

MEMBRANAS DE REVOLUCIÓN EQUILIBRIO Y DEFORMACIONES DETERMINACIÓN DE CORRIMIENTOS

Estructuras Laminares

Prof. Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

Contenido

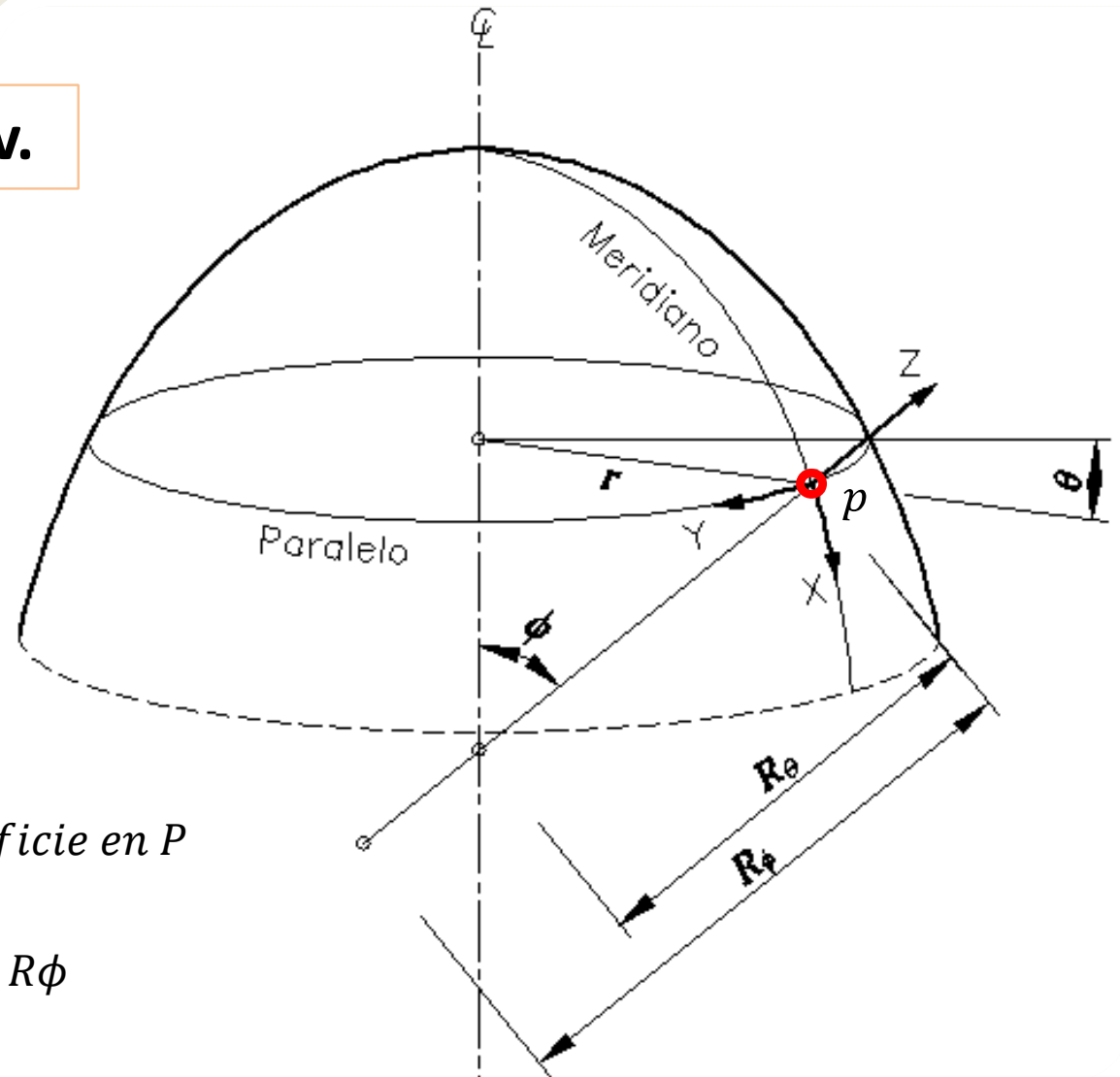
- Introducción
- Ecuaciones de Equilibrio
- Deformaciones
- Corrimientos y giro del meridiano
- DEC
- Aplicaciones

IMPORTANCIA DEL TEMA

- Permite establecer las relaciones estáticas entre esfuerzos y cargas y determinar los valores de los corrimientos en distintos puntos de la estructura.
- Permite compatibilizar los corrimientos en el contorno, cuando se altera el régimen de membrana.
- Para compatibilizar los corrimientos de estructuras con múltiples superficies.
- Permite determinar las reacciones en un paralelo cuando exista alguna discontinuidad.
- Los conceptos desarrollados se pueden aplicar, como se verá, al caso de cascaras con rigidez a flexión.

INTRODUCCIÓN

Geometría Superficies Rev.



R_ϕ : Radio de Curvatura de la superficie en P

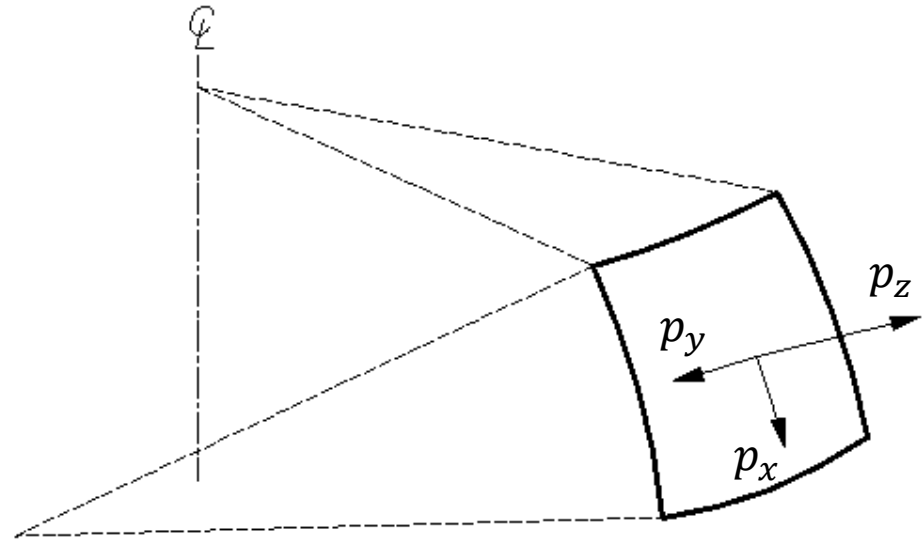
R_θ : Distancia P eje revolución sobre R_ϕ

r : Distancia P eje revolución sobre paralelo

$$r = R_\theta \text{ sen } \phi$$

INTRODUCCIÓN

Cargas



INTRODUCCIÓN

Régimen membranal

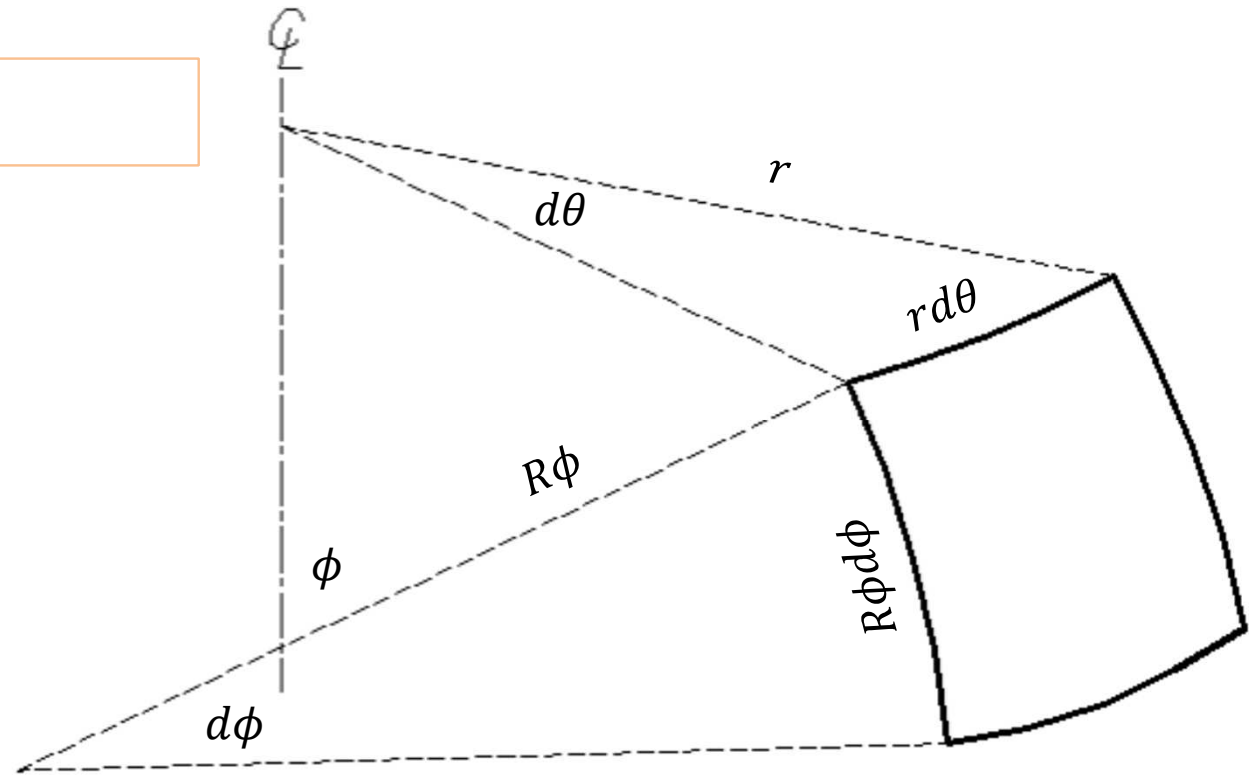
Estructura laminar con esfuerzos de flexión y torsión nulos o despreciables.

Esfuerzos de flexión nulos o despreciables porque $t \ll R_{\min}$.

Esfuerzos de flexión nulos o despreciables por geometría, cargas y vínculos.

