

# ESTRUCTURAS LAMINARES

## Formulación de Elementos Finitos

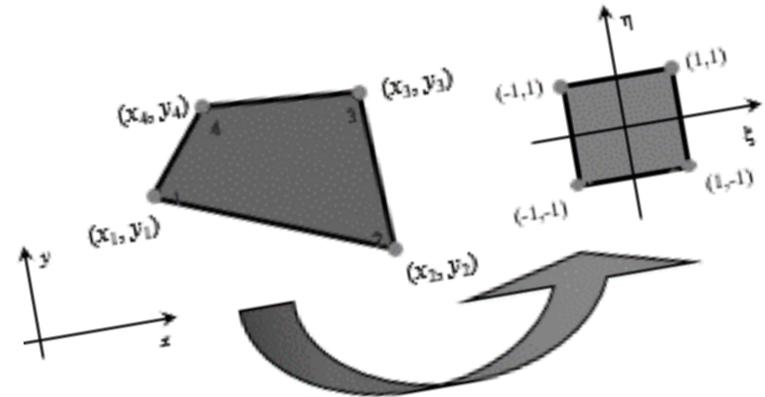
Titular Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ  
Adscripto Ing. CARLOS LEIVA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA  
en acción continua...



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

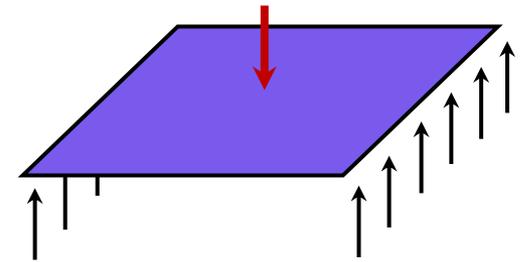
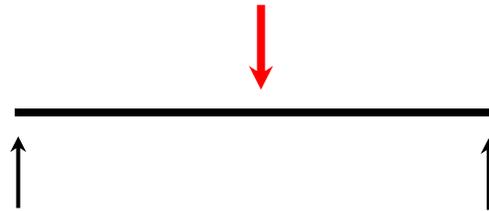
$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{t}{|J^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

# Análisis de Láminas con Elementos Planos. Introducción

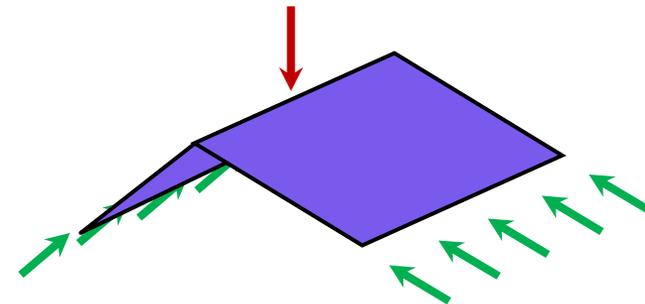
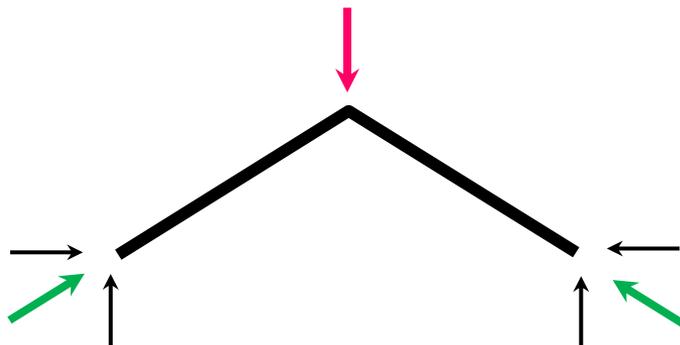
Las Láminas con Simple o Múltiple Curvatura tipológicamente pueden considerarse como una generalización de las losas planas al caso de superficie media no plana.

## Analogía

Esfuerzos  
de Flexión



Esfuerzos Axiales  
o de Membrana



# Introducción

La obtención de las ecuaciones de lámina (membranas y cáscaras) puede resultar mas o menos compleja debido a la curvatura de la superficie media (simple o múltiple).

Una manera sencilla para salvar el problema es estudiar el comportamiento de toda la lámina como si estuviese compuesta por elementos planos pequeños.

La aproximación de la geometría será más real cuanto más pequeños sean los elementos.

Superficie  
Media

Arbitraria  
De Revolución  
Prismática

# Formulación de Elemento Finitos

Vamos a formular EF a partir de principios energéticos por generalidad y simplicidad.

Trabajamos en el campo de la Mecánica Aplicada.

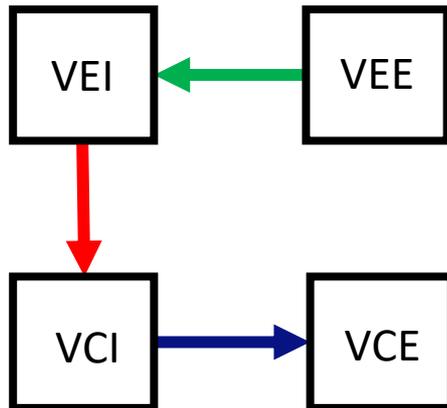
Mecánica

*Teórica:* Leyes y principios fundamentales de la mecánica.

*Aplicada:* Transformación de conocimientos científicos a la práctica ingenieril (MEF)

# Formulación de Elemento Finitos

La mecánica estructural tiene un conjunto de ecuaciones que la gobiernan:



Ec. de Equilibrio

Ec. Constitutivas

Ec. de Compatibilidad Geométrica

Condiciones de Contorno Estat. y Cinem.

Para relacionarlas se usa una función de funciones o funcional. En Ingeniería Estructural el funcional más usado es el *Potencial Total*.

# Potencial Total

$$\pi = U + \Omega$$

$U$  E. deformación interna

$\Omega$  E. acciones externa

La potencial total es un escalar que caracteriza a toda la estructura. Representa la energía total en la estructura.

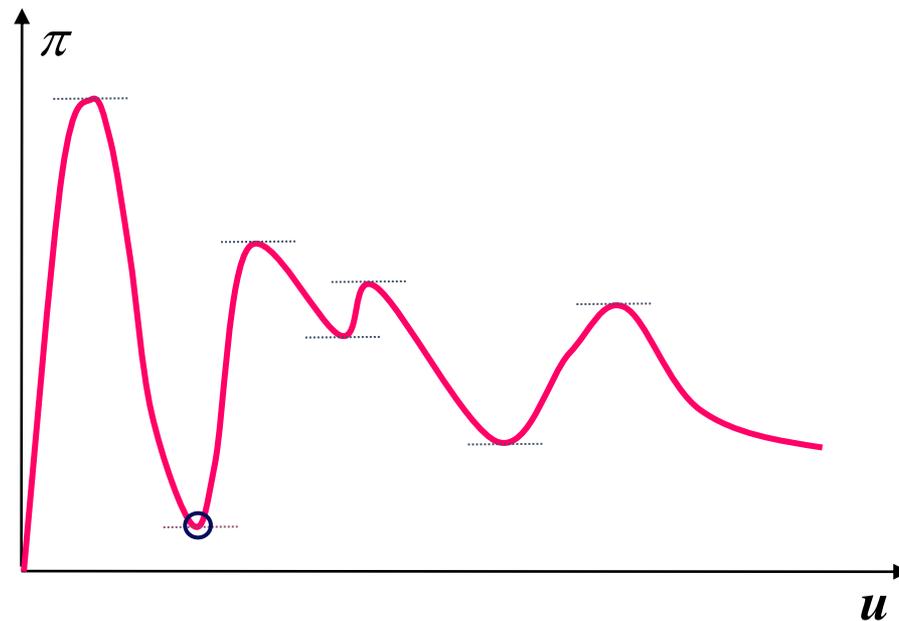
De todas las configuraciones deformadas, nos interesan las de equilibrio.

## Principio de Estacionalidad de la Energía Potencial

De todas las configuraciones admisibles de un sistema conservativo aquellas que satisfacen el equilibrio hacen la energía potencial estacionaria.

# Energía Potencial o Potencial Total

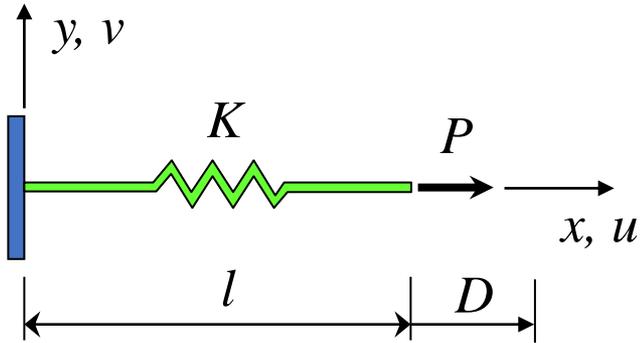
Interesa la estacionalidad de la energía potencial respecto de variaciones pequeñas y admisibles de los desplazamientos



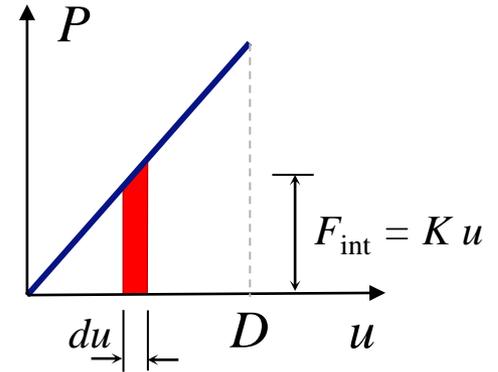
Buscamos que el equilibrio sea estable, el punto estacionario debe ser un mínimo.

