CAPITULO 1

EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIAL.

1.1.- CONCEPTOS INICIALES.-

Mecánica es la parte de la física que estudia las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas. La mecánica clásica describe el comportamiento de los cuerpos a nivel macroscópico clasificándolos al efecto en rígidos, deformables y fluidos.

Nos ocuparemos de los primeros, es decir de cuerpos ideales, indeformables, caracterizados por la invariabilidad de la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. Esta hipótesis no se cumple en la realidad pero resulta útil dado que, en muchas de las aplicaciones de la ingeniería, las deformaciones que sufren los cuerpos utilizados son muy pequeñas frente a sus dimensiones de forma tal que no alteran su estabilidad, es decir su posición de equilibrio cuando está en reposo, o las características del movimiento cuando se encuentren en este estado.

La mecánica de los cuerpos rígidos se divide en ***estática y dinámica***. La ***estática*** estudia las condiciones que deben satisfacer las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema material para mantenerlo en estado de reposo o equilibrio. La ***dinámica*** estudia las relaciones de dependencia entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que lo originan.

La mecánica trabaja con cuatro conceptos básicos: espacio, tiempo, masa y fuerza; dos de los cuales son los que utiliza la estática: espacio y fuerza.-

Al espacio lo concebimos como el medio universal en el cual se localiza, o puede localizarse, la materia. Lo percibimos a través de nuestros sentidos y desde el punto de vista del estudio de la mecánica lo asociamos a la posición que en él ocupa un cierto punto A, que queda determinada por las distancias del mismo a tres planos ortogonales entre sí pasantes por un punto de referencia u ***origen O***. Las tres distancias indicadas se designan ***coordenadas*** del punto A.

El concepto de fuerza expresa la capacidad de un cuerpo para producir un efecto o acción física sobre otro cuerpo. Puede ser transmitida por contacto directo o ejercida a distancia. El empuje del agua o de la tierra, la presión del viento, el rozamiento son ejemplo de las primeras, en cambio las fuerzas gravitacionales o magnéticas lo son de las segundas. Son magnitudes físicas que quedan determinadas por su intensidad, dirección, sentido y el punto de aplicación cuando actúan sobre un cuerpo deformable; en cambio actuando sobre cuerpos rígidos, es suficiente conocer un punto cualquiera de su recta de acción. En el primer caso se las representa por un vector aplicado y por un vector axil cuando al cuerpo se lo supone rígido.

En determinados problemas de la mecánica hay cuerpos - o partes de un cuerpo - de los cuales puede obtenerse una imagen simplificada imaginando su masa reunida en un solo punto. Por ejemplo si un cuerpo rígido está animado de movimiento de traslación, las características de éste quedan determinadas para todos sus puntos cuando se conocen las de uno cualquiera de ellos - el centro de gravedad por ejemplo - ya que todos recorren trayectorias iguales con iguales características instantáneas de velocidad y aceleración. A este punto donde imaginamos reunida la masa total del cuerpo, o de parte de ella, lo llamamos ***punto material.-*** Esto se puede generalizar al estudio de problemas mecánicos si imaginamos al cuerpo formado por un número muy elevado de puntos materiales en los que se concentran masas finitas muy pequeñas.- ***Se puede entonces considerar al cuerpo rígido constituido por un gran número de puntos materiales o partículas que ocupan posiciones fijas entre sí.-***

1.2.- PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA.-

Recordemos que se designa como principio físico a una ley universal obtenida empíricamente. Los principios físicos se verifican experimentalmente pero no son demostrables mediante razonamientos.

El estudio de la estática se funda en cuatro principios físicos llamados ***principios fundamentales*** o ***postulados de la estática.*** Ellos son:

1. Ley del paralelogramo de las fuerzas o principio de la adición vectorial de fuerzas.-

"Dos fuerzas que actúan simultáneamente sobre un punto material pueden ser reemplazados por una sola, llamada resultante, dada por la diagonal del paralelogramo que tiene lados paralelos e iguales a las fuerzas dadas."

Decir que pueden ser reemplazadas las primeras - llamadas ***componentes***- por su resultante significa que son ***equivalentes*** por producir el mismo efecto físico sobre el punto material.

Observemos que este principio establece implícitamente que la equivalencia física entre las fuerzas componentes y su resultante corresponde a la equivalencia geométrica entre los vectores representativos de las componentes y el vector suma de los mismos.

Generalizado este principio a un mayor número de fuerzas expresa que: ***"Un conjunto de fuerzas que actúa simultáneamente sobre un mismo punto material puede ser sustituido por una sola fuerza actuante sobre el punto material y determinada por la suma vectorial de todos los vectores representativos de las fuerzas que componen el conjunto."***

2. Principio de transmisibilidad de una fuerza.-

Establece que una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido no altera su efecto si se desplaza su punto de aplicación a lo largo de su recta de acción.

Expresar que no altera su efecto significa que no se alteran las condiciones de reposo o movimiento del cuerpo. Si el cuerpo es deformable no es posible deslizar la fuerza a lo largo de su recta de acción sin alterar la deformación que la fuerza origina en el cuerpo.

3. Principio de equilibrio estático.-

Es sólo un caso particular de la ley fundamental de la mecánica (Ley de Newton) vista en el primer curso de física que dice: Cuando sobre un punto material actúa una o más fuerzas adquirirá una aceleración de dirección y sentido coincidentes con la dirección y sentido de la resultante de las fuerzas, y de intensidad proporcional a la de esta resultante. Su expresión matemática queda dada por la ecuación :

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

En donde $\overline{F}$ es la resultante ," $\overline{a}$ " la aceleración y " m " la masa del punto material que, mecánicamente, expresa el factor de proporcionalidad existente entre la fuerza actuante y la aceleración adquirida.

A la Estática le interesa el caso particular que se presenta cuando el punto material se encuentra en reposo. En dicho caso la aceleración será nula, y la resultante también lo será: F = 0. Esto nos permite expresar el ***principio de equilibrio estático*** del siguiente modo:

"Cuando la resultante de un conjunto de fuerzas actuantes sobre un punto material es nula éste permanece en reposo - si originalmente estaba en reposo - o continúa con movimiento rectilíneo uniforme - si originalmente estaba en movimiento."

Si sobre un punto material que se encuentra en reposo actúa un conjunto de fuerzas tales que su resultante es nula, el punto se mantendrá en reposo: las fuerzas se encuentran en equilibrio estático.
(Si no se expresa otra cosa, el término reposo significa ***reposo respecto a tierra).-***

4. Principio de acción y reacción.-

En el universo las fuerzas se presentan en parejas de igual intensidad y recta de acción pero con sentidos opuestos. Así la fuerza ejercida por el martillo sobre la cabeza del clavo (acción) es igual y opuesta a la fuerza ejercida por ésta sobre aquél (reacción). La atracción de la Tierra sobre la Luna es igual y opuesta a la ejercida por ésta sobre la Tierra.