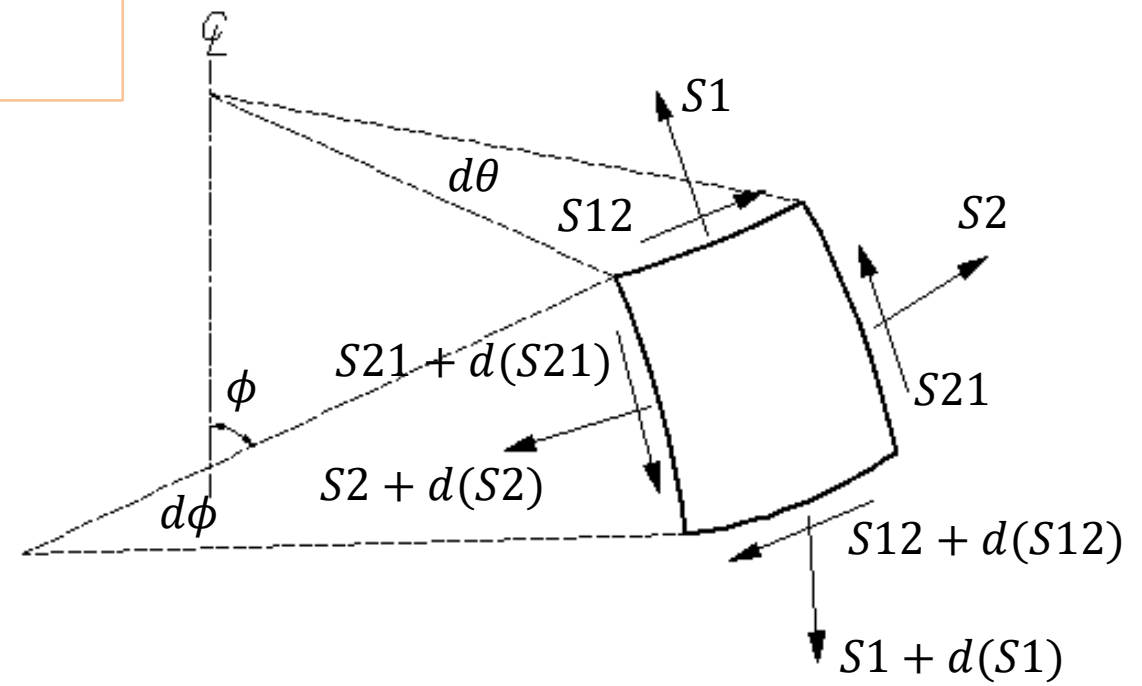
MEMBRANAS REVOLUCIÓN. EQUILIBRIO

Elemento superficie



MEMBRANAS REVOLUCIÓN. EQUILIBRIO

Esfuerzos internos



MEMBRANAS REVOLUCIÓN. EQUILIBRIO

Equilibrio en dirección x

$$\frac{\partial(S_1 r d\theta)}{\partial\phi} d\phi + \frac{\partial(S_{21} R_\phi d\phi)}{\partial\theta} d\theta - S_2 R_\phi d\phi d\theta \cos\phi + p_x r d\theta R_\phi d\phi = 0$$

Equilibrio en dirección y

$$\frac{\partial(S_2 R_\phi d\phi)}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial(S_{12} r d\theta)}{\partial\phi} d\phi - S_{21} R_\phi d\phi d\theta \cos\phi + p_y r d\theta R_\phi d\phi = 0$$

Equilibrio en dirección z

$$S_1 r d\theta d\phi + S_2 r R_\phi d\phi d\theta \sin\phi + p_z r d\theta R_\phi d\phi = 0$$

Ecuaciones de Equilibrio

$$\frac{\partial S_1}{\partial\phi} R_\theta \sin\phi + \frac{\partial S_{21}}{\partial\theta} R_\phi - S_2 R_\phi \cos\phi + p_x R_\phi R_\theta \sin\phi = 0$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial\theta} R_\phi + \frac{\partial S_{12}}{\partial\phi} R_\theta \sin\phi - S_{21} R_\phi \cos\phi + p_y R_\phi R_\theta \sin\phi = 0$$

$$S_1 R_\theta + S_2 R_\phi + p_z R_\phi R_\theta = 0$$

MEMBRANAS REVOLUCIÓN. EQUILIBRIO

Ecuaciones de Equilibrio Cargas Simétricas

$$\frac{d S_1}{d \phi} R_{\theta} \operatorname{sen} \phi - S_2 R_{\phi} \cos \phi + p_x R_{\phi} R_{\theta} \operatorname{sen} \phi = 0$$

$$S_1 R_{\theta} + S_2 R_{\phi} + p_z R_{\phi} R_{\theta} = 0$$

MEMBRANAS DE REVOLUCIÓN

EQUILIBRIO Y DEFORMACIONES

DETERMINACIÓN DE CORRIMIENTOS

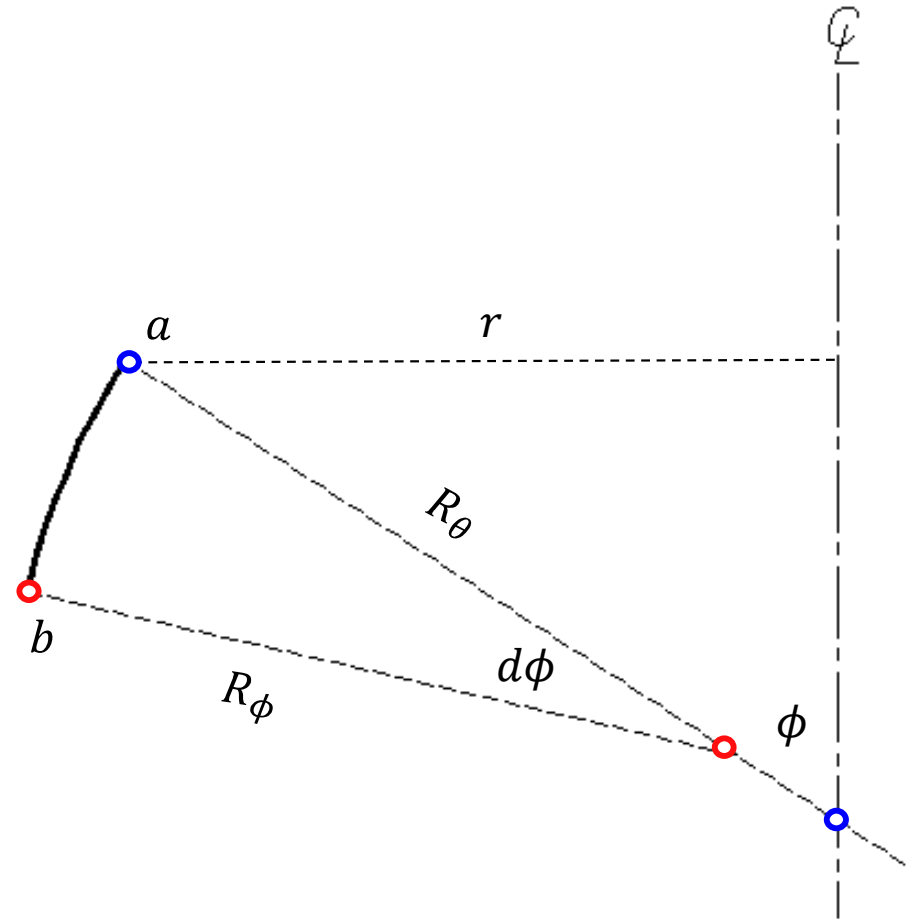
Estructuras Laminares

Prof. Titular: Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

Adscripto: Ing. Carlos Leiva

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Plano meridiano



R_ϕ : Radio de Curvatura de la superficie en P

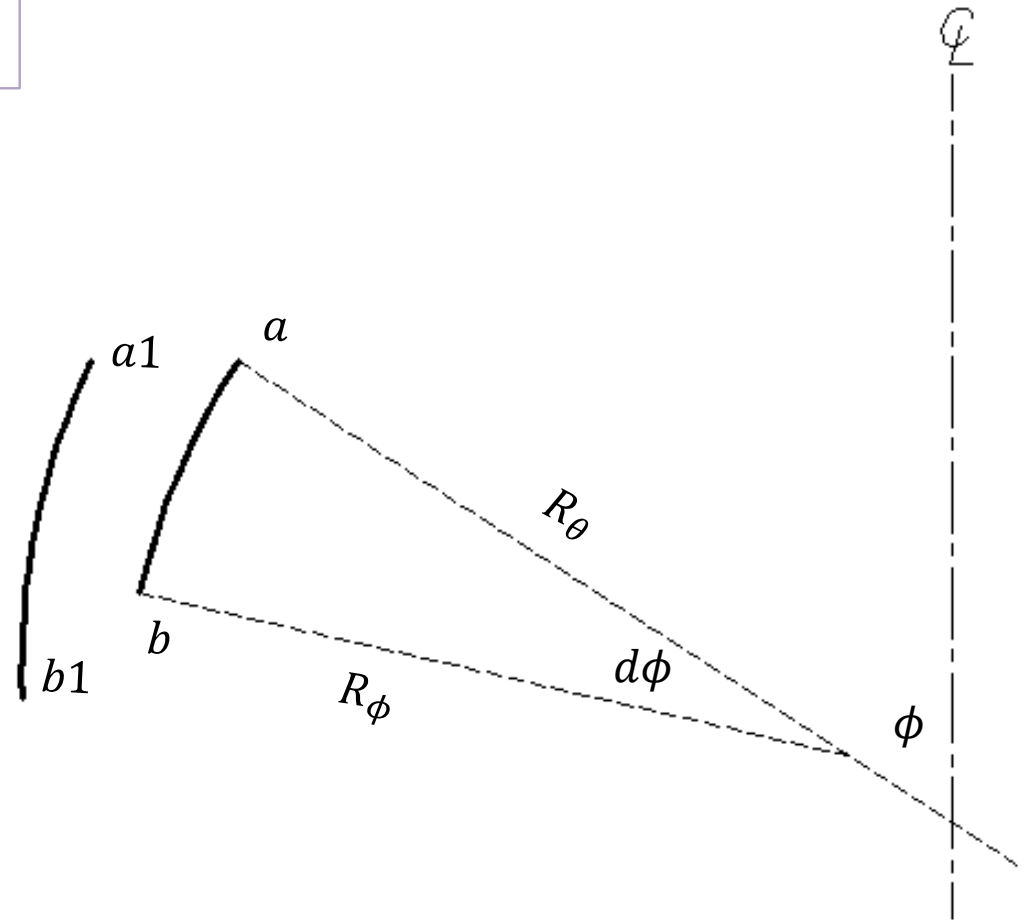
R_θ : Distancia P eje revolución sobre R_ϕ

r : Distancia P eje revolución sobre paralelo

$$r = R_\theta \text{ sen } \phi$$

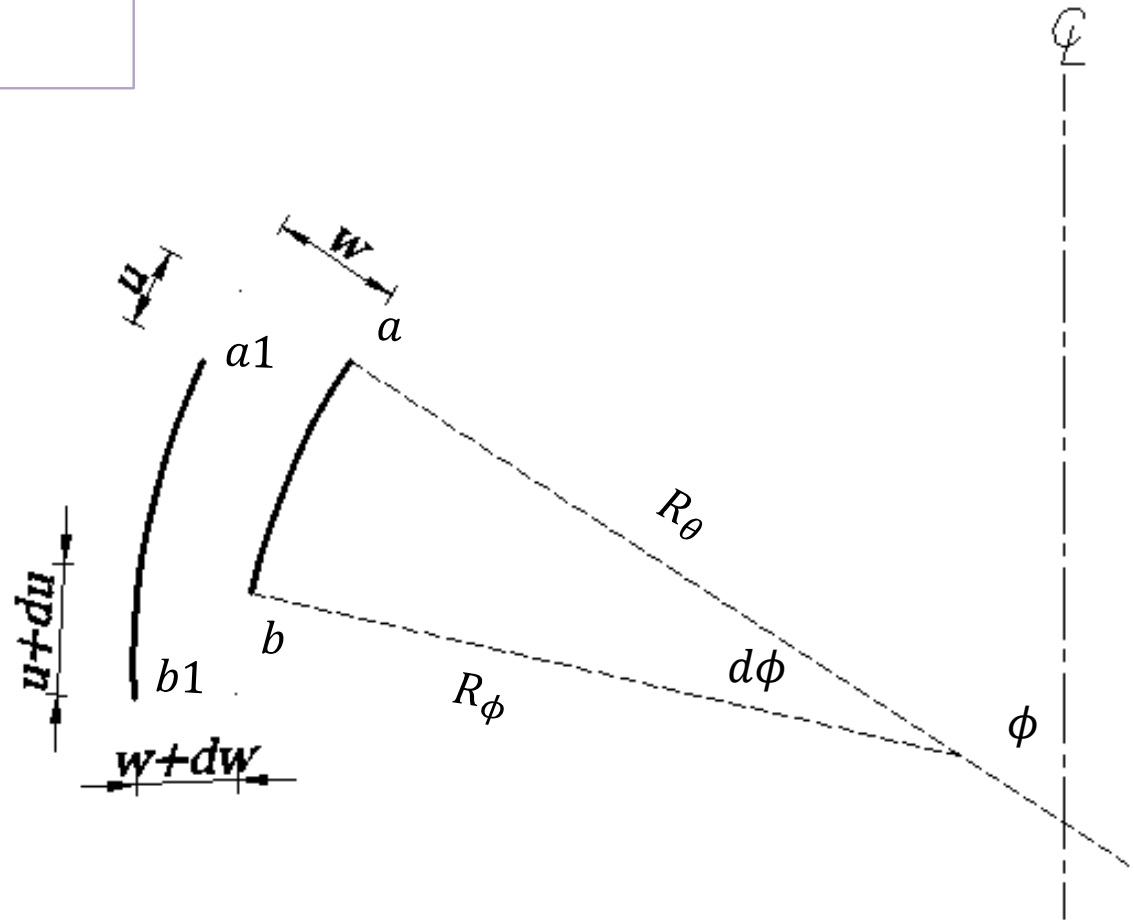
MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Conf. Original y Deformada