# Ejemplos. Sistemas Un Grado de Libertad

Estructura



P - u



Energía Interna

$$U = \int_0^D F_{\text{int}} du = \int_0^D K u du$$

$$U = \frac{1}{2} K D^2$$

Energía Externa

$$\Omega = \int_0^D F_{\text{ext}} du = \int_0^D P du$$

$$\Omega = P D$$

# Ejemplos. Sistemas Un Grado de Libertad

Potencial Total

$$\pi = \frac{1}{2}KD^2 + PD$$

Condición de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{dD} = KD + P = 0$$

$$KD + P = 0$$

$$(KD + P) \delta D = 0 \quad \text{P. T. V.}$$

Desp. de Equilibrio

$$D_{eq} = \frac{-P}{K}$$

Cond. de Estabilidad del eq.

$$\frac{d^2\pi}{dD^2} = K > 0$$

# Ejemplos. Sistemas $n$ Grados de Libertad

Potencial Total

$$\pi = \pi(D_1, D_2, \dots, D_n)$$

Condición de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{D}} = \phi$$

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial D_1} dD_1 + \frac{\partial \pi}{\partial D_2} dD_2 + \dots + \frac{\partial \pi}{\partial D_n} dD_n = \phi$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial D_i} dD_i = \phi$$

Desp. de Equilibrio

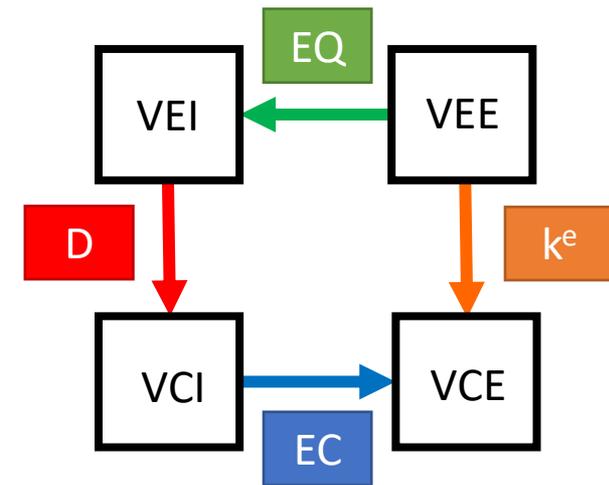
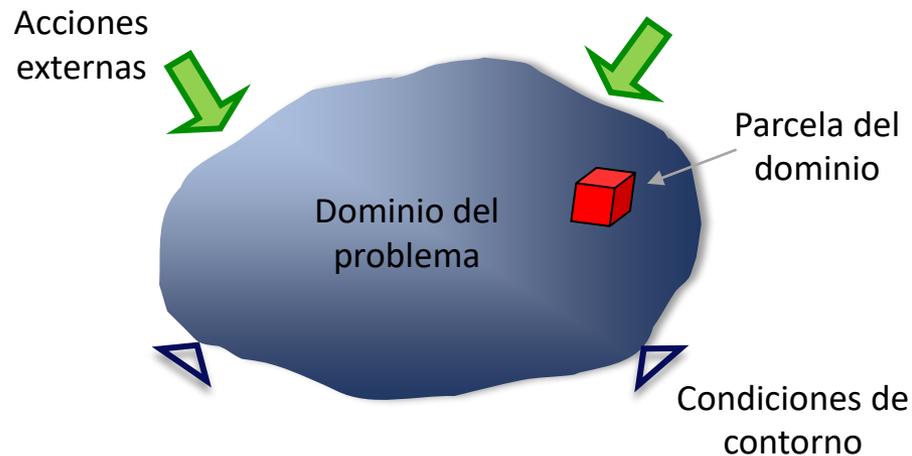
$$\frac{d\pi}{d\mathbf{D}} = \phi \Rightarrow \mathbf{D}_{eq}$$

Cond. de Estabilidad del Equilibrio

$$\frac{d^2\pi}{d\mathbf{D}^2} = \mathbf{K} > \phi$$

# Formulación de Elementos Finitos

Busco solucionar un problema estructural en forma aproximada mediante una cierta técnica de discretización.



El desafío es encontrar el operador matemático que caracterice las propiedades de una parcela del dominio.

# Formulación de Elementos Finitos

En el término que representa la energía de deformación interna está implícito el operador matemático que busco.

La derivada 1º del potencial total  $\pi$  sirve para establecer la condición de equilibrio en el dominio del problema.

La derivada 2º de  $\pi$  pone en evidencia el operador que busco,  $k^e$ , a través de la condición de estabilidad del equilibrio.

El problema que se presenta es que en un medio continuo existen infinitos grados de libertad.

# Formulación de Elementos Finitos

El potencial total de una parcela del problema de volumen  $V$  y superficie  $S$ , se puede escribir como:

$$\pi = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} dS - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{P}$$

Energía de deformación interna

Energía de acciones externas

Es la forma débil del problema, se cumple en media.

Aproximamos los corrimientos en el interior de la parcela con un campo polinomial parcial, como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$$

# Formulación de Elementos Finitos

Recordando

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} \pi = \int_V \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})^T : \mathbf{D} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})^T : \mathbf{D} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d}_0) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \right] dV + \\ - \int_V (\mathbf{N} \cdot \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_S (\mathbf{N} \cdot \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{t} dS - \mathbf{d} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

# Formulación de Elementos Finitos

Aplicando el P.E.E.P.

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial d^2} = \frac{\partial^2}{\partial d^2} \int_V \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})^T : \mathbf{D} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})^T : \mathbf{D} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})_0 + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{d})^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \right] dV +$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial d^2} \left[ \int_V (\mathbf{N} \cdot \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_S (\mathbf{N} \cdot \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{t} dS - \mathbf{d} \cdot \mathbf{P} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial d^2} = \int_V \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} dV > \emptyset$$

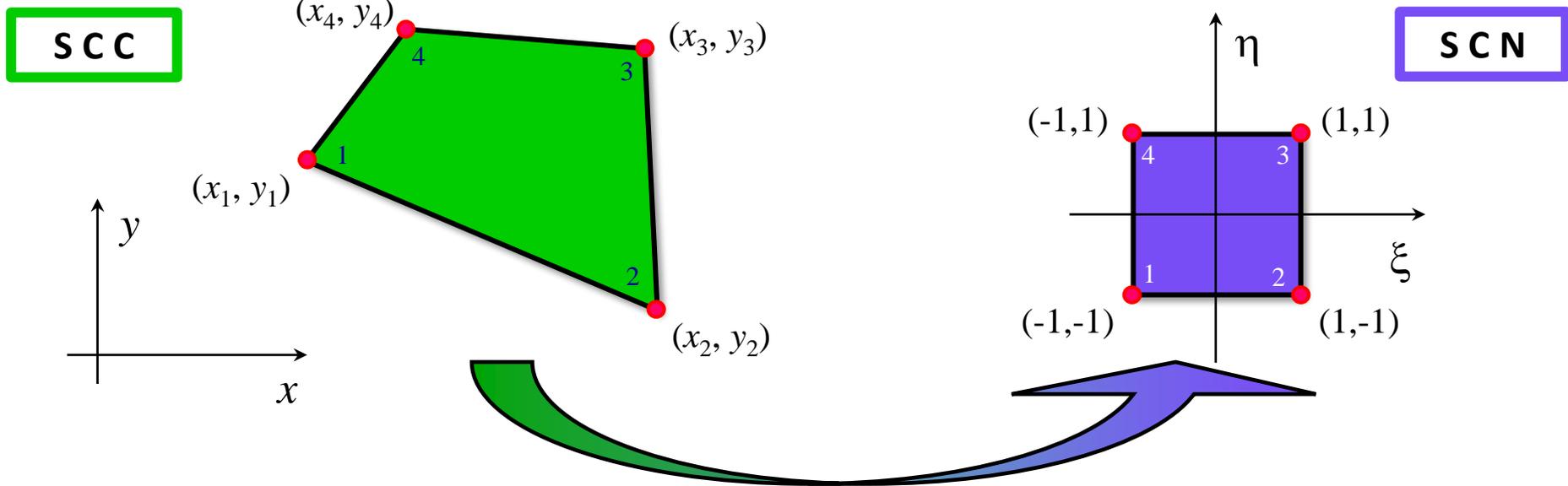
$$\mathbf{k}_e = \int_V \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} dV$$

# Formulación Paramétrica

Se pretende interpolar la geometría del elemento a partir de las coordenadas de  $m$  puntos conocidos.

- Si  $m$  es mayor que la cantidad de nodos del elemento la formulación recibe el nombre de *Superparamétrica*.
- Si  $m$  es menor que la cantidad de nodos del elemento la formulación recibe el nombre de *Subparamétrica*.
- Si  $m$  es igual a la cantidad de nodos del elemento la formulación recibe el nombre de *Isoparamétrica*.