Toda fuerza, o acción de un cuerpo sobre otro, origina otra fuerza o reacción del segundo sobre el primero opuesta y de la misma magnitud. Concretamente el principio de acción y reacción establece que ***“la interacción entre dos puntos materiales, ya sea que se encuentren en contacto directo o a distancia uno del otro, puede ser representada por dos fuerzas de igual magnitud y de sentidos opuestos que actúen sobre la recta que los une.”***

1. 3.- FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS.- OBJETIVOS DE LA ESTÁTICA.-

Las fuerzas externas representan la acción de otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Son las únicas responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Estas harán que el cuerpo se mueva o asegurarán que permanezca en reposo.

Las fuerzas internas son las fuerzas que mantienen unidas las partículas que forman el cuerpo es decir, representan las interacciones entre ellas. Si el cuerpo rígido está estructuralmente compuesto de varias partes, las fuerzas que mantienen unidas las partes componentes se definen también como fuerzas internas.

Se concretan estos conceptos si se considera una pieza prismática de eje recto cuya sección transversal tiene dimensiones mucho menores que su largo (fig. 1.1) ; por el extremo izquierdo A la pieza está fija a tierra y libre por el derecho B. Si se desprecia su peso y se aplica una fuerza $\overline{F}$ en su extremo B de la dirección del eje AB, se originará en el elemento de fijación como consecuencia del principio de acción y reacción, una fuerza igual a - $\overline{F}$.- Para la ingeniería de las construcciones, ***un primer Objetivo de la Estática lo constituye la determinación de estas fuerzas externas y reactivas que nacen en los elementos que mantienen fija una determinada estructura designadas reacciones de vínculo.***

Una pieza prismática de las características geométricas expresadas en el párrafo anterior y que tiene capacidad de resistir y transmitir fuerzas que la solicitan según la dirección de su eje, constituye un elemento estructural llamado ***Barra***, que la estática supone rígida.

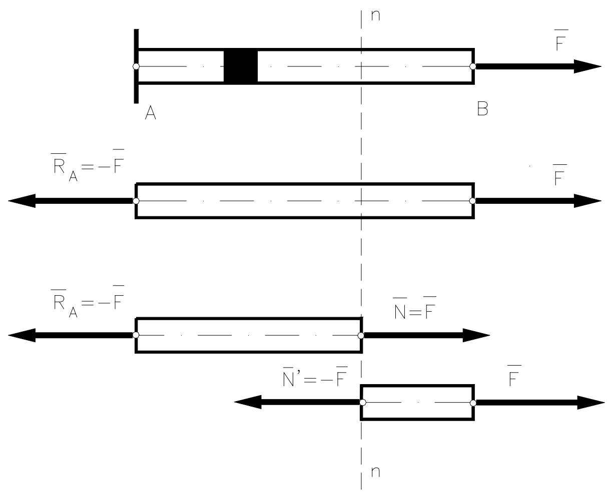

Fig. 1.1

Si se practica un corte transversal de la barra en la sección n-n, para mantener unidas las partes originadas por aquél, es necesario aplicar las fuerzas $\overline{N}$ y $\overline{N}$’ (iguales y opuestas) en ambas caras de corte.

Puesto que las partes estaban unidas antes del corte, fuerzas internas equivalentes a $\overline{N}$ y $\overline{N}$’ deben haber existido como interacciones de las partículas situadas a ambos lados del corte.

$\overline{N}$ y $\overline{N}$’ ' se designan Fuerza o ***Esfuerzo Interno*** en la sección n-n de la barra. ***Determinar las fuerzas o esfuerzos internos que originan las cargas en las estructuras, es un Segundo Objetivo de la Estática.***

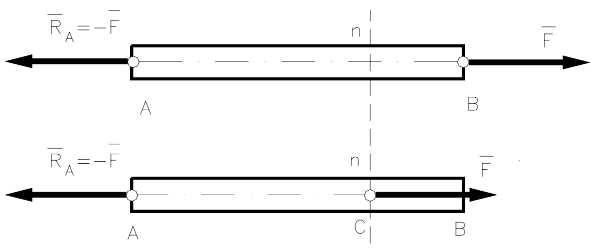

Fig. 1.2

Si a la luz de estos conceptos reconsideramos el principio de transmisibilidad de las fuerzas a lo largo de su recta de acción cuando $\overline{F}$ se desplaza de B a C, fig. 1.2, observamos que el mismo es válido en cuanto a los efectos externos (fuerza externa $\overline{R}_A$) que se originan sobre el cuerpo rígido. En cambio no se cumple en lo referente a los efectos internos ya que al trasladar la fuerza $\overline{F}$ de B a C desaparecen las fuerzas internas que originaba en el tramo CB subsistiendo las del tramo AC. En síntesis el principio de transmisibilidad es aplicable si el cuerpo es rígido y el efecto que se considera es de carácter externo al cuerpo; en cambio si se trata de un efecto interno se debe analizar con cuidado la incidencia que tiene el traslado de la fuerza.

En el caso de ser el cuerpo rígido la fuerza constituye un vector axil ya que su efecto es independiente del punto de su recta de acción en que se la aplica; en cambio cuando el cuerpo es deformable la fuerza constituye un vector aplicado pues su efecto depende del punto de aplicación.

1.4.- SISTEMAS DE FUERZAS.- SISTEMAS EQUIVALENTES.- REDUCCIÓN DE SISTEMAS.-

El conjunto de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido o sobre una partícula se designan como ***Sistema de Fuerzas***.-

Si actúan sobre una partícula o sobre un mismo punto de un cuerpo rígido se denomina sistema de fuerzas ***Concurrentes***. En caso de actuar en distintos puntos del cuerpo rígido se llama sistema de fuerzas ***No Concurrentes***.-

En ambos casos el conjunto de fuerzas podrán ser coplanares o no; surgen entonces los siguientes sistemas de fuerzas (fig. 1.3): sistema plano de fuerzas concurrentes, sistemas espaciales de fuerzas concurrentes, sistemas planos de fuerzas no concurrentes, sistemas espaciales de fuerzas no concurrentes (también llamados sistemas gaussos de fuerzas).- Los sistemas de fuerzas paralelas son un caso particular de los sistemas concurrentes que, por sus características, se los trata separadamente.-