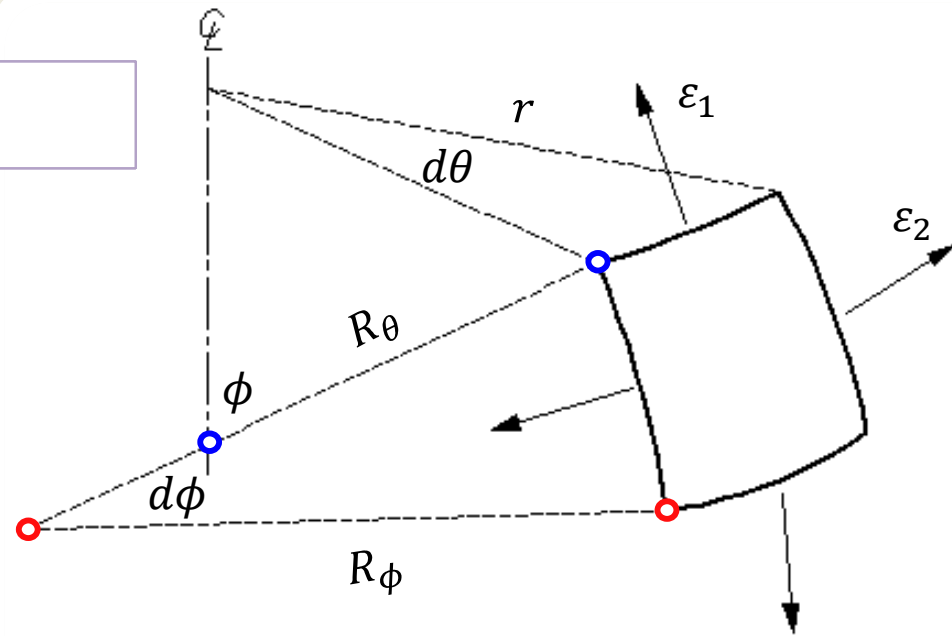
MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Corrimientos en S.C.L.



DEFORMACIONES MEMBRANAS DE REVOLUCIÓN

Deformaciones

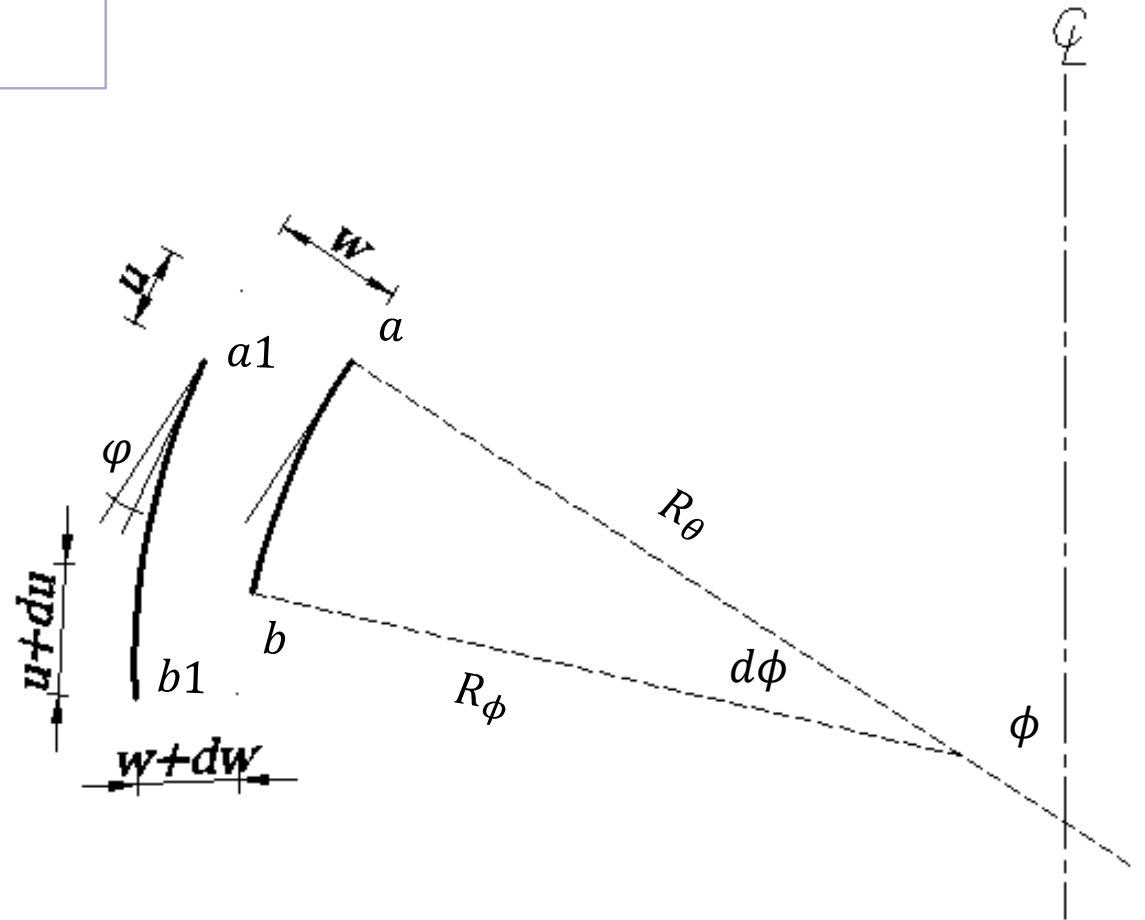


ϵ_1 : Deformación meridional en superficie media ($\theta = \text{cte}$)

ϵ_2 : Deformación paralelo en superficie media ($\phi = \text{cte}$)

GIRO MERIDIANO MEMBRANAS REVOLUCIÓN

Giro del Meridiano

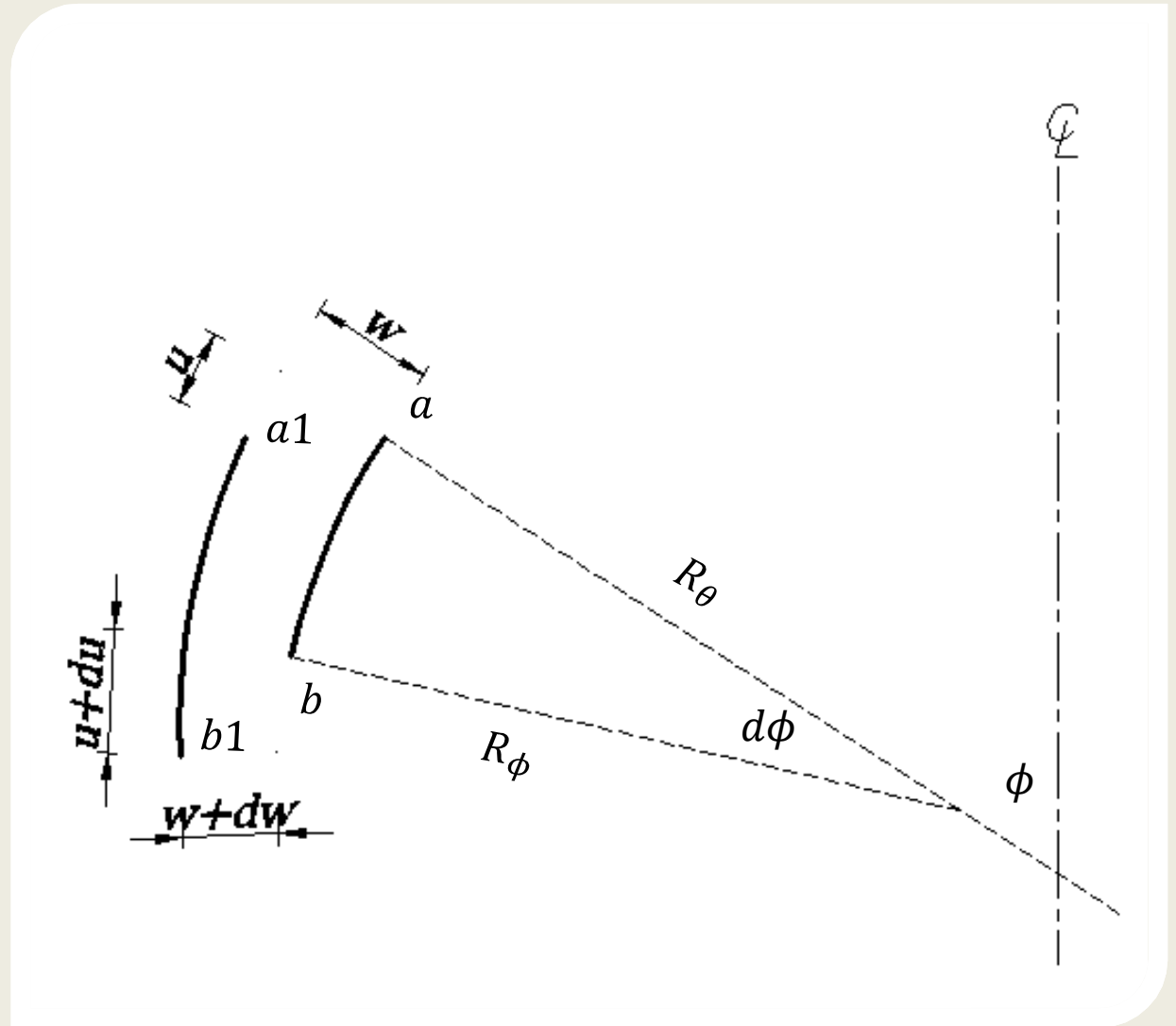
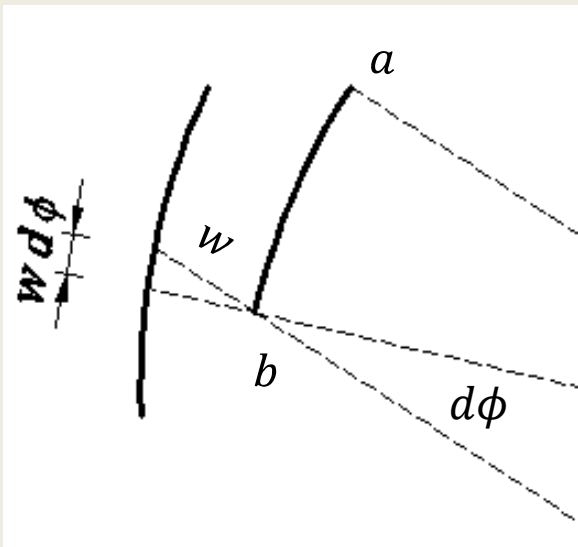


MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Deformación meridiano

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta ab}{ab}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R\phi} \left(\frac{du}{d\phi} + w \right)$$

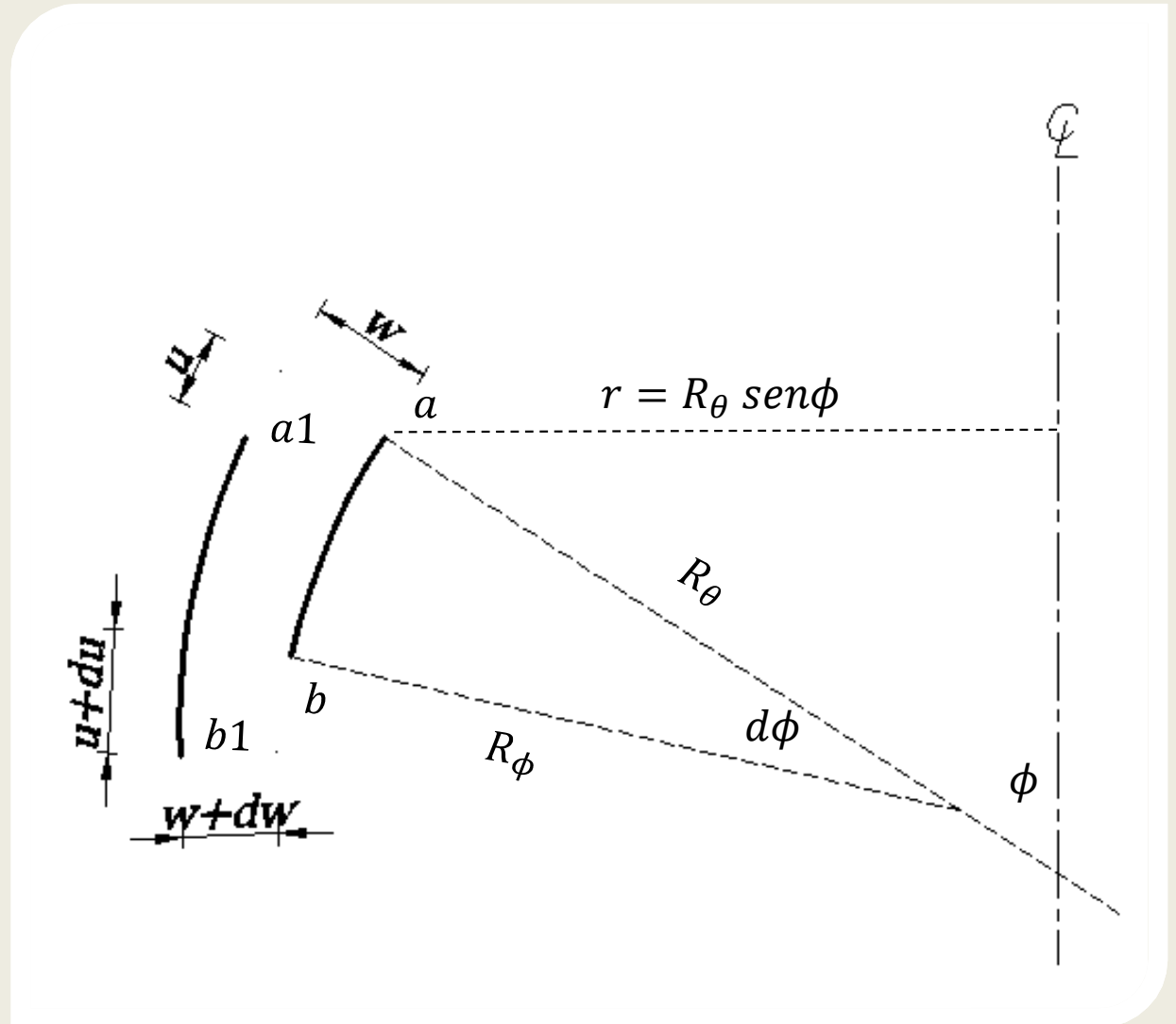
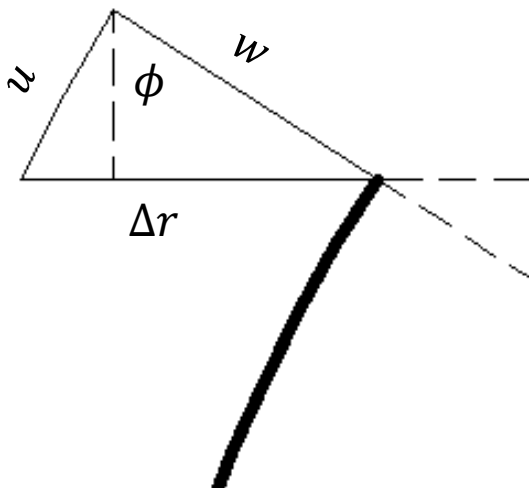


MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Deformación paralelo

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi\Delta r}{2\pi r}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R_\theta} (u \cotg\phi + w)$$



MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Relación entre u y ϕ

$$\varepsilon_1 R_\phi - \frac{du}{d\phi} = \varepsilon_2 R_\theta - u \cot g\phi$$

$$w = \varepsilon_1 R_\phi - \frac{du}{d\phi}$$

$$w = \varepsilon_2 R_\theta - u \cot g\phi$$

$$\frac{du}{d\phi} - u \cot g\phi = \varepsilon_1 R_\phi - \varepsilon_2 R_\theta$$

Ley de Hooke Generalizada (2D)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E t} (S1 - \mu S2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E t} (S2 - \mu S1)$$

$$\frac{du}{d\phi} + u \cot g\phi = \frac{1}{E t} [S1(R_\phi + \mu R_\theta) - S2(R_\theta + \mu R_\phi)]$$

$$\frac{du}{d\phi} + u \cot g\phi = f(\phi)$$

$$f(\phi) = \frac{1}{E t} [S1(R_\phi + \mu R_\theta) - S2(R_\theta + \mu R_\phi)]$$

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Solución General Homogénea

$$\frac{du}{d\phi} + u \cot g\phi = 0$$

$$u = \operatorname{sen}\phi \left[\int \frac{f(\phi)}{\operatorname{sen}\phi} d\phi + C \right]$$

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

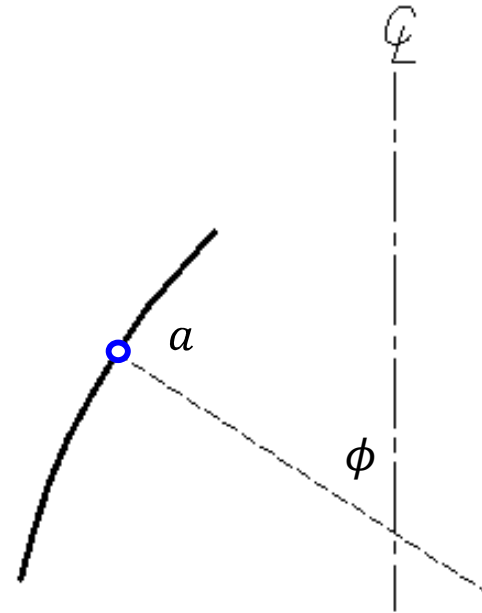
Corrimientos en S.C.L.

$$u = \operatorname{sen}\phi \left[\int \frac{f(\phi)}{\operatorname{sen}\phi} d\phi + C \right]$$

$$w = \varepsilon_2 R_\theta - \operatorname{cos}\phi \left[\int \frac{f(\phi)}{\operatorname{sen}\phi} d\phi + C \right]$$

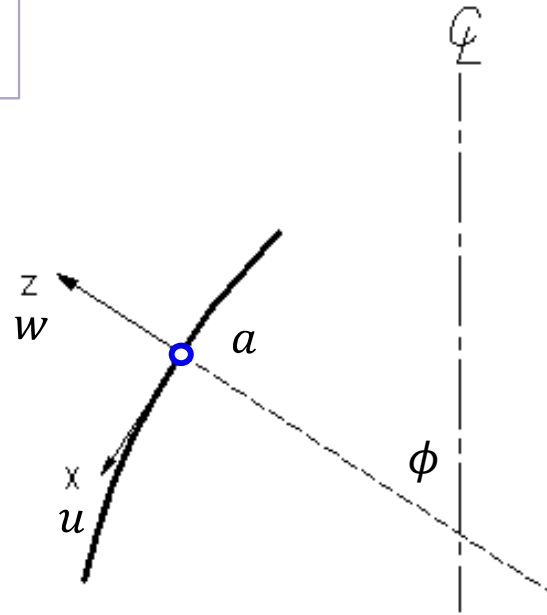
MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Corrimientos en S.C.G.



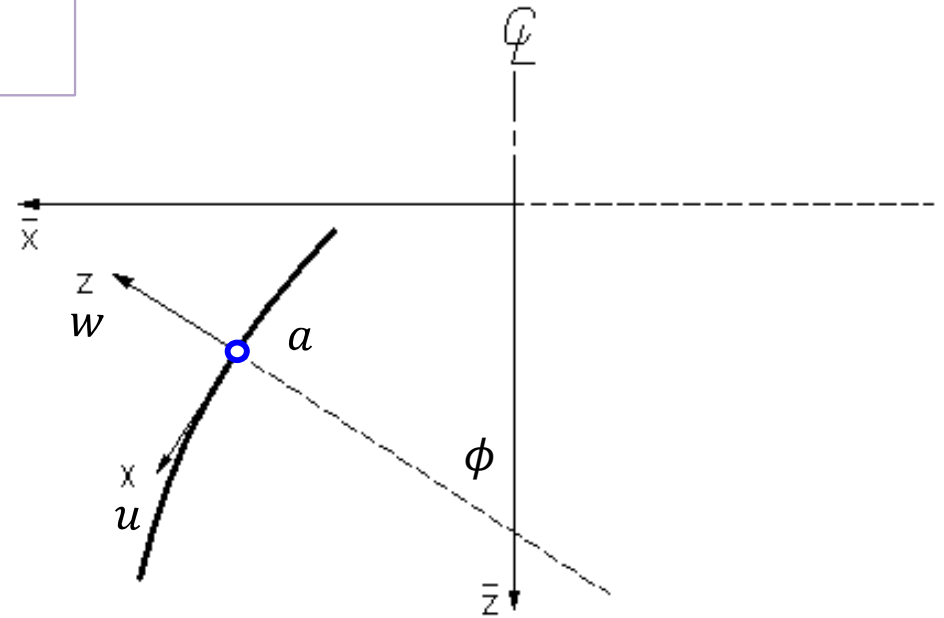
MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Corrimientos en S.C.G.