# Elemento Isoparamétrico de 4 Nodos



La relación entre ambos sistemas de referencia se expresa como

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i$$

# Elemento Isoparamétrico de 4 Nodos

Cálculo de las funciones de forma

$$x(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta$$

$$y(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta$$

Condición

$$x(\xi_i, \eta_i) = x_i$$

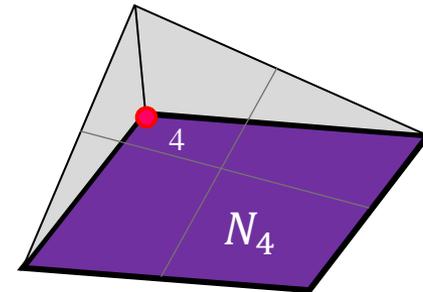
$$y(\xi_i, \eta_i) = y_i$$

Por ejemplo para  $x_2$

$$x_2 = x(\xi_2, \eta_2) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_2, \eta_2) x_i$$

En general para  $x_j$

$$x_j = x(\xi_j, \eta_j) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_j, \eta_j) x_i$$



donde

$$\begin{aligned} \forall i = j & \quad N_i = 1 \\ \forall i \neq j & \quad N_i = 0 \end{aligned}$$

# Elemento Isoparamétrico de 4 Nodos

Cálculo de las funciones de forma  $x(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{despejando} \quad \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Reemplazando

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)\xi] + \frac{1}{4} [(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\eta + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\xi\eta]$$

Comparando

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)$$

# Elasticidad Bidimensional. EPT, EPD, SA

Campo corrimientos

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

Campo deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Campo tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

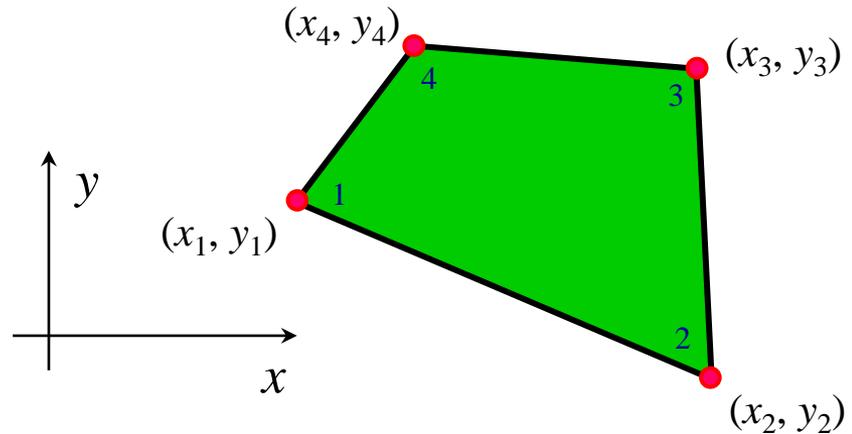
Matriz constitutiva

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = f(E, \nu)$$

# Elemento IsoP 4 Nodos E2D

Campo de corrimientos

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$



Aproximación del campo de Corrimientos

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$$

donde

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{d}_i$$

donde

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP 4 Nodos E2D

## Aproximación del campo de Deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \nabla N_i \mathbf{d}_i$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{N} \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i$$

donde

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP 4 Nodos E2D

Aplicando el PEEP

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{K}_{ij}^e = t \int_S \mathbf{B}_i^T : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j dS$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP 4 Nodos E2D

## Derivadas

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

## Agrupando y Resolviendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^e \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^e)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP 4 Nodos E2D

## Términos del Jacobiano

$$x_j = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_j, \eta_j) x_i$$

$$J^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i$$

$J^e$  se expresa como

$$J^e = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP 4 Nodos E2D

Desarrollando y reemplazando

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|J^e|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|J^e|} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_j = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

## Elemento IsoP 4 Nodos E2D

Expresando  $dS$  en coordenadas naturales

$$dxdy = |J^e| d\xi d\eta$$

Reemplazando  $B_i$ ,  $B_j$  y  $dS$  en  $K_{ij}^e$

$$K_{ij}^e = t \int_S \mathbf{B}_i^T : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j dS$$

$$K_{ij}^e = \frac{t}{|J^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

# Integración Numérica

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{t}{|\mathbf{J}^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

## Cuadratura de Gauss

$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) W_i$$

$n$	$\pm\xi_i$	$W_i$
1	0.0	2.0
2	0.5773502692	1.0
3	0.774596697 0.0	0.5555555556 0.8888888889
4	0.8611363116 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	0.9061798459 0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	0.9324695142 0.6612093865 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	0.9491079123 0.7415311856 0.4058451514 0.0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	0.9602898565 0.7966664774 0.5255324099 0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{t}{|\mathbf{J}^e|} \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} \mathbf{B}_i^T(\xi_p, \eta_p) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi_q, \eta_q) W_p W_q$$



# ESTRUCTURAS LAMINARES

## Formulación de Elementos Finitos

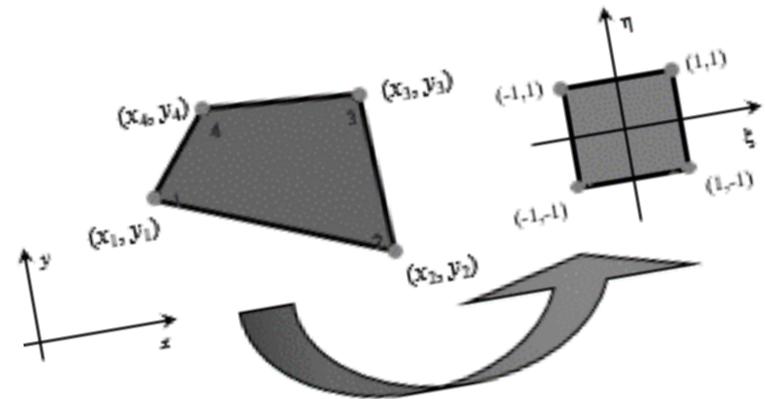
Prof. Titular Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ  
 Prof. Adscripto Ing. CARLOS LEIVA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA  
 en acción continua...



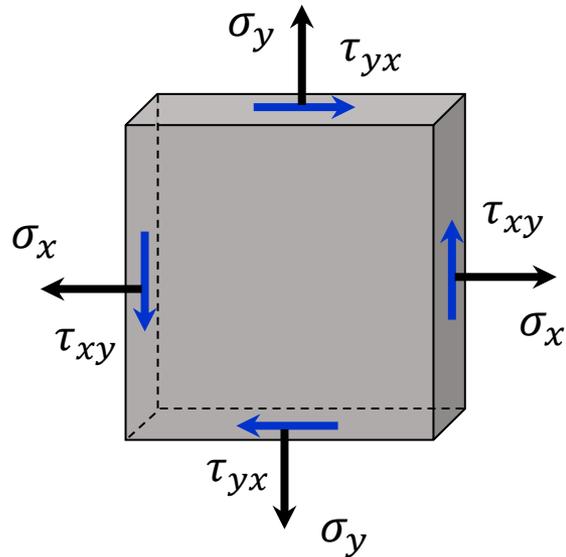
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{t}{|J^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

# Estado Plano de Tensiones

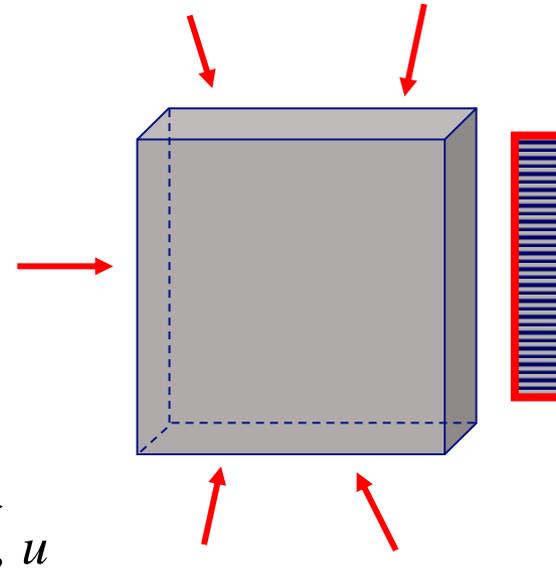
$$\sigma_z = 0 \quad \varepsilon_z \neq 0$$