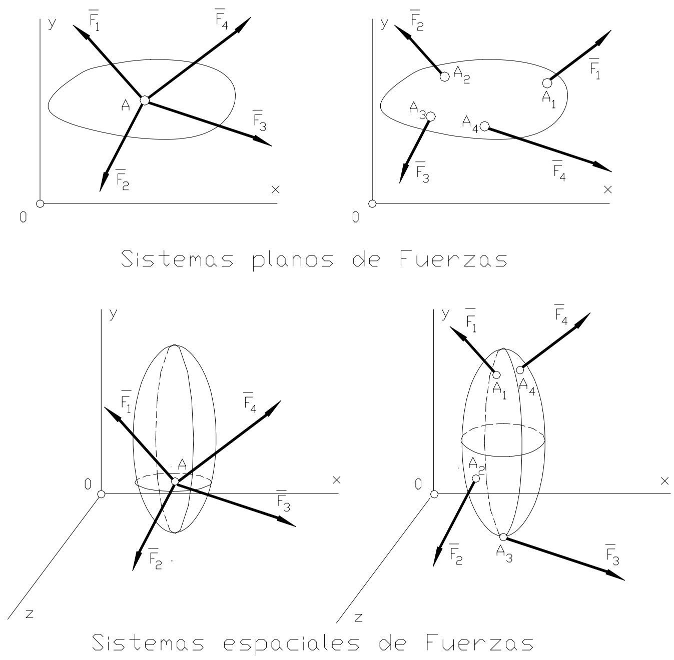

fig. 1.3

Si el cuerpo rígido sobre el que actúan las fuerzas se encuentra libre y puede ser concebido como un punto material sabemos que el efecto producido por las fuerzas consistirá en imprimirle aceleración. Pero si el cuerpo no es libre sino que se encuentra fijado a tierra mediante dispositivos especiales llamados vínculos o enlaces, la acción de las fuerzas actuantes se transmitirá de partícula a partícula a los vínculos y finalmente a tierra,. donde se originarán reacciones cuyos valores hay que establecer. Para simplificar y resolver este planteo ***se sustituye el sistema de fuerzas actuantes por otro sistema equivalente que, produciendo las mismas reacciones, esté constituido por el menor número posible de componentes: esta***

operación se designa Reducción de sistemas de fuerzas.- La equivalencia entre Sistemas de fuerzas la indicaremos con el siguiente símbolo $\equiv$ **.-**

Veremos que siempre es posible reducir los sistemas de fuerzas planos, paralelos y concurrentes a una única fuerza llamada ***Resultante del Sistema .***

En cambio los sistemas de fuerzas espaciales no concurrentes podrán reducirse a lo sumo a dos fuerzas alabeadas (no paralelas ni concurrentes) o a ***una fuerza y una cupla o par de fuerzas***.

1. 5.- REDUCCIÓN DE SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS CONCURRENTES.-

1. 5. 1.-PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS.-

La estática del punto material determina las condiciones de reposo de una partícula bajo la acción de un sistema de fuerzas concurrentes a ella. Para ello, en primer término debe reducirse el sistema de fuerzas dado a otro equivalente constituido por el menor número de elementos posibles: esto se hace mediante la ***Composición*** o ***Suma de Fuerzas***.

Reduciendo el sistema de fuerzas dado a su mínima expresión se establecen las condiciones de su nulidad que representarán, por el tercer principio de la estática, las ***Condiciones de Equilibrio.*** A menudo conviene expresar las fuerzas utilizando sus componentes, para lo cual deben conocerse los procedimientos de ***Descomposición de Fuerzas***.

Composición.- Dos fuerzas concurrentes se ubican necesariamente en un mismo plano y se componen o suman según el principio del paralelogramo.

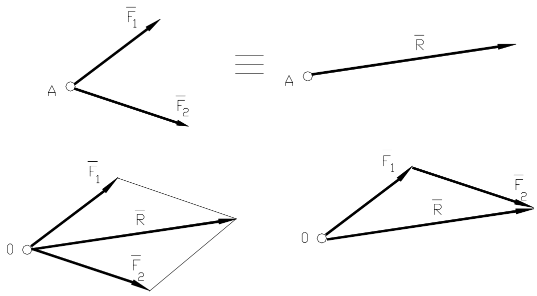

fig. 1.4

Sean dos fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ que actúan sobre el punto material A (fig. 1.4). A partir de un punto 0, cualquiera del plano de las fuerzas, llevamos vectores de dirección y sentido coincidentes con las fuerzas dadas y cuyos módulos representen a escala la intensidad de las fuerzas.

Esta escala es del tipo $\dfrac{\alpha.\text{kg}}{1\text{cm}}$

Se completa el paralelogramo cuyos lados son $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ y la diagonal representa en dirección, intensidad y sentido la resultante de las fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ dadas:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Para que $\overline{R}$ sea efectivamente la resultante, es decir, que produzca sobre la partícula A el mismo efecto que $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ debe estar aplicada en A.

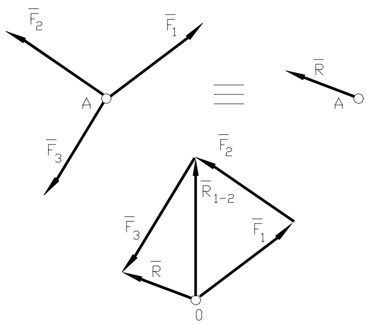

fig. 1.5

No es necesario construir todo el paralelogramo: es evidente que llevado a partir de 0 un vector representativo de $\overline{F}_1$ y luego, por el extremo de éste, se lleva $\overline{F}_2$; uniendo el origen de $\overline{F}_1$ con el extremo de $\overline{F}_2$ se obtiene $\overline{R}$. Se ha practicado la suma geométrica o vectorial. Si se altera el orden de los sumandos se mantiene inalterable la suma.

Si en lugar de dos fuerzas tenemos tres o más $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ y $\overline{F}_3$ (fig. 1.5), la suma se obtiene llevando a partir de O un vector representativo de cada fuerza a continuación del otro; el vector que resulte de unir el origen del primero con el extremo del último nos determina la fuerza suma del sistema dado.

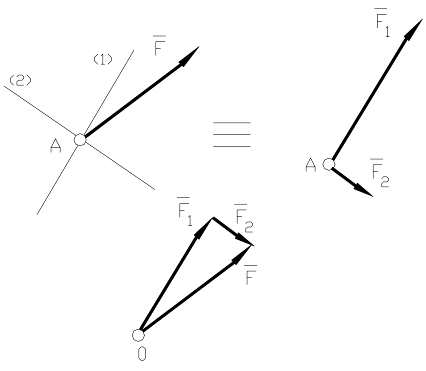

fig. 1.6

Para que efectivamente sea la resultante debe aplicarse este vector en el punto donde actúan las fuerzas dadas, porque sólo así puede producir el mismo efecto que éstas.