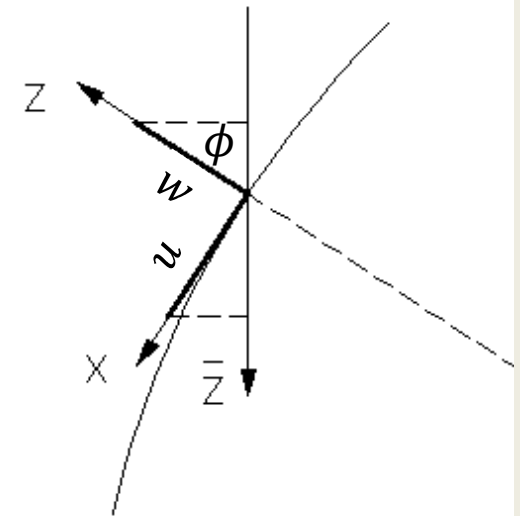
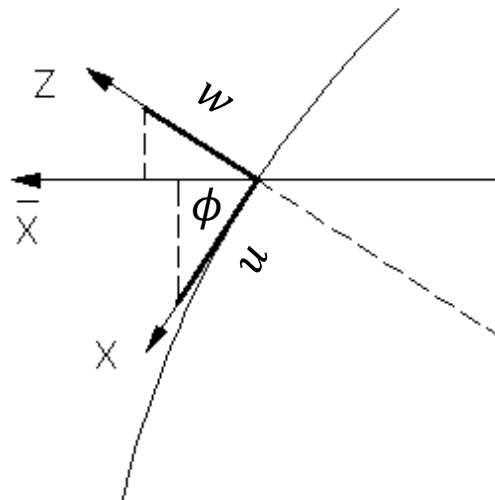
MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Corrimientos en S.C.G.



$$\bar{u} = u \cos \phi + w \sin \phi$$

$$\bar{w} = u \sin \phi - w \cos \phi$$



MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Corrimientos en S.C.G.

$$\bar{u} = \Delta r = r\varepsilon_2$$

$$\bar{w} = \int \frac{f(\phi)}{\text{sen}\phi} d\phi + C - \frac{\bar{u}}{\text{tg}\phi}$$

La constante C

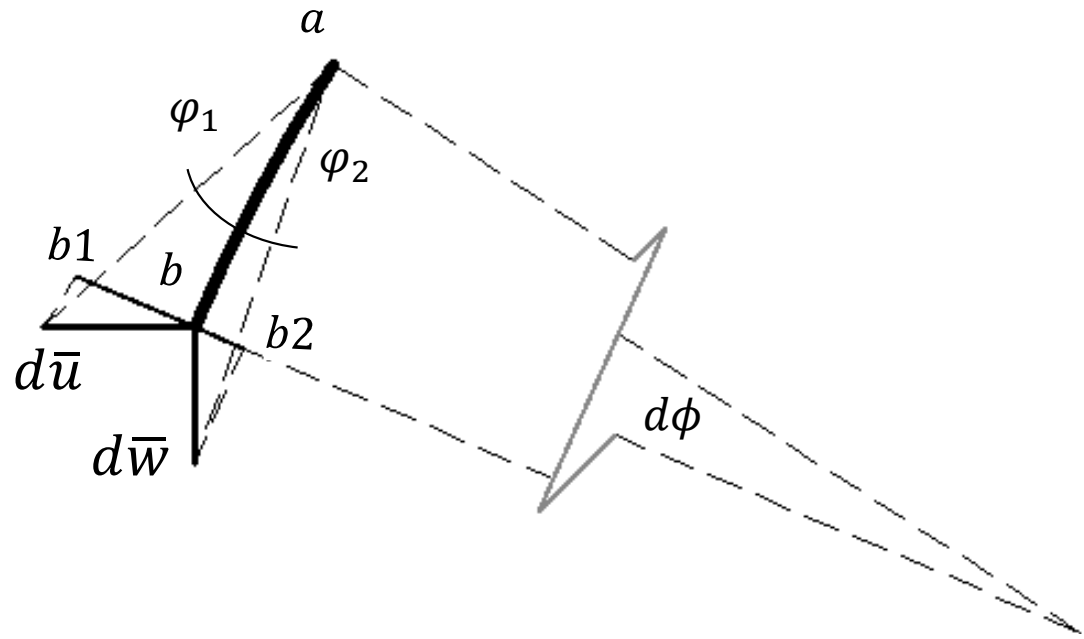
Representa un movimiento rígido de la membrana

Se elimina en el cálculo de corrimientos relativos

Se determina mediante las condiciones de borde.

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Giro del Meridiano



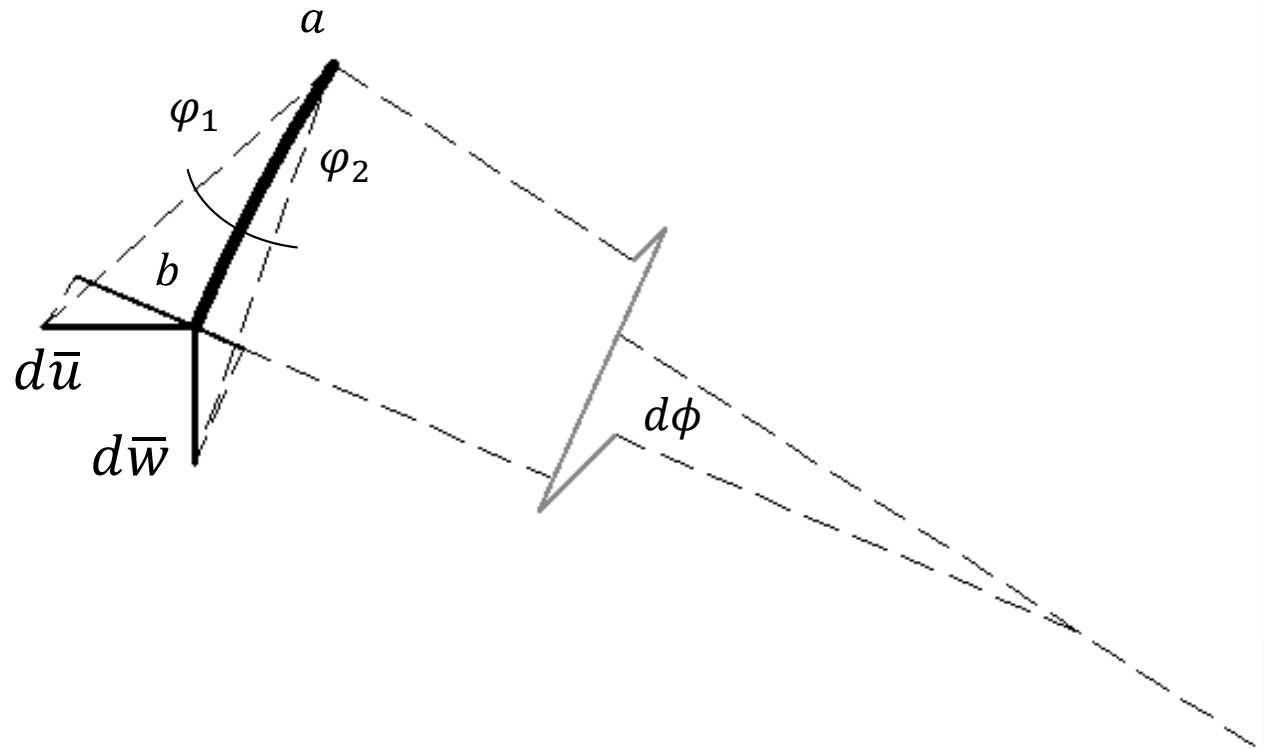
$$\varphi_1 = \frac{d\bar{u} \operatorname{sen}\phi}{R_\phi d\phi} = \frac{d\bar{u}}{d\phi} \frac{1}{R_\phi} \operatorname{sen}\phi$$

$$\varphi_2 = \frac{d\bar{w} \operatorname{cos}\phi}{R_\phi d\phi} = \frac{d\bar{w}}{d\phi} \frac{1}{R_\phi} \operatorname{cos}\phi$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{R_\phi} \left(\frac{d\bar{u}}{d\phi} \operatorname{sen}\phi - \frac{d\bar{w}}{d\phi} \operatorname{cos}\phi \right)$$

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Giro del Meridiano

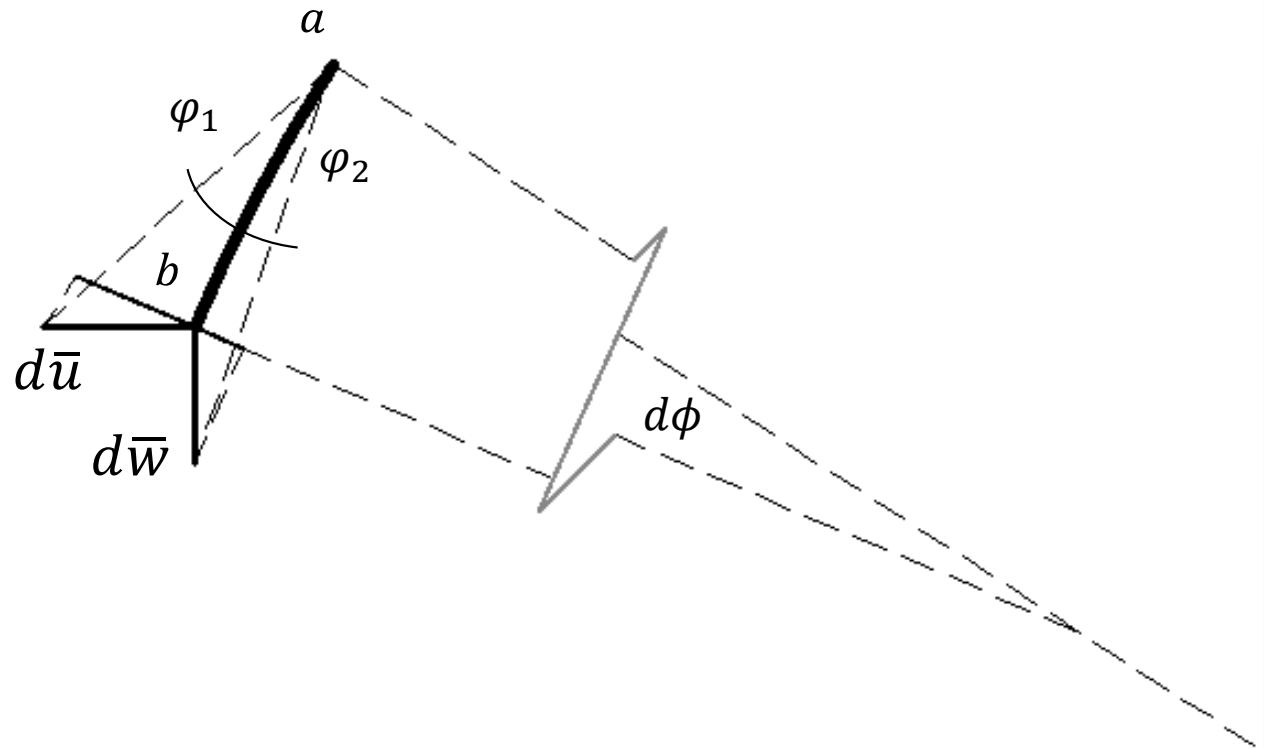


$$\varphi = \frac{1}{R_\phi} \left(\frac{d\bar{u}}{d\phi} \operatorname{sen}\phi - \frac{d\bar{w}}{d\phi} \operatorname{cos}\phi \right)$$

$$\varphi = \frac{1}{R_\phi} \left(\frac{dw}{d\phi} - u \right)$$

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Giro del Meridiano



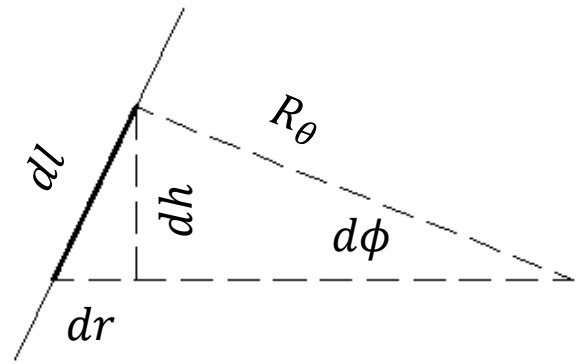
$$\varphi = \frac{1}{R_\phi} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\bar{u}}{\text{sen}\phi} \right) - \frac{f(\phi)}{\text{tg}\phi} \right]$$

$$\varphi = \frac{1}{R_\phi \text{sen}\phi} \left[\frac{d\bar{u}}{d\phi} - R_\phi \varepsilon_1 \cos\phi \right]$$