Tensiones



Acciones

esp = t



Campo deformaciones

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Campo tensiones

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

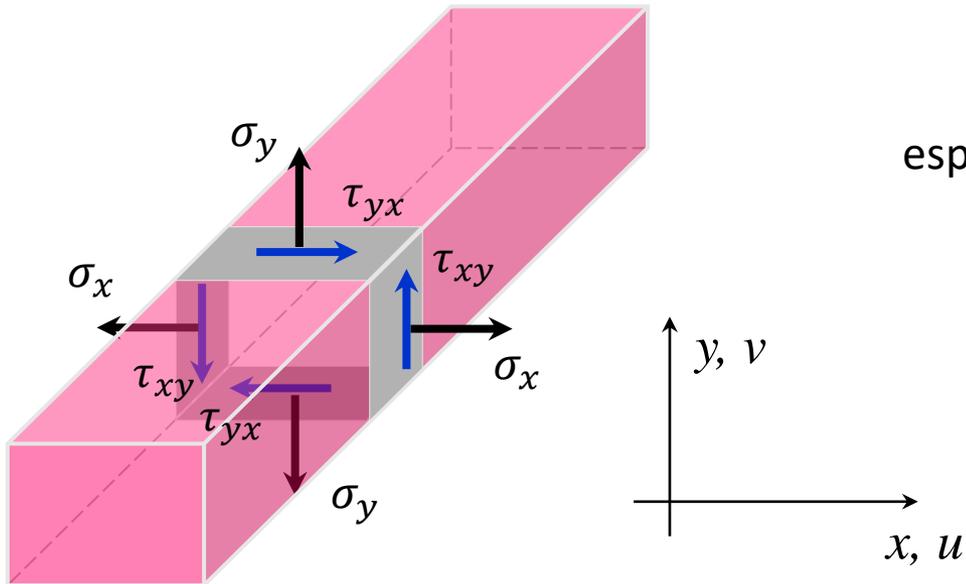
Matriz constitutiva

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

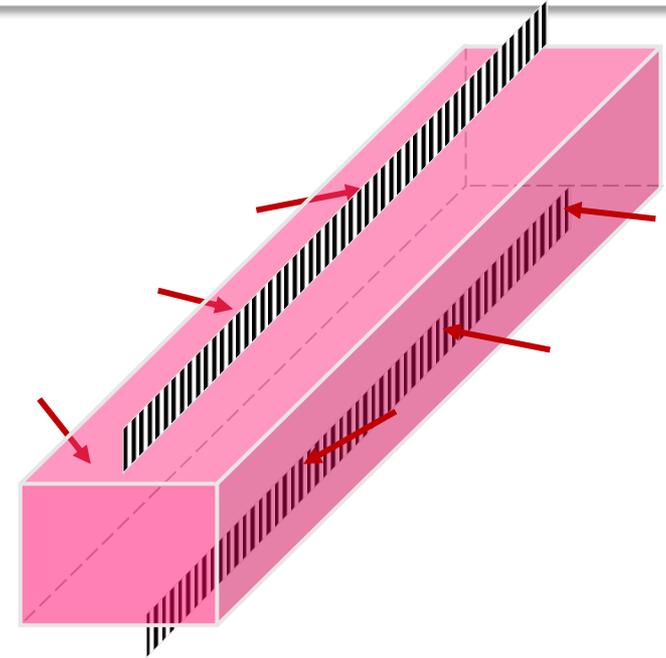
# Estado Plano de Deformaciones

$$\varepsilon_z = 0 \quad \sigma_z \neq 0$$

Tensiones



Acciones



$$esp = 1$$

Campo deformac.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Campo tensiones

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

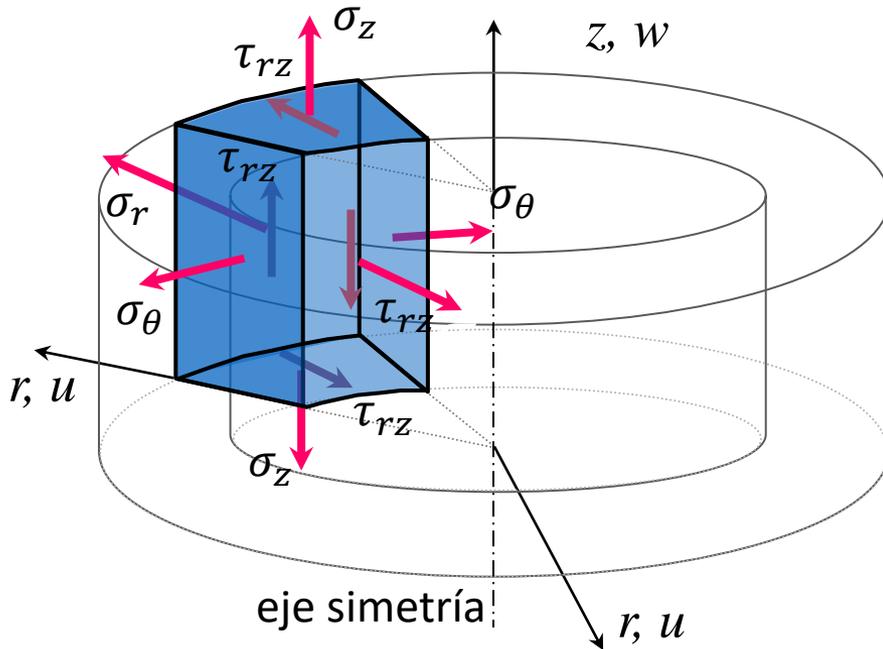
## Elemento IsoP 4 Nodos EPT - EPD

Las expresiones de  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{B}_j$  y  $dS$  en son idénticas a las deducidas para el elemento plano isoparamétrico de 4 nodos para Elasticidad Bidimensional, por lo tanto

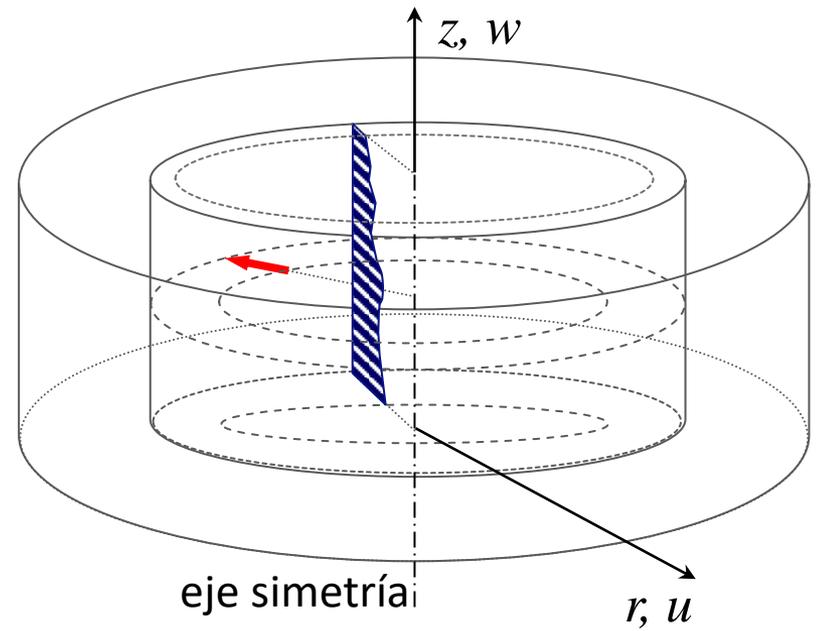
$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{t}{|J^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

# Problemas con Simetría Axial

## Tensiones



## Acciones



# Problemas con Simetría Axial

Campo deformaciones

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$

Campo tensiones

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP n Nodos SA

Campo Corrimientos

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

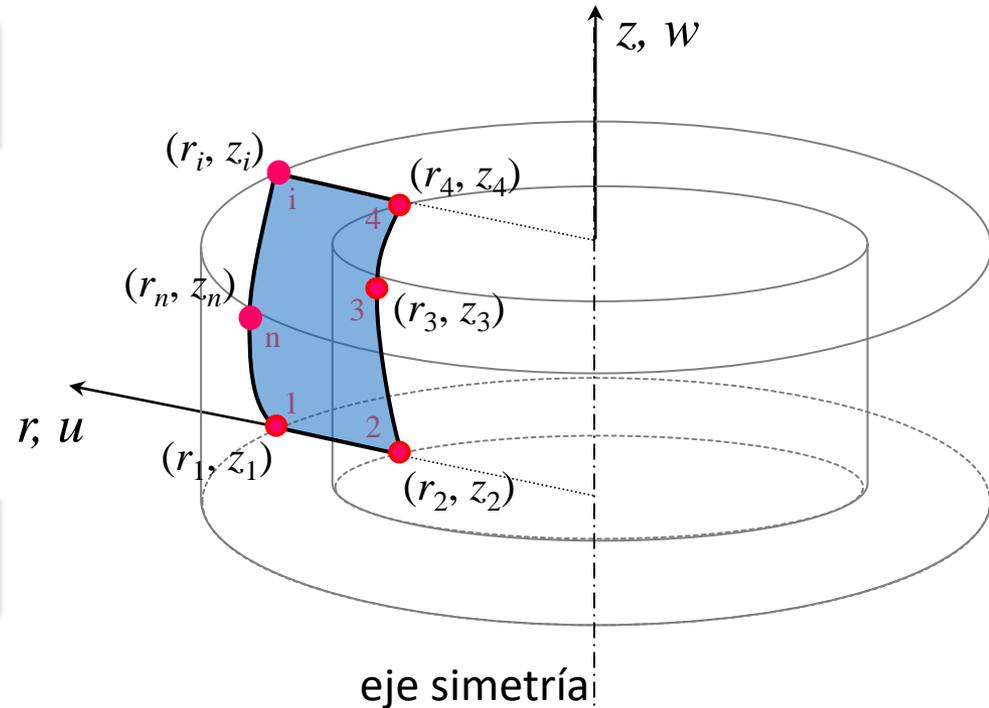
Aproximación Corrimientos

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{d}_i$$

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix}$$



# Elemento IsoP n Nodos SA

## Aproximación del campo de Deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \nabla N_i \mathbf{d}_i$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{N} \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i$$

donde

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP n Nodos SA

Aplicando el PEEP

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_S \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} r dr dz$$

