



CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES

5.1.- CONCEPTOS GENERALES.-

Bajo la denominación de estructuras se designan los elementos componentes de una obra o máquina que, por su propia resistencia, garantizan la estabilidad del conjunto, es decir el equilibrio estable del conjunto.-

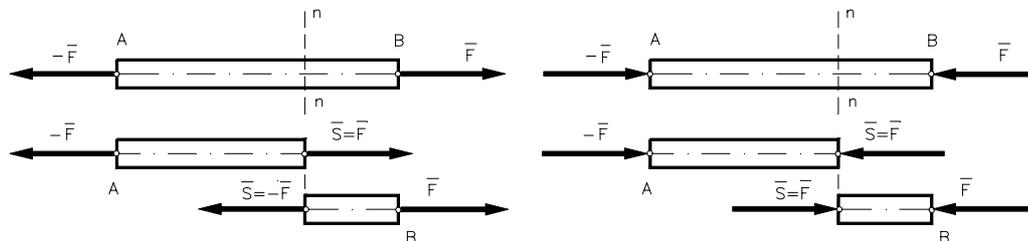


Fig. 5.1

Una de las formas estructurales fundamentales es la **barra** que, en su concepción más general, es una pieza prismática que tiene dos dimensiones pequeñas en comparación con la tercera. En una interpretación más restringida la tomaremos de eje recto y nos limitaremos, por el momento, al caso frecuente de que se encuentre sometida a la acción de dos fuerzas aplicadas en sus extremos. Sabemos que, en tal situación, el equilibrio sólo puede existir si las fuerzas son opuestas e iguales para lo cual *es imprescindible que sus rectas de acción sean coincidentes con el eje de la barra.-*

Consideremos una barra AB sometida a dos fuerzas axiales opuestas \bar{F} y $-\bar{F}$, figura 5.1.; si el sentido de éstas tiende a alargar la barra, se dice que está sometida a **tracción**; si el sentido de las fuerzas tiende a acortar la barra, ésta se encuentra solicitada a **compresión**.- Imaginemos la barra cortada por un plano normal a su eje (de traza n-n) que la divide en dos partes.- Al cortarla se ha roto el equilibrio y para restablecerlo debemos aplicar, en ambas caras del corte, fuerzas equivalentes a las interacciones o fuerzas internas que existían entre las partículas adyacentes al corte antes que se practicara el mismo.- A las dos resultantes de estas fuerzas internas se las denomina “**esfuerzo en la barra**” y las indicamos con la letra \bar{S} .-

Para determinar el esfuerzo en una barra es necesario calcular la intensidad de la fuerza S y establecer si corresponde a una sollicitación de tracción o de compresión.-

Al efecto, si consideramos el tramo izquierdo de la barra de la figura 5.1. donde se han puesto en evidencia las fuerzas internas, se observa que la acción \bar{S} del tramo derecho sobre el izquierdo es una fuerza axial de sentido tal que se aleja (o se acerca) al extremo del tramo considerado según que la sollicitación sea de tracción (o compresión), respectivamente.- Si tomásemos el tramo derecho en lugar del izquierdo se llega a igual conclusión.- En forma general se puede establecer que “*la sollicitación sobre una barra es de tracción o de compresión según que el sentido del esfuerzo interno se aleje o se acerque, respectivamente, al extremo considerado*”.-



“ Una estructura constituida por varias barras (de hierro, madera u hormigón) unidas por sus extremos en puntos llamados nudos, de manera tal que el conjunto así formado sea indeformable, se denomina **armadura o reticulado rígido**.- Si a esta estructura le agregamos los vínculos que la fijan a tierra, hablamos de **sistema reticulado**.- ”

En la figura 5.2 se observa la estructura de un puente que, como se sabe, es utilizado por el hombre para **sostener cargas a través de un vano**.- Está constituido por dos reticulados paralelos apoyados sobre pilares extremos llamados estribos.- Apoyando a su vez en los nudos del cordón inferior de aquéllos se observan las **viguetas**, llamadas también **traviesas**, que reciben la carga de los **largueros**, paralelos a las armaduras, que son los elementos estructurales que sustentan la superficie de rodamiento por donde circulan las cargas.- El entramado descrito se denomina **tablero** del puente.-

La estructura total del puente se desarrolla en el espacio como así también la posición de las cargas.- Pero, si observamos el corte practicado en correspondencia con la vigueta central, la carga vertical **P** que incide sobre ella podemos descomponerla en dos fuerzas según rectas paralelas coincidentes con la intersección del plano de las armaduras con el plano vertical que contiene la vigueta, **P'** y **P''**.- Extendido esto a todas las viguetas, se observa que cada uno de los **reticulados constituye una**

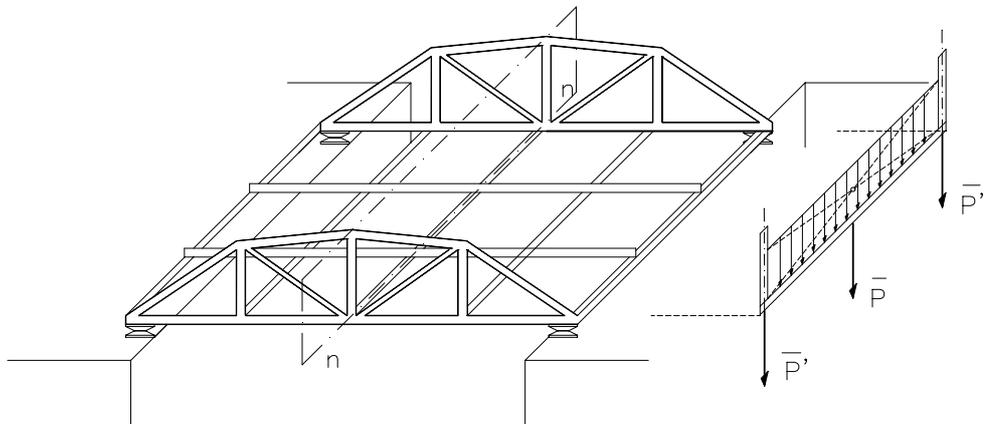


Fig. 5.2

estructura plana sometida a la acción de fuerzas que actúan en su plano y en correspondencia con los nudos.-

La estructura del puente se la concibe entonces como dos sistemas reticulados planos vinculados por viguetas y largueros formando un entramado.- Los reticulados planos se utilizan en techos y puentes.-

Las barras se designan barras de contorno o exteriores y barras de alma o interiores.- Las primeras se caracterizan por pertenecer a un solo triángulo del reticulado en cambio las segundas forman parte de dos de ellos.- Las barras de contorno forman los cordones superior e inferior de la estructura; en el primero las barras trabajan frecuentemente a compresión y a tracción en el segundo.- Una barra que trabaja a tracción se denomina **tirante ; par o puntal** cuando es a compresión.- Las barras de alma se denominan **montantes** si son verticales y **diagonales** cuando están inclinadas.-

En los reticulados se designará cada nudo por un número: nudo (1), nudo (2), nudo (3),... o, en forma genérica: nudo (i), nudo (j).- Las barras se denominarán utilizando los números correspondientes a sus nudos extremos: barra 1-2, barra 3-4, barra i-j.-

Existen también estructuras reticulares espaciales que son aquéllas cuyas barras no están contenidas en un plano único, encontrándose sometidas a fuerzas que se sitúan en el espacio.- Estas estructuras se encuentran en diversos tipos de grúas, cúpulas reticulares, torres, agujas, etc., y serán analizadas en el apartado 5.10.-

5.2.- GENERACIÓN DE RETICULADOS PLANOS.- CONDICIÓN DE RIGIDEZ.-

En base al proceso de generación de un reticulado se distinguen tres tipos: Reticulados simples, compuestos y complejos.-

5.2.1.- RETICULADOS SIMPLES.-

Supongamos tres barras articuladas entre sí de modo que constituyan una cadena cinemática abierta con cinco grados de libertad, figura 5.3.- Si articulamos entre sí las dos barras extremas restringiremos en el conjunto dos grados de libertad, restando sólo tres y comportándose como una única chapa rígida.- Es decir que tres barras rígidas articuladas entre sí por sus extremos se comportan como una única chapa rígida.-

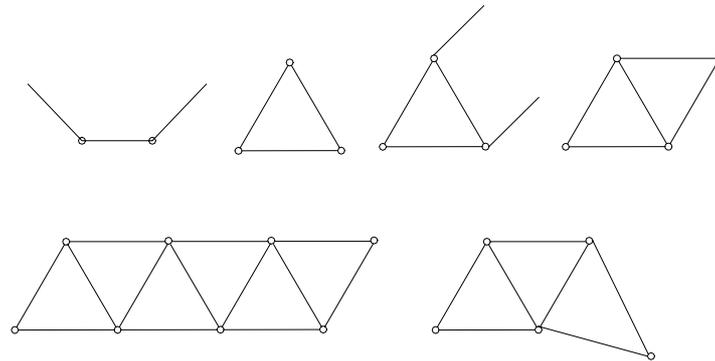


Fig. 5.3

Si a dos cualesquiera de los vértices del triángulo así obtenido, les articulamos dos nuevas barras coplanares, el resultado será una nueva cadena cinemática de tres chapas con cinco grados de libertad.- Articulando entre sí los extremos de las dos barras agregadas al triángulo primitivo, restamos al conjunto dos grados de libertad, con lo que quedarán sólo tres y se comportará como una única chapa rígida.- Articulando nuevos pares de barras coplanares a vértices consecutivos o no consecutivos del reticulado que se va formando y articulándolas entre sí se obtiene un **reticulado simple**.- Si los pares de barras se articulan a vértices consecutivos el reticulado estará formado sólo por triángulos y se lo designa **triangulado simple**.- Son reticulados simples los presentados en la figura 5.4.-

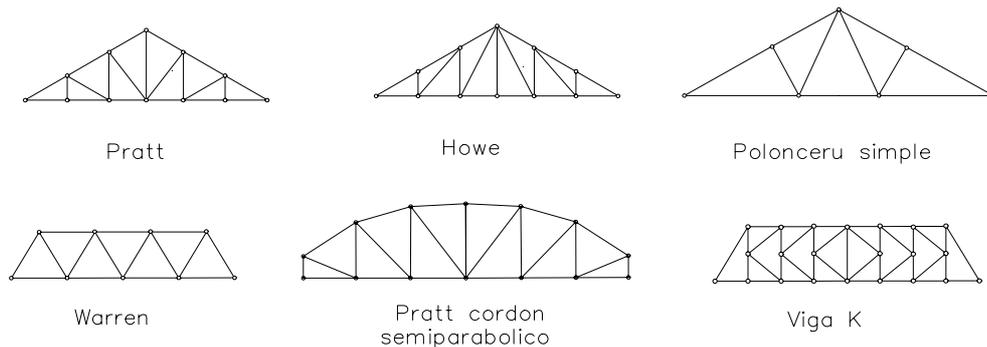


Fig. 5.4

Si llamamos “n” al número de pares de barras que se agregan al triángulo primitivo, el número total de barras será:

$$b = 2n + 3$$

Y como cada par de barras adicionales da origen a un nuevo vértice, el número de éstos será:

$$v = n + 3$$

Despejando n de esta última y reemplazando en la primera se tiene:

$$b = 2v - 3 \quad (1)$$



Que nos dice que para que un reticulado simple sea rígido el número de barras del mismo debe ser igual al doble del número de vértices menos 3.- La expresión (1) se conoce como condición de rigidez de un reticulado.-

5.2.2.- RETICULADOS COMPUESTOS.-

Si consideramos dos reticulados simples coplanares, como los indicados en la figura 5.5(a), y los unimos mediante tres vínculos cinemáticamente eficientes, quedan rígidamente enlazados uno con otro y el reticulado resultante, llamado reticulado compuesto, será también rígido.- Estos tres vínculos podrán ser una articulación y una barra que no pase por ella, o tres barras que no concurren a un punto.- El reticulado de la figura 5.5(a) es rígido, en cambio el de la 5.5(b) no lo es por cuanto al concurrir las tres barras de enlace a un punto, una de ellas constituye un vínculo aparente y es posible una rotación infinitésima relativa de un reticulado simple respecto al otro, alrededor del punto de concurrencia.-