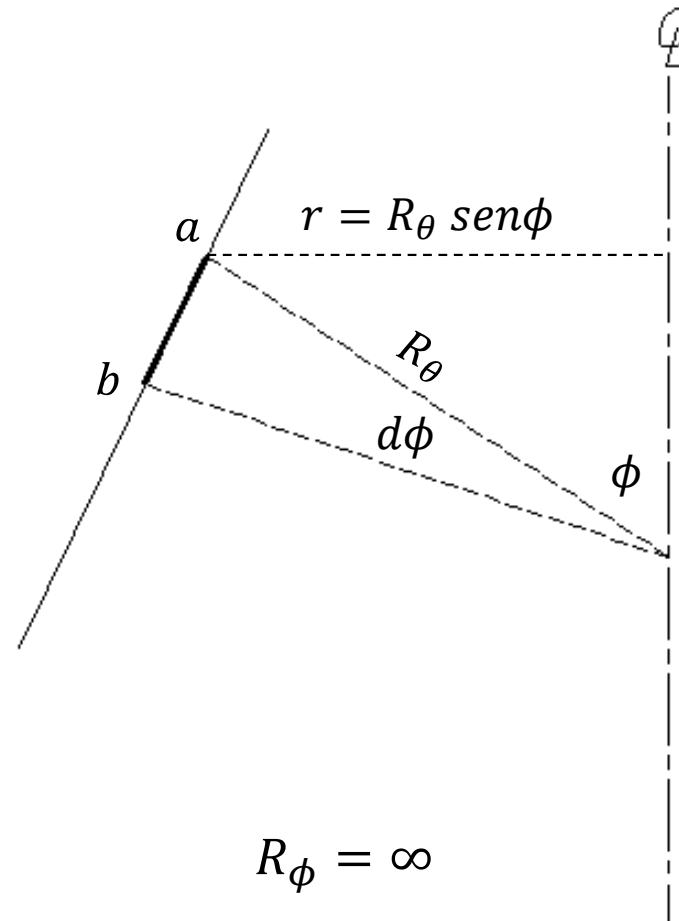
MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Membranas Cónicas

$$\overline{ab} = dl$$



$$dl = R_\phi d\phi = \frac{dr}{\cos\phi} = \frac{dh}{\text{sen}\phi}$$



MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Corrimientos en S.C.G.

$$\bar{u} = r \varepsilon_2$$

$$\bar{u} = \frac{r}{E t} (S2 - \mu S1)$$

$$\bar{w} = \int \frac{f(\phi)}{\text{sen}\phi} d\phi + C - \frac{\bar{u}}{\text{tg}\phi}$$

$$f(\phi) = \frac{1}{E t} [S1(R_\phi + \mu R_\theta) - S2(R_\theta + \mu R_\phi)] = R_\phi \frac{(S1 - \mu S2)}{E t}$$

$$f(\phi) = R_\phi \varepsilon_1$$

$$\int \frac{f(\phi)}{\text{sen}\phi} d\phi = \int \frac{\varepsilon_1 R_\phi}{\text{sen}\phi} d\phi = \frac{1}{\text{sen}\phi} \int \varepsilon_1 dl$$

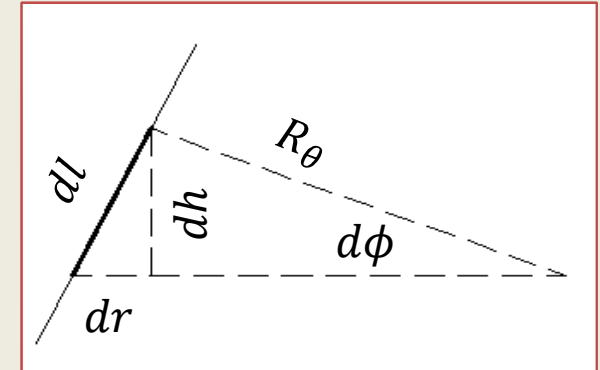
$$\bar{w} = \frac{1}{\text{sen}\phi} \int \varepsilon_1 dl + C - \frac{\bar{u}}{\text{tg}\phi} = \frac{1}{\text{sen}^2\phi} \int \varepsilon_1 dh + C - \frac{\bar{u}}{\text{tg}\phi}$$

MEMBRANAS REVOLUC. DEFORMACIONES Y CORRIMIENTOS

Giro del Meridiano

$$dl = R_\phi d\phi = \frac{dr}{\cos\phi} = \frac{dh}{\operatorname{sen}\phi}$$

$$\phi = \frac{1}{R_\phi} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\bar{u}}{\operatorname{sen}\phi} \right) - \frac{f(\phi)}{\operatorname{tg}\phi} \right]$$



$$\frac{1}{R_\phi} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\bar{u}}{\operatorname{sen}\phi} \right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi} \frac{d\bar{u}}{dl} = \frac{1}{\operatorname{tg}\phi} \frac{d\bar{u}}{dr} = \frac{d\bar{u}}{dh}$$

$$-\frac{1}{R_\phi} \frac{f(\phi)}{\operatorname{tg}\phi} = -\frac{\varepsilon_1}{\operatorname{tg}\phi}$$

$$\phi = \frac{1}{\operatorname{tg}\phi} \left[\frac{d\bar{u}}{dr} - \varepsilon_1 \right] = \frac{d\bar{u}}{dh} - \frac{\varepsilon_1}{\operatorname{tg}\phi}$$

APLICACIONES. MEMBRANAS REVOLUCIÓN ESFÉRICAS

Par.	Peso propio	Carga uniforme	Presión hidrostática	Presión uniforme
	$q = \gamma t$	p	ρ / f	p
p_x	$q \operatorname{sen} \phi$	$p \cos \phi \operatorname{sen} \phi$	0	0
p_y	0	0	0	0
p_z	$-q \cos \phi$	$p \cos^2 \phi$	$\rho [f + R(1 - \cos \phi)]$	$-p$
S_1	$-\frac{qR}{1 + \cos \phi}$	$-\frac{pR}{2}$	$-\frac{\rho R^2}{6} \left[-1 + \frac{3f}{R} - \frac{2 \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right]$	$-\frac{pR}{2}$
S_2	$-qR \left(\cos \phi - \frac{1}{1 + \cos \phi} \right)$	$\frac{pR}{2} \cos 2\phi$	$-\frac{\rho R^2}{6} \left[-1 + \frac{3f}{R} - \frac{4 \cos^2 \phi - 6}{1 + \cos \phi} \right]$	$-\frac{pR}{2}$
\bar{u}	$\frac{\gamma R^2}{E} \operatorname{sen} \phi \left[-\cos \phi + \frac{1+\mu}{\operatorname{sen}^2 \phi} (1 - \cos \phi) \right]$	$\frac{pR^2}{Et} \operatorname{sen} \phi \left[-\cos^2 \phi + \frac{1+\mu}{2} \right]$	$-\frac{\rho R^3}{6Et} \operatorname{sen} \phi \left[3 \left(1 + \frac{f}{R} \right) (1 - \mu) - 6 \cos \phi - \frac{2(1+\mu)}{\operatorname{sen}^2 \phi} (\cos^3 \phi - 1) \right]$	$\frac{pR^2}{Et} (1 - \mu) \operatorname{sen} \phi$
ϕ	$-\frac{\gamma R}{E} \operatorname{sen} \phi (2 + \mu)$	$-\frac{pR}{Et} (3 + \mu) \operatorname{sen} \phi \cos \phi$	$\frac{\rho R^2}{Et} \operatorname{sen} \phi$	0
\bar{w}	$\frac{\gamma R^2}{E} [\log(1 + \cos \phi) + \cos^2 \phi + \mu \log(1 + \cos \phi)]$ $C = (1 + \mu) \frac{\gamma R^2}{E}$	ND	ND	ND

APLICACIONES. MEMBRANAS REVOLUCIÓN ESFÉRICAS

Dat@s

$$R_{int} = 30.0m$$

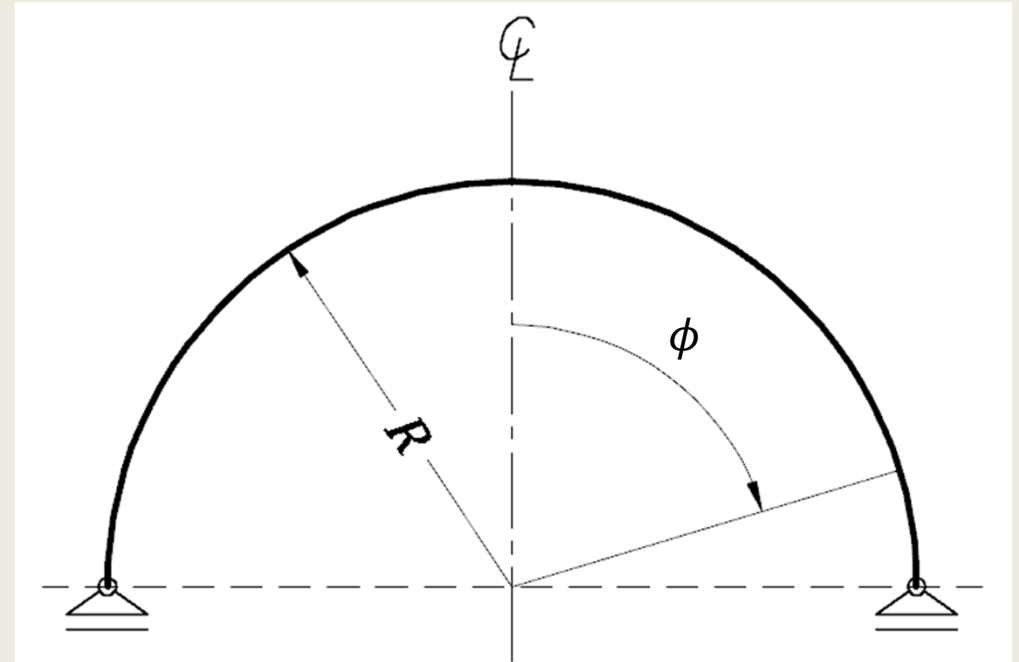
$$t = 0.06m$$

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

$$E = 24 \text{ Mpa}$$

$$\mu = 0.20$$

$$t/R = 0.002$$



°	ϕ	f	r	Sum q	S1	S2	σ_1	σ_2	ϵ_1	ϵ_2
	rad	m	m	kN	kN/m	kN/m	kN/m ²	kN/m ²		
0.00	0.0000	0.00	0.00	0.00	-21.62	-21.62	-360.36	-360.36	-1.2E-05	-1.20E-05
15.00	0.2618	1.02	7.77	71.96	-22.00	-19.77	-366.61	-329.56	-1.3E-05	-1.07E-05
30.00	0.5236	4.02	15.02	546.57	-23.17	-14.28	-386.23	-237.93	-1.4E-05	-6.70E-06
45.00	0.7854	8.80	21.23	1689.85	-25.33	-5.25	-422.19	-87.44	-1.7E-05	-1.25E-07
60.00	1.0472	15.02	26.01	3533.08	-28.83	7.21	-480.48	120.12	-2.1E-05	9.01E-06
75.00	1.3090	22.26	29.01	5841.46	-34.35	23.16	-572.54	386.00	-2.7E-05	2.09E-05
90.00	1.5708	30.03	30.03	8159.29	-43.24	43.24	-720.72	720.72	-3.6E-05	3.60E-05

