



## CAPITULO 7

### ANÁLISIS DE PÓRTICOS Y ARCOS

#### 7.1.- PÓRTICOS: DEFINICIONES Y FORMAS TÍPICAS.-

Designaremos bajo el nombre de **pórticos de alma llena** a estructuras constituidas por piezas prismáticas, generalmente rectas, que se enlazan entre sí en nudos rígidos.- Los elementos verticales o muy inclinados se llaman **pilares o columnas** y los horizontales o tendidos **vigas o dinteles**.-

Por acción de las cargas los elementos de los pórticos se encuentran solicitados por fuerzas que, en general, originan momento flector, esfuerzo de corte y fuerza axial.-

El eje del pórtico es el lugar geométrico de los baricentros de las sucesivas secciones transversales del mismo.- Los materiales empleados para la construcción de pórticos son el hormigón armado y el acero.-

Los pórticos pueden ser isostáticos o hiperestáticos según que el número de vínculos simples a tierra sea igual o mayor que los grados de libertad que posea; los vínculos superabundantes pueden ser internos o externos.-

Se los distingue además por el número de pilares que lo constituyan: si tiene dos columnas se lo designa **pórtico simple**; si posee tres, cuatro o más será **doble, triple o múltiple en general**.- Pueden también desarrollarse en una sola planta o piso o en varios pisos.-

#### 7.1.1.- PÓRTICOS ISOSTÁTICOS.- (Figura 7.1.)

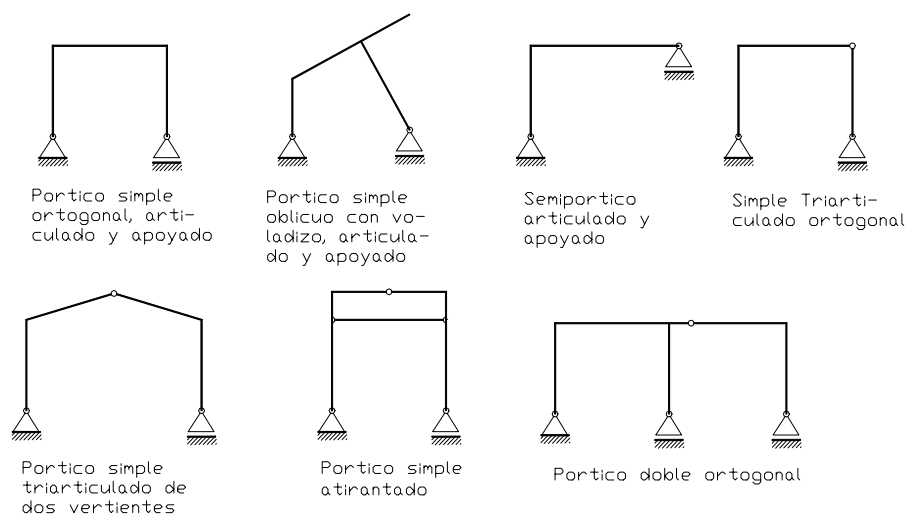


Fig. 7.1



**7.1.2.- PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS.-** (Figura 7.2.)

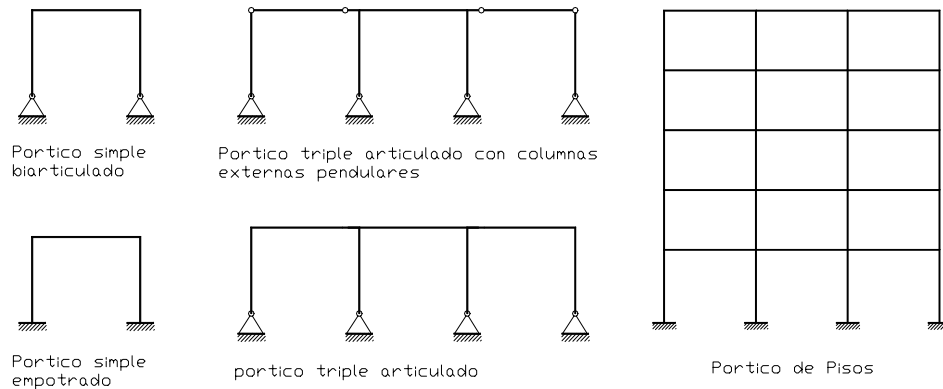


Fig. 7.2

**7.2.- ANÁLISIS DE PÓRTICOS ISOSTÁTICOS DE ALMA LLENA.-**

Consiste en la determinación de las reacciones de vínculos y el trazado de los diagramas de esfuerzos internos.- Se pueden aplicar distintos procedimientos:

- Método grafo-analítico, que consiste en determinar analíticamente los valores de los esfuerzos internos en secciones correspondientes a puntos singulares del pórtico y, luego de representados, completar el trazado de los diagramas con procedimientos gráficos o grafo-analíticos.-
- Método gráfico, consistente en la descomposición gráfica de las fuerzas actuantes en cada tramo del pórtico en dos componentes, una tangente y otra normal al plano de las secciones de ese tramo.- Con estas componentes se trazan, para cada tramo, los diagramas Q y N; un funicular de las componentes tangenciales permite el trazado del diagrama M.-
- Método analítico por puntos, que consiste en calcular numéricamente el valor del esfuerzo interno que se considera en una serie suficiente de secciones convenientemente elegidas tanto en posición como en número.- Se representan dichos valores mediante ordenadas orientadas y paralelas a las correspondientes secciones, uniendo sus extremos mediante una curva continua que, referida al eje de la estructura nos da el diagrama buscado.-

Consideraremos sólo pórticos simples isostáticos.- Para establecer las convenciones relativas a los signos de cada uno de los esfuerzos internos se supone al observador ubicado en el centro del pórtico, mirando sucesivamente a cada uno de los tramos, figura 7.3.-

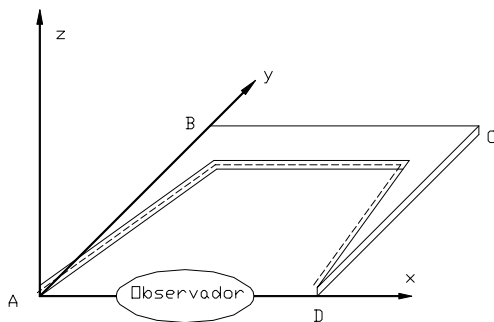


Fig. 7.3

Sea el pórtico ABCD ubicado en el plano "xy", y el observador "parado" en su centro según "z".- Mirando al pilar AB del pórtico tiene el extremo inferior A ubicado a su izquierda, y el extremo superior B a su derecha; observando la viga BC, a su izquierda se ubica el extremo B y a su derecha el C ; finalmente si mira al pilar CD queda el extremo superior C a su izquierda y el inferior D a su derecha.-

Si el pórtico fuese doble o múltiple en general, la posición descrita del observador es válida para analizar el pilar izquierdo AB y la viga superior BC; se desplaza luego el observador hacia la derecha ubicándose en el centro del tramo adyacente de la estructura y analiza el ahora pilar izquierdo DC y la viga superior correspondiente; continúa así sucesivamente hasta el último tramo de la estructura; la última columna se considera en la forma explicada para el pilar CD en el párrafo anterior.-

Fijada de este modo la posición del observador, son válidas las mismas convenciones de signo establecidas para las vigas, con lo que resultarán:

- **Momentos flectores positivos** los originados por fuerzas exteriores que produzcan tracción o alargamiento en las fibras interiores del pórtico, y negativos cuando resulten traccionadas las fibras del borde exterior.- Se suele puntear la cara o borde donde se encuentran las fibras que resultan traccionadas por momentos flectores que convenimos como positivos.-
- **Esfuerzos cortantes positivos** los originados por fuerzas externas tales que tienden a cortar la viga o pilar en la sección considerada llevando hacia fuera del pórtico la parte izquierda y hacia dentro la derecha.- En cambio si la parte que queda a la derecha de la sección considerada tiende a salir del pórtico por la acción de las fuerzas externas, el esfuerzo de corte es negativo.- Esto es lo mismo que establecer como positivo el esfuerzo cortante cuando la suma de las componentes tangenciales de todas las fuerzas izquierdas está dirigida hacia fuera del pórtico, y las componentes derechas hacia dentro.- En caso contrario el esfuerzo tangencial es negativo.-
- **Esfuerzos normales positivos** los originados por la componente axial de la suma de las fuerzas externas actuantes a uno u otro lado de la sección considerada cuando producen alargamiento o tracción, y negativos si producen acortamiento o compresión.-

### 7.2.1.- ANÁLISIS DE UN TRAMO RECTILÍNEO AISLADO.-

Sea el pórtico oblicuo de la figura 7.4.a) y separemos el tramo de viga comprendido entre las secciones  $s_0-s_0$  y  $s_v-s_v$  (infinitamente próximas a los nudos adyacentes) sobre el que actúa un sistema cualquiera de fuerzas que supondremos concentradas y verticales.- Equilibramos  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  aplicando en  $J_0$  la resultante  $\bar{R}_i$  de las fuerzas externas izquierdas, y en  $J_v$  la resultante  $\bar{R}_d$  de las fuerzas externas derechas.-

Para trazar su diagrama de cuerpo libre, figura 7.4.b), necesitamos poner en evidencia los esfuerzos internos en las secciones de corte  $s_0-s_0$ , situada a la izquierda del tramo, y  $s_v-s_v$ , a su derecha.- En la primera de ellas los esfuerzos internos que debemos evidenciar corresponden a las componentes baricéntricas de la sollicitación izquierda  $\bar{R}_i$  que designamos  $M_0, Q_0$  y  $N_0$  cuyos valores han sido obtenidos en el tramo anterior al que se considera, en este caso la columna izquierda.- En la sección  $s_v-s_v$  actúa la resultante  $\bar{R}_d$  de las fuerzas aplicadas a la derecha de la misma.- Las componentes baricéntricas de esta resultante las designamos  $-M_v, -Q_v, -N_v$  ya que tienen sentidos opuestos a los que por convención se ha definido como esfuerzos internos  $M_v, Q_v, N_v$ ; por el momento no conocemos sus intensidades ni sus signos, los indicados son supuestos.- Se completa el D.C.L. colocando las cargas  $F_1, F_2, F_3$ , y las medidas lineales y angulares requeridas para establecer los diversos esfuerzos internos.-

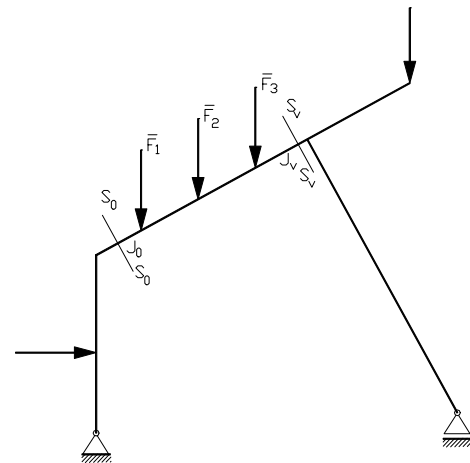


Fig. 7.4(a)