Formulación Paramétrica

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

# Elemento IsoP n Nodos SA

## Cálculo de las Derivadas

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

donde

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i$$

Reemplazando

$$J^e = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix}$$

# Elemento IsoP n Nodos SA

Expresando  $dr dz$  en coordenadas naturales

$$drdz = |J^e| d\xi d\eta$$

Reemplazando  $B_i$ ,  $B_j$  y  $dS$  en  $K_{ij}^e$  y teniendo en cuenta que

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) r_i$$

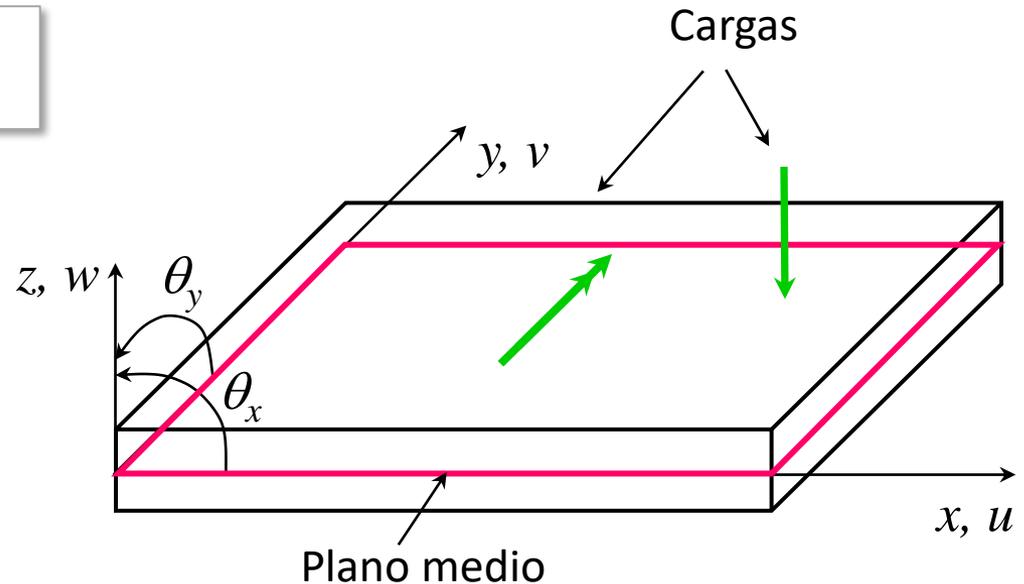
$$K_{ij}^e = 2\pi \int_S \mathbf{B}_i^T : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j r dr dz$$

Resulta

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{2\pi}{|J^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) \sum_{i=1}^n N_i r_i d\xi d\eta$$

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Teoría de Kirchhoff



## Definiciones

**Placa:** Sólido paralelepípedo en el cual una de sus dimensiones es mucho menor que las otras dos. La superficie equidistante de las caras mayores se denomina *plano o superficie media*.

**Estado de Placa:** Estado de carga en el que solo actúan cargas normales al plano medio de la placa o momentos cuyos vectores representativos están contenidos en dicho plano.

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Hipótesis

- a. En los puntos del plano medio los corrimientos  $u$  y  $v$  son nulos y  $w$  es distinto de cero.

$$u = v = 0 \quad w \neq 0$$

- b. Todos los puntos de una normal al plano medio tienen el mismo corrimiento vertical  $w$ .

- c. La tensión normal al plano medio es aproximadamente igual a cero.

$$\sigma_z = 0$$

- d. Los puntos sobre normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas normales a la deformada del plano medio después de la deformación.

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Hipótesis

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \text{Hip. a y d}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{L} = \frac{\text{espesor}}{\text{ancho medio}} \leq 0.05 \end{aligned} \right\} \text{Hip. d}$$

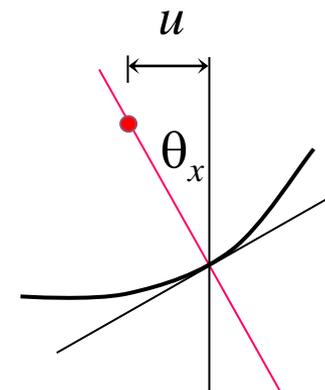
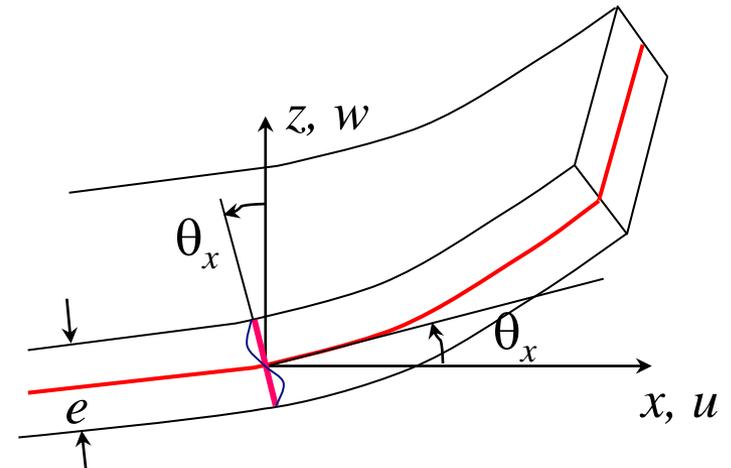
Rotaciones en planos xz e yz

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Vector de corrimientos

$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T \qquad \mathbf{u} = \left[ w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T$$

## Deformada



# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Campo Deformaciones

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_z &\cong 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}$$
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

La existencia de deformaciones angulares nulas implica que sus tensiones asociadas no contribuyen a la Energía Deformación de la placa. Sin embargo el valor de esas tensiones puede no ser despreciable.

## Campo de tensiones

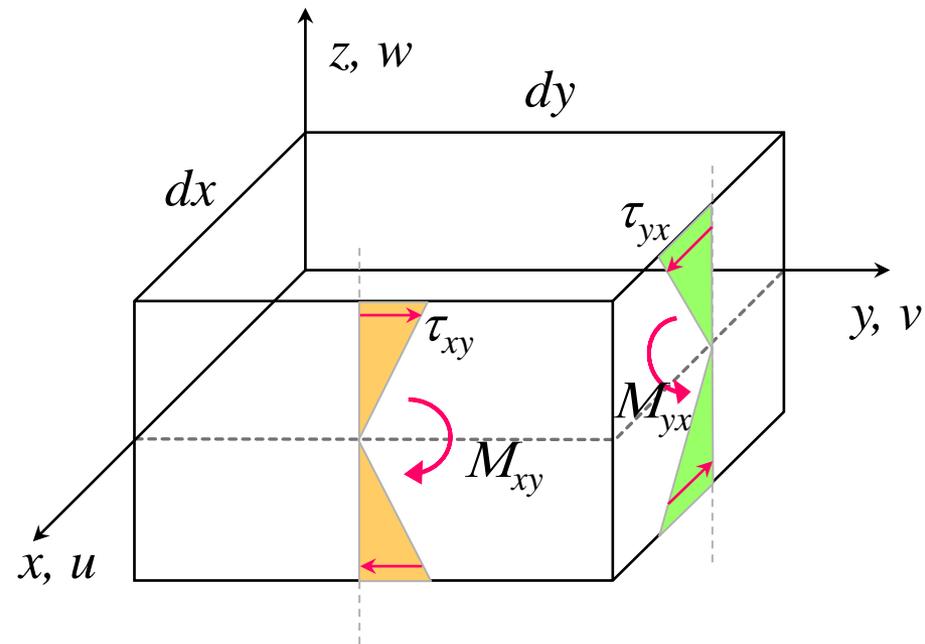
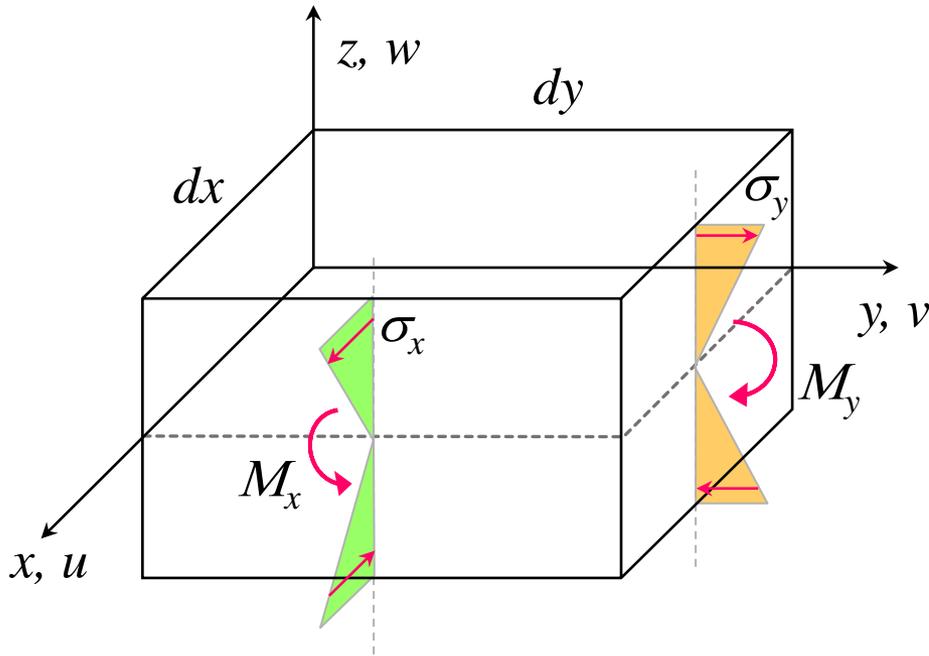
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

