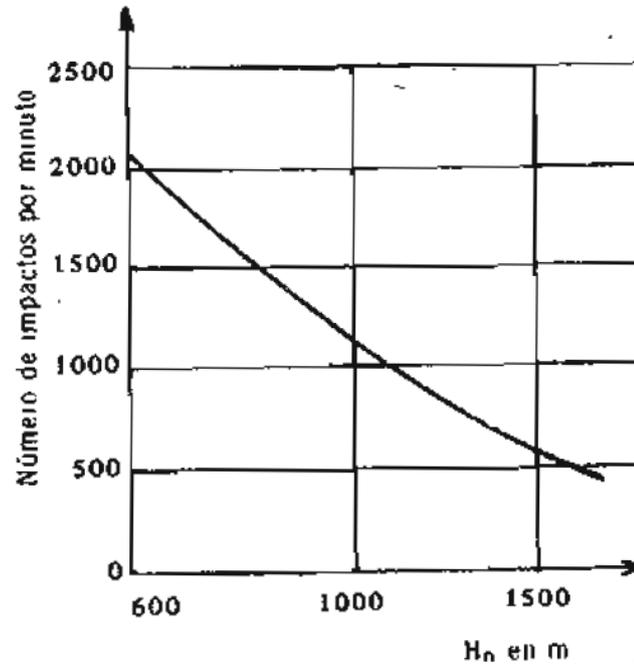
6.5. Número de chorros por rodete

El número de chorros adoptado para cada rodete será función de la carga y la velocidad específica de la turbina. En general, en las turbinas de eje vertical se pueden colocar de cuatro a seis chorros, mientras que en las de eje horizontal tan solo uno o dos, debido a que resulta complicada la instalación de varios inyectores y tuberías en un mismo plano vertical.

Colocar más chorros por rodete tiene la ventaja de que se puede incrementar el gasto y la potencia por equipo, así como adoptar un rodete más pequeño con una velocidad de rotación mayor.

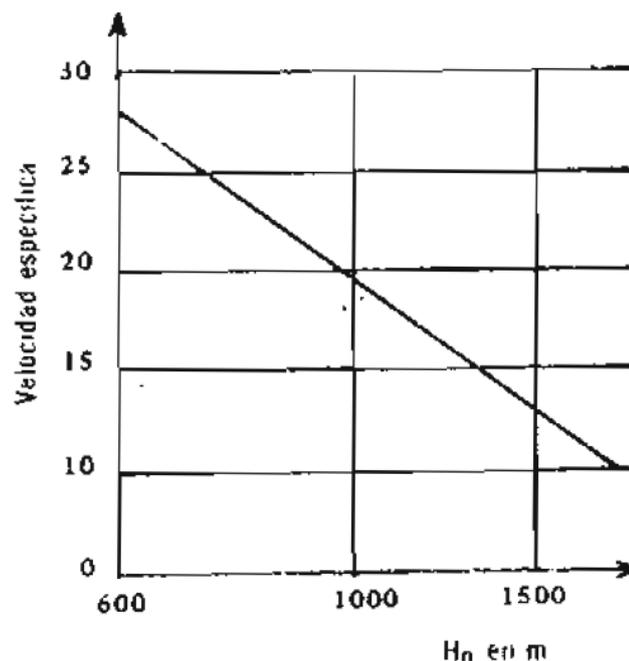
Uno de los condicionantes para seleccionar el número máximo de chorros es procurar que el impacto recibido por los cangilones no sea excesivo al punto que provoque fallas por fatiga que requieran una costosa reparación y mantenimiento, La figura 6.3 muestra el número máximo de impactos por minuto que un cangilón puede soportar en función del salto neto. Este dato, junto con la velocidad de rotación adoptada condiciona la selección del número de chorros a adoptar.

Figura 6.3: Número máximo de impactos por minuto en los cangilones en función de H_N