Trazado el D.C.L. se proyectan las fuerzas actuantes sobre una paralela y una normal al eje del tramo.- Con las componentes tangenciales al plano de las secciones se construye el polígono de fuerzas activas que cierra con  $-Q_v$  y  $Q_0$ .- Se toma el polo  $O$  sobre la paralela al eje de la pieza en correspondencia con el origen de la primera fuerza de la izquierda,  $Q_0$ , para que el funicular quede referido a una recta paralela al eje de la viga,  $J_0'J_v'$ .- En su extremo izquierdo y a partir de ella se toma en escala y signo el momento  $M_0$  por cuyo extremo se inicia el trazado del primer lado I del funicular.- La ordenada resultante entre el lado V y la recta de referencia (paralelas) representa el momento  $M_v$  que cierra el diagrama de momentos.-

Con las componentes tangenciales y normales al plano de la sección considerada,  $F_T$  y  $F_N$ , se construyen los diagramas de  $Q$  y de  $N$  en la forma desarrollada en el capítulo anterior.-

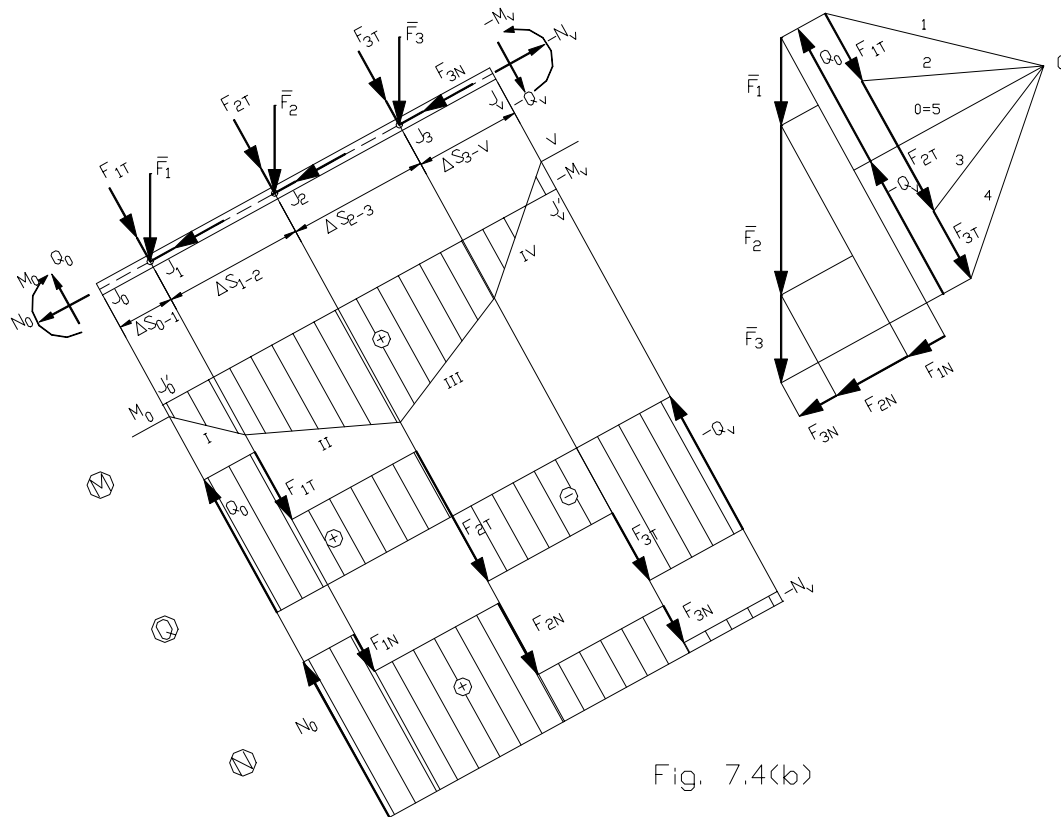


Fig. 7.4(b)

**Analíticamente** se comienza proyectando las fuerzas sobre el plano de las secciones transversales y sobre su normal que coincide con el eje del pórtico por tratarse de un tramo recto; los esfuerzos internos quedan dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{lll}
 Q_1 = Q_0 + F_{1T} & N_1 = N_0 + F_{1N} & M_1 = M_0 + Q_0 \cdot \Delta s_{0-1} \\
 Q_2 = Q_1 + F_{2T} & N_2 = N_1 + F_{2N} & M_2 = M_1 + Q_1 \cdot \Delta s_{1-2} \\
 Q_3 = Q_2 + F_{3T} & N_3 = N_2 + F_{3N} & M_3 = M_2 + Q_2 \cdot \Delta s_{2-3}
 \end{array}$$

En las cuales los esfuerzos internos y componentes de fuerzas externas deben tomarse con el signo que poseen y en donde  $Q_i$  y  $N_i$  representan esfuerzos internos en una sección situada inmediatamente a la derecha del punto  $J_i$ . - Las longitudes  $\Delta s_{i-j}$  corresponden a los tramos de viga comprendidos entre fuerzas transversales consecutivas.-

Si en lugar de cargas concentradas actúan fuerzas distribuidas, figura 7.5, el polígono funicular se transforma en curva funicular y su trazado se efectúa por los procedimientos conocidos.- Analíticamente si s-s es una sección transversal intermedia, la resultante de las cargas que actúan entre ella y el extremo izquierdo  $J_0$  valdrá :

$$P_s = \int_0^s p \cdot ds$$

Donde p es la intensidad de carga por unidad de longitud del eje de la viga, el peso propio por ejemplo.- Sus componentes normal y transversal son :

$$P_{SN} = \text{sen } \alpha \int_0^s p \cdot ds \quad \text{y} \quad P_{ST} = \text{cos } \alpha \int_0^s p \cdot ds$$

Los esfuerzos normal y tangencial en la sección s-s serán:

$$N_s = N_0 + \operatorname{sen} \alpha \int_0^s p \cdot ds \qquad Q_s = Q_0 + \operatorname{cos} \alpha \int_0^s p \cdot ds$$

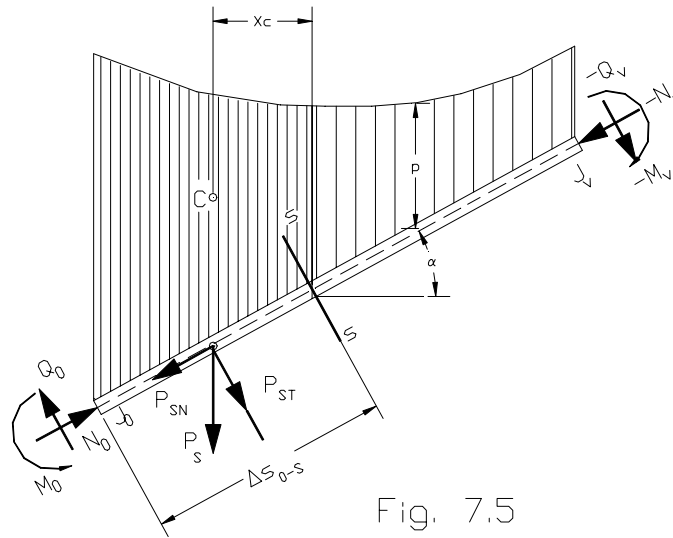


Fig. 7.5

Ambos esfuerzos son funciones integrales del diagrama de carga.- El momento flector valdrá :

$$M_s = M_0 + Q_0 \cdot \Delta s_{0-s} + P_s \cdot x_c = M_0 + Q_0 \cdot \Delta s_{0-s} + x_c \int_0^s p \cdot ds$$

En esta expresión el momento correspondiente a cada término debe tomarse con su signo.- Los segmentos  $\Delta s_{0-s}$  y  $x_c$  son los brazos de las fuerzas  $Q_0$  y de  $P_s$ ;  $C$  es el baricentro del diagrama parcial de cargas comprendido entre el extremo izquierdo  $J_0$  y la sección s-s.- El momento de  $P_s$  puede tomarse en función de su componente transversal  $P_{sT}$  y su brazo de palanca respecto a la sección s-s :  $x_c / \operatorname{cos} \alpha$ .-

Como en el caso de las vigas el momento flector es función integral del esfuerzo cortante e integral segunda de la intensidad de carga.-

### 7.2.2.- PÓRTICO SIMPLE : RESOLUCIÓN GRÁFICA.-

Sea el pórtico isostático de la figura 7.6.- Se quiere trazar los diagramas de esfuerzos internos originados por el sistema de cargas indicado.-

Se construye el polígono de fuerzas activas  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ ; con polo  $O$  se traza un funicular ( I-II-III ) que pase por  $A$ , y cuya línea de cierre permite determinar las reacciones  $\bar{A}$  y  $\bar{D}$ .- Queda determinado el polígono de fuerzas  $\bar{A}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{D}$  en equilibrio y ordenado de izquierda a derecha.- Las componentes tangenciales a las secciones transversales de cada uno de los tramos se proyectan en el orden indicado: arriba del polígono de fuerzas,  $A_x$  que actúa en el pilar  $AB$ ; a la derecha,  $A_y$  y  $P_1$  que actúan sobre la viga  $BC$  y abajo  $\bar{P}_2$  que actúa sobre el pilar  $CD$ ; la reacción  $\bar{D}$  no tiene componente transversal al pilar  $CD$  sobre el que está aplicada.-

Para trazar el diagrama de momentos flectores se construye - para cada uno de los tramos rectos del pórtico - un funicular de las componentes transversales de las fuerzas que actúan en el tramo considerado.- Para facilitar la comprensión del procedimiento constructivo, en el polígono de fuerzas transversales correspondiente a cada uno de los tramos se pone en evidencia la componente tangencial de la resultante de las fuerzas externas derechas, igual y de sentido contrario al esfuerzo de corte en el extremo derecho, que cierra el polígono de fuerzas externas tal como se hiciera en análisis del tramo aislado.- Comprendido el procedimiento se puede operar sólo con las componentes transversales de las fuerzas externas prescindiendo de las internas.-