## Matriz constitutiva

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

Convención de signos



Esfuerzos de Flexión

$$\sigma_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Esfuerzos Generalizados de Flexión

$$\sigma_f = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} z \mathbf{D} \varepsilon dz = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} z^2 \mathbf{D} \varepsilon_f dz = \mathbf{D}_f \varepsilon_f$$

donde

$$\mathbf{D}_f = \frac{e^3}{12} \mathbf{D}$$

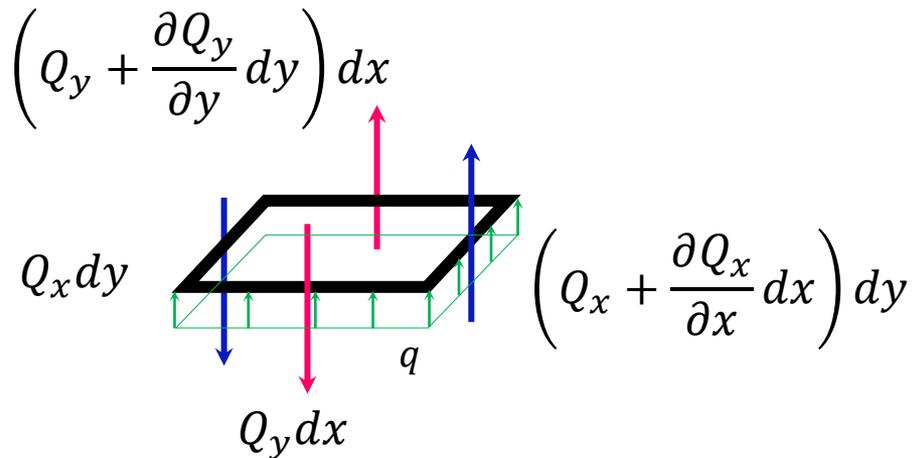
$$\varepsilon_f = z \varepsilon$$

## Deformaciones Generalizadas de Flexión

$$\varepsilon_f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Ecuaciones de Equilibrio

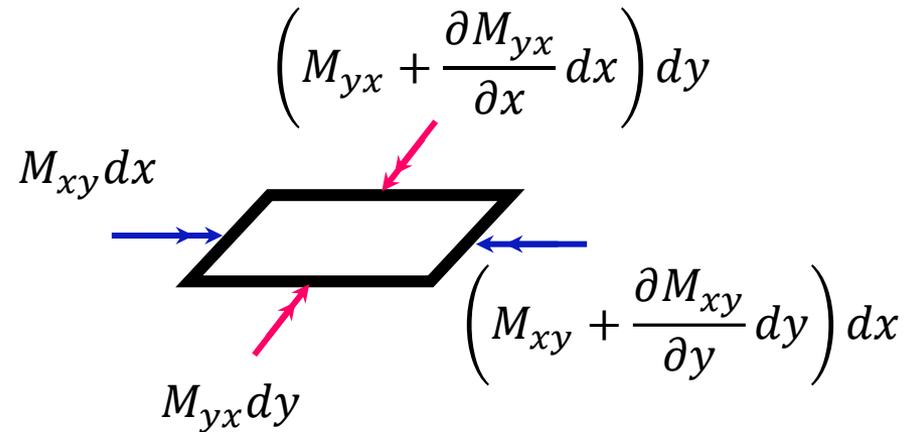
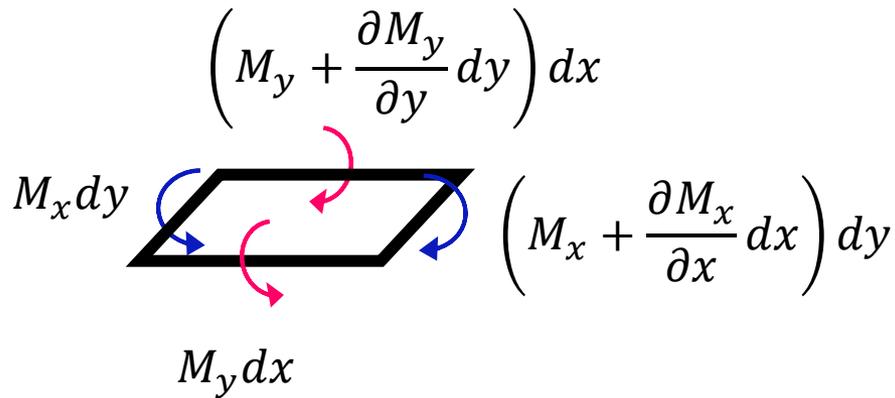


$$\sum F_z = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

## Ecuaciones de Equilibrio



$$\sum M_x = 0 \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - Q_y = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

# Placas Delgadas o de Kirchhoff

Derivando las ecuaciones de equilibrio de momento respecto a  $x$  y a  $y$ . Luego reemplazando en la de equilibrio de fuerzas:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

Reemplazando los momentos en función de la flecha:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Se puede expresar como:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad \text{donde} \quad D = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Los esfuerzos de corte se pueden expresar como:

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)$$

# Formulación de EF de Placas Delgadas

Los elementos de placas tienen un requisito de continuidad C1.

La forma más simple de satisfacerlo es tomando como variables nodales la flecha y sus dos derivadas cartesianas.

Variables nodales en  $i$ -ésimo nodo del elemento

$$w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$$

Se deduce que el número total de variables por elemento es  $3n$ .

Por lo tanto el número total de términos en el polinomio de aproximación de  $w$  será  $3n$ .

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^3 + \dots$$

# Formulación de EF de Placas

Para calcular los coeficientes del polinomio se imponen las condiciones usuales

$$w_i = w(x_i, y_i) \quad \theta_{xi} = \frac{\partial w(x_i, y_i)}{\partial x} \quad \theta_{yi} = \frac{\partial w(x_i, y_i)}{\partial y} \quad i = 1, 2, \dots, 3n$$

El problema consiste en elegir los cuales coeficientes del polinomio serán distintos de cero.

De esta elección se pueden obtener diversos tipos de elementos.

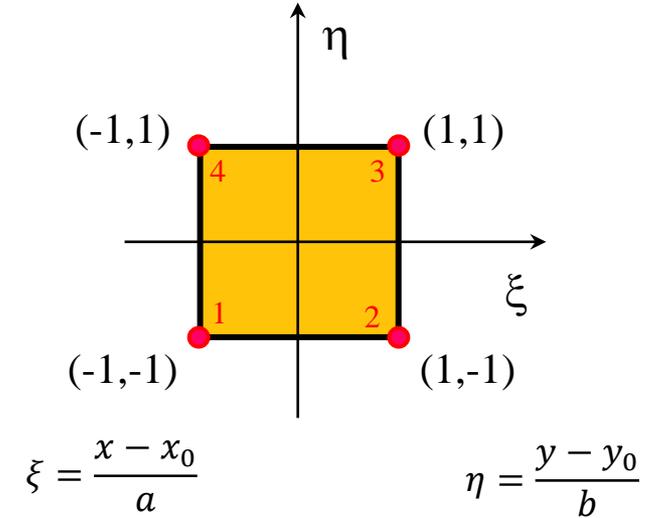
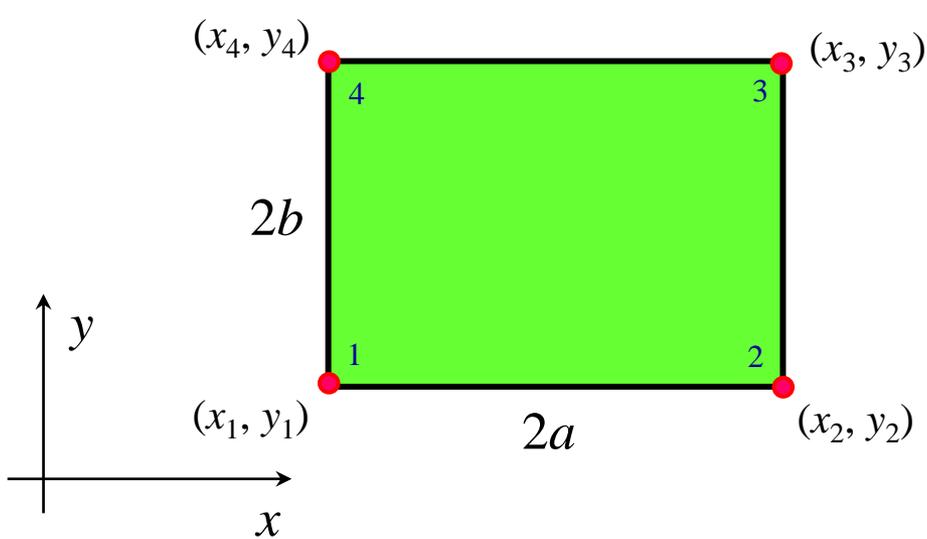
# Elemento MZC

El elemento de cuatro nodos tienen 12 variables nodales. Por lo tanto **no** se puede utilizar un polinomio completo, dado que el de 3er. grado tiene 10 términos y el de 4to. grado tiene 15 términos.

Melosh, Zienkiewicz y Cheung propusieron un elemento que se conoce como MZC y es muy popular. El polinomio de aproximación consta de los siguientes términos:

$$w = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3x^2 + \alpha_4xy + \alpha_5y^2 + \alpha_6x^3 + \alpha_7x^2y + \alpha_8xy^2 + \alpha_9y^3 + \alpha_{10}x^3y + \alpha_{11}xy^3$$

# Elemento MZC



El corrimiento  $w$  se aproxima como:

$$w = \sum_{i=1}^4 \left[ N_i w_i + N_i^{\theta_x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + N_i^{\theta_y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]$$

donde

$$N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \frac{(2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \eta^2)}{8}$$

$$N_i^{\theta_x} = a(\xi^2 - 1)(\xi - \xi_i) \frac{(1 + \eta_i \eta)}{8}$$

$$N_i^{\theta_y} = b(\eta^2 - 1)(\eta - \eta_i) \frac{(1 + \xi_i \xi)}{8}$$

# Elemento MZC

## Propiedades del elemento MZC:

Invariancia geométrica.

En los lados la flecha varía según un polinomio completo de 3er grado.

Esta garantizada la continuidad de  $w$  a lo largo del lado del elemento.