El polígono construido a partir de 0 cuyos lados son los vectores representativos de las fuerzas se llama ***polígono de fuerzas.***

La **Descomposición** de una fuerza $\overline{F}$ en sus componentes consiste en sustituir aquélla por dos fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ que produzcan igual efecto; según cuáles sean los datos conocidos de las componentes, hay diversas posibilidades de efectuar esta operación: la más frecuente consiste en descomponer una fuerza $\overline{F}$ según dos direcciones predeterminadas (1) y (2) concurrentes al punto de aplicación A de la fuerza dada, (fig. 1.6).-

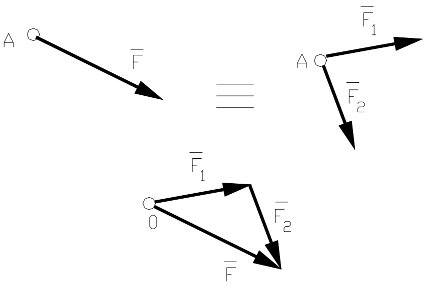

fig. 1.7

Esto se efectúa trazando por los extremos de $\overline{F}$, representada a escala, rectas paralelas a las direcciones dadas. Orientando los segmentos obtenidos en el sentido que va del origen de $\overline{F}$ a su extremo se obtiene $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ en intensidad, dirección y sentido. Punto de aplicación es el de $\overline{F}$.

Puede plantearse el caso de que se conozca una de las componentes $\overline{F}_1$ y se necesite determinar la otra $\overline{F}_2$ (fig. 1.7)

Se lleva $\overline{F}$ a escala a partir de un punto cualquiera del plano y por su origen se traza $\overline{F}_1$; uniendo el extremo de ésta con el de $\overline{F}$ se obtiene $\overline{F}_2$.

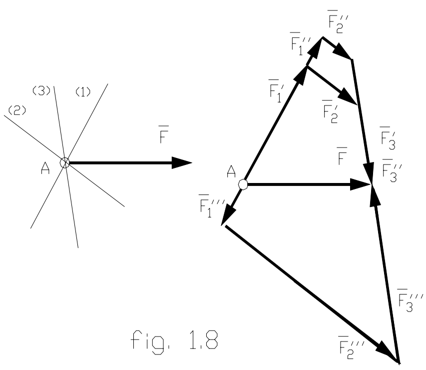

fig. 1.8

En los casos precedentes hay una única solución, en cambio si se quisiera descomponer $\overline{F}$ según tres direcciones (en lugar de dos como se tenía anteriormente) concurrentes al punto sobre el que actúa, se obtienen infinitas soluciones: (fig. 1.8)

Las condiciones que debe satisfacer un sistema plano de fuerzas que actúan sobre una partícula para hallarse en **Equilibrio**, surgen de considerar el principio de equilibrio estático que expresa la nulidad de la resultante como requisito para que la partícula esté en reposo. Gráficamente (fig. 1.9), para que esto se cumpla (R=0), es necesario y suficiente que el extremo de la última fuerza del polígono de fuerzas coincida con el origen de la primera fuerza. En otras palabras: ***Para que un sistema plano de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio es condición necesaria y suficiente que el polígono de fuerzas sea cerrado.***

Si aplicamos esto al caso de un punto material sometido a la acción de sólo dos fuerzas, deducimos que la única posibilidad de equilibrio existe cuando las dos fuerzas tienen igual intensidad, recta de acción coincidente y sentidos opuestos. Dos fuerzas de estas características se designan como ***Sistema nulo de fuerzas***.

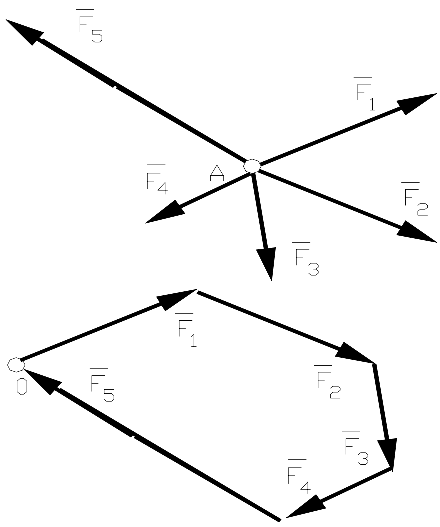

fig. 1.9

1. 5. 2.- PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS.-

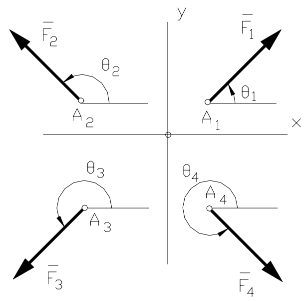

Fig. 1.10

Se puede expresar analíticamente una fuerza por su módulo F, y el ángulo θ que ella forma con la paralela a la rama positiva de un eje de referencia trazada por su punto de aplicación.- El ángulo lo medimos en sentido anti-horario . La fuerza y los ejes son coplanares (fig. 1.10) y queda expresado su módulo por un número y su unidad de medida (toneladas, kilogramos, newton, etc.)

En muchas oportunidades resulta conveniente expresar la fuerza por dos componentes ortogonales entre sí, que suelen tomarse horizontal y vertical. Sea (fig. 1.11) la fuerza $\overline{R}$ referida a los ejes “x e “y”, perpendiculares entre sí y cuyos versores llamaremos $\overline{\boldsymbol{i}}$ y $\overline{\boldsymbol{j}}$. Se ha tomado el origen de los ejes coincidente con el punto de aplicación de la fuerza. Si se completa el paralelogramo (rectángulo en este caso) trazando por el extremo de $\overline{F}$ las paralelas a los ejes “x” e “y”, se obtienen las componentes según dichos ejes:

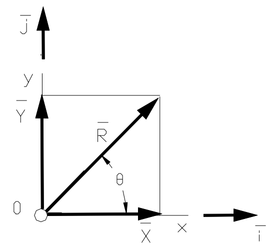

Fig. 1.11

$$\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} = X\ \overline{i} + Y\ \overline{j}$$

$\overline{X}$ e $\overline{Y}$ se designan ***componentes rectangulares*** de la fuerza, utilizándose también esta designación para sus módulos “X” e “Y”. Conviene especificar si se trata de la componente vectorial o escalar en los casos que exista posibilidad de confusión.-

Conocidos R y θ las componentes rectangulares se obtienen por las expresiones:

$$X = R \cos\theta$$
$$Y = R \operatorname{sen}\theta$$

que las definen en valor absoluto y signo si θ varía de 0º a 360º. Se observa que las componentes rectangulares de una fuerza no son otra cosa que sus proyecciones sobre los ejes “x” e “y”. Se utilizará una u otra designación: Componente X o proyección sobre el eje x, componente Y o proyección sobre el eje y.