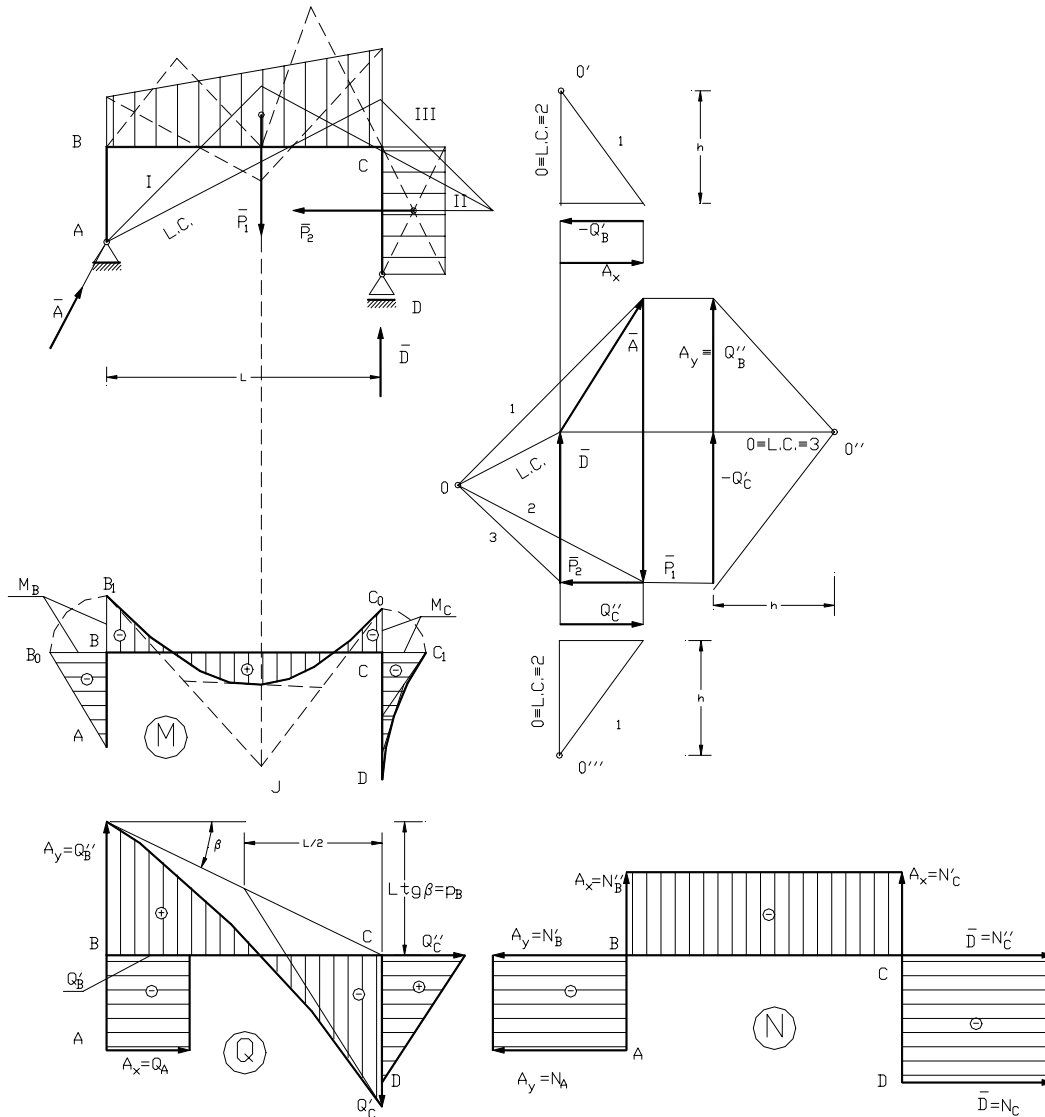


Fig. 7.6

Se trabaja de izquierda a derecha comenzando por el pilar AB; sobre él actúa la reacción  $\bar{A}$  cuya proyección tangencial es  $A_x$ .- Se construye el polígono de fuerzas transversales  $A_x, -Q'_B$  (con uno o dos apóstrofes se diferencian los esfuerzos internos en las secciones ubicadas inmediatamente a la izquierda o derecha del punto indicado por el subíndice).- Se adopta un polo  $O'$  tal que se ubique sobre la recta paralela al eje de la columna pasante por el origen de la primera fuerza izquierda,  $A_x$ , del polígono de fuerzas transversales.- El polo debe elegirse de forma tal que al construir el polígono funicular, los momentos positivos queden trazados del lado de las fibras traccionadas.- Para ello, parado el observador frente al extremo de la fuerza externa  $\bar{A}_x$  debe ubicar el polo a su derecha a una distancia polar "h".- De acuerdo a esto se adopta el polo  $O'$  y se trazan los rayos polares L.C. y 1 de la fuerza  $A_x$ .-

Para construir el funicular se reproduce el eje del pórtico, ABCD, que se toma de referencia para el trazado del diagrama de momentos flectores.- Por A se trazan las paralelas al lado L.C. (coincidente con el eje AB del tramo) y al lado 1 (recta  $AB_0$ ) que constituye el diagrama de momentos flectores del pilar izquierdo.- La ordenada  $BB_0$  representa el momento  $M_B$  en la cabeza del pilar (extremo superior) que es el mismo que solicita el extremo izquierdo de la viga; se rebate sobre la normal,  $BB_1$ , al eje de la viga y a partir de  $B_1$  se trazará la curva funicular de la carga que actúa sobre ella que quedará referida al eje, BC.-

Sobre la viga BC actúa la carga distribuida de resultante  $\bar{P}_1$ , perpendicular al eje, que se proyecta en toda su magnitud sobre una paralela al plano de las secciones transversales; se proyecta además el origen de  $\bar{A}$  quedando definida la componente  $A_Y = Q_B$ , esfuerzo de corte en el extremo izquierdo de la viga.- Se adopta el polo  $O''$  a la derecha de  $P_1$ , a la distancia "h" y en correspondencia con el origen de la primer fuerza  $\bar{A}$  de la izquierda del polígono general de fuerzas, coincidente con el origen de la primer fuerza del tramo considerado  $Q_B$ .- Se traza el funicular de  $\bar{P}_1$ :  $B_1J - JC_0$  que constituyen las tangentes extremas en  $B_1$  y en  $C_0$  a la curva funicular de la carga distribuida que, por ser variable linealmente, será una parábola cúbica cuyo trazado conocemos y para la cual se ha determinado una tangente intermedia.- La ordenada  $CC_0$  constituye el momento  $M_C$  en el extremo derecho de la viga, que rebatimos sobre la normal  $CC_1$  al pilar derecho ya que, siendo C punto común a la viga y al pilar, el momento flector es el mismo.-

Sobre el pilar CD, considerado aislado del resto del pórtico, actúan transversalmente el esfuerzo  $Q_C$  en su extremo izquierdo C y la fuerza distribuida de resultante  $\bar{P}_2$ ; se adopta el polo  $O''$  a la derecha de  $P_2$  situado el observador en el extremo de ésta mirando hacia su origen, y sobre la normal pasante por el origen de la primer fuerza izquierda  $Q_C$  a una distancia polar "h".- Obsérvese que el origen de la primer fuerza  $Q_C$ , coincide con el extremo de la última fuerza activa  $P_2$ , y que el polo  $O''$  puede tomarse directamente sobre la normal al extremo de la última fuerza como se hizo en los voladizos derechos de las vigas.- Se trazan los rayos polares L.C.-1 y su funicular a partir de  $C_1$  que determina las tangentes extremas a la curva funicular de la carga de intensidad "p" constante que, como se sabe, es una parábola de segundo grado de trazado conocido.-

En el extremo D (pie del pilar o columna), el momento es conocido e igual a cero,  $M_D = 0$ .- Por lo tanto no es necesario el conocimiento de la ordenada  $CC_1 = M_C$  para el trazado del funicular, ya que se puede iniciar con el último lado pasante por D hasta interceptar la recta de acción de la resultante  $P_2$ . Luego el lado I hasta la recta de acción de  $Q_C$  en  $C_1$ : la ordenada  $CC_1$  determina  $M_C$ , que debe coincidir con el obtenido para el extremo derecho de la viga.-

Como se dijo anteriormente, las componentes normales y transversales a cada tramo se obtienen gráficamente proyectando el polígono de fuerzas externas  $\bar{A} - \bar{P}_1 - \bar{P}_2 - \bar{D}$ .- Con estas componente, los diagramas de esfuerzos normales N, y de esfuerzos tangenciales Q, se realizan tramo a tramo en forma similar a la utilizada en las vigas teniendo presente las convenciones de signos y ubicación del observador dadas en el apartado 7.2.-

### 7.2.3.- PÓRTICO SIMPLE: RESOLUCIÓN GRAFO-NUMÉRICA.-

Este método consiste en determinar analíticamente los valores de los esfuerzos internos en secciones correspondientes a puntos singulares del pórtico y, luego de graficarlos refiriéndolos al eje del pórtico, completar el trazado de los diagramas utilizando los procedimientos vistos para las vigas.-

Entendemos por puntos singulares todos aquéllos para los cuales alguna de las funciones M, Q, N, presentan alguna particularidad en su geometría o en su sistema de cargas, tales como: los nudos, las articulaciones, los apoyos, los puntos de aplicación de fuerzas o pares concentrados, o aquéllos en los cuales varía la ley  $p_x = f(x)$  que define la distribución de la carga.-

A continuación se desarrolla un ejemplo, figura 7.7, primero en forma analítica y numérica después, trazándose los diagramas de esfuerzos internos en figura 7.8.-

En primer término se determinan las resultantes de las cargas distribuidas y las reacciones de vínculos externos; conviene antes de avanzar el cálculo, verificar los valores obtenidos para éstas recurriendo a una ecuación de equilibrio no utilizada en su determinación.-

Se prosigue calculando los esfuerzos internos en los puntos singulares, tramo a tramo, y de izquierda a derecha.- Para ordenar la secuencia operativa pueden armarse cuadros similares a los que se presentan a continuación.-

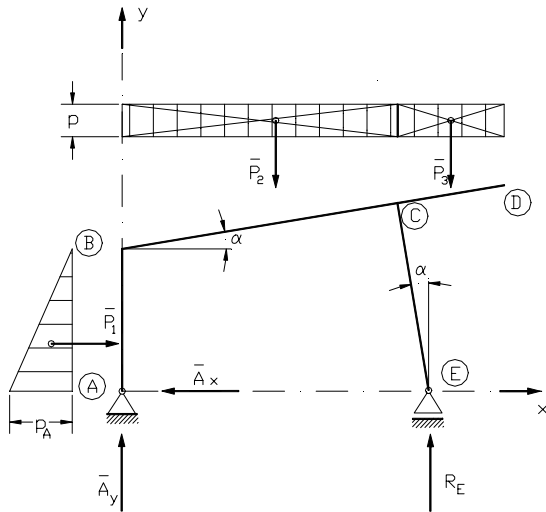


Fig. 7.7

**Determinación de reacciones (figura 7.7) :**

$$P_1 = \frac{1}{2} p_A (y_B - y_A)$$

$$P_2 = p (x_C - x_B)$$

$$P_3 = p (x_D - x_C)$$

$$\sum M_A = P_1 \frac{y_B - y_A}{3} + P_2 \frac{x_C + x_B}{2} + P_3 \frac{x_D + x_C}{2} - R_E (x_E - x_A) = 0$$