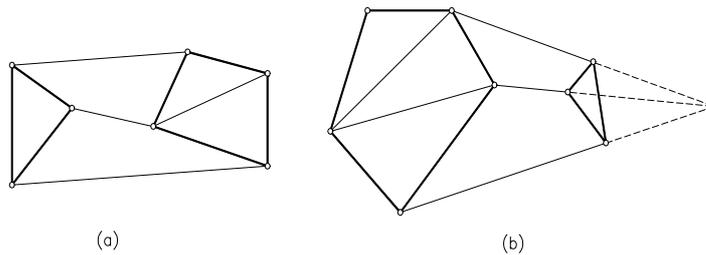


Fig. 5.5

En la figura 5.6 se presentan algunos ejemplos de reticulados compuestos.-

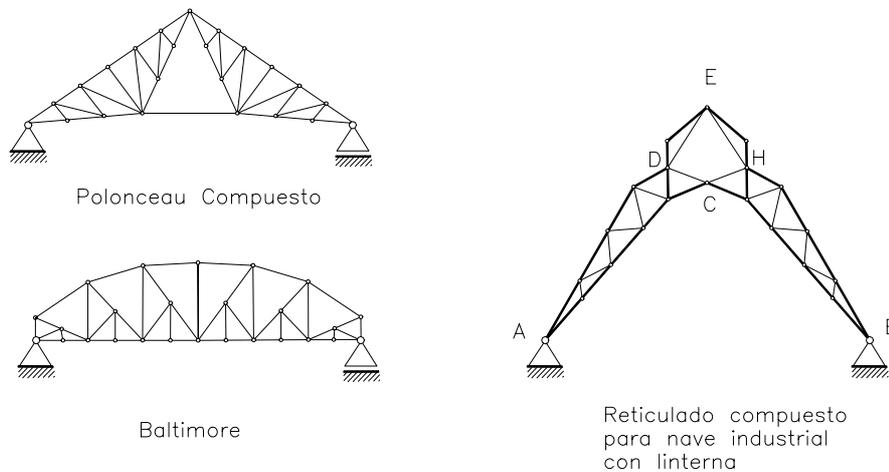


Fig. 5.6

Veamos la relación existente entre el número de barras b , requeridas para que el reticulado generado en la forma expuesta sea rígido, y el número de vértices o nudos v que posee.- Sean b' y v' los números de barras y vértices de uno de los reticulados, y b'' y v'' los correspondientes al otro.- Entre ellos se debe cumplir la condición de rigidez o sea que:

$$b' = 2v' - 3$$

$$b'' = 2v'' - 3$$

Sumando miembro a miembro será:

$$b' + b'' = 2(v' + v'') - 6$$

Si el reticulado compuesto se genera uniendo los simples en la forma expuesta, tres barras por ejemplo, el número total de barras será:

$$b = b' + b'' + 3 = 2(v' + v'') - 6 + 3 = 2v - 3$$



En donde $v = v' + v''$ teniendo presente que al generar el reticulado compuesto no hemos agregado ningún nudo a los que tenían los reticulados simples.-

Si el enlace entre éstos se hace con una barra y una articulación, que resultará de unir un vértice del primer reticulado simple con otro del segundo (caso del Polonceau compuesto de la figura 5.6), será:

$$b = b' + b'' + 1 = 2(v' + v'') - 6 + 1 = 2(v' + v'') - 5$$

$$v = v' + v'' - 1$$

Operando resultará:

$$b = 2(v + 1) - 5 = 2v - 3$$

Si en lugar de dos , se vincularan tres o más reticulados simples se obtendría la misma expresión, lo que significa que la condición de rigidez requerida por los reticulados simples es también necesaria en los compuestos.-

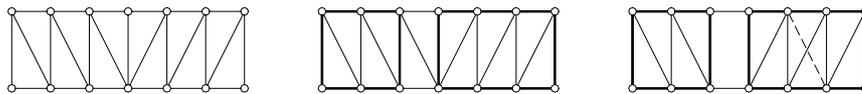


Fig. 5.7

Pero en éstos es condición necesaria mas no suficiente para asegurar la rigidez del conjunto.- Efectivamente, consideremos la viga Pratt de la figura 5.7, que es un reticulado simple obtenido por triangulación.- Pero podemos concebirlo como formado por dos reticulados simples unidos por tres barras.- En él se cumple la relación

$$b = 2v - 3 \quad (25 = 2 \times 14 - 3)$$

Si se saca la barra diagonal y se la traslada a la posición indicada en la tercer figura, evidentemente se continuará cumpliendo la condición $b = 2v - 3$ pero el sistema reticular resultante será inestable : falta una barra de enlace entre los dos reticulados simples, y hay una barra en exceso (superabundante) en el reticulado simple de la derecha.- Es decir para que la ecuación $b = 2v - 3$ sea condición suficiente de rigidez las barras deben estar convenientemente distribuidas para lo cual, **debe verificarse que la ecuación expresada se cumpla independientemente en cada uno de los reticulados componentes y que los vínculos de enlace entre ambos sean cinemáticamente eficientes.-**

Cabe otra aclaración referida a los límites de validez de la condición de rigidez obtenida.- Para ello observemos nuevamente la figura 5.6.- En ella se han representado tres reticulados compuestos de los cuales dos se comportan como una chapa única con tres grados de libertad y se fijan a tierra con tres vínculos simples.- El tercero es un reticulado compuesto constituido por cuatro chapas articuladas entre sí en los nudos C, D, E y H, constituyendo una cadena cinemática cerrada de cuatro chapas que se articula en los nudos A y B a apoyos dobles fijos en tierra.- El sistema reticulado es isostático ya que tiene tantos vínculos a tierra (cuatro) como grados de libertad posee la cadena cinemática cerrada de cuatro chapas.-

Veamos que sucede con la condición de rigidez.- El reticulado está constituido por 40 barras y 22 vértices; aplicando esta condición resulta que $40 \neq 2 \times 22 - 3$ y, por lo tanto, no se cumple la condición de rigidez en la forma que se la presentó para los reticulados de una sola chapa con tres grados de libertad.- Este aparente incumplimiento se aclara si generalizamos el planteo del problema partiendo de que para tener un sistema reticular isostático (y consecuentemente presente constricción total), deben disponerse de tantas ecuaciones independientes como incógnitas haya.-

Llamando μ (mú) al número de vínculos simples externos que se necesita para inmovilizar el reticulado ya sea que se trate de una cadena cinemática ($\mu > 3$) o de una chapa única ($\mu = 3$) se tiene:

Condición de isostaticidad:	$I = E$
Número de incógnitas:	$I = b + \mu$
Ecuaciones independientes disponibles:	$E = 2v$ (según se verá en apartado 5.4.)
De donde:	$b + \mu = 2v$
O, también:	$b = 2v - \mu$



Esta condición es cumplida por el reticulado en consideración ya que: $b = 2 \times 22 - 4 = 40$.- La disminución de una barra ha sido sustituida por un vínculo externo adicional.-

5.2.3.- RETICULADOS COMPLEJOS.-

Consideremos, figura 5.8 , una cadena cinemática cerrada formada por seis barras; sabemos que tendrá tanto grados de libertad como barras o vértices posea:

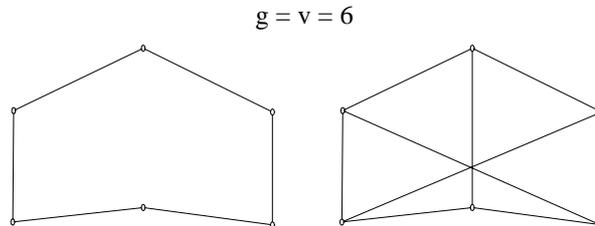


Fig. 5.8

Para transformarla en un reticulado rígido debemos dejarle sólo tres grados de libertad; para ello agregaremos, vinculando sus vértices, tantas barras como grados de libertad posea la cadena menos tres.- En nuestro caso agregamos tres barras y el reticulado quedará con sólo tres grados de libertad comportándose como una chapa rígida.- Este reticulado constituye un **reticulado complejo** y suele formar parte de algunas armaduras como la presentada en la figura 5.21 del apartado 5.7.-

Veamos la relación entre barras y vértices.- El número de barras iniciales de la cadena cerrada es:

$$b' = v$$

Las barras agregadas son:

$$b'' = g - 3 = v - 3$$

El total será:

$$b = b' + b'' = v + v - 3 = 2v - 3$$

Lo que da validez a esta expresión como condición de rigidez de cualquier tipo de armadura que tenga tres grados de libertad, es decir que se comporte como una única chapa.-

Si el número de barras es inferior al requerido por la condición de rigidez, o sea $b < 2v - 3$, estamos en presencia de un sistema inestable, es decir, de una cadena cinemática con tantos grados de libertad como barras falten para completar el número $(2v - 3)$.-

Si la armadura posee más barras que las exigidas por la condición de rigidez, $b > 2v - 3$, tendremos un sistema reticulado estable con exceso de vínculos internos; las barras que exceden el número impuesto por la condición de rigidez, $\{ b - (2v - 3) \}$, se denominan **barras superabundantes**.-

5.3.- HIPÓTESIS DE CÁLCULO.-

Para determinar los esfuerzos que se originan en las barras se formulan dos hipótesis que, con la suficiente aproximación, permiten abordar el cálculo con sencillez.- Se supone primero **que las barras se encuentran articuladas en los nudos** y, en segundo término, **que las fuerzas exteriores actúan solamente en ellos**.-

En la figura 5.9. se ha separado una barra genérica “i-j” cortando las barras que la unían a otros nudos y se han aplicado las fuerzas reactivas que los nudos (i) y (j) recibían de las barras cortadas.- Por la naturaleza del vínculo que la enlaza a las barras adyacentes y la forma como actúan las fuerzas exteriores activas, se han supuesto tres hipótesis, a saber:

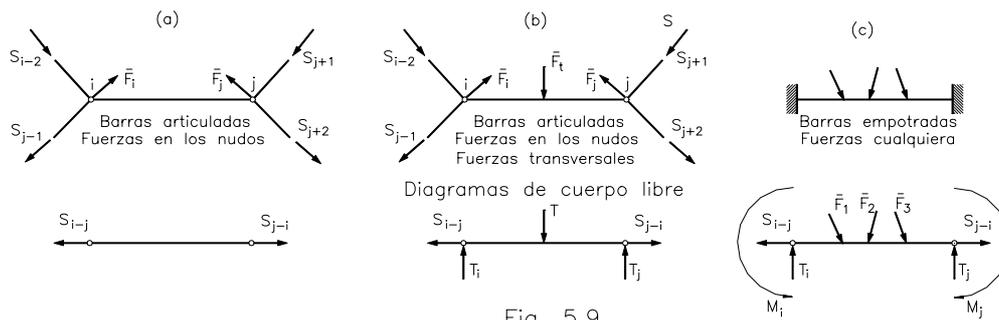


Fig. 5.9

- En la parte (a) de la figura las fuerzas externas activas (y también las reactivas) están aplicadas en los nudos formados por barras articuladas entre sí: en estas condiciones se ha visto (apartado 2.7.3) que la única posibilidad de equilibrio existe si las dos resultantes extremas son iguales, opuestas y de dirección coincidente con el eje de la barra; **la intensidad S del esfuerzo axial constituye la única incógnita a determinar.**-
- En los casos que las barras están articuladas en sus extremos y cargadas en los nudos y transversalmente, figura 5.9 (b), **aparece otra incógnita a más de S : la componente transversal de la reacción que se determina sin cambios importantes del cálculo.**-
- En cambio, si se considera la barra con sus extremos empotrados y sometida, a más de las fuerzas en los nudos, a acciones transversales a su eje, figura 5.9 (c), las condiciones de equilibrio exigirían reacciones de cualquier dirección no pasantes generalmente por sus extremos, lo que implica más incógnitas que las ecuaciones estáticas disponibles.-

Si bien la hipótesis de extremos articulados se puede obtener introduciendo adecuadas disposiciones constructivas (que se utilizan en casos especiales), los esfuerzos axiales que resultan de su adopción difieren poco de los que se obtendrían calculando la estructura como hiperestática.- Por otra parte los momentos flectores en las barras son limitados por su esbeltez y disminuidos por fenómenos de plasticidad posibilitando que usualmente puedan ser despreciados.- Por esto y ante la complejidad de un cálculo más riguroso, es que se acepta la hipótesis enunciada con la reserva de que en los casos importantes debe efectuarse en una segunda etapa la determinación de esfuerzos llamados secundarios.-

La hipótesis de las fuerzas aplicadas en los nudos se satisface utilizando disposiciones constructivas adecuadas (como la indicada en la figura 5.2).- Estas disposiciones reducen las fuerzas transversales a las barras a su propio peso que, en el cálculo, se toma aplicado por mitades en sus extremos.-