Si en cambio se conocen “X” e “Y” se obtienen R y θ por las expresiones:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{X}{R} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{Y}{R} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{Y}{X}$$

Composición*:*

Sea un sistema plano de fuerzas que actúan sobre la partícula A (fig. 1.12). Su resultante será :

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

Expresando estas fuerzas por sus componentes rectangulares, $X_i = F_i \cos\theta_i$ e $Y_i = F_i \operatorname{sen}\theta_i$, tenemos:

$$\overline{F}_1 = X_1\ \overline{i} + Y_1\ \overline{j}$$

$$\overline{F}_2 = X_2\ \overline{i} + Y_2\ \overline{j}$$

$$\overline{F}_3 = X_3\ \overline{i} + Y_3\ \overline{j}$$

$$\sum \left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 \right) = (X_1 + X_2 + X_3)\ \overline{i} + (Y_1 + Y_2 + Y_3)\ \overline{j}$$

Por otra parte:

$$\overline{R} = X\ \overline{i} + Y\ \overline{j}$$

De donde

$$X = X_1 + X_2 + X_3 \qquad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

Empleando el símbolo de sumatoria, tendremos:

$$X = \sum X_i \qquad Y = \sum Y_i$$

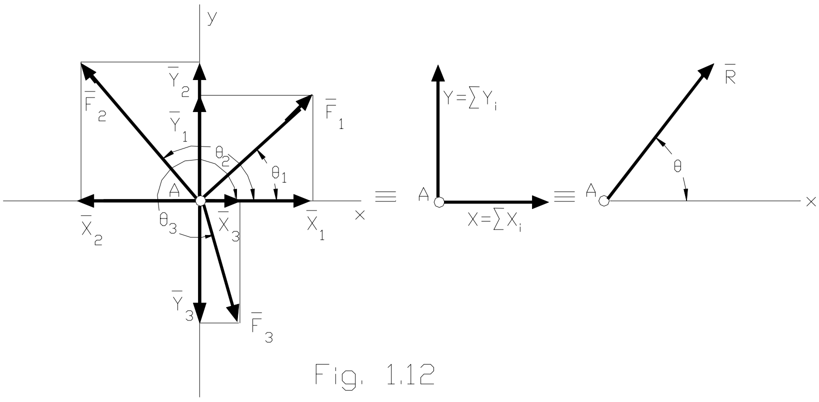

Fig. 1.12

Estas expresiones establecen que las componentes X e Y de la resultante R de un sistema plano de fuerzas concurrentes, se obtienen sumando algebraicamente las componentes X_i e Y_i de todas las fuerzas del sistema, respectivamente.-

En las aplicaciones se obtienen primero las componentes X_i e Y_i de cada una de las fuerzas del sistema. A continuación se suman las componentes X_i y se suman las componentes Y_i obteniéndose X e Y. Finalmente se determina el módulo y dirección de las resultantes con las expresiones:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{X}{R} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{Y}{R}$$

Descomposición*:*

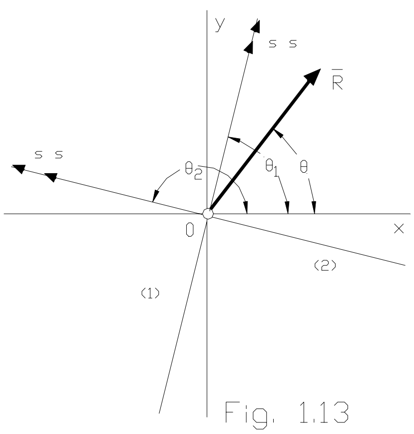

Fig. 1.13

Sea una fuerza $\overline{R}$ expresada por R y θ (fig. 1.13). Se deben calcular las intensidades F_1 y F_2 de sus componentes según dos direcciones determinadas (1) y (2), coplanares y concurrentes a un punto A de la recta de acción de la fuerza donde se ubica el origen de los ejes "x" e "y".

A las componentes $\overline{F_1}$ y $\overline{F_2}$ se les supone un sentido (s.s.) y en función de él se expresan los ángulos θ_1 y θ_2.

Debe ser :

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$$

Lo que expresado mediante las componentes rectangulares se convierte en dos ecuaciones escalares:

$$X = X_1 + X_2$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$

O también:

$$\boxed{\begin{array}{l} R \cos\theta = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 \\ R \operatorname{sen}\theta = F_1 \operatorname{sen}\theta_1 + F_2 \operatorname{sen}\theta_2 \end{array}}$$

Que constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, F_1 y F_2, que se puede resolver por cualquiera de los métodos conocidos. Si el valor de F_1 o de F_2 que resulta del cálculo es positivo significa que el sentido supuesto (s.s.) es el correcto; si fuese negativo se debe invertir el sentido supuesto.

Se podría resolver este problema con las mismas ecuaciones obtenidas si las incógnitas fuesen las direcciones o la dirección e intensidad de una de las fuerzas, pero sólo pueden calcularse dos incógnitas por cuanto tenemos dos ecuaciones. Cuando las incógnitas son θ_1 y θ_2 es más fácil resolver trigonométricamente por el teorema del coseno o las funciones del ángulo medio en base a los tres lados y el semiperímetro, aplicados al triángulo de fuerzas formado por la resultante $\overline{R}$ y sus componentes $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$.

Equilibrio*:*

Se ha obtenido que:

$$X = \sum X_i$$
$$Y = \sum Y_i$$

Para que las fuerzas estén en equilibrio y la partícula en reposo su resultante debe ser nula, luego:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{X = \sum X_i = 0} \\ \mathbf{Y = \sum Y_i = 0} \end{array}}$$

que expresan analíticamente las dos condiciones necesarias y suficientes para que los sistemas planos de fuerzas concurrentes se encuentren en equilibrio.

1.6.- REDUCCIÓN DE SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZAS CONCURRENTES.-

Sea una fuerza expresada en el espacio por un vector de origen 0 y extremo A (fig. 1.14). La fuerza quedará determinada por su módulo R y los ángulos directores θ_x, θ_y, θ_z que forma su recta de acción con la rama positiva de los ejes x, y, z. Estos ángulos varían de 0º a 180º, y se miden en el plano determinado por la fuerza y la rama positiva del eje considerado y corresponde al menor de los dos arcos por ellos definidos, es decir el menor de 180º.