Despejando se obtiene  $R_E$  .-

$$+\rightarrow \sum X = P_1 - A_X = 0 \therefore A_X = P_1$$

$$+\uparrow \sum Y = A_Y - P_2 - P_3 + R_E = 0$$

$$\therefore A_Y = P_2 + P_3 - R_E$$

**Determinación de esfuerzos internos en puntos singulares (figura 7.8):**

TRAMO	Q	N	M
PILAR AB	$Q_A = A_X$ $Q_B' = A_X - P_1 = 0$	$N_A = -A_Y$ $N_B' = -A_Y$	$M_A = 0$ $M_B' = A_X (y_B - y_A) - \frac{2}{3} P_1 (y_B - y_A)$ $M_B'' = \frac{1}{3} P_1 (y_B - y_A)$
VIGA BC	$Q_B'' = A_Y \cos \alpha$ $Q_C' = A_Y \cos \alpha - P_2 \cos \alpha$	$N_B'' = -A_Y \sin \alpha$ $N_C' = -A_Y \sin \alpha + P_2 \sin \alpha$	$M_B'' = \frac{1}{3} P_1 (y_B - y_A) = M_B'$ $M_C' = M_B'' + Q_B'' \frac{(x_C - x_B)}{\cos \alpha} - P_2 \frac{(x_C - x_B)}{2}$
VOLADIZO CD	$Q_C'' = P_3 \cos \alpha$ $Q_D = 0$	$N_C'' = -P_3 \sin \alpha$ $N_D = 0$	$M_C'' = -\frac{1}{2} P_3 (x_D - x_C)$ $M_D = 0$
PILAR CE	$Q_C''' = -R_E \sin \alpha$ $Q_E = -R_E \sin \alpha$	$N_C''' = -R_E \cos \alpha$ $N_E = -R_E \cos \alpha$	$M_C''' = R_E (x_E - x_C)$ $M_E = 0$

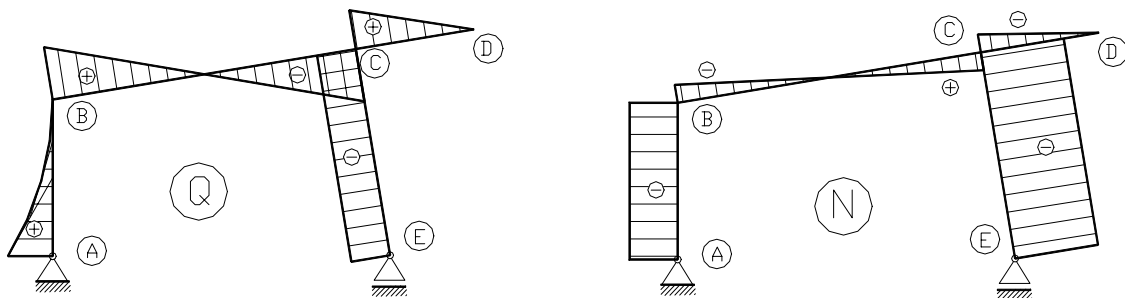


Fig. 7.8

Los diagramas están referidos al eje del pórtico, figura 7.8. , y se obtienen representando a escala los valores calculados en los puntos singulares.- Realizado esto se completan los diagramas en la forma vista para un tramo aislado, gráfica o analíticamente, en función del tipo de carga que actúa en el tramo considerado.- En particular, para los momentos flectores, figura 7.9, se “cuelga” la curva o polígono funicular correspondiente a la carga del tramo de los valores obtenidos para los momentos en los puntos extremos.- La determinación de la posición y valor del máximo y mínimo momento se hace estableciendo el punto donde el esfuerzo de corte se anula.- Si el cambio de signo de Q es en correspondencia con una carga concentrada el problema es de solución sencilla, en cambio si ello ocurre en correspondencia de una carga distribuida será necesario igualar a cero la ley de variación de  $Q_s$  para el tramo considerado, apartado 7.2.1. :



$$Q_s = Q_0 + \cos \alpha \int_0^{s_0} p \cdot ds = 0$$

El valor  $s_0$  que satisface la anterior se introduce en :

$$M_{\max} = M_{s_0} = M_0 + Q_0 s_0 + x_C \int_0^{s_0} p \cdot ds$$

Pero antes de proceder al trazado de estos diagramas, conviene verificar los resultados obtenidos para los valores de los esfuerzos internos en puntos singulares.- Para ello se aísla un nudo, C en nuestro caso, y se traza su diagrama de cuerpo libre referido a un par de ejes ortogonales con origen en él, "u" y "v", que pueden o no ser paralelos a "x" e "y", figura 7.9.- Se plantean las siguientes ecuaciones de equilibrio en donde con uno, dos o tres apóstrofes se indica el esfuerzo interno inmediatamente a la izquierda, derecha o abajo del punto C considerado:

$$\begin{aligned} +\downarrow \quad \sum M_C &= M_C' + (-M_C'') + (-M_C''') = 0 \\ +\uparrow \quad \sum F_v &= Q_C' + (-Q_C'') + |-(N_C''')| = 0 \\ +\rightarrow \quad \sum F_u &= |N_C'| + |-(N_C'')| + (-Q_C''') = 0 \end{aligned}$$

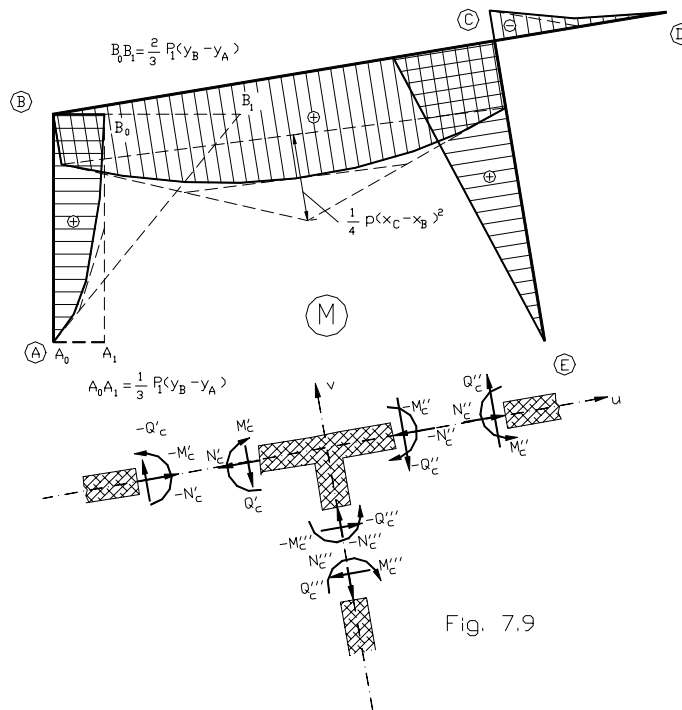


Fig. 7.9

Volcar los signos y valores obtenidos en el cálculo presenta algunas dificultades debidas a que: 1) Los signos obtenidos corresponden a los esfuerzos que actúan en las caras derechas de los cortes efectuados para aislar los nudos; en las caras izquierdas los sentidos son opuestos.- 2) Para los esfuerzos axiales se ha convenido como positivos los que producen tracción según la dirección normal a la sección considerada sin vincularlos al sentido de las ramas positivas de los ejes.-

Esto se puede solucionar del siguiente modo: a) Los momentos flectores y esfuerzos de corte que actúan en las caras derechas de los cortes se introducen en las ecuaciones con su signo y con signo cambiado los que actúan en las caras izquierdas, lo que ha sido expresado en las ecuaciones encerrándolos entre paréntesis con signo negativo.- Los esfuerzos normales se vuelcan al D.C.L. en cada sección de corte alejándose del punto C o acercándose a él, según que sean de tracción o compresión; luego se suman o restan sus valores absolutos según que coincidan o no con la rama positiva del eje de proyección.- En las ecuaciones estos esfuerzos se han encerrado en barras.-

b) Como complemento, se vuelcan los valores y signos de cálculo al D.C.L. superando, para cada esfuerzo y sección de corte, una a una la respectiva dificultad: luego, con los sentidos volcados al D.C.L. (figura 7.9) se efectúan las sumatorias de los valores absolutos de cálculo, figura 7.9.b.-



**Aplicación numérica: Datos**

Punto	x	y	cargas	Func. trigonométricas
<b>A</b>	0,00 m	0,00 m	p = 1 t/m p <sub>A</sub> = 1,8 t/m	α = 17 ° 10'
<b>B</b>	0,00 m	3,00 m		
<b>C</b>	5,00 m	4,55 m		
<b>D</b>	6,50 m	5,00 m		
<b>E</b>	6,41 m	0,00 m		

$P_1 = \frac{1}{2} \times 1,8 \times 3,00 = 2,7 \text{ t.}$        $P_2 = 1 \times 5,00 = 5,00 \text{ t.}$        $P_3 = 1 \times 1,5 = 1,5 \text{ t.}$

$R_E = \frac{1}{6,41} \times 2,7 \times \frac{3,00}{3} + 5,0 \times \frac{5,0}{2} + 1,5 \times \frac{11,5}{2} = 3,72 \text{ t.}$

$A_x = 2,7 \text{ t.}$        $A_y = 5,0 + 1,5 - 3,72 = 2,78 \text{ t.}$

Verificación de reacciones:  $M_E = 2,78 \times 6,41 + 2,7 \times 1,00 - 5,0 \times 3,91 - 1,5 \times 0,66 = 0$

Tramo	Q	N	M
PILAR AB	Q <sub>A</sub> = 2,7 t. Q <sub>B</sub> ' = 0	N <sub>A</sub> = - 2,78 t. N <sub>B</sub> ' = - 2,78 t.	M <sub>A</sub> = 0 M <sub>B</sub> ' = 2,7 x 3/3 = 2,7 tm.
VIGA BC	Q <sub>B</sub> '' = 2,78 x 0,955 = 2,65 Q <sub>C</sub> ' = 2,65 - 5 x 0,955 = - 2,13	N <sub>B</sub> '' = 2,78 x 0,295 = - 0,82 N <sub>C</sub> ' = - 0,82 + 5 x 0,295 = 0,66	M <sub>B</sub> '' = 2,7 M <sub>C</sub> ' = 2,7 + 2,78 x 5 - 5 x 5/2 = 4,1
VOLADIZO CD	Q <sub>C</sub> '' = 1,5 x 0,955 = 1,43 Q <sub>D</sub> = 0	N <sub>C</sub> '' = - 1,5 x 0,295 = - 0,44 N <sub>D</sub> = 0	M <sub>C</sub> '' = - 1,5 x 1,5/2 = - 1,13 M <sub>D</sub> = 0
PILAR CE	Q <sub>C</sub> ''' = - 3,72 x 0,295 = - 1,10 Q <sub>E</sub> = - 1,10	N <sub>C</sub> ''' = - 3,72 x 0,955 = - 3,55 N <sub>E</sub> = - 3,55	M <sub>C</sub> ''' = 3,72 x 1,41 = 5,25 M <sub>E</sub> = 0