5.4.- MÉTODO DE LOS NUDOS.-

En la zona central de la figura 5.10, se ha representado una armadura simple formada por cinco barras y cuatro nudos o vértices.- Posee tres grados de libertad en su plano y para fijarla en él se necesita que el número de vínculos simples sea $\mu = 3$ como mínimo.- Se tiene en $A \equiv (1)$ un apoyo fijo y en $B \equiv (3)$ uno móvil; actúan las fuerzas externas \bar{F}_1 y \bar{F}_2 en los nudos (2) y (4), respectivamente, que originan en aquéllos las reacciones \bar{A} y \bar{B} .- Separemos de la estructura los cuatro nudos (1), (2), (3) y (4) como se muestra en la parte exterior de dicha figura.- En cada uno de estos vértices concurren tres o más fuerzas coplanares que, para estar en equilibrio, deben satisfacer las dos ecuaciones siguientes:

$$\Sigma X = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

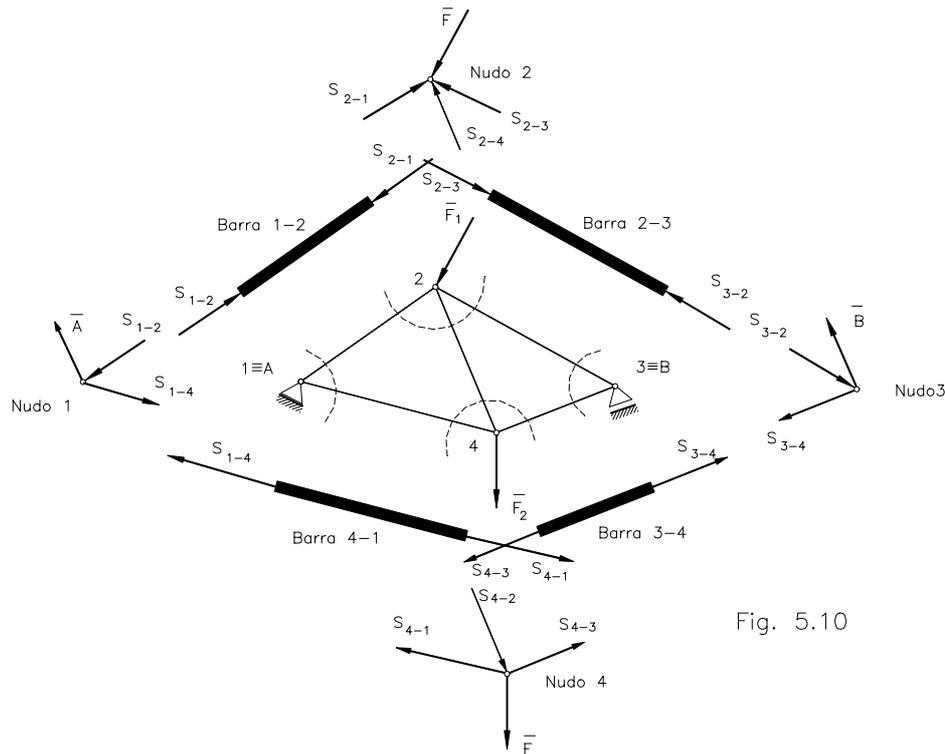


Fig. 5.10

Como tenemos “ v ” nudos, se obtendrán $E = 2v$ ecuaciones estáticas de equilibrio.- Por otra parte las incógnitas del problema son los esfuerzos S en las barras y las tres componentes de las reacciones externas; en conjunto $I = b + 3 = 2v - 3 + 3 = 2v$.-

Es decir que tenemos tantas incógnitas como ecuaciones brindan las condiciones de equilibrio de los nudos: se trata de un sistema isostático.- Como alternativa se tiene además las tres ecuaciones de equilibrio que se obtienen planteando el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura en su conjunto; estas tres ecuaciones no son independientes de las $2v$ planteadas para cada uno de los nudos aisladamente ya que, estando rígidamente vinculados entre ellos, su estado de reposo implica necesariamente el reposo del conjunto.-

En la figura 5.10. se han cortado y separado las cuatro barras perimetrales para poner en evidencia las interacciones entre nudos y barras con la finalidad de asignar correctamente el sentido de las fuerzas interiores.- En el estudio del equilibrio del nudo interesa el sentido de las fuerzas que cada barra transmite a los nudos adyacentes: se observa, en la figura mencionada, que **en el caso de una barra traccionada el esfuerzo se aleja del nudo y en el caso de una barra comprimida S va hacia el nudo.- Además para toda la barra, S tiene uno u otro sentido geométrico según sea el extremo que se considere: opuestos siempre entre ellos tendiendo a aumentar o disminuir su longitud.-**

Se dijo que disponemos de un sistema de $E = 2v$ ecuaciones independientes que permiten calcular las $I = 2v$ incógnitas.- Mas, normalmente no se recurre a la resolución este sistema de ecuaciones sino que, por resultar más simple, se determinan en primer lugar las reacciones externas.- Se calculan después los esfuerzos en las barras, **comenzando por un nudo en el que concurran sólo dos barras** porque, si existiesen tres o más esfuerzos desconocidos el problema sería indeterminado ya que para cada nudo disponemos sólo de dos ecuaciones de equilibrio.- Generalmente pueden utilizarse las dos ecuaciones de equilibrio de los sistemas planos de fuerzas concurrentes $\sum X = 0$ y $\sum Y = 0$, despejando de ellas los esfuerzos en las dos barras.- Resulta conveniente considerar dichos esfuerzos alejándose del nudo, lo que implica que la barra trabaja a tracción; si el resultado es positivo el sentido supuesto es correcto, y en caso contrario la barra trabaja a compresión.- Se pasa luego a otro nudo que presente sólo dos esfuerzos desconocidos, utilizando los resultados del nudo anterior como datos y con el sentido que corresponda al nuevo nudo que se está considerando.- Se prosigue el cálculo completando la totalidad de los nudos.- A continuación desarrollaremos el método de los nudos, primero en forma analítica tal cual se ha expuesto, y luego en forma gráfica.-

5.4.1.- PROCEDIMIENTO ANALÍTICO.-

Las pautas seguidas para ordenar y sistematizar el cálculo son las siguientes:

- El vector representativo de las fuerzas conocidas actuantes en los vértices de la estructura se toma con sentido saliente del nudo; los ángulos directores se miden en sentido antihorario a partir de la semirrecta paralela a la rama positiva del eje de las x pasante por el vértice que se considera (apartado 1.5.2, figura 1.10).-
- Las ecuaciones de equilibrio referidas a la suma de las componentes rectangulares de las fuerzas se plantean con todos sus términos positivos, quedando determinado su sentido por el signo de la función seno o coseno del ángulo director correspondiente.-
- Las ecuaciones de equilibrio referidas a la suma de momentos respecto a un punto se tomarán considerando positivos los momentos horarios.- En este caso la ecuación toma la siguiente forma debido al cambio de convención: $\sum M_o = \sum (yX - xY) = 0$, donde X e Y son las componentes rectangulares de las fuerzas y las minúsculas x e y las coordenadas de los nudos respectivos, (apartado 2.7).-
- El suponer los esfuerzos desconocidos con sentido saliente del nudo implica suponer que la barra trabaja a tracción.- Si al establecer su valor resulta negativo la barra trabaja a compresión.-
- Los sentidos supuestos se indican con doble flecha; los definitivos con flecha simple.- Al calcular el esfuerzo de una barra en el nudo del extremo izquierdo, por ejemplo, se lo indica en el diagrama de cuerpo libre de ese nudo con doble flecha; al pasar al nudo del extremo derecho para utilizarlo como dato, se le asigna el verdadero sentido, saliendo del vértice y demarcando el ángulo director correspondiente.-

5.4.1.1.- Determinación de reacciones externas.-

Para concretar conceptos se hará el desarrollo del cálculo ilustrando con un ejemplo numérico de valores arbitrarios, figura 5.11.-

Datos: L = 15,00 m ; H = 3,50 m ; h = 1,32 m ; F₁ = 5,5 kN ; F₂ = 3.0 kN.-

$\theta_{1-2} = 25,01^\circ$; $\theta_{1-4} = 9,98^\circ$; $\theta_1 = 300^\circ$; $\theta_2 = 270^\circ$; $\theta_B = 90^\circ$.-

Incógnitas: A ; θ_A ; B.-

Se traza el diagrama de cuerpo libre para la totalidad de la estructura (figura 5.11).- Tratándose de un sistema plano de fuerzas no concurrentes disponemos de tres ecuaciones de equilibrio.- Tomando momento respecto al punto A, centro del apoyo izquierdo, planteamos una ecuación con sólo una incógnita B.-

$$\begin{aligned} \sum M_A &= \sum (yX - xY) = 0 \\ \sum M_A &= HF_1 \cos \theta_1 - L/2 F_1 \sin \theta_1 + hF_2 \cos \theta_2 - L/2 F_2 \sin \theta_2 + (0,00) B \cos \theta_B - LB \sin \theta_B = 0 \\ \sum M_A &= 3,5 \times 5,5 \cos 300^\circ - 7,5 \times 5,5 \sin 300^\circ - 7,5 \times 3 \sin 270^\circ - 15 B \sin 90^\circ = 0 \\ \sum M_A &= 9,625 + 35,723 + 22,50 - 15 B = 0 \\ B &= 67,848 / 15 = 4,523 \text{ kilonewton} \end{aligned}$$

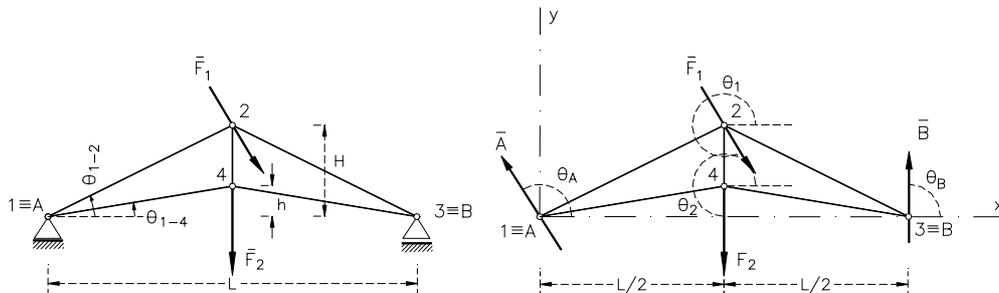


Fig. 5.11

Proyectando sobre ambos ejes tenemos:



$$\begin{aligned} \sum X &= A \cos\theta_A + F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 + B \cos\theta_B = 0 \\ \sum Y &= A \sin\theta_A + F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 + B \sin\theta_B = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= A \cos\theta_A + 5,5 \cos 300^\circ + 3 \cos 270^\circ + 4,523 \cos 90^\circ = 0 \\ \sum Y &= A \sin\theta_A + 5,5 \sin 300^\circ + 3 \sin 270^\circ + 4,523 \sin 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= A \cos\theta_A + 2,75 = 0 & \Rightarrow & A \cos\theta_A = -2,75 = X_A \\ \sum Y &= A \sin\theta_A - 4,763 - 3 + 4,523 = 0 & \Rightarrow & A \sin\theta_A = 3,24 = Y_A \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{18,06} = 4,25 \text{ kN}$$

$$\cos\theta_A = -2,75 / 4,25 = -0,6471 \quad \sin\theta_A = 3,24 / 4,25 = 0,7624$$

$$\theta_A = \arccos(-0,6471) = 180^\circ - 49,68^\circ = 130,3^\circ$$

$$\theta_A = \arcsin(0,7624) = 180^\circ - 49,67^\circ = 130,3^\circ$$

$$\text{Verificación: } \sum M_2 = \sum (yX - xY) = (-3,5)(-2,75) - (-7,5)3,24 - 7,5 \times 4,523 = 0,003 \sim 0$$

5.4.1.2.- Determinación de los esfuerzos en las barras.-

Nudo (1).-

Datos : $A = 4,25 \text{ kN}$; $\theta_A = 130,3^\circ$; $\theta_{1-2} = 25,01^\circ$; $\theta_{1-4} = 9,98^\circ$ **Incógnitas:** S_{1-2} - S_{1-4} -

Trazamos el diagrama de cuerpo libre, figura 5.12 , planteamos las ecuaciones de equilibrio y resolvemos:

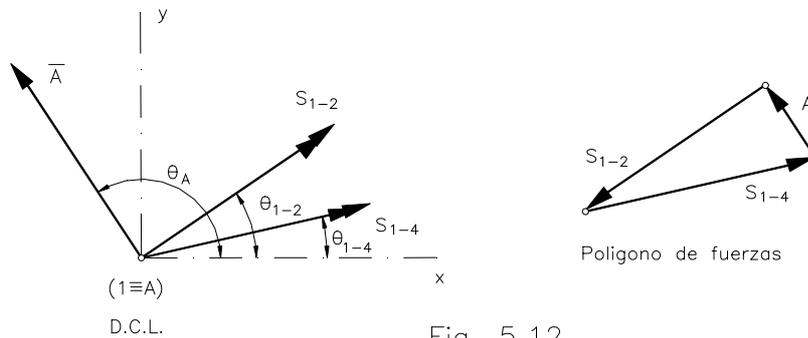


Fig. 5.12

$$\begin{aligned} \sum X &= S_{1-4} \cos\theta_{1-4} + S_{1-2} \cos\theta_{1-2} + A \cos\theta_A = 0 \\ \sum Y &= S_{1-4} \sin\theta_{1-4} + S_{1-2} \sin\theta_{1-2} + A \sin\theta_A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= S_{1-4} \cos 9,98^\circ + S_{1-2} \cos 25,01^\circ - 2,75 = 0 \\ \sum Y &= S_{1-4} \sin 9,98^\circ + S_{1-2} \sin 25,01^\circ + 3,24 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,98486 S_{1-4} + 0,9062 S_{1-2} &= 2,75 \\ 0,1733 S_{1-4} + 0,42278 S_{1-2} &= -3,24 \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos:

$$S_{1-4} = 15,805 \text{ kN} \quad \text{y} \quad S_{1-2} = -14,14 \text{ kN}$$

Nudo (2).- Figura 5.13



Datos: $F_1 = 5,5 \text{ kN}$; $S_{2-1} = 14,14 \text{ kN}$; $\theta_1 = 300^\circ$; $\theta_{2-1} = 25,01^\circ$; $\theta_{2-3} = 334,99^\circ$; $\theta_{2-4} = 270^\circ$.-

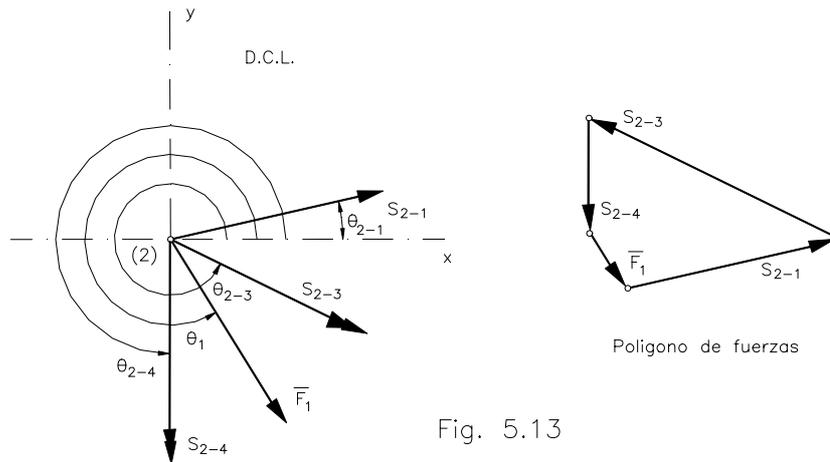


Fig. 5.13

Incógnitas: S_{2-3} ; S_{2-4} .-

$$\begin{aligned} \sum X &= S_{2-1} \cos\theta_{2-1} + S_{2-4} \cos \theta_{2-4} + F_1 \cos\theta_1 + S_{2-3} \cos\theta_{2-3} = 0 \\ \sum Y &= S_{2-1} \text{sen}\theta_{2-1} + S_{2-4} \text{sen} \theta_{2-4} + F_1 \text{sen} \theta_1 + S_{2-3} \text{sen}\theta_{2-3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 14,142 \cos 25,01^\circ + S_{2-4} \cos 270^\circ + 5,5 \cos 300^\circ + S_{2-3} \cos 334,99^\circ = 0 \\ \sum Y &= 14,142 \text{sen} 25,01^\circ + S_{2-4} \text{sen} 270^\circ + 5,5 \text{sen} 300^\circ + S_{2-3} \text{sen} 334,99^\circ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 12,816 + 0,00 + 2,75 + 0,90623 S_{2-3} = 0 \\ \sum Y &= 5,9789 - 4,7631 - 0,42278 S_{2-3} - S_{2-4} = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo , obtenemos: $S_{2-3} = - 17,177 \text{ kN}$ y $S_{2-4} = 8,4778 \text{ kN}$

Nudo (3).- Figura 5.14 .-

Datos: $B = 4,52 \text{ kN}$; $\theta_B = 90^\circ$; $\theta_{3-2} = 154,99^\circ$; $\theta_{3-4} = 170,02^\circ$.-

Incógnitas: S_{3-2} ; S_{3-4} .-

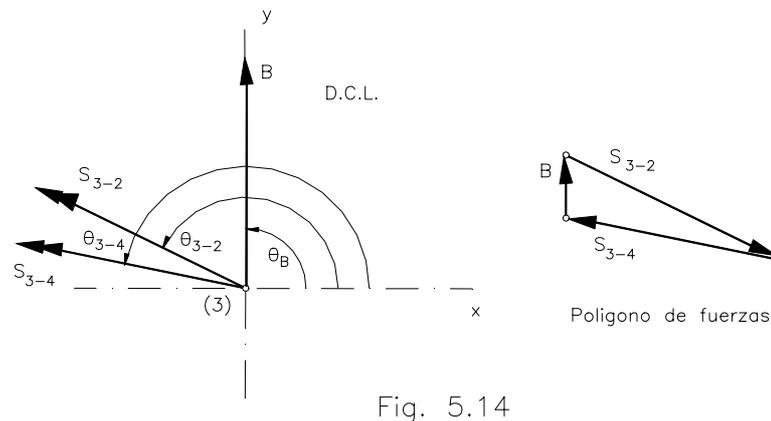


Fig. 5.14

$$\begin{aligned} \sum X &= B \cos\theta_B + S_{3-2} \cos\theta_{3-2} + S_{3-4} \cos\theta_{3-4} = 0 \\ \sum Y &= B \text{sen}\theta_B + S_{3-2} \text{sen}\theta_{3-2} + S_{3-4} \text{sen}\theta_{3-4} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 4,523 \cos 90^\circ + S_{3-2} \cos 154,99^\circ + S_{3-4} \cos 170,02^\circ = 0 \\ \sum Y &= 4,523 \text{sen} 90^\circ + S_{3-2} \text{sen} 154,99^\circ + S_{3-4} \text{sen} 170,02^\circ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - 0,9062 S_{3-2} - 0,98487 S_{3-4} &= 0 \\ 0,42278 S_{3-2} + 0,1733 S_{3-4} &= - 4,523 \end{aligned}$$



Resolviendo, obtenemos: $S_{3,2} = -17,177 \text{ kN}$ y $S_{3,4} = 15,805 \text{ kN}$.- Observamos que el primer valor verifica el obtenido en el nudo (2), y el segundo coincide con $S_{1,4}$.-

Nudo (4).- Figura 5.15

Datos: $F_2 = 3,0 \text{ kN}$; $S_{4,3} = 15,805 \text{ kN}$; $\theta_2 = 270^\circ$; $\theta_{4,3} = 350,02^\circ$; $\theta_{4,2} = 90^\circ$; $\theta_{4,1} = 189,98^\circ$.-

Incógnitas: $S_{4,2}$; $S_{4,1}$.-

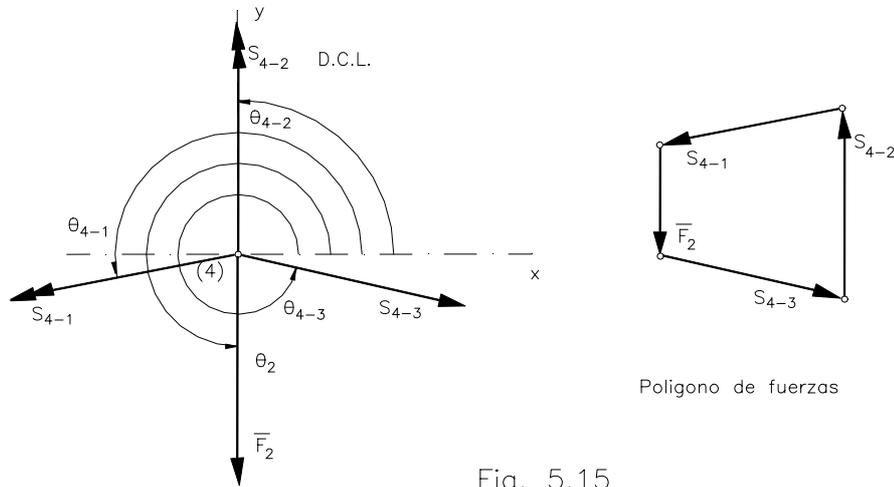


Fig. 5.15

$$\sum X = S_{4,2} \cos\theta_{4,2} + S_{4,1} \cos\theta_{4,1} + F_2 \cos\theta_2 + S_{4,3} \cos\theta_{4,3} = 0$$

$$\sum Y = S_{4,2} \sen\theta_{4,2} + S_{4,1} \sen\theta_{4,1} + F_2 \sen\theta_2 + S_{4,3} \sen\theta_{4,3} = 0$$

$$\sum X = S_{4,2} \cos 90^\circ + S_{4,1} \cos 189,98^\circ + 3,0 \cos 270^\circ + S_{4,3} \cos 350,02^\circ = 0$$

$$\sum Y = S_{4,2} \sen 90^\circ + S_{4,1} \sen 189,98^\circ + 3,0 \sen 270^\circ + S_{4,3} \sen 350,02^\circ = 0$$

$$-0,98487 S_{4,1} + 15,56587 = 0 \quad \therefore S_{4,1} = 15,805 \text{ kN}$$

$$S_{4,2} - 2,733 - 3 - 2,739 = 0 \quad \therefore S_{4,2} = 8,478 \text{ kN}$$

Estos valores son coincidentes con los obtenidos al resolver los nudos (1) y (2).-

Se destaca que inicialmente se determinaron las reacciones externas en base a tres ecuaciones de equilibrio de toda la estructura que, adicionadas a las 2v ecuaciones de equilibrio de los nudos, nos dan 2v + 3 ecuaciones empleadas.- De ellas 2v son independientes y tres de uso alternativo (el equilibrio de todos los nudos implica necesariamente el equilibrio del conjunto), pudiéndose emplear indistintamente unas u otras al cálculo de incógnitas o a verificación de resultados.- Anterior e independientemente del control final se han verificado los valores de las reacciones externas tomando momento de todas las fuerzas externas respecto al nudo (2), con el objeto de basar el cálculo de los nudos en valores verificados.- Se podría haber prescindido de esto remitiéndose a la verificación final bajo el riesgo de mayor laboriosidad del cálculo corrector en caso de incurrir en algún error numérico u operativo.-

5.4.2.- PROCEDIMIENTO GRÁFICO.-

Junto a los diagramas de cuerpo libre efectuados para los diversos nudos de la estructura, se ha construido el correspondiente polígono de fuerzas en equilibrio que permiten establecer los valores de las incógnitas en forma gráfica.- Es posible reunir en una figura única los polígonos de equilibrio de todos los nudos de la estructura y resulta ser un diagrama recíproco de la misma que se lo llama **diagrama de Cremona o de Maxwell**.- Dadas la simplificación de las operaciones de cálculo brindada por las calculadoras modernas, las posibilidades de programar para computación el procedimiento analítico desarrollado en el apartado anterior y su mayor precisión, el diagrama de Cremona ha quedado prácticamente en desuso en el orden profesional.- Con el objeto de no recargar de conocimientos al alumno, omitimos su desarrollo.- Quien se interesase en él puede obtenerlo en cualquier texto tradicional de estática.-

5.5.- MÉTODO DE LAS SECCIONES.-

Sea la armadura de la figura 5.16(a), consistente en un reticulado tipo Warren con montantes, de tablero inferior y cordón superior parabólico.- Conocidas las fuerzas exteriores activas y reactivas que inciden en ella, los esfuerzos en las barras pueden ponerse en evidencia practicando un corte transversal a la estructura según una sección n-n que la divide en dos partes separables, figura 5.16(b).-

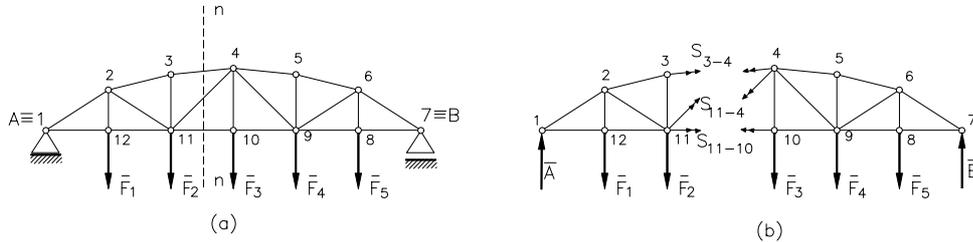


Fig. 5.16

Una cualquiera de las dos partes, la izquierda por ejemplo, está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas aplicadas a ella y de los esfuerzos que la parte derecha le transmita a lo largo de las barras cortadas.- En otras palabras, los esfuerzos en estas barras deben equilibrar a las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección de corte.- El problema es determinado si el corte afecta a no más de tres barras no concurrentes a un punto, ya que estamos en presencia de un sistema plano de fuerzas no concurrentes para cuyo equilibrio disponemos de tres ecuaciones independientes:

$$\sum X = 0 \quad ; \quad \sum Y = 0 \quad ; \quad \sum M_O = 0$$

y sus alternativas vistas en el apartado 2.7.2.- Se puede por lo tanto determinar sólo tres incógnitas y verificar los valores obtenidos.-