APLICACIONES. MEMBRANAS REVOLUCIÓN ESFÉRICAS

Dat@s

$$R_{int} = 30.0m$$

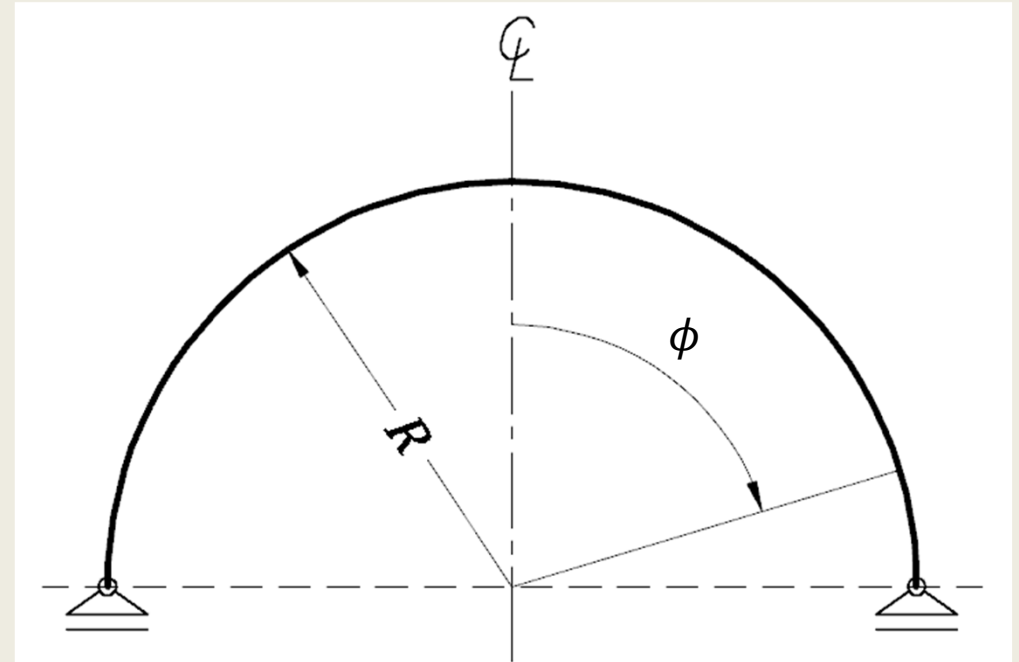
$$t = 0.06m$$

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

$$E = 24 \text{ Mpa}$$

$$\mu = 0.20$$

$$t/R = 0.002$$



°	ϕ	\bar{u}	\bar{v}	\bar{w}	\bar{u}	\bar{u}	ϕ
	rad	m	m	m	Belluzzi	Baker et al	
0.00	0.0000	0.00E+00	0	1.23E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
15.00	0.2618	-8.30E-05	0	1.16E-03	7.18E-04	-8.30E-05	-1.71E-05
30.00	0.5236	-1.01E-04	0	9.70E-04	7.05E-04	-1.01E-04	-3.30E-05
45.00	0.7854	-2.65E-06	0	7.02E-04	6.41E-04	-2.65E-06	-4.67E-05
60.00	1.0472	2.34E-04	0	4.16E-04	6.38E-04	2.34E-04	-5.72E-05
75.00	1.3090	6.05E-04	0	1.69E-04	7.10E-04	6.05E-04	-6.38E-05
90.00	1.5708	1.08E-03	0	8.20E-10	9.02E-04	1.08E-03	-6.61E-05

APLICACIONES. MEMBRANAS REVOLUCIÓN ESFÉRICAS

Dat@s

$$R_{int} = 30.0m$$

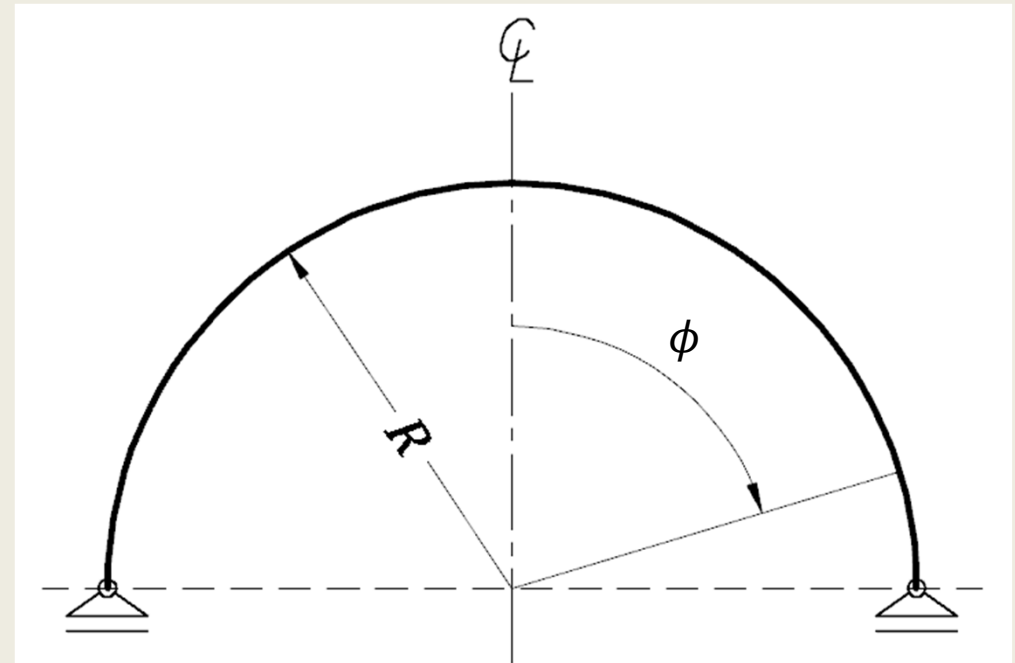
$$t = 0.06m$$

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

$$E = 24 \text{ Mpa}$$

$$\mu = 0.20$$

$$t/R = 0.002$$



ϕ		Teórico			TP 12x6		MEMB 12x6		TP 24x12	
°	rad	\bar{u} m	\bar{w} m	ϕ rad	\bar{u} m	\bar{w} m	\bar{u} m	\bar{w} m	\bar{u} m	\bar{w} m
0.00	0.0000	0.00E+00	1.23E-03	0.00E+00	6.24E-19	1.89E-03	2.56E-17	1.89E-03	-5.97E-18	2.05E-03
15.00	0.2618	-8.30E-05	1.16E-03	-1.71E-05	-6.20E-05	1.41E-03	-6.10E-05	1.41E-03	-8.20E-05	1.54E-03
30.00	0.5236	-1.01E-04	9.70E-04	-3.30E-05	-1.01E-04	1.25E-03	-1.02E-04	1.25E-03	-1.00E-04	1.32E-03
45.00	0.7854	-2.65E-06	7.02E-04	-4.67E-05	-1.10E-05	9.54E-04	-1.00E-05	9.53E-04	-5.06E-06	1.01E-03
60.00	1.0472	2.34E-04	4.16E-04	-5.72E-05	2.08E-04	6.22E-04	2.07E-04	6.23E-04	2.26E-04	6.53E-04
75.00	1.3090	6.05E-04	1.69E-04	-6.38E-05	5.34E-04	3.02E-04	5.35E-04	3.02E-04	5.91E-04	3.06E-04
90.00	1.5708	1.08E-03	8.20E-10	-6.61E-05	1.04E-03	0.00E+00	1.04E-03	0.00E+00	1.08E-03	0.00E+00
Peso (kN)		8159.29			7890.88		7890.88		8079.29	