Verificación del nudo C : Figura 7.9 y 7.9-b

$+\curvearrowright \sum M_C = M_C' + (-M_C'') + (-M_C''') = 4,10 + 1,13 - 5,25 = 0,02$

$+\uparrow \sum F_T = Q_C' + (-Q_C'') + (-N_C''') = - 2,13 - 1,43 + 3,55 = 0,01$

$+\rightarrow \sum F_N = |N_C'| + |-N_C''| + (-Q_C''') = - 0,66 - 0,44 + 1,10 = 0$

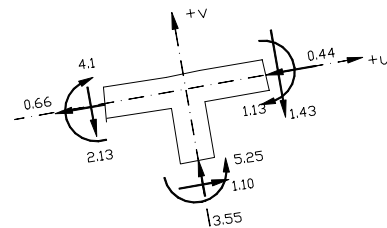


Fig. 9-b

**7.2.4.- PÓRTICO TRIARTICULADO CARGADO CON PARES, (figuras 7.10 y 7.11).-**

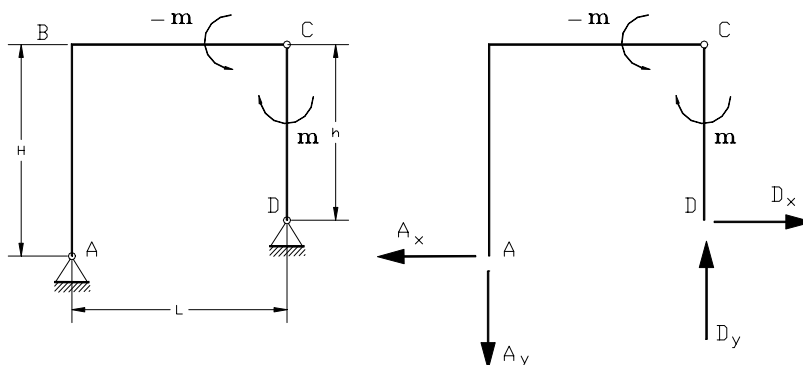


Fig. 7.10



$$\begin{aligned}
 +\downarrow \quad \sum M_C^{der} &= \mathbf{m} \cdot D_X \cdot h = 0 & \therefore \quad D_X &= \mathbf{m} / h \\
 +\downarrow \quad \sum M_A &= -\mathbf{m} + \mathbf{m} + D_X (H-h) - D_Y \cdot L = 0 & \therefore \quad D_Y &= D_X (H-h) / L = \mathbf{m} \cdot (H-h) / h \cdot L \\
 +\rightarrow \quad \sum X &= D_X - A_X = 0 & \therefore \quad A_X &= D_X \\
 +\uparrow \quad \sum Y &= D_Y - A_Y = 0 & \therefore \quad A_Y &= D_Y
 \end{aligned}$$

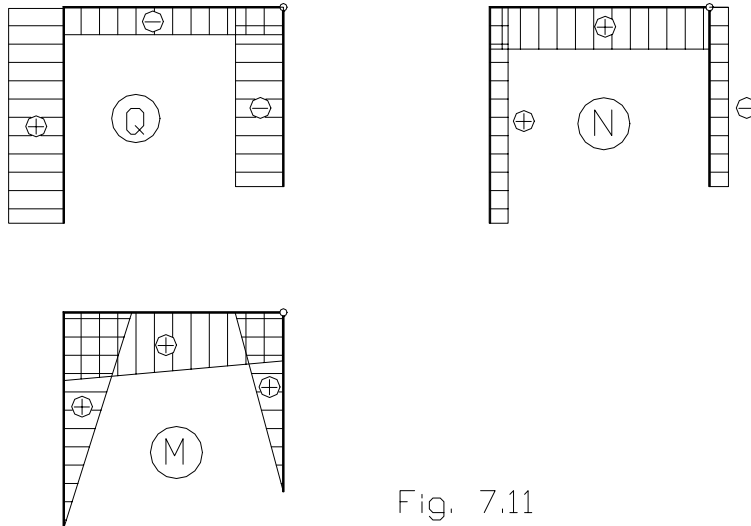


Fig. 7.11

Tramo	N	Q	M
AB	$N_A = A_Y$ $N_B' = A_Y$	$Q_A = A_X$ $Q_B' = A_X$	$M_A = 0$ $M_B' = A_X \cdot H$
BC	$N_B'' = A_X$ $N_C' = A_X$	$Q_B'' = -A_Y$ $Q_C' = -A_Y$	$M_B'' = A_X \cdot H$ $M_C' = \mathbf{m}$
CD	$N_C'' = -D_Y$ $N_D = -D_Y$	$Q_C'' = -D_X$ $Q_D = -D_X$	$M_C'' = \mathbf{m}$ $M_D = 0$

Acá se repite lo indicado en la figura 6.30 pág. 188: en el centro C de la articulación  $\mathbf{m}_C = 0$ .

### 7.3.- ANÁLISIS DE ARCOS DE ALMA LLENA.-

*Se designa con el nombre de arco a la estructura curva que, cargada verticalmente, origina reacciones oblicuas en los apoyos ; las características del arco se originan esencialmente en el tipo de sustentación que posea.- La forma no es el distintivo primordial ya que, como se dijo en el apartado 6.8.1., una pieza curva con apoyo móvil vertical se comporta, en sentido estático en cuanto al cálculo de reacciones y momentos flectores, como una viga de eje recto.-*

Los arcos pueden ser de alma llena o de celosía (o alma calada que son estructuras reticulares).- Nos ocuparemos ahora de los primeros, en los cuales se define *el eje o directriz del arco* como el lugar geométrico de los baricentros de las sucesivas secciones transversales de la estructura.-

En general las secciones transversales del arco están solicitadas a compresión, corte y flexión.- Adecuando la directriz al tipo de carga se puede obtener que los momentos flectores y los esfuerzos cortantes sean pequeños e incluso, al menos teóricamente, nulos.- Esta característica permitió la construcción de estructuras que salvaran grandes vanos con elementos mampuestos (piedras, ladrillos), en épocas que se desconocían las técnicas que han permitido el uso del acero en la construcción moderna.-



Los arcos pueden estar isostática o hiperestáticamente sustentados según que posean igual o mayor número de vínculos simples (cinemáticamente eficientes) que grados de libertad, e incluso aunque los vínculos externos sean los necesarios, puede haber vínculos internos superabundantes.- Algunos de estos arcos se representan en la figura 7.12., esquematizándose las reacciones que aparecen en los vínculos a tierra, agregándose las designaciones de algunos de sus parámetros geométricos.-

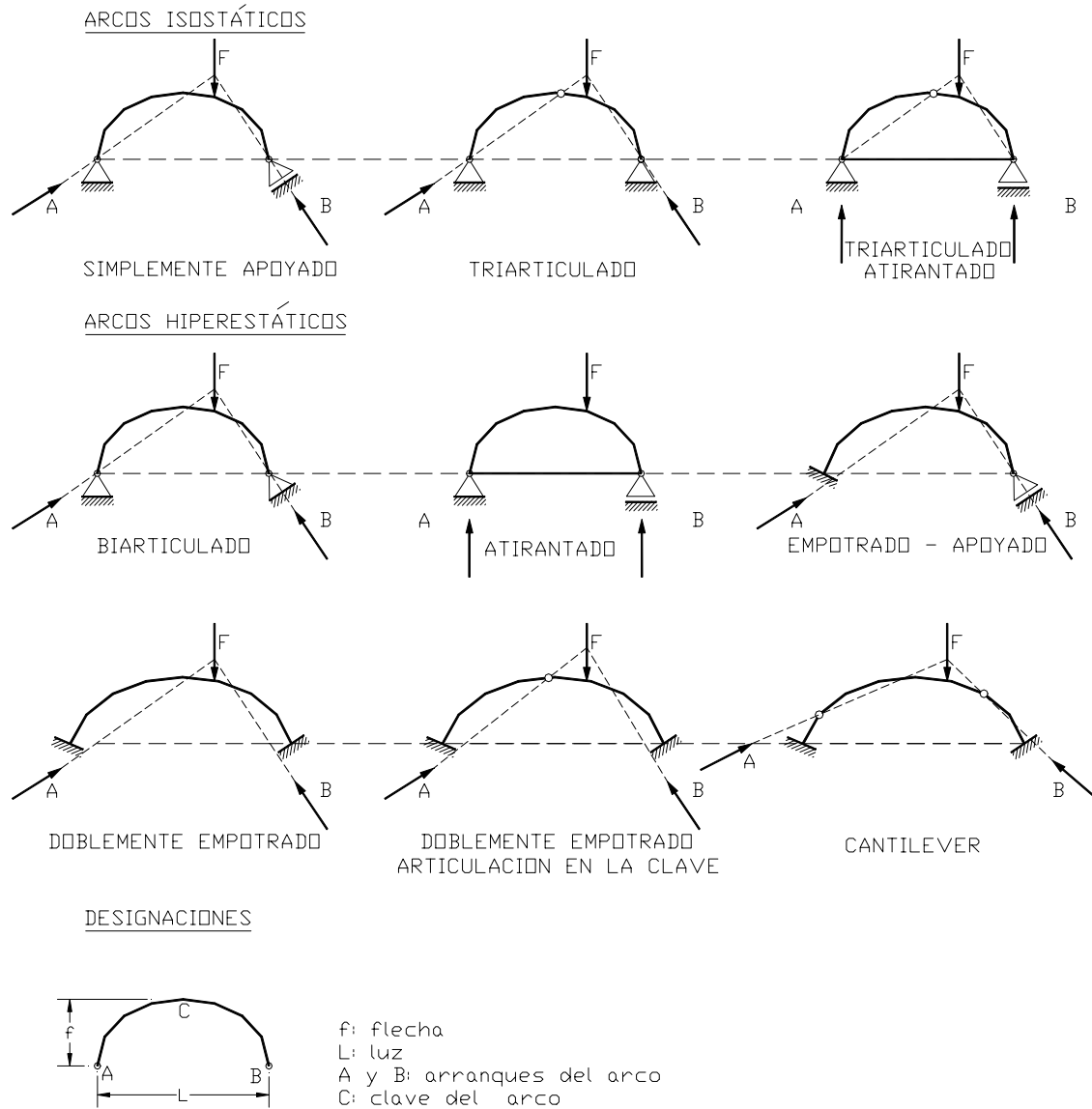


Fig. 7.12

El estudio de los arcos se puede efectuar mediante el trazado de la curva de presiones o por métodos analíticos.-