5.5.1.- PROCEDIMIENTO CULMANN.-

Efectuando un corte por la sección n-n que intercepte a tres barras, 3-4, 11-4, 11-10 no concurrentes, se puede determinar el esfuerzo en las tres barras por el procedimiento graficado en la figura 5.17.- En ella se ha comenzado construyendo el polígono de fuerzas y el funicular de las cargas, determinando las reacciones de apoyo y ubicando la recta de acción de \bar{R}_i (resultante de todas las fuerzas actuantes a la izquierda del corte : \bar{A} , \bar{F}_1 , \bar{F}_2) en la intersección H de los lados extremos del polígono funicular de

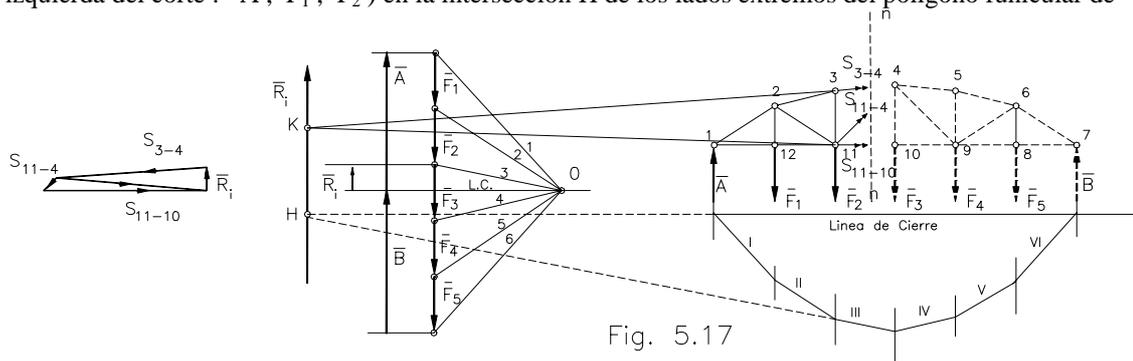


Fig. 5.17

estas tres fuerzas.- Se prolonga la recta de acción de \bar{S}_{3-4} hasta cortar \bar{R}_i en el punto K.- Unido K con el nudo (11) (intersección de \bar{S}_{11-4} y \bar{S}_{11-10}) se tiene la recta auxiliar de Culmann.- Se equilibra luego \bar{R}_i según las direcciones de la barra 3-4 y de la recta auxiliar: la equilibrante según esta última dirección se descompone según las direcciones de las barras 11-4 y 11-10.-

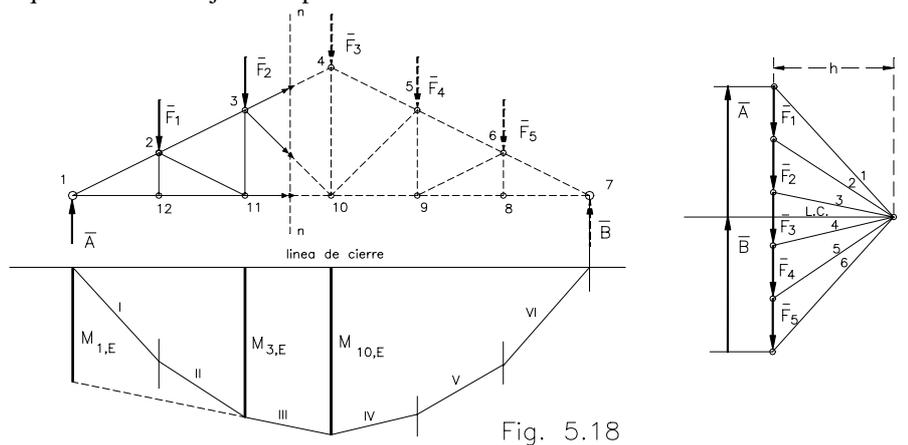
Obsérvese que las fuerzas \bar{R}_i , \bar{S}_{3-4} , \bar{S}_{11-4} , \bar{S}_{11-10} forman un polígono cerrado; estos sentidos se vuelcan a las respectivas barras resultando comprimidas 3-4 y 11-4, y traccionada 11-10.-

5.5.2.- PROCEDIMIENTO RITTER.-



Por encontrarse en equilibrio la parte de la estructura situada a la izquierda (o a la derecha) del corte, la suma del momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre dicha parte con respecto a un punto O cualquiera del plano, que llamaremos $M_{O E}$ (momento respecto a O de fuerzas exteriores), más el momento de las fuerzas interiores (esfuerzos en las barras) respecto al mismo centro, $M_{O I}$, debe ser nula.- Se adoptan las siguientes pautas:

- Preferentemente se toma como centro de momentos el punto de intersección de dos de las barras seccionadas, con lo que queda planteada una ecuación de una sola incógnita.-
- Se toman como positivos los momentos horarios.-
- Se supone de tracción el esfuerzo de las barras, se indica con doble flecha y si el resultado es negativo significa que la barra trabaja a compresión.-



Sea la armadura de la figura 5.18.- Se desea determinar por el procedimiento de Ritter, los esfuerzos en las barras 3-4, 3-10, 11-10, interceptadas por un corte practicado según la sección n-n.- Tomando sucesivamente momentos respecto a los nudos (10), (1) y (3), intersecciones de las barras cuyos esfuerzos se buscan, se tiene:

$$\sum M_{10} = 0 \rightarrow M_{10E} + S_{3-4} D_{10(3-4)} = 0 \quad \therefore S_{3-4} = - (M_{10E}) / (D_{10(3-4)})$$

en donde M_{10E} es el momento de las fuerzas exteriores actuantes a la izquierda del corte respecto al nudo (10); S_{3-4} es el esfuerzo en la barra 3-4; $D_{10(3-4)}$ es la distancia ortogonal del nudo (10) a la barra 3-4.- La barra 3-4 trabaja a compresión, ya que, al ser positivo el momento de las fuerzas exteriores respecto a (10) subsiste el signo menos de la ecuación.-

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow M_{1E} + S_{3-10} D_{1(3-10)} = 0 \quad \therefore S_{3-10} = - (M_{1E}) / (D_{1(3-10)})$$

La barra 3-10 trabaja a compresión por cuanto $M_{1E} > 0$.-

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow M_{3E} - S_{11-10} D_{3(11-10)} = 0 \quad \therefore S_{11-10} = (M_{3E}) / (D_{3(11-10)})$$

La barra 11-10 trabaja a tracción.-

Frecuentemente los momentos de las fuerzas exteriores conviene determinarlos analíticamente como suma de los momentos de todas las fuerzas situadas a la izquierda del corte, consideradas una a una separadamente.-

Si las fuerzas externas, activas y reactivas, son paralelas resulta simple determinar el momento de las fuerzas exteriores mediante un polígono funicular.- De acuerdo a lo visto en el apartado 2.8.4, el momento de las fuerzas externas izquierdas es proporcional al segmento de recta paralela a las fuerzas pasantes por el centro de momentos correspondiente, determinado por los lados extremos del funicular de las fuerzas situadas a la izquierda del corte.- En el gráfico se han demarcado los segmentos proporcionales a M_{1E} , M_{3E} y M_{10E} .-

Si se trata de una armadura de cordones paralelos, figura 5.19, practicando el corte n-n se tendrá:

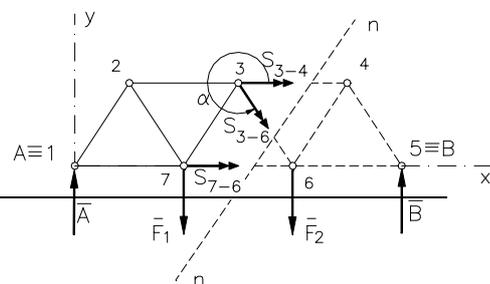


Fig. 5.19



$$\sum M_6 = 0 \rightarrow M_{6E} + S_{3-4} D_{6(3-4)} = 0 \quad \therefore \\ S_{3-4} = - (M_{6E}) / (D_{6(3-4)})$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow M_{3E} - S_{7-6} D_{3(7-6)} = 0 \quad \therefore \\ S_{7-6} = (M_{3E}) / (D_{3(7-6)})$$

Resulta S_{3-4} compresión; S_{7-6} tracción.-

Las barras 3-4 y 7-6 se interceptan en un punto impropio por lo que no se puede aplicar una tercer ecuación de Ritter para determinar el esfuerzo en la barra 3-6.- En este caso se puede recurrir a cualquiera de las siguientes soluciones:

a) Tomar momentos con respecto a un centro cualquiera utilizando los resultados obtenidos para S_{3-4} o S_{7-6} :

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow M_{2E} - S_{7-6} D_{2(7-6)} + S_{3-6} D_{2(3-6)} = 0 \quad \therefore \\ S_{3-6} = (-M_{2E} + S_{7-6} D_{2(7-6)}) / (D_{2(3-6)})$$

El sentido del momento de S_{7-6} surge del sentido obtenido para el esfuerzo y no del supuesto.-

b) Aplicar la condición $\sum Y = 0$ extendida a todas las fuerzas situadas a la izquierda del corte.- Esta ecuación resulta muy práctica si se toma el eje "y" normal a los cordones.-

$$\sum Y = 0 \rightarrow A - F_1 + S_{3-6} \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \therefore \quad S_{3-6} = - (A - F_1) / \operatorname{sen}\alpha$$

S_{3-6} se ha supuesto de tracción.- El resultado numérico determina el tipo de esfuerzo a que está sometida la barra: en el supuesto que $A - F_1 > 0$ y siendo $\operatorname{sen}\alpha < 0$ por estar en el cuarto cuadrante, resulta $S_{3-6} > 0$.-

c) También resulta práctica la ecuación $\sum X = 0$ si las fuerzas exteriores son verticales:

$$-S_{3-4} + S_{7-6} + S_{3-6} \operatorname{cos}\alpha = 0 \quad \therefore \quad S_{3-6} = (S_{3-4} - S_{7-6}) / \operatorname{cos}\alpha$$

S_{3-4} y S_{7-6} se introducen con los sentidos obtenidos y no los supuestos.- S_{3-6} se supone de tracción quedando el sentido del esfuerzo supeditado al cálculo numérico.-

5.6.- APLICABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE LOS NUDOS Y DE LAS SECCIONES.-

Para aplicar el método de los nudos es necesario que exista un nudo al que concurren sólo dos barras y que, en el estudio del equilibrio de los otros nudos de la estructura se pueda adoptar una secuencia tal que en cada uno de ellos haya nada más que dos barras cuyos esfuerzos se desconoce.- Esto sucede cuando se está calculando reticulados simples y, en tal caso, el método de los nudos resulta el más conveniente cuando se debe calcular el esfuerzo en todas sus barras.- Si en cambio sólo se necesita establecer esfuerzos en un número pequeño de barras es práctico el empleo de las ecuaciones de Ritter.-

Si se trata de reticulados compuestos, como los de la figura 5.20, al comenzar el cálculo en el nudo (1) del reticulado de la izquierda, o al llegar al (3) o al (12) en el Polonceau compuesto de la derecha, se encuentran tres esfuerzos desconocidos no pudiéndose proseguir aplicando el método de los nudos.- En estas condiciones basta con aplicar una ecuación de Ritter en las secciones indicadas, para después iniciar o continuar con el método de los nudos.-