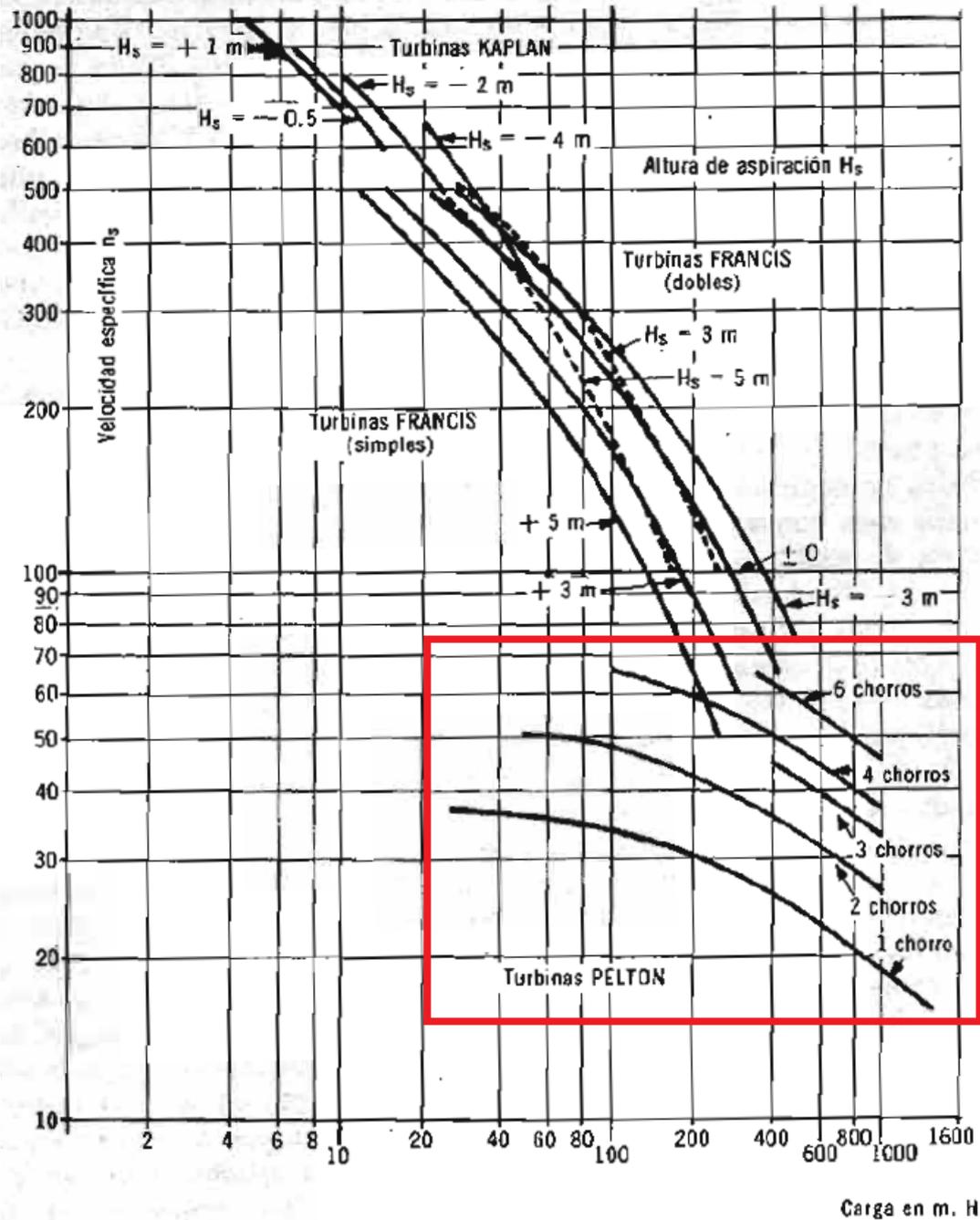
El caudal total de la turbina debe repartirse equitativamente en un número de chorros suficientes como para que la velocidad específica por chorro C_0 no resulte excesivamente elevada. En la figura 6.4 a continuación se muestra la velocidad específica máxima admitida por chorro en función del salto neto.

Figura 6.4: Velocidad específica máxima por chorro en función de H_N



El ábaco de la figura 6.5 muestra los límites de velocidad específica en función del salto neto para los tres tipos de turbina principales, discriminando para turbinas Pelton la relación que dichas variables guardan con el número de chorros. La naturaleza de la limitación impuesta en la figura 6.5 es prevenir el riesgo de cavitación.

Figura 6.5: Relación entre salto neto, velocidad específica y número de chorros para turbinas Pelton



7. Elección del diámetro del rodete

En el apartado 6 se observó que existe una relación intrínseca entre la velocidad de salida del chorro C_0 y la velocidad del cangilón U_0 . Por estar solidariamente unido, la compatibilidad de desplazamientos implica que *la velocidad del cangilón es igual a la velocidad tangencial del rodete*, lo que matemáticamente permite escribir la ecuación 7.1.

$$U_0 = n\pi D = 0,5 C_0 \quad (\text{ec. 7.1})$$

Donde:

- n es la velocidad de rotación del grupo en rad/s .
- D es el diámetro del rodete medido desde el eje hasta el baricentro del chorro.

La ecuación 7.1 juega un papel importante en el dimensionado de la turbina ya que permite relacionar numéricamente la velocidad del chorro C_0 , el diámetro del rodete D y la velocidad de rotación n .

Se introduce el concepto de *coeficiente de velocidad tangencial* ϕ_U , definido por la ecuación 7.2.

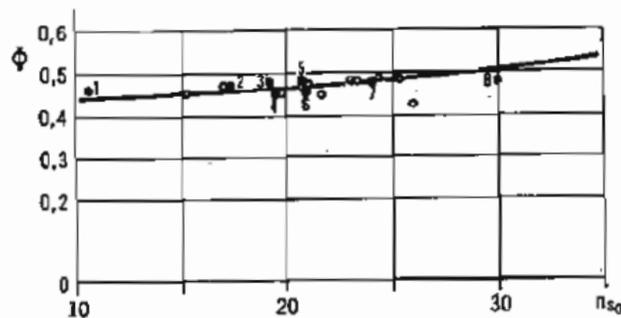
$$\phi_U = \frac{U_0}{\sqrt{2gH_N}} \quad (ec. 7.2)$$