**7.3.1.- CURVA DE PRESIONES.-**

Sea un arco triarticulado con articulación en la clave C, apoyos fijos en A y B, y cargas concentradas como se indica en la figura 7.13.- La determinación de las reacciones de apoyo  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  puede efectuarse por cualquiera de los métodos vistos, como ser el siguiente: con polos  $O'$  y  $O''$  se construyen dos funiculares auxiliares que permiten determinar las resultantes parciales

$$\bar{R}' = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad \text{y} \quad \bar{R}'' = \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{F}_5$$

correspondientes a las cargas que actúan a uno y otro lado de la articulación intermedia C, que vamos a suponer actúen separadamente, una primero y la otra después, para sumar luego sus efectos.-

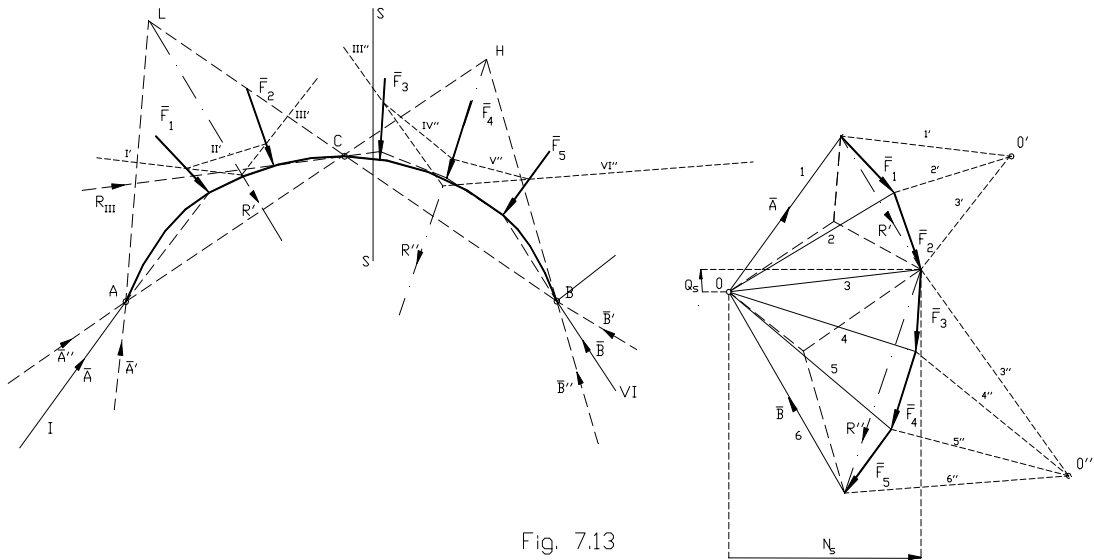


Fig. 7.13

Si se considera que el arco está sometido a la acción única de  $\bar{R}'$  se originarían en los apoyos las reacciones  $\bar{B}'$  (según la dirección de BC) y  $\bar{A}'$  (según la dirección LA), cuyas intensidades se obtienen en el polígono de fuerzas.- Considerando luego que sólo incide sobre el arco la resultante parcial  $\bar{R}''$ , se originarían las reacciones  $\bar{A}''$  (según la dirección AC) y  $\bar{B}''$  (según la dirección HB).- Determinadas sus intensidades en el polígono de fuerzas, se obtienen las reacciones totales componiendo:

$$\bar{A} = \bar{A}' + \bar{A}'' \quad \text{y} \quad \bar{B} = \bar{B}' + \bar{B}''$$

$\bar{A}$  y  $\bar{B}$  determinan el vértice O del polígono cerrado que forman las fuerzas externas al arco.-

Según se dijo en el apartado 3.2.1.3., las reacciones  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  quedaban dadas por el primero y último rayos polares cuando el polo correspondía al funicular pasante por A, B, y C.- **Inversamente, conocidas  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ , el vértice O por ellas determinado será el polo del funicular I, II, III, IV, V, VI, pasante por las articulaciones del arco.**- En la fig. 7.13, el lado I pasa por el apoyo A y es la recta de acción de  $\bar{A}$ ; los lados II y V han quedado superpuestos con el eje del arco; el lado III, pasante por C es la recta de acción de  $\bar{R}_{III}$  y el lado VI es la recta de acción de  $\bar{B}$ .

Un lado cualquiera de este polígono es la recta de acción de la resultante de todas las fuerzas izquierdas que preceden a este lado, incluida la reacción  $\bar{A}$ , y la intensidad queda dada por el rayo polar correspondiente del polígono de fuerzas.- Es decir que:

- El lado I (recta de acción) y el rayo 1 (intensidad) determinan,  $\bar{R}_I = \bar{A}$ , la resultante de las fuerzas ubicadas a la izquierda del punto  $J_1$  de aplicación de  $F_1$ .-
- El lado II (recta de acción) y el rayo 2 (intensidad) determinan  $\bar{R}_{II} = \bar{A} + \bar{F}_1$ , resultante de todas las fuerzas ubicadas a la izquierda del punto  $J_2$  de aplicación de  $F_2$ .-
- El lado III (recta de acción) y el rayo 3 (intensidad) determinan  $\bar{R}_{III} = \bar{A} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ , resultante de las fuerzas situadas a izquierda del punto  $J_3$  de aplicación de  $F_3$ .-
- El lado IV (recta de acción) y el rayo 4 (intensidad) determinan  $\bar{R}_{IV} = \bar{A} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$ , resultante de todas las fuerzas ubicadas a la izquierda del punto  $J_4$  de aplicación de  $F_4$ .-
- ... y así sucesivamente para el resto de los lados del funicular y sus respectivos rayos polares.-

Este polígono de resultantes sucesivas se designa **polígono de presiones o curva de presiones** si las cargas son distribuidas.-



Como la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda de una sección define los esfuerzos internos en ella, el polígono (o la curva) de presiones permite determinar rápidamente dichos esfuerzos en una sección cualquiera del arco.- Consideremos, figuras 7.13. y 7.14., una sección s-s entre  $J_2$  y  $J_3$ .- La resultante de las fuerzas actuantes a la izquierda de esta sección tendrá por recta de acción el lado III del funicular y su intensidad queda determinada por el rayo polar 3: es decir conocemos la resultante izquierda :

$$\bar{R}_{III} = \bar{A} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Si descomponemos este vector (figura 7.13.) según una normal  $\bar{N}_s$  y una paralela al plano de la sección tendremos el esfuerzo normal  $\bar{N}_s$  y el esfuerzo cortante  $\bar{Q}_s$  que las cargas producen en la sección.-

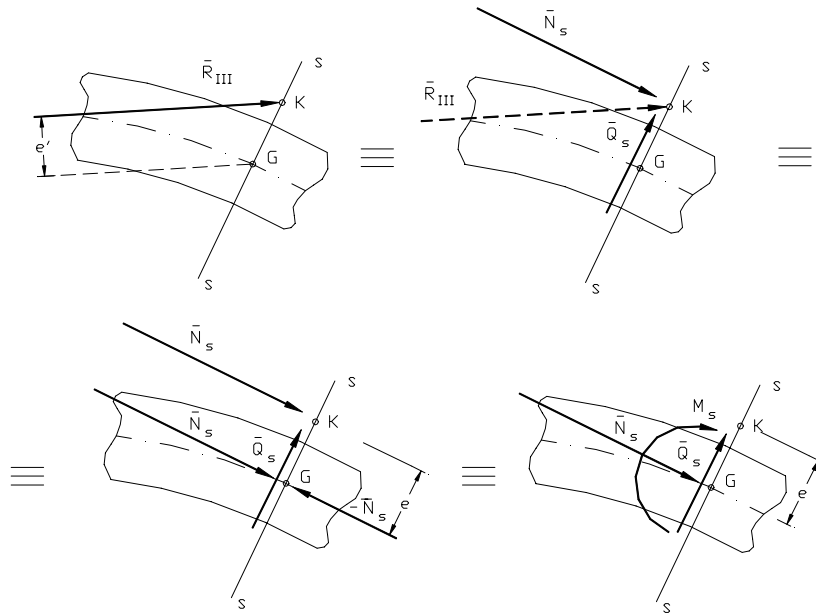


Fig. 7.14

Observando la figura 7.14 vemos que el momento flector queda dado por :

$$M_s = R_{III} \cdot e'$$

donde  $e'$  es la distancia del lado III del funicular al baricentro G de la sección considerada.- La recta de acción de la resultante izquierda corta al plano de la sección en un punto K **llamado centro de presión**, situado a la distancia  $e$ , **excentricidad**, del baricentro G.- Obsérvese que  $e'$  es la proyección de  $e$  sobre el plano normal a la resultante izquierda.- De la figura 7.14. donde se ha reducido  $\bar{R}_{III}$  al baricentro de la sección, se deduce que:

$$M_s = R_{III} \cdot e' = N_s \cdot e$$

**La curva de presiones nos da una imagen inmediata de las condiciones de sollicitación del arco, que son tanto mejores cuanto más cerca está del eje del arco, ya que los valores de M dependen de la distancia  $e'$  entre ambas curvas.- Si la curva de presiones coincidiese con la directriz del arco, todas las secciones del mismo estarían sollicitadas sólo por esfuerzo normal y el material se utilizaría de la mejor forma posible.-**

Para el arco simplemente apoyado, figura 7.12., la construcción de la curva de presiones difiere sólo en la determinación de las reacciones de apoyo; una de las direcciones de éstas queda determinada por la dirección del apoyo móvil; la dirección de la otra reacción está fijada por la recta que une la intersección de la dirección del apoyo móvil con la resultante de las fuerzas activas, al centro de la articulación del apoyo fijo.-

### 7.3.2.- ESTUDIO ANALÍTICO DE UN ARCO PARABÓLICO.-

Sea un arco triarticulado, atirantado, de directriz parabólica con un apoyo fijo en el extremo izquierdo, una articulación central en la clave y uno móvil horizontal en el derecho, figura 7.15,

sometido a una carga distribuida de intensidad constante  $p$ .- Establezcamos en primer término, la ecuación de la directriz del arco en función de su flecha y su luz.-