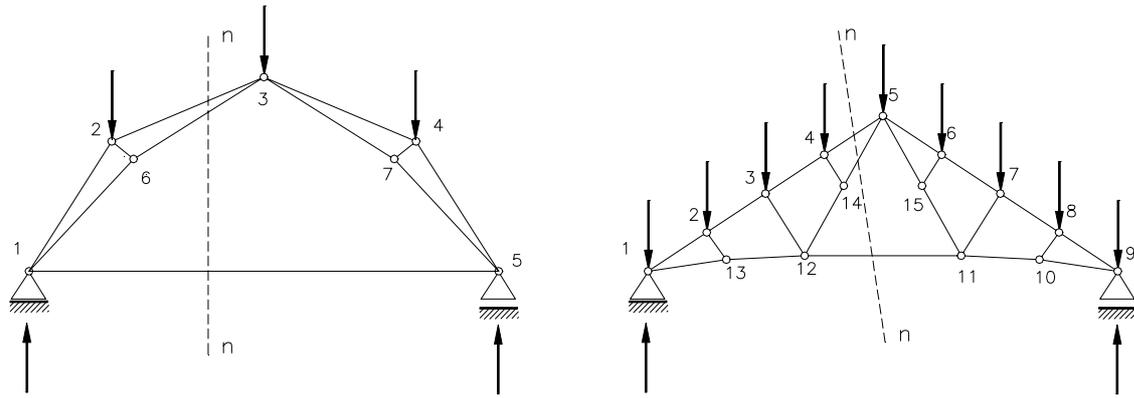


Fig. 5.20

Sin embargo, hay estructuras parcialmente formadas por reticulados complejos, que no se pueden analizar totalmente por ninguno de los dos métodos vistos.- En estos casos se recurre a métodos especiales que veremos a continuación.-

5.7.- MÉTODO DE LA DOBLE SECCIÓN DE RITTER.-

Sea la armadura de la figura 5.21 en la que, el área delimitada por los nudos (3) (4) (5) (9) (10) (11) constituye un reticulado complejo.- Las retículas situadas a izquierda y derecha del hexágono indicado se pueden resolver por el método de los nudos.-

Pero el reticulado central no es abordable por este método por cuanto no hay nudo con sólo dos esfuerzos desconocidos; tampoco puede resolverse con una sección de Ritter ya que cualquier corte que se practique intercepta más de tres barras y sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio.-

Sin embargo, si se efectúan dos cortes, n-n y m-m, tales que ambos seccionen dos barras comunes (3-9 y 11-5), se pueden plantear dos ecuaciones que nos resuelven el problema.-

Se considera primero la parte de la estructura situada a la izquierda del corte n-n.- Se ponen en evidencia los esfuerzos en las barras 3-4, 3-9, 11-5, y 11-10, supuestas traccionadas, y se toma como centro de momento la intersección de las barras 3-4 y 11-10 no comunes a ambos cortes.- Se tiene:

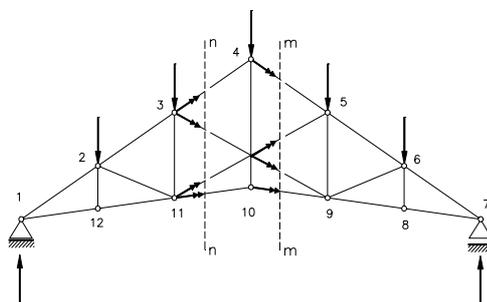


Fig. 5.21

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_{1E} + S_{3-9}D_{1(3-9)} - S_{11-5}D_{1(11-5)} = 0 \quad (a)$$

Se considera luego la parte de la estructura situada a la izquierda del corte m-m; se pone en evidencia los esfuerzos en las barras seccionadas suponiéndolas traccionadas y se toma momento respecto al punto de intersección de las barras no comunes.- Se tiene:

$$\sum M_7 = 0 \Rightarrow M_{7E} + S_{11-5}D_{7(11-5)} - S_{3-9}D_{7(3-9)} = 0 \quad (b)$$

Las ecuaciones (a) y (b) permiten determinar los esfuerzos S_{3-9} y S_{11-5} .- Esto posibilita completar el cálculo del resto de la estructura por el método de los nudos.-

5-8.- MÉTODO DE HENNEBERG.-

El siguiente procedimiento, ideado por Henneberg, es de uso general y sirve para analizar estructuras que no presentan nudos con sólo dos barras concurrentes, ni sección en la que se corten nada más que tres.- Es conocido también como método del reticulado sustituto.-

Sea el mismo reticulado complejo hexagonal del párrafo anterior sometido a las fuerzas exteriores \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 , \bar{F}_4 , \bar{F}_5 en equilibrio.- Esta sollicitación origina en las barras esfuerzos internos que designamos en forma genérica S_{i-j} donde “i” y “j” son las denominaciones de los nudos extremos de la barra considerada.- En particular en la barra 2-3 se originará un esfuerzo S_{2-3} cuya intensidad no conocemos y llamaremos X , figura 5.22.-

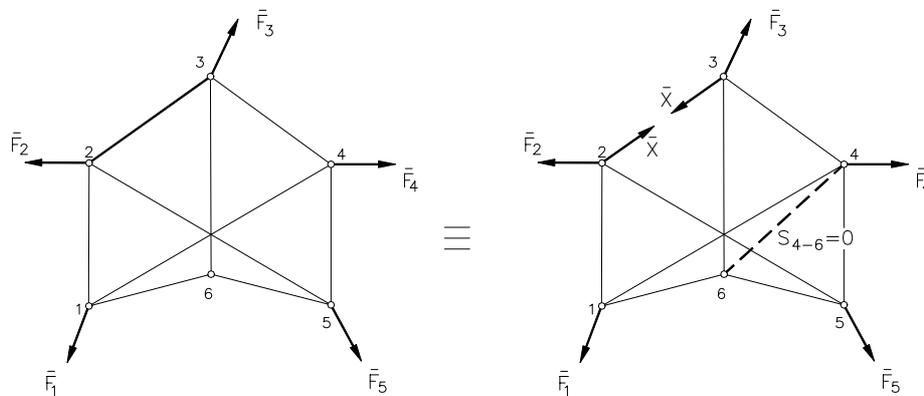


Fig. 5.22

Si se suprime la barra 2-3 queda formado un reticulado inestable; sin embargo, aplicando en los nudos (2) y (3) las fuerzas X , iguales y opuestas, el sistema se mantendrá en equilibrio por ser iguales al esfuerzo en la barra suprimida.-

Si a este reticulado inestable le agregamos una barra ficticia, 4-6 por ejemplo, adecuadamente ubicada para formar un reticulado rígido susceptible de resolución por el método de los nudos, tendremos un **reticulado sustituto** cuya barra 4-6 no trabaja bajo la acción simultánea de las fuerzas exteriores (en equilibrio) y el esfuerzo X de la barra suprimida.- O sea que bajo el estado de cargas expresado el esfuerzo $S_{4-6} = 0$.-

Si se considera ahora al reticulado sustituto cargado solamente con las fuerzas exteriores, figura 5.23.(a), en sus barras se generan fuerzas internas que designaremos S_{ij}^0 cuyas intensidades se calculan por el método de los nudos.- En particular la barra ficticia 4-6 soporta un esfuerzo de intensidad S_{4-6}^0 .-

Se carga luego, figura 5.23.(b), el reticulado sustituto sólo con dos fuerzas unitarias iguales y opuestas de intensidad $U = 1$, aplicadas en los nudos (2) y (3) de dirección coincidente con la incógnita.- Se calculan los esfuerzos en las barras que se designan S_{ij}^1 ; en particular la barra ficticia soporta el esfuerzo S_{4-6}^1 .- Si en lugar de las fuerzas $U = 1$ actuasen las fuerzas X , los esfuerzos en las barras valdrían $X S_{i-j}^1$.-

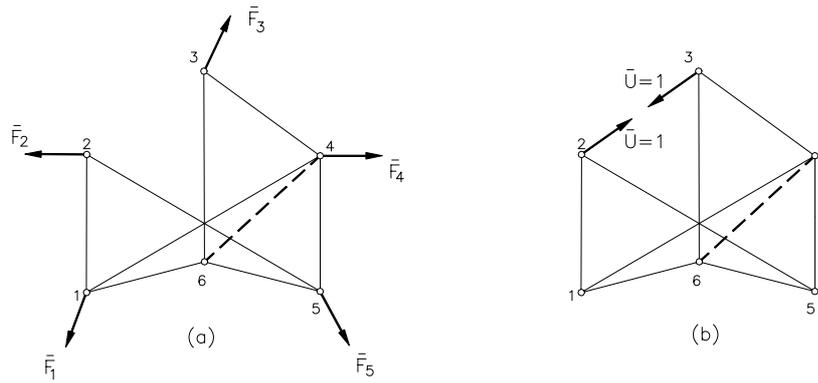


Fig. 5.23

Por el principio de independencia de las acciones y superposición de los efectos, los esfuerzos que en las barras del reticulado sustituto originan las fuerzas exteriores y las fuerzas incógnitas actuando simultáneamente, son iguales a la suma de los esfuerzos que originan las fuerzas exteriores más los que originan las fuerzas incógnitas actuando separadamente, figura 5.24.- Analíticamente se tiene:

$$S_{i-j} = S_{i-j}^0 + X S_{i-j}^1 \quad (a)$$

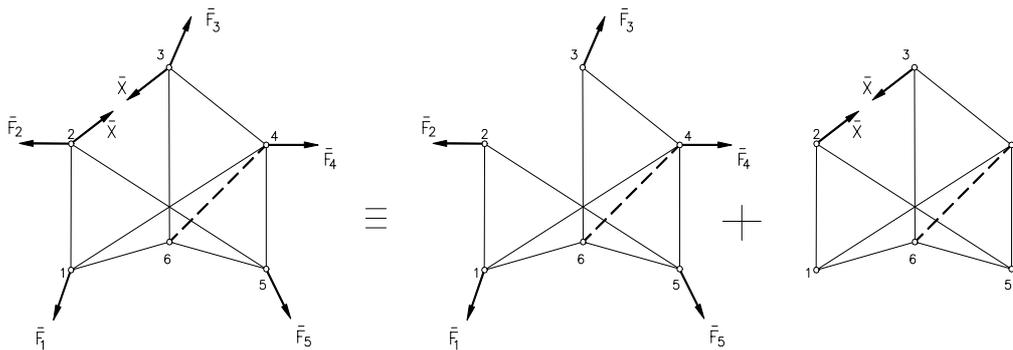


Fig. 5.24

Para la barra ficticia 4-6, por lo expresado anteriormente, se tiene:

$$S_{4-6} = S_{4-6}^0 + X S_{4-6}^1 = 0 \quad \therefore \quad X = -S_{4-6}^0 / S_{4-6}^1 \quad (b)$$

Obtenido el valor de la incógnita con la ecuación (b) e introducido en la ecuación (a) correspondiente a cada una de las otras barras queda resuelto el problema.-

En síntesis el método consiste en los siguientes pasos:

- Se analiza el reticulado original determinando cual barra se transporta y cuál es la posición más adecuada de la barra ficticia.-
- Se calculan los esfuerzos en las barras del reticulado sustituto para los siguientes estados de cargas: a) la totalidad de las fuerzas exteriores activas y reactivas y b) dos fuerzas unitarias U=1 opuestas, de la dirección de la barra suprimida y actuando en sus nudos extremos.-
- Por la expresión (b) se obtiene el esfuerzo en la barra suprimida como cociente, cambiado de signo, entre los esfuerzos que en la barra ficticia del reticulado sustituto originan las fuerzas externas por una parte y las fuerzas U=1 por la otra.-

Mediante la ecuación (a), superposición de efectos, se obtiene el esfuerzo en cada una de las barras restantes.-

5.9.- RETICULADOS FORMADOS POR DOS O MÁS CHAPAS.-

Algunas estructuras reticulares están constituidas por dos o más armaduras simples, articuladas entre sí, formando una cadena cinemática abierta o cerrada, como se puede observar en las figuras 5.25 y 5.26, a las que se ha agregado el número de vínculos externos necesarios (cuatro en ambos casos) para obtener un sistema estable.- Recordemos que el número de grados de libertad de las cadenas cinemáticas está dado por las expresiones $g = 2n + 2$, para las abiertas y $g = n$, para las cerradas.- La estructura no cumple la condición de rigidez $b = 2v - 3$; el número de barras faltantes debe ser sustituido por igual número de vínculos a tierra: en los casos indicados se necesitan cuatro vínculos a tierra en lugar de tres que requeriría si la estructura fuese rígida.-

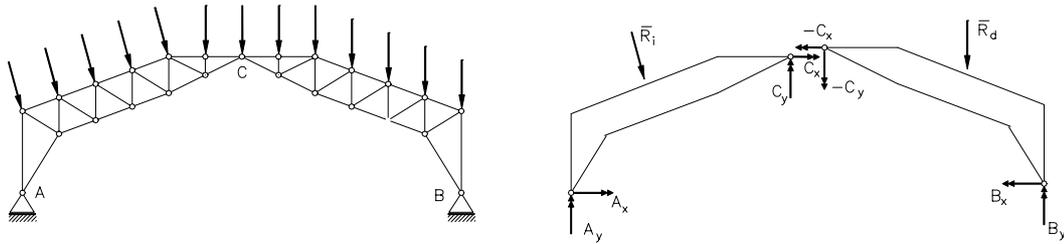


Fig. 5.25

En el apartado 3.2.1 se ha visto como se determinan las reacciones, externas a tierra e internas entre chapas, en los sistemas vinculados planos formados en base a cadenas cinemáticas abiertas.- Conocidas estas reacciones, el cálculo de los esfuerzos en las barras se realiza separadamente para cada una de las armaduras por los métodos que hemos visto en los apartados precedentes.-