# Elemento MZC

## Calculo de los coeficientes del polinomio

El vector de variables nodales se puede expresar como

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\alpha$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1^3y_1 & x_1y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 0 & 3x_1^2y_1 & y_1^3 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4y_4 & 3y_4^2 & x_4^2 & 2x_4y_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11}]^T$$

Resolviendo:

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$$

# Elemento MZC

Los corrimientos  $w$  se expresan como

$$w = P^T \alpha$$

donde:

$$P = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^2y \quad xy^2]^T$$

reemplazando:

$$w = P^T A^{-1} d$$

$$w = N d$$

donde:

$$N = P^T A^{-1}$$

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$N_i = [N_i \quad N_i^{\theta_x} \quad N_i^{\theta_y}]$$

# Elemento MZC

Vector de deformaciones de flexión

$$\varepsilon_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Se puede expresar como:

$$\varepsilon_f = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{B}_f \mathbf{d}$$

donde:

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial N_i^{\theta_x}}{\partial x^2} & -\frac{\partial N_i^{\theta_y}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial N_i^{\theta_x}}{\partial y^2} & -\frac{\partial N_i^{\theta_y}}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial N_i}{\partial x \partial y} & -2 \frac{\partial N_i^{\theta_x}}{\partial x \partial y} & -2 \frac{\partial N_i^{\theta_y}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

# Elemento MZC

Aplicando el PEEP

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \mathbf{d}^2} = \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{K}^e = e \int_S \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} dx dy$$

$$\mathbf{K}_{ij}^e = e \int_S \mathbf{B}_i^T : \mathbf{D}_f : \mathbf{B}_j dx dy$$

# Elemento MZC

## Propiedades del elemento MZC:

Invariancia geométrica.

En los lados la flecha varía según un polinomio completo de 3er grado.

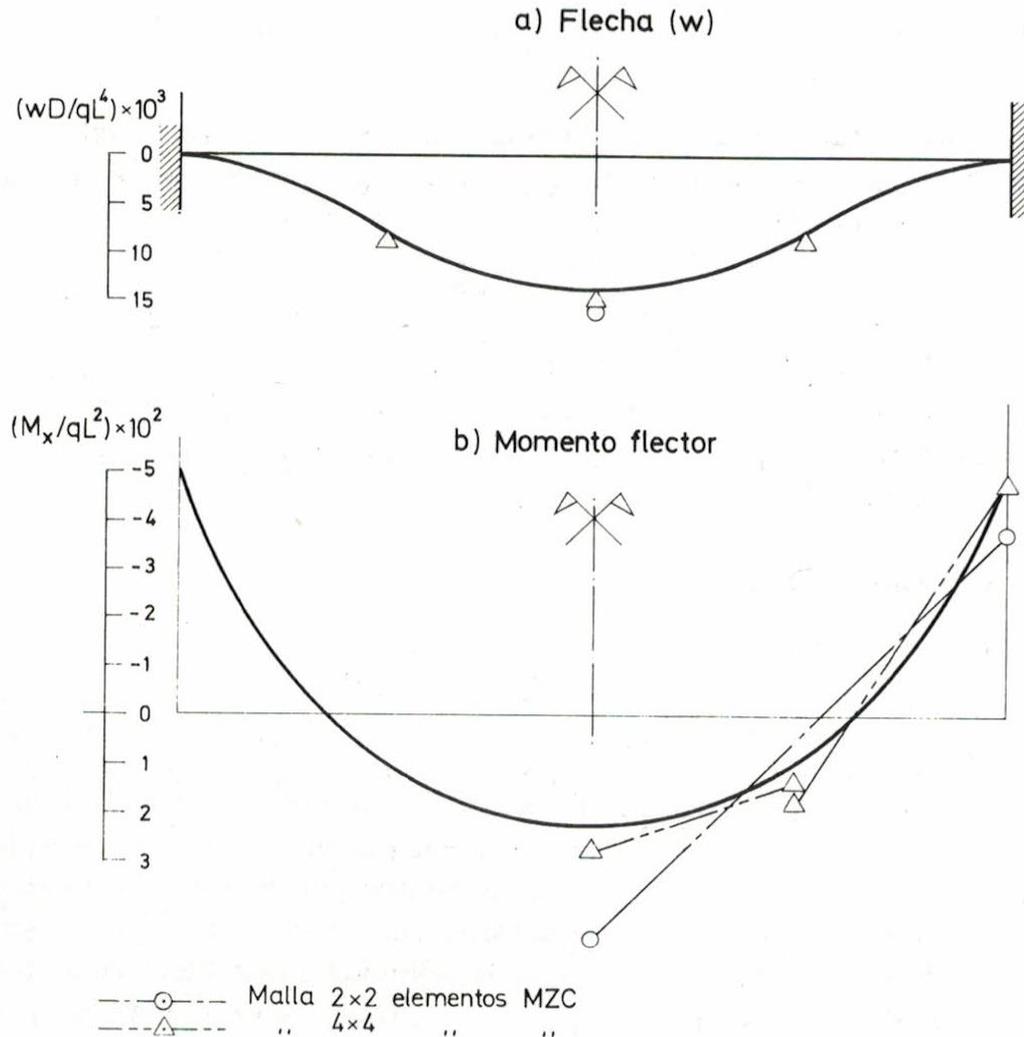
Esta garantizada la continuidad de  $w$  a lo largo del lado del elemento.

## Características del elemento MZC:

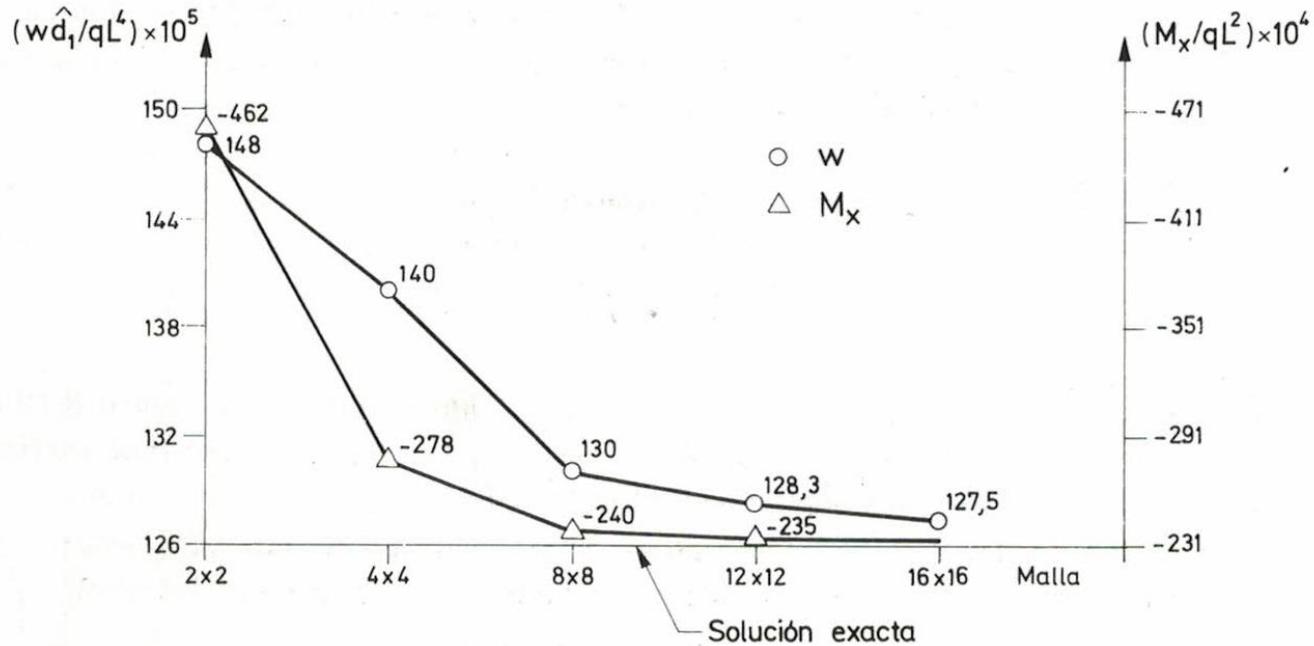
No garantiza la continuidad de la derivada de  $w$  a lo largo de los lados.

En formas rectangulares es preciso y pasa el Patch Test

En formas cuadriláteras arbitrarias no pasa el Patch Test



Placa cuadrada empotrada en sus bordes bajo carga uniforme.  
 Ley de flechas y momentos flectores a lo largo de la línea central  
 para diferentes malla de elementos MZC.



Placa cuadrada empotrada en sus bordes bajo carga uniforme. Convergencia de la flecha y el momento  $M_x$  en el nodo central para diferentes mallas de elementos MZC.

# ESTRUCTURAS LAMINARES

## Formulación de Elementos Finitos

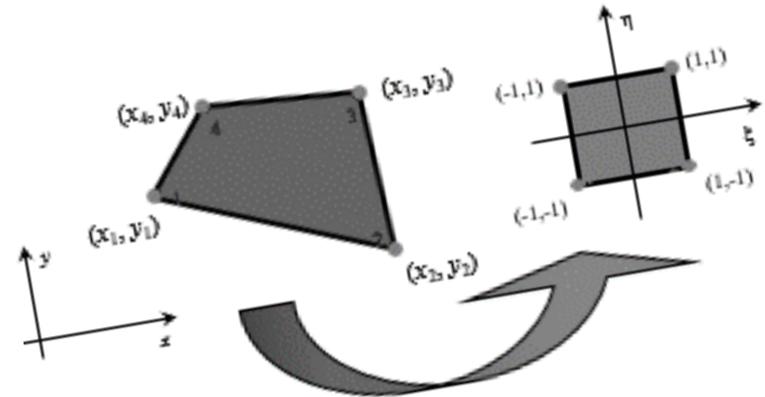
Prof. Titular Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ  
 Prof. Adscripto Ing. CARLOS LEIVA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA  
 en acción continua...