De la ecuación 3.1 se deduce que $C_0 = \sqrt{2gH_N}$ suponiendo que las pérdidas de cargas son nulas en el inyector. Adoptando un coeficiente de ajuste de 0,98 para considerar dichas pérdidas y combinando la ecuación 7.1 con la ecuación 6.13, queda el coeficiente de velocidad tangencial según la ecuación 7.3.

$$\phi_U = \frac{0,5 C_0}{\sqrt{2gH_N}} = \frac{0,5(0,98 \sqrt{2gH_N})}{\sqrt{2gH_N}} = 0,49 \quad (ec. 7.3)$$

En la práctica, suelen adoptarse valores de ϕ_U algo menores (del orden de 0,46) como se muestra en la figura 7.1.

Figura 7.1: Coeficiente de velocidad tangencial en función de la velocidad específica



La razón de esto es que se adopta $U_0 < 0,5 C_0$. Por la ecuación 6.1 – b, implica que la velocidad relativa $Cr_0 > 0,5 C_0$ y por la ecuación 6.4 – bis, $Cr_s = Cr_0 > 0,5 C_0$.

Lo anteriormente expuesto conlleva a que no se cumple la ecuación 6.14 para las velocidades relativas, por lo que el diseño se aleja del punto de máxima utilización de energía. A cambio, al ser la velocidad relativa de salida mayor que en el punto de máxima utilización de energía, implica que el flujo a la salida tiene una componente más axial (ver composición vectorial de la figura 6.2), lo que facilita la evacuación de agua y por ende el funcionamiento del equipo.

Diversos autores proponen la ecuación 7.4 como fórmula práctica para calcular el diámetro del rodete hasta el eje del chorro D .

$$D[in] = \frac{850 (H_N [ft])^{1,5}}{n [rpm]} \quad (ec. 7.4)$$

8. Conclusiones generales

En el presente trabajo se realizó un estudio teórico – analítico del comportamiento hidráulico de una turbina Pelton en servicio, desde aguas debajo de la tubería forzada, deduciendo a través del campo de la física y la matemática leyes de aplicación práctica para el diseño de sus componentes.

Se comenzó introduciendo el *inyector*, nombrando su función y sus partes. Se llegó a una expresión teórica para la velocidad de salida del agua y se dedujeron las ecuaciones diferenciales que definen el campo de velocidades dentro del mismo, para de esa manera poder estimar las máximas velocidades presentes y prevenir fenómenos de erosión, desgaste y calcular la vida útil así como definir un plan de mantenimiento de los componentes.

Se definió el concepto de *coeficiente de descarga* para el calcular el caudal de salida del chorro de agua, el cual resulta ser función del área neta de salida, que a su vez depende de la carrera del inyector s y de la geometría de la aguja (α_N). Se dedujo una *ley de conversión geométrica* que permite conocer la curva de caudales de cualquier inyector en función de la curva ensayada de un modelo de laboratorio.

Luego se determinaron las expresiones para las fuerzas actuantes en la aguja de regulación producto de la acción del agua sobre la misma, para una carrera s específica y constante. Debe repetirse el cálculo para distintos valores de s y así conocer la ley de variación de dichas fuerzas para todo el rango de posiciones posibles. Esto sirve para estimar la fuerza de diseño para el correcto dimensionado del servomotor.

Acto seguido se determinó la *ley temporal de cierre* óptima en el inyector para minimizar las sobrepresiones indeseadas producto del golpe de Ariete. La misma define a la carrera de la aguja s como una ecuación de segundo grado en función del tiempo. Para el caso de apertura parcial, la ley de variación se mantiene trasladando la curva en el plano cartesiano.

Se estudió la relación que guardan la velocidad de salida del chorro y la velocidad del cangilón al momento del impacto, concluyendo que las velocidades relativas del agua respecto al cangilón son iguales tanto a la entrada y a la salida. Para una transferencia energética óptima debe cumplirse que la velocidad del chorro debe ser el doble que la velocidad del cangilón. En la práctica las turbinas reales suelen apartarse ligeramente de esta situación ideal a los efectos de que el flujo a la salida tienda a ser axial, facilitando la evacuación de agua y el funcionamiento del equipo.

Se determinó que el número de chorros a adoptar por rodete viene limitado por el número máximo de impactos por minuto que el cangilón puede recibir a los efectos de tener un adecuado margen de seguridad frente a la falla por fatiga, pero a su vez debe ser suficiente como para distribuir el caudal total de forma tal que la velocidad específica de cada chorro no resulte en exceso elevada. El número de chorros también guarda una relación con la velocidad específica y la carga neta a los efectos de evitar el fenómeno de cavitación.

9. Bibliografía

- Polo Encinas, M. (1975). *Turbomáquinas Hidráulicas* (reimpresión 2019 ed.). Limusa.
- Turbina Pelton. (2021, 26 mayo). En *Wikipedia, la enciclopedia libre*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Turbina_Pelton
- Zhang, Z. (2016). *Pelton Turbines (English Edition)* (1st ed. 2016 ed.). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-31909-4>