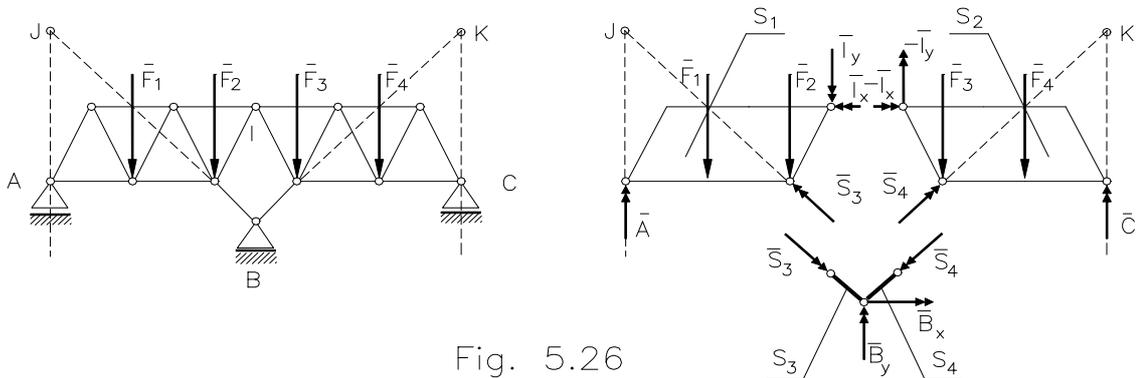


Fig. 5.26

Pasemos a ver el sistema reticulado de la figura 5.26 que está formado en base a una cadena cinemática cerrada de cuatro chapas: dos armaduras arriba y dos bielas abajo.- Se trazan separadamente los diagramas de cuerpo libre (D.C.L.) de cada una de las dos armaduras o chapas cuyos perfiles se han demarcado y de la articulación en el apoyo B.- Analizando se tiene:

Incógnitas:

ocho (8), de las cuales cuatro corresponden a apoyos externos (A,C,B_x,B_y), y cuatro a vínculos internos (I_x,I_y,S₃,S₄)

Ecuaciones:

ocho (8), tres en cada una de las armaduras o chapas superiores (6 ecuaciones) y dos en la articulación del apoyo B (2 ecuaciones): El sistema es por lo tanto isostático.-

Determinación de reacciones:

Del D.C.L. de la chapa superior izquierda: $\sum M_J = 0$

Del D.C.L. de la chapa superior derecha: $\sum M_K = 0$

En este sistema de dos ecuaciones lineales aparecen como incógnitas comunes I_x e I_y cuyos valores se obtienen de la resolución del mismo.- Se prosigue el cálculo utilizando los resultados obtenidos:



Del D.C.L. de la chapa superior izquierda : $\sum M_A = 0$; despejando se determina S_3 .-
 $\sum M_I = 0$; despejando se determina A .-

Del D.C.L. de la chapa superior derecha : $\sum M_C = 0$; despejando se determina S_4 .-
 $\sum M_I = 0$; despejando se determina C .-

Del D.C.L. de la articulación B : $\sum X = 0$; despejando se determina B_x .-
 $\sum Y = 0$; despejando se determina B_y .-

Para comprobar los resultados se pueden utilizar las ecuaciones de equilibrio correspondientes al D.C.L. de toda la estructura.- Calculadas las reacciones externas a tierra e internas en la articulación entre las dos chapas superiores se finaliza determinando separadamente los esfuerzos en las barras de las armaduras componentes (triangulados simples) por el método de los nudos o, si se prefiere, de las secciones.-

5.10.- RETICULADOS ESPACIALES.-

Son aquéllos cuyas barras no están contenidas en un plano y tienen capacidad para soportar fuerzas dirigidas en cualquier dirección del espacio.- Se presentan en grúas, cúpulas reticulares, agujas, etc... .-

Las hipótesis simplificativas que se formulan para determinar los esfuerzos que se originan en sus barras al ser solicitada la estructura por un sistema de fuerzas dado, son las mismas que se formularon para reticulados planos, a saber: nudos articulados sin rozamiento y fuerzas aplicadas en los nudos.-

Por su proceso de generación los reticulados espaciales se clasifican en simples, compuestos y complejos.-

5.10.1.- RETICULADOS ESPACIALES SIMPLES.-

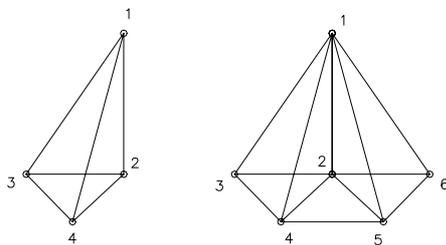


Fig. 5.27

Tres barras rígidas articuladas entre sí formando un triángulo 1.2.3, constituyen un conjunto plano indeformable, figura 5.27.- Si en los tres nudos articulamos tres nuevas barras no coplanares que, a su vez, se articulan entre sí formando un nuevo nudo 4, éste quedará rígidamente vinculado a los otros tres y el tetraedro obtenido se comportará como un cuerpo rígido.- Tendrá en consecuencia seis grados de libertad en el espacio.-

Si en tres nudos del tetraedro, 1.2.4, articulamos tres nuevas barras no coplanares que articuladas entre sí forman un nuevo nudo (5), se obtiene un poliedro también rígido y con seis grados de libertad.- La estructura que se engendra se llama **armadura (o genéricamente reticulado) espacial simple**.-

Llamando “b” el número de barras; “v” el de vértices, y “n” el de grupos de tres barras que se van agregando, se tiene:

$$b = 6 + 3n$$

$$v = 4 + n$$

Despejando “n” de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, resulta:

$$b = 6 + 3(v - 4) = 3v - 6 = \mathbf{b}$$

Esta ecuación expresa la condición de rigidez del reticulado en base a la relación que debe existir entre la cantidad de barras y de nudo que posee.- **Si el reticulado espacial es simple esta condición es necesaria y suficiente**.- Para fijarlo a tierra debemos colocarle tantos vínculos simples μ como grados de libertad posea, es decir seis.-



El sistema reticular espacial simple caracterizado por $b = 3v - 6$ y por $\mu = 6$, constituye un sistema estáticamente determinado.- Efectivamente el número de incógnitas que se presentan en el sistema es:

$$I = b + \mu = 3v - 6 + 6 = 3v$$

Si se separa un nudo, cortando las barras que lo vinculan al resto del sistema reticular, y se aplican las fuerzas externas que en él actúan y los esfuerzos internos correspondientes a las barras seccionadas, se estará ante un sistema de fuerzas espaciales concurrentes a un nudo que, por encontrarse en equilibrio, cumplirá las tres siguientes condiciones:

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum Z = 0$$

Para el total de los nudos se dispondrá de $E = 3v$ ecuaciones de equilibrio, que es igual al de incógnitas.- Se puede por lo tanto plantear un sistema de $3v$ ecuaciones que permite determinar las incógnitas.- Dado el elevado número de ecuaciones que resultan en las estructuras reales, se prefiere recurrir al método de los nudos resolviendo nudo a nudo en forma similar al expuesto para los sistemas planos.-

Se comienza fijando una terna de ejes ortogonales al cual se refieren los nudos y los puntos de aplicación de las cargas, estableciendo sus coordenadas.- Con ellas se calculan los cosenos directores de todas las barras y rectas de acción de las fueras externas, activas y reactivas; estas últimas quedan fijadas por el tipo de vínculos que enlazan la estructura a tierra.-

En un segundo paso, se determinan las seis componentes rectangulares de las reacciones externas utilizando las seis ecuaciones generales de equilibrio de la estructura total, en la forma vista en el apartado 3.3.3.-

Se inicia el cálculo de las fuerzas internas en las barras en un nudo al cual concurren sólo tres barras empleando las tres ecuaciones de equilibrio del nudo expuestas más arriba, o alguna ecuación alternativa si fuese el caso.- Conviene suponer las barras traccionadas en forma similar a la aplicada en los reticulados planos.- Se prosigue con nudos (preferentemente adyacentes) en los que sólo se desconozca el esfuerzo en tres barras utilizando los resultados obtenidos en el paso anterior.- Prosiguiendo en esta forma se resuelven todos los nudos del reticulado.-

Al finalizar esta secuencia de cálculo, se dispone de seis ecuaciones verificadoras ya que se ha utilizado las seis ecuaciones de equilibrio general para la determinación de las reacciones externas.- Con independencia de este proceso, se pueden efectuar verificaciones en cualquier etapa del desarrollo del cálculo recurriendo a ecuaciones de momento con respecto a puntos del espacio convenientemente adoptados y a las cuales no se haya empleado anteriormente.-

5.10.2.- RETICULADOS ESPACIALES COMPUESTOS.-

Otro modo de engendrar estructuras reticulares en el espacio consiste en unir entre sí, mediante seis barras cinemáticamente eficientes, dos armaduras simples de modo que se forme un único **reticulado compuesto**.- Para que la disposición de las seis barras de unión sea eficiente no debe existir recta alguna que intercepte a las seis según se vió en el apartado 3.3.2.-

La figura 5.28 representa dos estructuras en forma de tetraedro unidas por las barras 2-5, 2-7, 3-5, 3-6, 4-6, 4-7.- Para las estructuras compuestas es válida la condición de rigidez dada por la expresión que relaciona el número de barras con el de nudos: $b = 3v - 6$.- Efectivamente para cada uno de los reticulados simples componentes se tiene:

$$b_1 = 3v_1 - 6 \quad \text{y} \quad b_2 = 3v_2 - 6 \quad ; \quad \text{sumando resulta} \quad b_1 + b_2 = 3(v_1 + v_2) - 12$$

Añadiendo las seis barras de enlace, el número de barras del reticulado compuesto es:

$$b = b_1 + b_2 + 6 = 3(v_1 + v_2) - 6 = 3v - 6$$

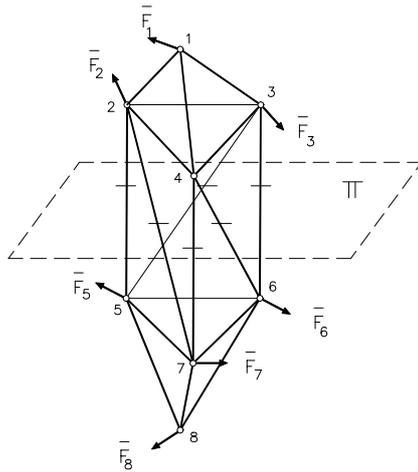


Fig. 5.28

A diferencia de las estructuras simples, las compuestas pueden no tener nudo alguno en el que concurren sólo tres barras y, por consiguiente, no permitir el comienzo del cálculo mediante el equilibrio de los nudos o bien, teniéndolo, pueden no permitir la prosecución del cálculo si en algún nudo subsiguiente se tienen cuatro esfuerzos desconocidos en lugar de tres.- En la figura 5.28 se presenta un ejemplo de este caso.- El cálculo de los esfuerzos puede comenzarse por el nudo 1 o el 8 en los que sólo concurren tres barras, pero no se puede continuar ya que se presentan cuatro incógnitas en todos los nudos.-

Se resuelve esta situación recurriendo al método de las secciones, para lo cual se corta la estructura en dos partes con un plano π que no corte más de seis barras.- Se

considera el equilibrio de una de las partes de la estructura en la cual se ponen en evidencia los esfuerzos en las barras seccionadas que se suponen traccionadas.- Se tiene a disposición un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que resuelven el problema.-

Si no se deseara encarar la resolución de este sistema de ecuaciones, o se necesitase solamente el esfuerzo en algunas de las barras de enlace se puede proceder de la siguiente forma:

Por equilibrio del nudo 1 se determinan los esfuerzos en las barras 1-2 , 1-3 , 1-4 .- Se desea además conocer los esfuerzos de las barras 2-5 y 2-7.- Se practica un corte de la estructura separando los nudos 1 y 2 del resto de la estructura que secciona las barras 2-5 , 2-7 , 2-4 , 2-3 , 1-4 , 1-3 .- Los esfuerzos en las barras 1-4 y 1-3 se determinaron al resolver el nudo 1, quedando sólo cuatro incógnitas S_{2-5} , S_{2-7} , S_{2-4} , S_{2-3} .-