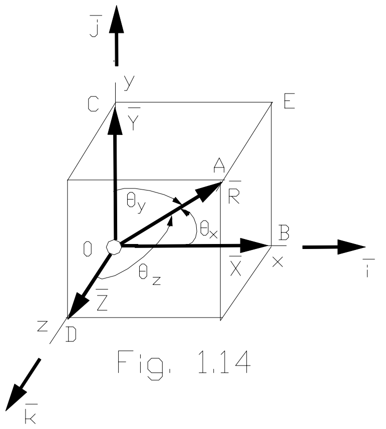

Fig. 1.14

Si por el extremo A del vector fuerza se consideran tres planos proyectantes paralelos respectivamente a los planos de los ejes yz, zx, xy, que interceptarán en los puntos B, C, D a los tres ejes, determinando los vectores $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ designados componentes rectangulares vectoriales de $\overline{R}$ en el espacio. Se cumple que :

$$\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

ya que $\overline{R} = \overline{OA}$ se obtiene uniendo el origen y el extremo del polígono vectorial espacial que se forma llevando uno tras otro los vectores $\overline{X} = \overline{OB}$, $\overline{Y} = \overline{BE}$ y $\overline{Z} = \overline{EA}$

Expresando las componentes vectoriales en función de la componente escalar y el versor respectivo, se tiene:

$$\bar{R} = X\ \bar{i} + Y\ \bar{j} + Z\ \bar{k}$$

en donde:

$$X = R \cos \theta_x$$
$$Y = R \cos \theta_y$$
$$Z = R \cos \theta_z$$

Se concluye que conocido el módulo de una fuerza y los cosenos directores de su recta de acción se pueden calcular sus componentes según ejes x, y, z.

Viceversa, conocidas las componentes X, Y, Z de una fuerza, o sea sus proyecciones ortogonales sobre dichos ejes, se puede calcular su módulo (aplicando el teorema de Pitágoras primero al triángulo rectángulo OBA y luego al BEA, fig. 1.14) y sus cosenos directores por las expresiones.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{X}{R} \qquad \cos \theta_y = \frac{Y}{R} \qquad \cos \theta_z = \frac{Z}{R}$$

El signo de las componentes rectangulares y de los cosenos directores surge considerando que para ángulos comprendidos entre 0º y 90º el coseno director y la componente rectangular respectiva serán positivos; en cambio serán negativos para ángulos comprendidos entre 90º y 180º. Con el signo de las tres componentes rectangulares se puede establecer el octante en que se ubica la fuerza.

Veamos que relación existe entre los cosenos directores de una recta.- Para ello volvamos a la expresión:

$$\bar{R} = X\ \bar{i} + Y\ \bar{j} + Z\ \bar{k}$$

y sustituyendo las componentes por su valor:

$$\bar{R} = R \cos \theta_x\ \bar{i} + R \cos \theta_y\ \bar{j} + R \cos \theta_z\ \bar{k}$$

Si se llama $\bar{e}$ al versor de la recta de acción de la fuerza, se tiene:

$$\bar{R} = R\ \bar{e} = R \cos \theta_x\ \bar{i} + R \cos \theta_y\ \bar{j} + R \cos \theta_z\ \bar{k}$$

de donde simplificando R queda:

$$\bar{e} = \cos \theta_x\ \bar{i} + \cos \theta_y\ \bar{j} + \cos \theta_z\ \bar{k}$$

o sea que los cosenos directores de una recta representan las componentes rectangulares de su versor

$$e_x = \cos \theta_x \qquad e_y = \cos \theta_y \qquad e_z = \cos \theta_z$$

y como el módulo del versor es uno, se tiene:

$$1 = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$$

Que elevada al cuadrado da:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

Comúnmente una recta en el espacio queda dada por las coordenadas de dos de sus puntos*. *Se trata de obtener sus cosenos directores.

Sean dados $A(x_A, y_A, z_A)$ y $B(x_B, y_B, z_B)$. (fig. 1.15).- Si se toma el vector con origen en A y extremo en B, se tiene:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\ \overline{i} + (y_B - y_A)\ \overline{j} + (z_B - z_A)\ \overline{\boldsymbol{k}}$$

$$\overline{AB} = \Delta x\ \overline{i} + \Delta y\ \overline{j} + \Delta z\ \overline{k}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$e_x = \cos\theta_x = \Delta x / AB$$
$$e_y = \cos\theta_y = \Delta y / AB$$
$$e_z = \cos\theta_z = \Delta z / AB$$

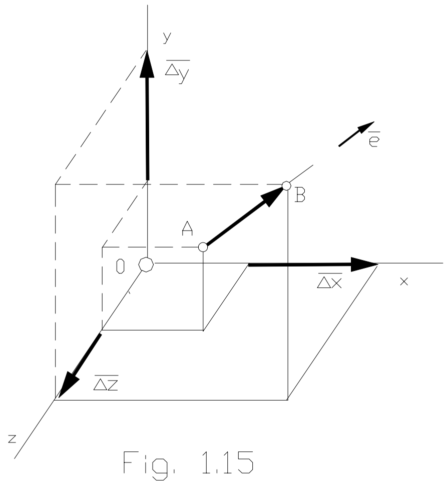

Fig. 1.15

Obtenidos los tres cosenos directores se debe verificar que la suma de sus cuadrados sea igual a uno.-

Composición (fig. 1.16)

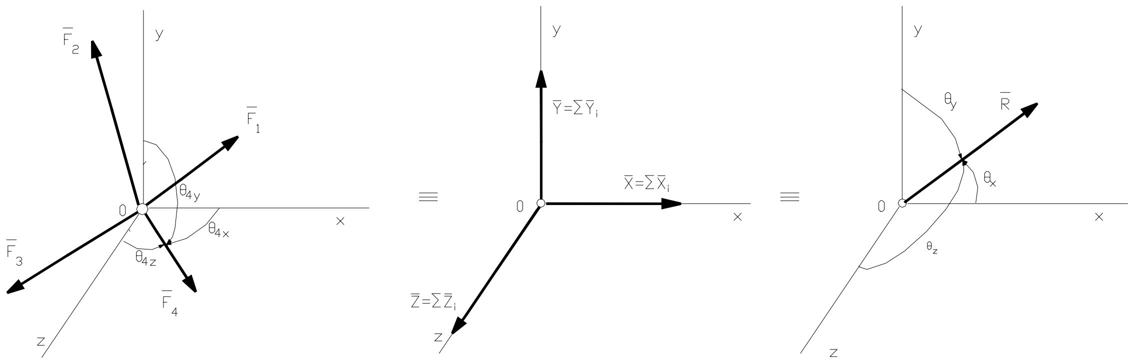

Fig. 1.16

Se determinará la resultante sumando las componentes rectangulares de las fuerzas del sistema en forma análoga a la utilizada en el plano.- Los métodos gráficos no son prácticos para las fuerzas en el espacio.-