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \frac{t}{|J^e|} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) : \mathbf{D} : \mathbf{B}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

## Teoría de Reissner-Mindlin

Esta teoría se puede aplicar a placas delgadas y placas gruesas y permite salvar algunas de las dificultades de la Teoría de Kirchhoff.

La Teoría de Reissner-Mindlin relaja la condición de ortogonalidad de la normal y considera una rotación adicional que permite tener en cuenta la energía de deformación interna asociada a las tensiones tangenciales de corte.

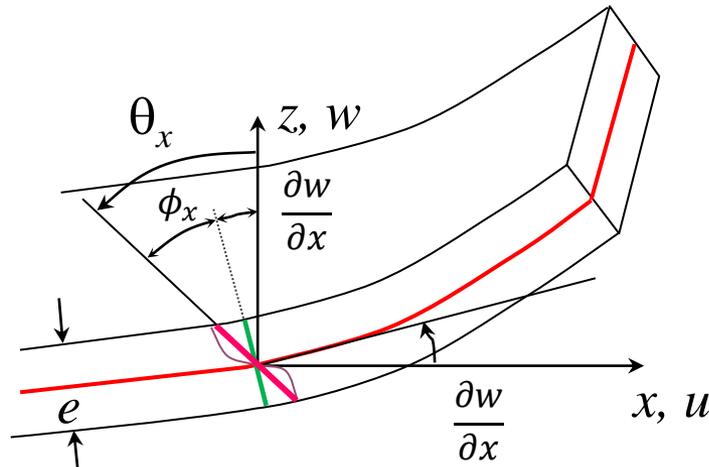
Además la formulación de EF basados en la T. de R-M es más sencilla porque tiene un requisito de continuidad  $C_0$ , de modo que elimina los problemas de continuidad.

# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

## Hipótesis

- a. b. c. Ídem Kirchhoff.
- d. Los puntos sobre normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas sin que esta deba ser necesariamente perpendicular a la deformada del plano medio después de la deformación.

## Deformada



# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

## Campo de Desplazamientos

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \end{aligned} \right\} \text{Hip. a y d}$$
$$\left. \begin{aligned} w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \text{Hip. b}$$
$$\left. \frac{e}{L} = \frac{\text{espesor}}{\text{ancho medio}} > 0.05 \right\} \text{Hip. d}$$

Rotaciones en planos xz e yz

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y$$

Las rotaciones **no** pueden obtenerse en función de la flecha  $w$  solamente. Pueden considerarse como un campo independiente.

Adicionalmente la distribución de tensiones tangenciales es constante en el espesor.

# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

## Campo de Deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z \cong 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{bmatrix}$$

# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

## Campo de Tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{bmatrix}$$

## Matriz Constitutiva

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{D}_f & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D}_c \end{array} \right]$$

# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

## Relación Tensión Deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_f & | & \mathbf{0} \\ - & + & - \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{bmatrix}$$

## Esfuerzos Generalizados

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \begin{bmatrix} z \sigma_x \\ z \sigma_y \\ z \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \begin{bmatrix} z \boldsymbol{\sigma}_f \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{bmatrix} dz$$

Convención de signos: Ídem Teoría de Kirchhoff

# Placas Gruesas o de Reissner-Mindlin

Reemplazando la relación tensión deformación

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \begin{bmatrix} z \mathbf{D}_f \begin{bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \\ \dots \\ \mathbf{D}_c \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \frac{e^3}{12} \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \dots \\ e \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \dots \\ \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{bmatrix}$$

donde

$$\hat{\mathbf{D}}_f = \frac{e^3}{12} \mathbf{D}_f \quad \hat{\mathbf{D}}_c = e \mathbf{D}_c \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix}$$

# Formulación de EF de Placas Gruesas

Discretización del campo de corrimientos

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}$$

donde

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_n]$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$a_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix}$$

# Formulación de EF de Placas Gruesas

Discretización del campo de deformaciones generalizadas

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{x_i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{y_i} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{x_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{y_i}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{x_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{y_i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{f_i} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{c_i} \end{bmatrix}$$

# Formulación de EF de Placas Gruesas

Discretización del campo de deformaciones generalizadas

$$\mathbf{B}_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

Aplicando el PEEP

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \mathbf{d}^2} = \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{K}^e = \int_S \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} \, dx \, dy = \mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e$$

donde

$$\mathbf{K}_f^e = \int_S \mathbf{B}_f^T : \widehat{\mathbf{D}}_f : \mathbf{B}_f \, dx \, dy$$

$$\mathbf{K}_c^e = \int_S \mathbf{B}_c^T : \widehat{\mathbf{D}}_c : \mathbf{B}_c \, dx \, dy$$

# Formulación de EF de Placas Gruesas

Comportamiento de EF de R-M como placas delgadas

$$(K_f + K_c) \mathbf{a} = \mathbf{P}$$

Sacando factor común las rigideces flexionales y de corte

$$\left( \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} \hat{K}_f + G e \hat{K}_c \right) \mathbf{a} = \mathbf{P}$$

$$(\hat{K}_f + \alpha \hat{K}_c) \mathbf{a} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E e^3} \mathbf{P}$$

$$\alpha = \frac{12(1 - \nu^2) G}{E e^2}$$

Cuando  $e \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  Se produce el bloqueo de la solución

$$\hat{K}_c \mathbf{a} = \frac{\mathbf{Q}}{\alpha} \quad \text{en T.K.} \quad \hat{K}_c \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

# Formulación de EF de Placas Gruesas

## Comportamiento de EF de R-M como placas delgadas

Para salvar el problema del bloqueo se puede utilizar integración reducida / selectiva

$$IC = GLL - 2 NPG \text{ (integ } K_c)$$

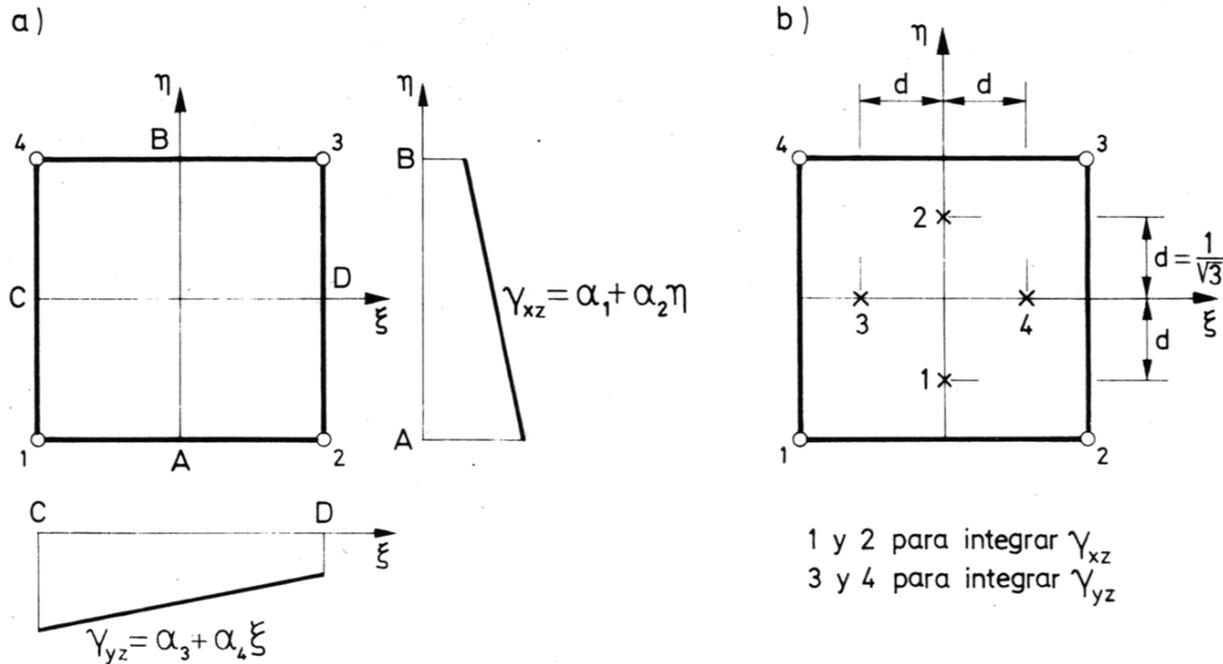
$$IC \geq 4 \Rightarrow K_c \text{ singular}$$

$$IC \leq 0 \Rightarrow K_c \text{ no singular}$$

Elemento	Cuadratura	Cuadratura de	
		$K_f$	$K_c$
CL4	C	2 x 2	2 x 2
	S	2 x 2	1 x 1
	R	1 x 1	1 x 1
CS8	C	3 x 3	3 x 3
	S	3 x 3	2 x 2
	R	2 x 2	2 x 2
CS12	C	4 x 4	4 x 4
	S	4 x 4	3 x 3
	R	3 x 3	3 x 3

# Elemento de R-M con deformación de corte impuesta

## Elemento Cuadrilátero



Elemento de placa cuadrilátero de 4 nodos: a) Campo de deformaciones de cortante impuestas. b) Puntos de integración para los términos  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  en la matriz de rigidez de cortante  $\mathbf{K}_c^{(e)}$  original.