Se plantean las tres ecuaciones de sumas de componentes de fuerzas y una ecuación de momentos respecto al eje de la barra 4-3 que resuelven el problema ya que se tiene planteado un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum Z = 0 \quad \sum M_{4,3} = 0$$

Se plantea a continuación la última ecuación que establece la nulidad de la suma de momentos respecto al eje de la barra 4-3, con el objeto de ejercitar y aplicar el cálculo vectorial.-

$$\sum M_{4,3} = \bar{\rho}_{4,2} \wedge \bar{F}_2 \times \bar{\gamma}_{4,3} + \bar{\rho}_{4,1} \wedge \bar{F}_1 \times \bar{\gamma}_{4,3} + \bar{\rho}_{4,2} \wedge \bar{S}_{2,5} \times \bar{\gamma}_{4,3} + \bar{\rho}_{4,2} \wedge \bar{S}_{2,7} \times \bar{\gamma}_{4,3} = 0$$

Los esfuerzos en las barras seccionadas 1-3, 2-3, 1-4, y 2-4 no producen momento por cortar al eje 4-3.-

El significado de los símbolos utilizados y su valor en función de componentes rectangulares son:

Vector posición del nudo (2) respecto al (4)

$$\bar{\rho}_{4,2} = (x_2 - x_4) \bar{i} + (y_2 - y_4) \bar{j} + (z_2 - z_4) \bar{k}$$

Fuerza exterior en función de sus componentes rectangulares

$$\bar{F}_2 = F_2 \cos \theta_{2x} \bar{i} + F_2 \cos \theta_{2y} \bar{j} + F_2 \cos \theta_{2z} \bar{k}$$

Esfuerzo en barra 2-5

$$\bar{S}_{2,5} = S_{2,5} \cos \theta_{(2,5)x} \bar{i} + S_{2,5} \cos \theta_{(2,5)y} \bar{j} + S_{2,5} \cos \theta_{(2,5)z} \bar{k}$$

Versor del eje de la barra 4-3



$$\bar{\gamma}_{4-3} = \cos\theta_{(4-3)x} \bar{i} + \cos\theta_{(4-3)y} \bar{j} + \cos\theta_{(4-3)z} \bar{k}$$

Los restantes factores se designan en forma similar.-

Resolviendo la ecuación anterior por determinantes , y utilizando la nomenclatura indicada, se tiene:

$$\sum M_{4-3} = \begin{vmatrix} x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ F_2 \cos\theta_{2x} & F_2 \cos\theta_{2y} & F_2 \cos\theta_{2z} \\ \cos\theta_{(4-3)x} & \cos\theta_{(4-3)y} & \cos\theta_{(4-3)z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ F_1 \cos\theta_{1x} & F_1 \cos\theta_{1y} & F_1 \cos\theta_{1z} \\ \cos\theta_{(4-3)x} & \cos\theta_{(4-3)y} & \cos\theta_{(4-3)z} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ S_{2-5} \cos\theta_{(2-5)x} & S_{2-5} \cos\theta_{(2-5)y} & S_{2-5} \cos\theta_{(2-5)z} \\ \cos\theta_{(4-3)x} & \cos\theta_{(4-3)y} & \cos\theta_{(4-3)z} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ S_{2-7} \cos\theta_{(2-7)x} & S_{2-7} \cos\theta_{(2-7)y} & S_{2-7} \cos\theta_{(2-7)z} \\ \cos\theta_{(4-3)x} & \cos\theta_{(4-3)y} & \cos\theta_{(4-3)z} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollados los determinantes queda una ecuación con dos incógnitas S_{2-5} y S_{2-7} que juntamente con las tres ecuaciones de suma de componentes rectangulares de fuerzas constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con las cuatro incógnitas ya indicadas: S_{2-3} , S_{2-4} , S_{2-5} , S_{2-7} .- Con estos valores se puede proseguir el cálculo de toda la estructura por el método de los nudos.-

5.10.3.- RETICULADOS ESPACIALES COMPLEJOS.-

Se llaman complejas las estructuras reticulares que no están engendradas ni por tetraedros sucesivos ni ligando entre sí dos estructuras simples.- Usualmente pueden considerarse obtenidas de estructuras simples sustituyendo una o varias barras por otras dispuestas de distinto modo.- Así, por ejemplo, el reticulado de la figura 5.29 a) es simple, pudiéndose obtener del triángulo 2-4-5 por adición de los nudos (1) , (3) , (6) mediante tres barras para cada uno.-

De él se obtiene el octaedro de la figura 5.29 b) sustituyendo la barra 2-4 por una nueva barra en la posición 4-6.- Por consiguiente el octaedro es un reticulado complejo.-

El reticulado de la figura 5.30 es también simple pero generado con una variante respecto al proceso de generación explicado anteriormente para los reticulados simples.- El nudo (1) se vincula a tres puntos fijos de tierra, A-B-H, mediante tres barras biarticuladas o bielias no coplanares; el nudo (2) se enlaza al (1) y a dos puntos fijos, B-C, de tierra no coplanares con él.- En igual forma se generan los nudos (3) , (4) , (5) ; el nudo (6) se vincula a dos nudos anteriores, (1) , (5) , y a tierra en H.-

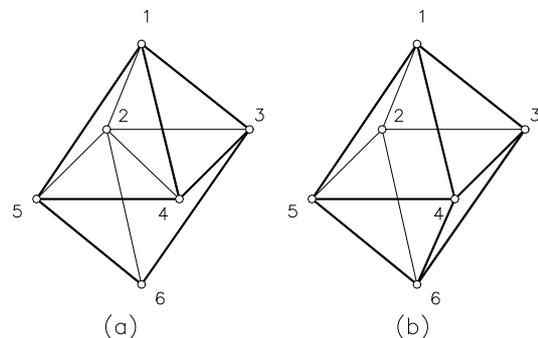


Fig. 5.29

El reticulado formado es rígido y se ha generado como los simples.- La diferencia radica en que los reticulados simples como el de la figura 5.29 (a) es rígido por sus propios vínculos internos (barras) sin



estar enlazado a tierra.- En cambio el de la figura 5.30 requiere de los vínculos externos para ser rígido: eliminado uno o más de ellos, es inestable.-

El número de barras que posee este reticulado, de acuerdo a su proceso de generación , queda dado por la expresión:

$$b = 3v \quad (1)$$

siendo v el número de nudos sin incluir como tales los puntos de vinculación a tierra.- Si designamos como m el número de estos últimos, y ellos consisten en articulaciones esféricas (o sea enlaces de tercera especie) el número μ de vínculos simples externos, será:

$$\mu = 3m \quad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$b + \mu = 3(v+m) = 3v' \quad (3)$$

donde v' es el número de nudos del reticulado incluyendo entre ellos los puntos de vinculación a tierra.-

Si observamos que el número de incógnitas es:

$$I = b + \mu = 3v'$$

y el número de ecuaciones estáticas es:

$$E = 3v'$$

resulta que el sistema reticulado espacial generado por el procedimiento indicado es isostático y puede ser resuelto por el método de los nudos: se parte del (6) y se sigue por el (5), (4), (3), (2), (1) con lo que se obtiene los esfuerzos en las barras; las componentes de las reacciones externas se calculan con las ecuaciones de equilibrio correspondientes a los vínculos a tierra.-

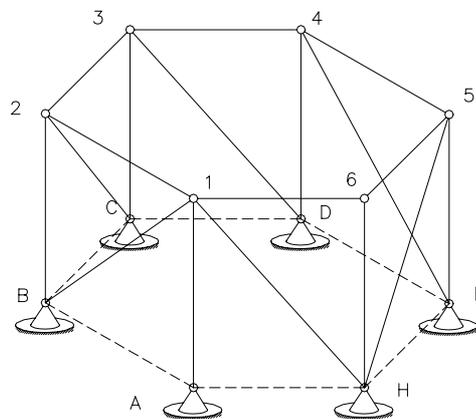


Fig. 5.30

Si ahora, en el reticulado espacial simple de la figura 5.30 sustituimos la barra 1-H por la 6-A se obtiene un reticulado espacial complejo, figura 5-3.- Al realizar la sustitución debe prestarse especial atención para que la barra reemplazante no resulte superabundante en la ubicación que se le asigna en perjuicio de otra parte de la estructura en que habrá insuficiencia de barras.- Por ejemplo, en la figura 5.29 a), sucedería esto si se suprimiese la barra 5-6 y se agregase otra entre (5) y (3), o en la figura 5.30 si se suprimiese la barra 1-H y se añadiese otra entre (2) y (A).-



Se coloca un anillo de barras enlazando los puntos fijos del suelo como se ha indicado en punteado en las figuras 5.30 y 5.31; esto afianza la inmovilidad de los puntos fijos de tierra sin modificar el comportamiento del reticulado.-

Frecuentemente, las estructuras complejas no tienen ningún nudo en el que concurran sólo tres barras que permita comenzar el cálculo, figura 5.31.- Para superar este inconveniente se puede emplear el método de Henneberg.- Se suprime una barra, 6-A por ejemplo, de modo que quede el nudo (6) con sólo tres barras, y se aplica un esfuerzo desconocido X en cada uno de los dos nudos que unía, opuestos y de la dirección que los mismos determinan.-

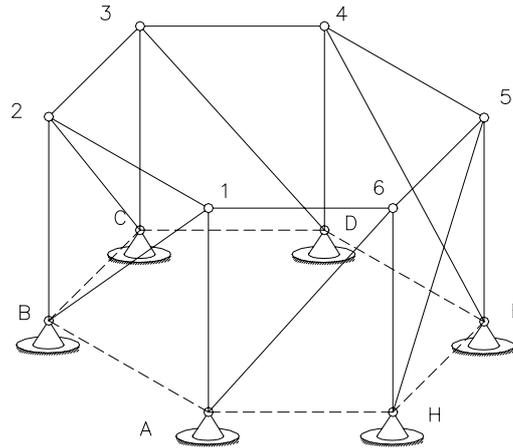


Fig. 5.31

Después se sustituye la barra suprimida por una ficticia, 1-H , dispuesta de modo adecuado para que resulte un reticulado rígido y susceptible de ser resuelto por el método de los nudos.- En el reticulado original, el esfuerzo en una barra ij cualquiera vale:

$$S_{i-j} = S_{i-j}^0 + X S_{i-j}^1$$

en donde: S_{ij}^0 es el esfuerzo originado en el reticulado sustituto por el sistema de fuerzas exteriores solamente; y S_{ij}^1 el esfuerzo en el reticulado sustituto provocado por $U = 1$ de la dirección de la incógnita X.- El valor de ésta es:

$$X = - \frac{S_{1-H}^0}{S_{1-H}^1}$$

ya que el esfuerzo S_{1H} correspondiente a la barra ficticia bajo la sollicitación conjunta de las fuerzas exteriores y de X debe ser nulo.-

En la figura 5.32 se esquematizan algunas estructuras complejas.-

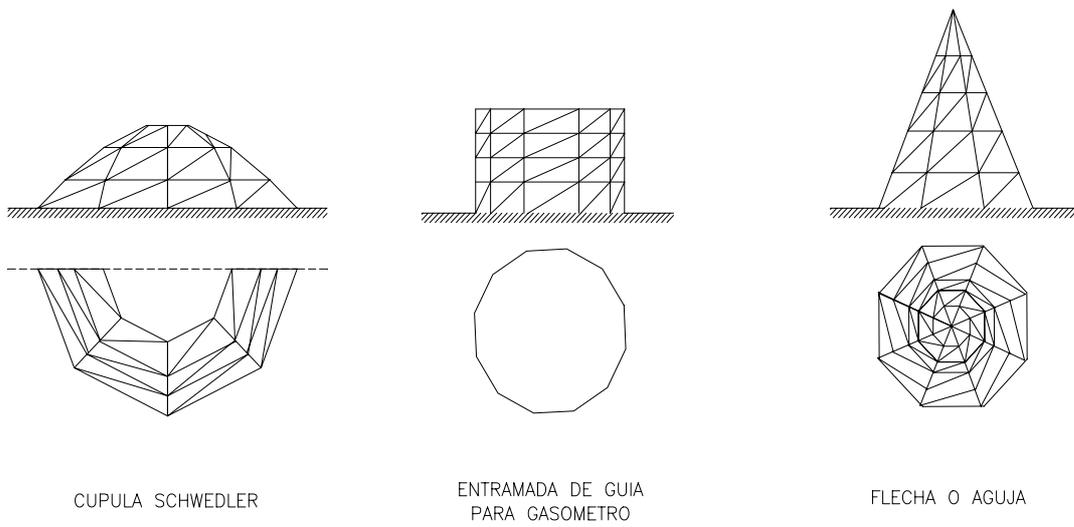


Fig. 5.32