Dado un sistema $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ y $\overline{F}_3$ de fuerzas concurrentes en el espacio y ubicando el origen de los ejes x, y, z en el punto de concurrencia se tiene:

$$R = \sum \overline{F}_i = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

en donde:

$$\overline{F}_1 = X_1\ \overline{i} + Y_1\ \overline{j} + Z_1\ \overline{k} \quad \text{con} \quad \left| \begin{array}{l} X_1 = F_1 \cos\theta_{1x} \\ Y_1 = F_1 \cos\theta_{1y} \\ Z_1 = F_1 \cos\theta_{1z} \end{array} \right.$$

$$\overline{F}_2 = X_2\ \overline{i} + Y_2\ \overline{j} + Z_2\ \overline{k} \quad \text{con} \quad \left| \begin{array}{l} X_2 = F_2 \cos\theta_{2x} \\ Y_2 = F_2 \cos\theta_{2y} \\ Z_2 = F_2 \cos\theta_{2z} \end{array} \right.$$

$$\overline{F}_3 = X_3\ \overline{i} + Y_3\ \overline{j} + Z_3\ \overline{k} \quad \text{con} \quad \left| \begin{array}{l} X_3 = F_3 \cos\theta_{3x} \\ Y_3 = F_3 \cos\theta_{3y} \\ Z_3 = F_3 \cos\theta_{3z} \end{array} \right.$$

(en la fig. 1.16 la fuerza $\overline{F}_4$ se ha colocado al sólo efecto de indicar los ángulos directores y su designación) .-Sumando miembro a miembro, se tiene:

$$\overline{R} = F_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = (X_1 + X_2 + X_3)\ \overline{i} + (Y_1 + Y_2 + Y_3)\ \overline{j} + (Z_1 + Z_2 + Z_3)\ \overline{k}$$

Por otra parte:

$$\overline{R} = X\ \overline{i} + Y\ \overline{j} + Z\ \overline{k}$$

Por lo tanto:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 \qquad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 \qquad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum \mathbf{X_i} \\ \mathbf{Y} &= \sum \mathbf{Y_i} \\ \mathbf{Z} &= \sum \mathbf{Z_i} \end{aligned}}$$

Estas expresiones establecen que las componentes X, Y, Z de la resultante son respectivamente iguales a la suma algebraica de las componentes X_i , Y_i , Z_i de las fuerzas del sistema dado.-

Conocidas X, Y, Z se obtiene:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos\theta_x = \frac{X}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{Y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{Z}{R}$$

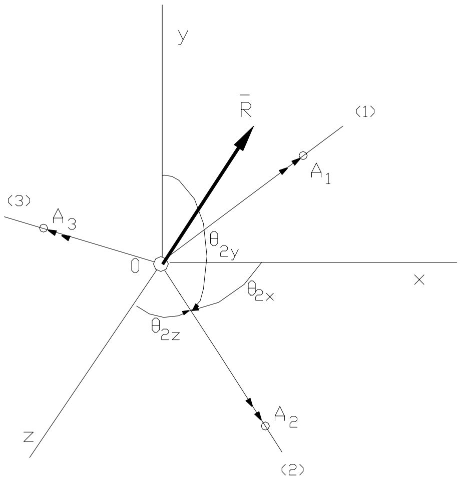

Fig. 1.17

Descomposición (fig. 1.17)

Se trata de descomponer una fuerza según tres direcciones espaciales determinadas (1) , (2) y (3).

De la fuerza $\overline{R}$ conocemos su módulo R y sus ángulos directores θx, θy , θz.

De sus componentes $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ conocemos comúnmente dos puntos de su recta de acción; OA_1, OA_2, OA_3, les suponemos un sentido y calculamos (y verificamos) los tres ángulos directores correspondientes a cada una de ellas.

Debe cumplirse que:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

Ecuación vectorial que en el espacio implica tres ecuaciones escalares:

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

desarrolladas establecen que:

$$R\cos\theta_x = F_1\cos\theta_{1x} + F_2\cos\theta_{2x} + F_3\cos\theta_{3x}$$
$$R\cos\theta_y = F_1\cos\theta_{1y} + F_2\cos\theta_{2y} + F_3\cos\theta_{3y}$$
$$R\cos\theta_z = F_1\cos\theta_{1z} + F_2\cos\theta_{2z} + F_3\cos\theta_{3z}$$

Sistema que nos permite calcular F_1 , F_2 y F_3. Si alguna de ellas resultase negativa significa que el sentido supuesto es erróneo.

Equilibrio

Para que un sistema de fuerzas espaciales que actúa sobre una partícula esté en equilibrio, lo que sucede cuando la partícula está en reposo, la resultante de aquéllas debe ser nula (tercer ppio de la Estática).

Vectorialmente ello se expresa con la ecuación:

$$\boxed{\bar{\mathbf{R}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i = 0}$$

Lo que exige que sus tres componentes rectangulares sean también nulas:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum \mathbf{X_i} = 0 \\ \mathbf{Y} &= \sum \mathbf{Y_i} = 0 \\ \mathbf{Z} &= \sum \mathbf{Z_i} = 0 \end{aligned}}$$

Estas ecuaciones expresan las tres condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema espacial de fuerzas que actúan sobre una partícula.-

Aplicación numérica.-

Encontrar los esfuerzos en las tres barras AB_1 , AB_2 , AB_3 del soporte de pared en escuadra (graficado en la figura 1,18) que se encuentra sometido a una fuerza $\bar{F}$, de la cual se conocen sus tres componentes X , Y , Z cuyos sentidos son los indicados en el gráfico.-

Datos: $B_1B_2 = 5{,}00$ m con $OB_1 = OB_2 = 2{,}50$ m ; $OB_3 = 1{,}50$ m ; OA = 2,00 m
X = 35 kgf Y = 80 kgf Z = 30 kgf