APLICACIONES. MEMBRANAS REVOLUCIÓN ESFÉRICAS

Dat@s

$$R_{int} = 30.0m$$

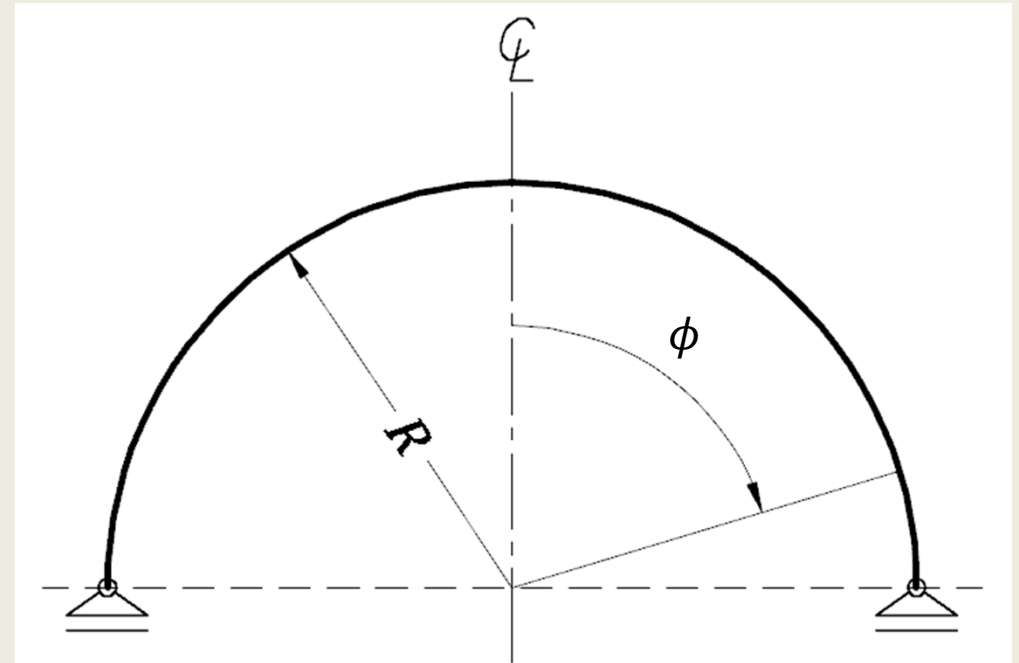
$$t = 0.06m$$

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

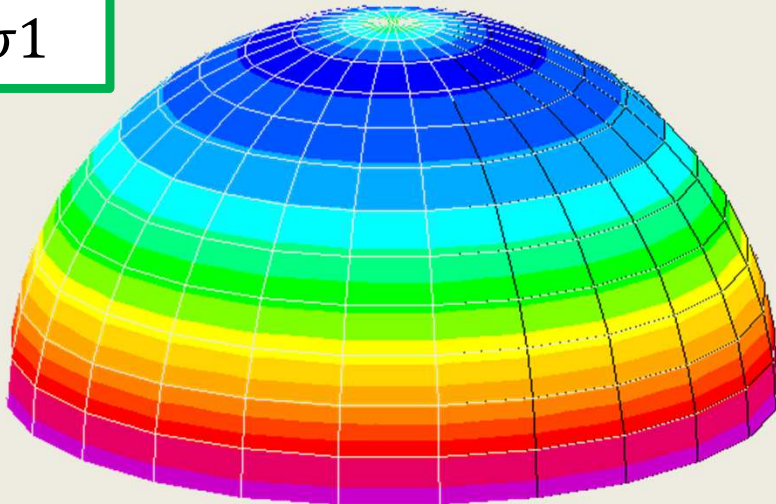
$$E = 24 \text{ Mpa}$$

$$\mu = 0.20$$

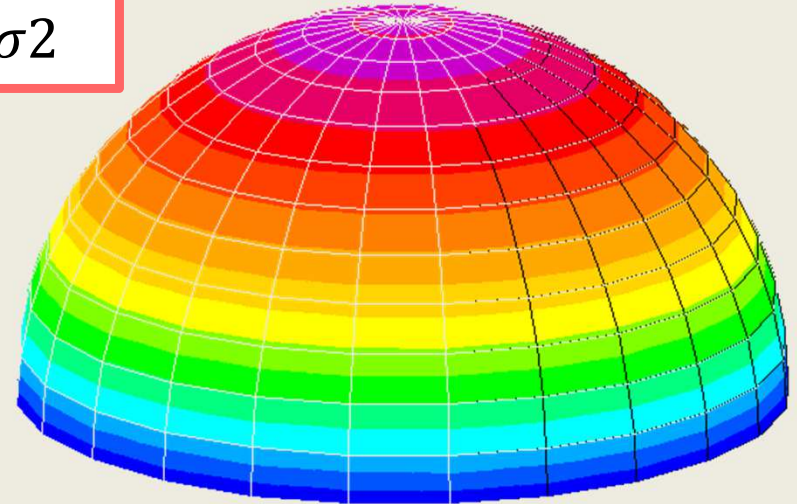
$$t/R = 0.002$$



σ_1



σ_2

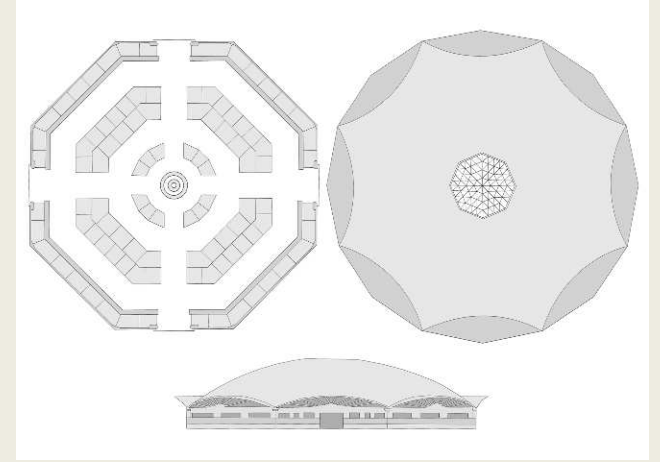
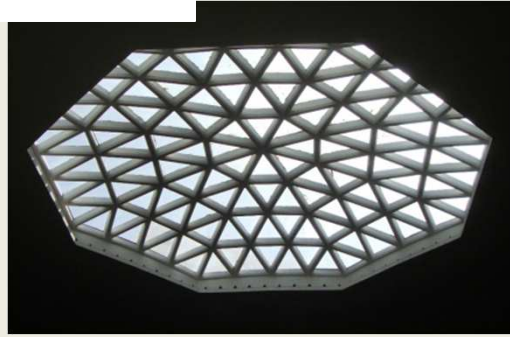


-660. -638. -616. -594. -572. -550. -528. -506. -484. -462. -440. -418. -396. -374.

-300. -225. -150. -75. 0. 75. 150. 225. 300. 375. 450. 525. 600. 675.

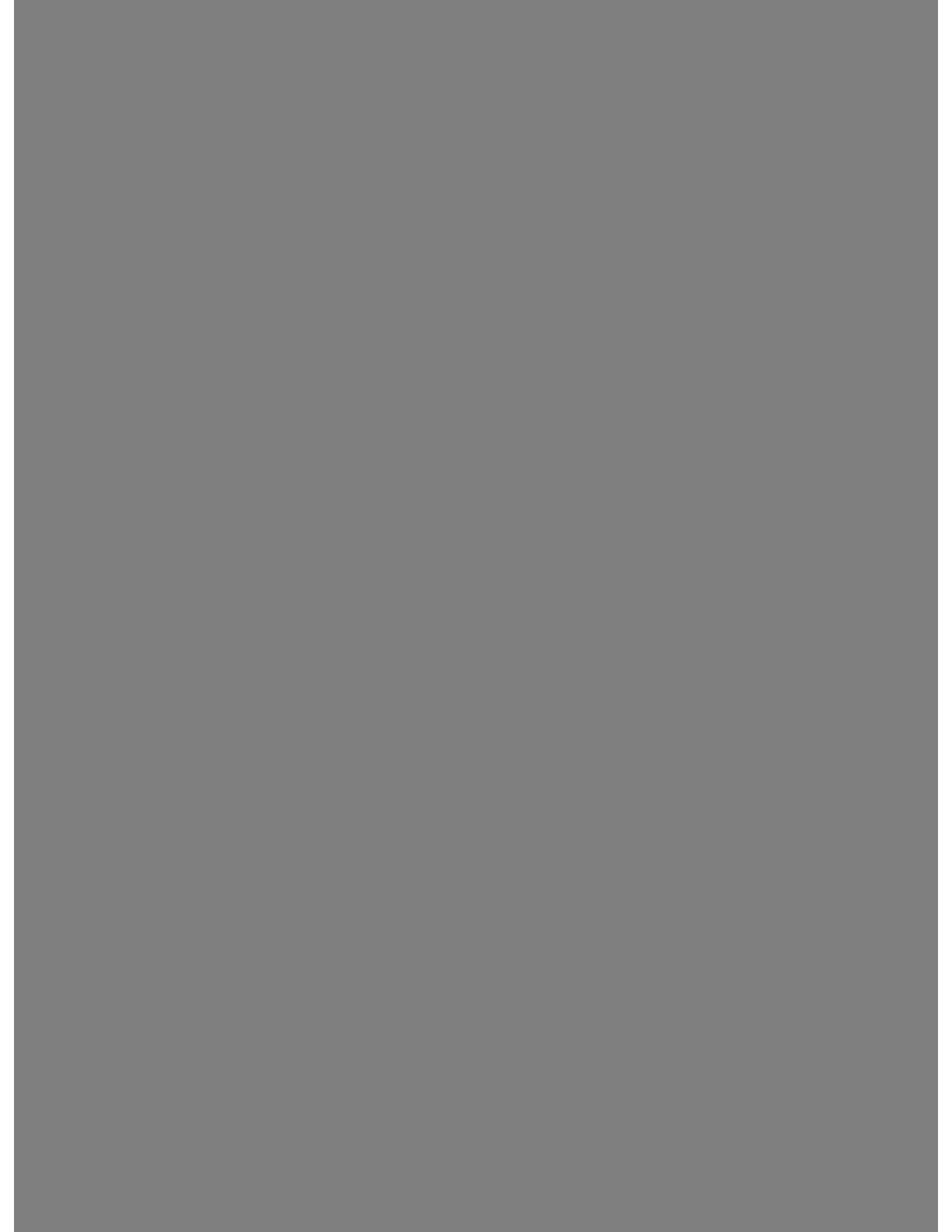
CÚPULAS

Mercado Abastos Algerías

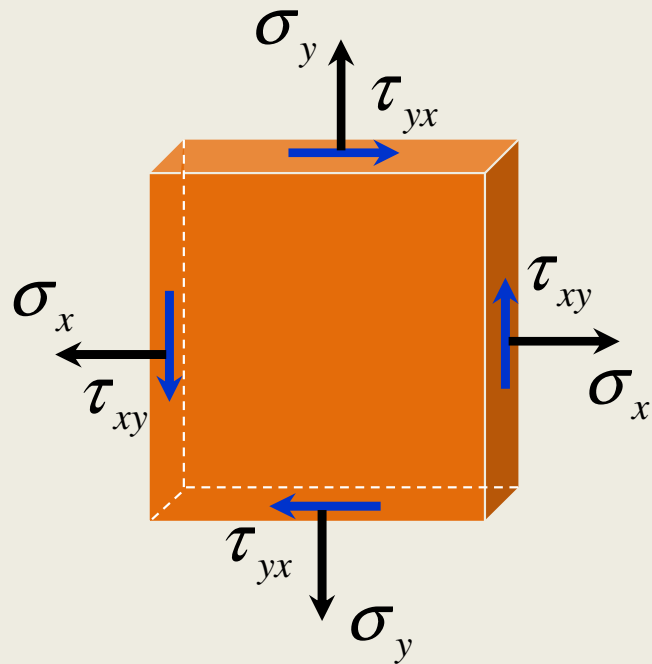


BIBLIOGRAFÍA

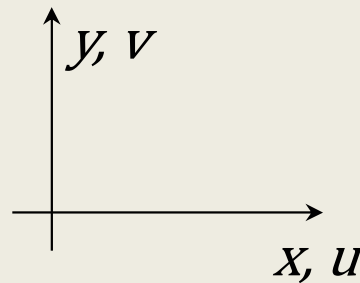
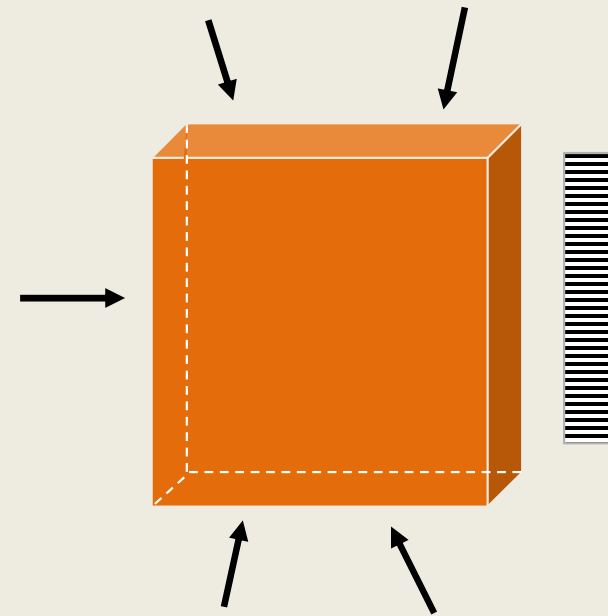
- Odone Belluzzi. “Ciencia de la Construcción III”. Ed. Nicola Zanichelli. España 1967
- Baker et al. “Structural Analysis of Shells” T I, McGraw Hill Ed., 1972. ISBN 0-07-003354-4
- Villafañe et al, C. “Estructuras Laminadas. Teoría y Aplicaciones”. Apuntes de clase, Facultad de Ingeniería. UNC. 2006.



Tensiones



Acciones



Campo deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Campo tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$