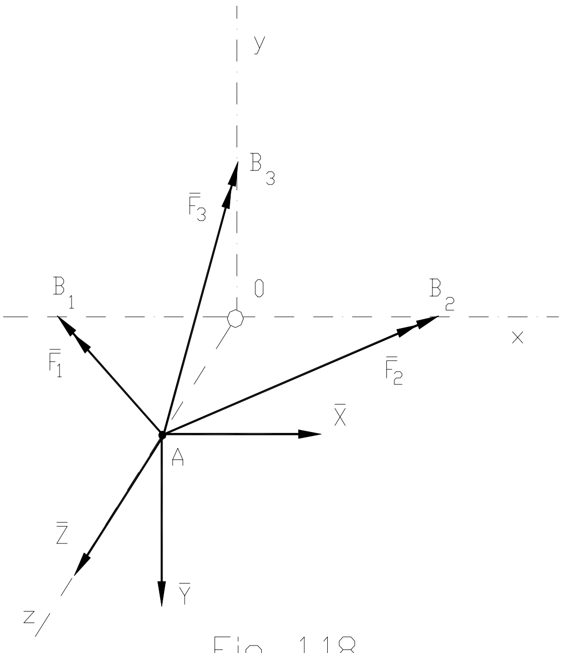

Fig. 1.18

Incógnitas: F_1 , F_2 F_3

Las fuerzas $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, que aparecen en las barras cuando actúa la fuerza $\bar{F}$ son aquéllas que mantienen al punto A en reposo si éste fuese un punto libre: para ello se imagina cortadas las dos barras y sustituidas por las respectivas fuerzas internas.- Bajo esta suposición $\bar{F}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ constituyen un sistema de fuerzas espaciales en equilibrio que debe satisfacer la ecuación

$$\sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

Equivalente a un sistema de tres ecuaciones escalares con tres incógnitas que permite determinar sus valores:

$$\sum X_i = F_1 \cos\theta_{1X} + F_2 \cos\theta_{2X} + F_3 \cos\theta_{3X} + X = 0$$
$$\sum Y_i = F_1 \cos\theta_{1Y} + F_2 \cos\theta_{2Y} + F_3 \cos\theta_{3Y} + Y = 0$$
$$\sum Z_i = F_1 \cos\theta_{1Z} + F_2 \cos\theta_{2Z} + F_3 \cos\theta_{3Z} + Z = 0$$

Las rectas de acción de las incógnitas son los ejes de las tres barras; sus direcciones quedan determinadas por las coordenadas del punto de concurrencia A como origen y su extremo en los puntos B_1 , B_2 , B_3 de intersección de las barras con la pared; los sentidos conocidos se indican con una flecha y los supuestos para las incógnitas, con doble flecha.- Los cosenos directores de los vectores $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, $\overline{AB_3}$, de módulo AB_i (expresado en forma genérica) , se calculan y verifican con las expresiones:

$$\cos\theta_{iX} = \frac{x_i - x_A}{AB_i} = \frac{x_i - x_A}{\sqrt{(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + (z_i - z_A)^2}}$$

$$\cos\theta_{iY} = \frac{y_i - y_A}{AB_i} \qquad \cos\theta_{iZ} = \frac{z_i - z_A}{AB_i}$$

$$\cos^2\theta_{iX} + \cos^2\theta_{iY} + \cos^2\theta_{iz} = 1$$

Se ordenan las operaciones confeccionando las siguientes tablas:

Punto	Coordenadas		
A	$x_A = 0$	$y_A = 0$	$z_A = 2{,}00$
A_1	$x_1 =- 2{,}50$	$y_1 = 0$	$z_1 = 0$
A_2	$x_2 = 2{,}50$	$y_2 = 0$	$z_2 = 0$
A_3	$x_3 = 0$	$y_3 = 1{,}50$	$z_3 = 0$

Fuerza - 1 -	Vector - 2 -	$x_i - x_A$ - 3 -	$y_i - y_A$ - 4 -	$z_i - z_A$ - 5 -	$(x_i - x_A)^2$ - 6 -	$(y_i - y_A)^2$ - 7 -	$(z_i - z_A)^2$ - 8 -	(6+7+8) - 9 -
F_1	AB_1	- 2 50	0	- 2	6,25	0	4	10,25
F_2	AB_2	2,50	0	- 2	6,25,	0	4	10,25
F_3	AB_3	0	1,50	- 2	0	2,25	4	6,25

$\sqrt{-9-}$ - 10 -	$\cos\theta_{ix}$ = =(3 ÷ 10)	$\cos\theta_{ij}$ = =(4 ÷ 10)	$\cos\theta_{iz}$ = =(5 ÷ 10)	$\cos^2\theta_{ix}$	$\cos^2\theta_{iy}$	$\cos^2\theta_{iz}$	$\sum\cos^2\theta_{ij}$
3,20156	- 0,78087	0	- 0,62470	0,609758	0	0,390250	1,000008
3,20156	0,78087	0	- 0,62470	0,609758	0	0,390250	1,000008
2,50	0	0,6	- 0,8	0	0,36	0,64	1.-

Verificados los cosenos directores de las tres barras se introducen en las ecuaciones de equilibrio dadas más arriba.- A este efecto se supone que las tres fuerzas incógnitas tienen sentido saliente del punto A de concurrencia, al que asignamos signo positivo: si el resultado es negativo significa que el sentido supuesto es erróneo y debe cambiarse.- Ejecutando lo expresado, se tiene:

$$\sum X = -0{,}78087\,F_1 + 0{,}78087\,F_2 + 35 = -F_1 + F_2 + 44{,}822 = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Y = 0{,}6\,F_3 - 80 = 0 \qquad (2)$$
$$\sum Z = -0{,}62470\,F_1 - 0{,}62470\,F_2 - 0{,}8\,F_3 + 30 = F_1 + F_2 + 1{,}2806\,F_3 - 48{,}023 = 0 \qquad (3)$$

De (2) se obtiene que

$$F_3 = 133{,}33$$

Sustituyendo en (3) el valor de F_3 obtenido, y despejando F_1 de (1) y (3), e igualando resulta:

$$F_1 = F_2 + 44{,}822 = -F_2 - 122{,}726 \qquad \therefore \qquad F_2 = -83{,}774$$

E introduciendo el valor de F_2 en la expresión de F_1

$$F_1 = -83{,}774 + 44{,}822 = 83{,}774 - 122{,}726 = -38{,}952$$

Por lo tanto, los resultados obtenidos para las incógnitas son:

F_1 = 38,95 kgf de sentido opuesto al supuesto, o sea de compresión.-
F_2 = 83,77 kgf de sentido opuesto al supuesto, o sea de compresión.-
F_3 = 133,33 kgf de sentido igual al supuesto, o sea de tracción.-