La ecuación general de una parábola de segundo grado de eje vertical referida a éste como eje de ordenadas, y a un eje de abscisas tangente y horizontal trazado por la articulación C coincidente con el vértice, es:

$$\eta = k \xi^2$$

donde  $k$  es el parámetro de la parábola; su valor queda determinado sustituyendo en la ecuación general las coordenadas genéricas por las de un punto de posición determinada como el B que valen :  $\xi_B = L / 2$  ;  $\eta_B = - f$ . Se tendrá:

$$- f = k L^2 / 4$$

$$\therefore$$

$$k = - 4 f / L^2$$

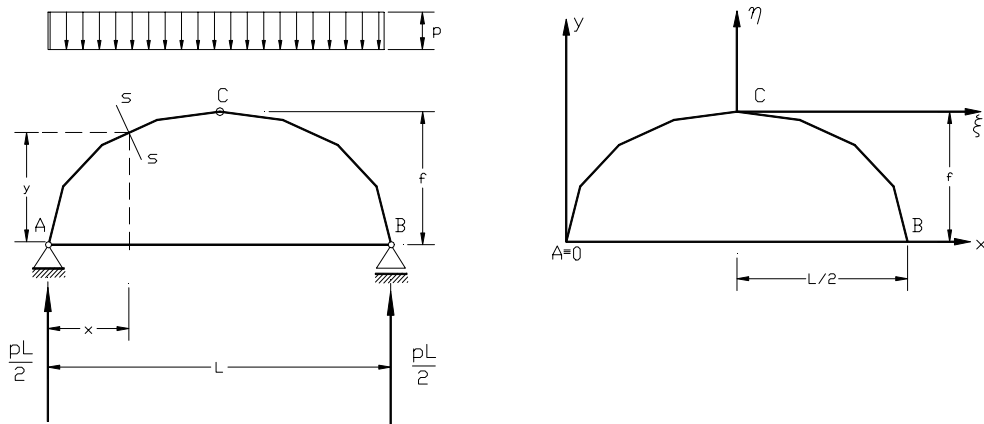


Fig. 7.15

Si se refiere ahora el arco a un sistema de ejes  $x, y$  de origen en el extremo izquierdo A, se tiene:

$$\begin{aligned} x = \xi + L / 2 & \quad \therefore \quad \xi = x - L / 2 & \quad y \\ & = \eta + f & \quad \therefore \quad \eta = y - f \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación general los valores de  $k, \xi, \eta$  obtenidos:

$$y - f = -\frac{4f}{L^2} \left[ x^2 + \frac{L^2}{4} - x.L \right] = -\frac{4f}{L^2} x^2 - f + \frac{4f}{L} x$$

$$y = \frac{4f}{L^2} [x.L - x^2] \quad (a)$$

Que constituye la ecuación de la directriz buscada.-

Las reacciones externas se obtienen observando que, para las cargas actuantes, el conjunto arco-tirante se comporta como una cadena cerrada de tres lados (admitida la rigidez del tirante), con tres grados de libertad como si fuese una chapa rígida:

$$+\curvearrowleft \sum M_A = p.L.L / 2 - B.L = 0 \quad \therefore \quad B = \frac{1}{2} p.L$$

$$+\uparrow \sum Y = A - p.L + \frac{1}{2} p.L = 0 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2} p.L$$

Pasemos ahora a la determinación de los esfuerzos internos, comenzando por el tirante.- La función de este elemento estructural es absorber la componente horizontal  $H$  de la reacción de apoyo del arco, evitando que la misma incida sobre las columnas que sustentan el arco.- Esta componente horizontal  $H$ , llamada empuje del arco, origina tracción en el tirante cuando las cargas provienen



del peso de los cuerpos ; si el arco estuviese sometido a fuerzas verticales de abajo hacia arriba ( acción del viento en ciertas circunstancias ) debe tenerse presente que el tirante carece de capacidad para absorber esfuerzos de compresión que se presentan cuando sus extremos A y B tienden a acercarse.-

Tracemos el D.C.L. del medio arco CB, figura 7.16 ; se tiene:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = H \cdot f - \frac{1}{2} p \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} p \cdot L \cdot \frac{L}{4} = H \cdot f - \frac{p \cdot L^2}{8f} \quad \therefore$$

$$H = \frac{p \cdot L^2}{8f} \quad (b)$$

Que nos determina el esfuerzo de tracción en el tirante.-

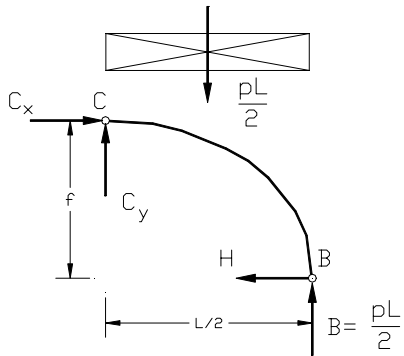


Fig. 7.16

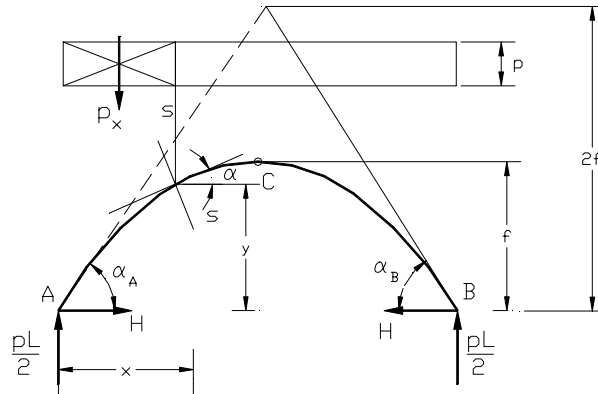


Fig. 7.17

Para establecer los esfuerzos internos en el arco tracemos, figura 7.17, su diagrama de cuerpo libre poniendo en evidencia cargas, reacciones de apoyos y reacción del tirante.- El momento flector en la sección s-s valdrá:

$$M_s = \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x - H \cdot y - \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

Sustituyendo los valores de y , H obtenidos se tiene :

$$M_s = \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x - \left( \frac{p \cdot L^2}{8f} \right) \cdot \left( \frac{4f}{L^2} \right) \cdot (x \cdot L - x^2) - \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

$$M_s = \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x - \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x + \frac{1}{2} p \cdot x^2 - \frac{1}{2} p \cdot x^2 = 0$$

$$M_s = 0$$

Que nos dice que **el momento flector es nulo para cualquier sección del arco** coincidiendo, por lo tanto, la curva de presiones con la directriz del arco puesto que, al ser el momento flector con la resultante izquierda distinta de cero, necesariamente la excentricidad será igual a cero.- Además, la mencionada resultante izquierda, **por ser tangente a la curva funicular será perpendicular al plano de la sección, y su proyección normal sobre dicho plano, el esfuerzo de corte, será nulo.**- Analíticamente esta conclusión es inmediata ya que al ser  $M_s = 0$  en toda la longitud del arco, resulta:

$$Q_s = \left( \frac{dM_s}{ds} \right) = 0$$

El esfuerzo axial es de compresión y vale:

$$N_s = R_{izq} = - \left( \frac{1}{2} p \cdot L - p \cdot x \right) \text{sen } \alpha - H \text{cos} \alpha$$



Tratándose de una parábola cuadrática resulta simple obtener  $N_S$  de la figura 7.18. donde se ha descompuesto la resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección,  $\bar{R}_{izq}$ , en dos componentes : una vertical  $V_{izq} = \frac{1}{2} p.L - p.x$  ; y la otra horizontal  $H_{izq} = H$ .- Siendo la carga vertical, la componente horizontal se mantiene constante para cualquier sección del arco; sólo varían, de una sección a otra, la componente vertical  $V_{izq}$  y la inclinación  $\alpha$  de su normal (el eje del arco) con la horizontal.- De dicha figura se tiene:

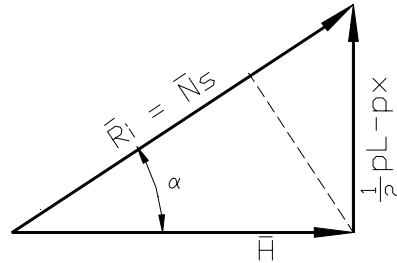


Fig. 7.18

$$N_S = -\frac{H}{\cos \alpha} = -\frac{pL/2 - p.x}{\sen \alpha}$$

En particular en los arranques se produce el esfuerzo axial máximo por ser el ángulo  $\alpha$  máximo y mínimo su coseno.- En la clave,  $\alpha = 0^\circ$ , el esfuerzo axial es mínimo y vale  $N_C = -H$  .-

Volviendo a la figura 7.17 se observa que:

$$\text{tang } \alpha_A = \text{tang } \alpha_B = \frac{2f}{L/2} = \frac{4f}{L}$$

Valor en base al que se obtiene:

$$\cos \alpha_A = 1 / \sqrt{1 + (4f/L)^2}$$

$$N_A = -\frac{H}{\cos \alpha_A} = -\frac{p.L^2}{8f} \sqrt{1 + (4f/L)^2} = N_B$$

### 7.3.3.- ARCO CIRCULAR CON ARTICULACIÓN CENTRAL.-

Siendo  $L$  la luz y  $f$  la flecha, figura 7.19, el radio de la circunferencia directriz del arco vale:

$$(AC)^2 = R^2 = (\frac{1}{2} L)^2 + (R - f)^2 = (\frac{1}{2} L)^2 + R^2 + f^2 - 2R.f$$

$$R = \frac{L^2 + 4f^2}{8f}$$

Las coordenadas del baricentro de una sección s-s definidas en función del ángulo central  $\alpha$  son:

$$x = \frac{1}{2} L - R \sen \alpha$$

$$y = R \cos \alpha - (R - f) = f - R (1 - \cos \alpha)$$

Para una carga  $p$  uniforme en toda la luz, son válidas las siguientes expresiones obtenidas para el arco parabólico (véase D.C.L. figura 7.17):

Reacciones en las articulaciones de los apoyos

$$A = \frac{1}{2} p.L ; B = \frac{1}{2} p.L ; H = \frac{p.L^2}{8f}$$

Los esfuerzos internos en la sección valen:

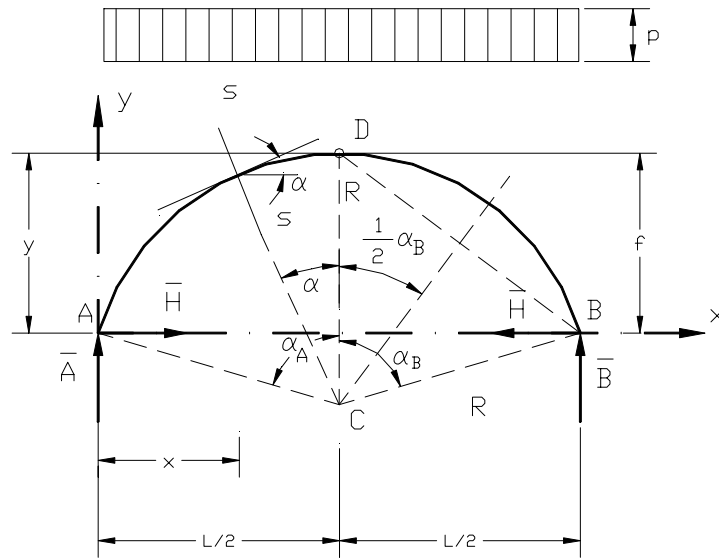


Fig. 7.19

$$M_S = \frac{1}{2} p.L.x - H.y - \frac{1}{2} p.x^2$$

$$Q_S = (\frac{1}{2} p.L - p.x) \cos \alpha - H \sin \alpha$$

$$N_S = - (\frac{1}{2} p.L - p.x) \sin \alpha - H \cos \alpha$$

Para los ángulos  $\frac{1}{2} \alpha_A = \frac{1}{2} \alpha_B$  resulta:

$$\text{tang } \frac{1}{2} \alpha_A = \text{tang } \frac{1}{2} \alpha_B = \frac{2f}{L} \quad \text{y además:} \quad x \cong \frac{L}{4}$$

Si se introducen estos valores de  $\alpha$  y  $x$  en la expresión del esfuerzo de corte resulta  $Q = 0$ .- Por lo tanto, los momentos máximos se presentan aproximadamente en los cuartos de la luz.- Para rebajes  $\frac{f}{L} \leq \frac{1}{8}$ , las diferencias con el arco parabólico son pequeñas.-

#### 7.3.4.- ARCO SIMPLEMENTE APOYADO CON CARGA CUALQUIERA.-

Sea, figura 7.20., una carga distribuida cualquiera, normal en cada sección a la tangente al eje de la directriz, y limitada a la mitad izquierda de la misma.-

Se considera al diagrama de cargas fraccionado por una sucesión de divisorias suficientemente próximas tal que los diagramas parciales puedan tomarse, sin error sensible, como trapecios, rectángulos o triángulos.- Designemos  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$  las resultantes de esos diagramas parciales: pasan por sus baricentros y actúan normalmente al arco en los puntos  $J_i$ .-

Observemos acá que si el distanciamiento entre divisorias de cargas es grande, no sólo se comete el error de la diferencia entre el diagrama parcial y la figura geométrica por la cual se sustituye, sino que, al no ser la línea cargada una recta, las fuerzas distribuidas dejan de ser paralelas, hipótesis sobre la que se determinó las resultantes de los diagramas de carga.-

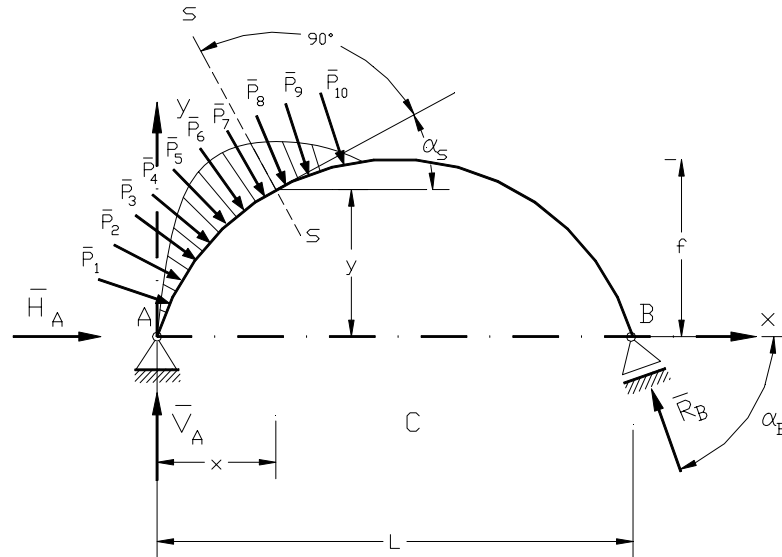


Fig. 7.20

Determinado el sistema de cargas  $\bar{P}_i$  aplicadas en los puntos  $J_i$  se descomponen las fuerzas en dos componentes según los ejes  $x$  e  $y$ , uno horizontal y el otro vertical con origen en el apoyo A.- Llamaremos  $H_i$  y  $V_i$  las proyecciones de  $\bar{P}_i$  sobre dichos ejes y se tiene:

$$\bar{P}_i = \bar{H}_i + \bar{V}_i \quad \text{con:} \quad H_i = P_i \sin \alpha_i \quad \text{y} \quad V_i = P_i \cos \alpha_i$$

Las reacciones serán:

$$+\curvearrowleft \sum M_A = \sum H_i y_i + \sum V_i x_i - R_B \sin \alpha_B \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{\sum H_i y_i + \sum V_i x_i}{L \sin \alpha_B}$$

$$+\uparrow \sum Y = V_A - \sum V_i + R_B \sin \alpha_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = -R_B \sin \alpha_B + \sum V_i$$

$$+\rightarrow \sum X = H_A + \sum H_i - R_B \cos \alpha_B = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = R_B \cos \alpha_B - \sum H_i$$

Los esfuerzos internos, figura 7.21, en una sección  $s-s$  en correspondencia con una de las divisorias de carga que intercepta al eje en un punto  $J_s$  de coordenadas  $x$  e  $y$ , serán :

$$M_s = V_A x - H_A y - \sum_A^s V_i (x - x_i) - \sum_A^s H_i (y - y_i)$$

$$Q_s = (V_A - \sum_A^s V_i) \cos \alpha - (H_A + \sum_A^s H_i) \sin \alpha$$

$$N_s = - (V_A - \sum_A^s V_i) \sin \alpha - (H_A + \sum_A^s H_i) \cos \alpha$$

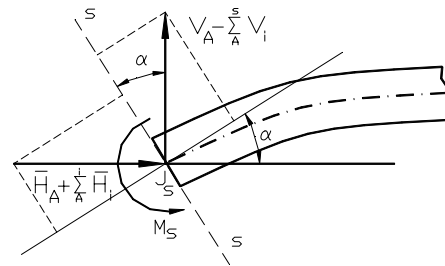


Fig. 7.21

Si se necesitase operar gráficamente, una vez determinado el sistema de cargas  $\bar{P}_i$  actuante en los puntos  $J_i$ , se traza un polígono funicular auxiliar para determinar las reacciones de apoyo.- Conocidas éstas y con polo en el vértice que ellas forman en el polígono de fuerzas (origen de la primer fuerza externa izquierda), construimos un funicular cuyos lados extremos son esas reacciones y



que debe pasar por A y por B.- Los lados de este funicular de resultantes sucesivas, son tangentes en correspondencia con las divisorias de cargas a la curva funicular o de presiones.- Trazada ésta y teniendo el polígono de fuerzas, se calculan los esfuerzos internos para cualquier sección del arco en la forma vista para el arco triarticulado.-

**7.4.- ESFUERZOS INTERNOS EN ESTRUCTURAS ESPACIALES DE ALMA LLENA.-**

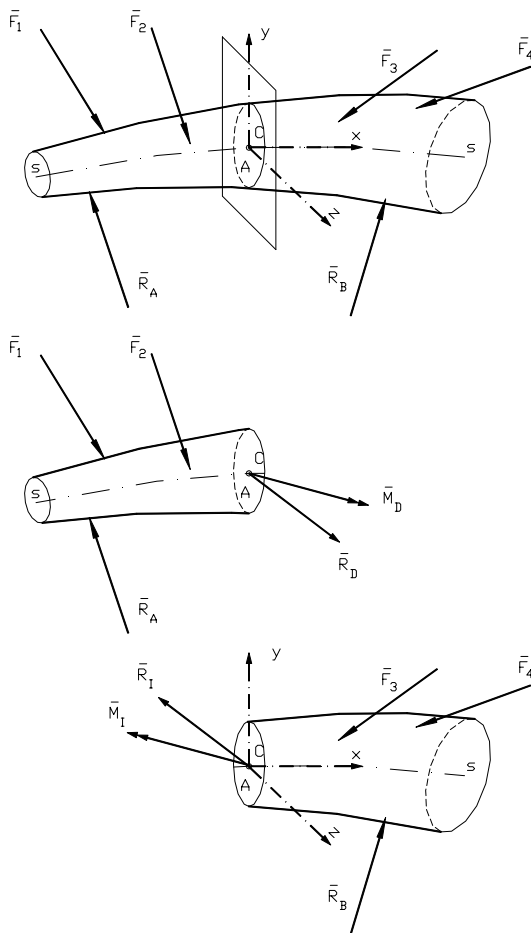


Fig. 7.22

Sea un cuerpo sólido generado por un área plana cuyo baricentro se desplaza a lo largo de una curva cualquiera s-s, plana o espacial, figura 7.22.- El área generatriz mantiene constantemente su plano perpendicular a esa línea s-s pudiendo variar o no su tamaño y forma.- A este cuerpo, considerado como estructura sometida a un sistema espacial de fuerzas, lo designaremos *viga espacial*, y la línea s-s, lugar geométrico de los baricentros de las secciones planas normales de la viga, constituye su *eje geométrico*.- La sección transversal posee dimensiones pequeñas respecto a la longitud del eje, y si bien puede variar como se ha expresado, frecuentemente se mantiene constante.- Sea además el sistema espacial de fuerzas actuantes está en equilibrio, y consideremos que todas ellas, activas y reactivas, son conocidas.-

Se practica un corte según un plano normal al eje geométrico de la viga y sea A el área de la sección geométrica obtenida.- Para restablecer el equilibrio de las dos partes en que ha quedado dividida la viga, se deben aplicar las interacciones que existían entre las partículas adyacentes al corte antes de que se efectuase el mismo.- Es decir que en la cara izquierda del corte se deben aplicar las acciones que la parte derecha de la viga le transmitía a través de todos los puntos de la sección de corte.- Viceversa, en la parte derecha se deben aplicar, sobre la cara del corte, las acciones que recibía de la parte izquierda.-

Estas acciones constituyen dos sistemas de fuerzas espaciales, iguales y opuestas, distribuidas en las dos caras del corte y pueden ser reducidos en cada una de ellas, a un sistema fuerza-par aplicado en el baricentro de la sección:  $(\bar{R}_i, \bar{M}_i)$  y  $(\bar{R}_d, \bar{M}_d)$ ; es claro que estos dos sistemas fuerza-par son iguales y opuestos.- Como se explicó para los sistemas planos, resulta evidente que la *reacción interna*  $(\bar{R}_i, \bar{M}_i)$  aplicada en el baricentro C de la cara derecha (*que define signos*) es *equilibrante* del conjunto de fuerzas actuantes a la derecha del corte (*solicitud derecha*) y *equivalente* a las fuerzas externas situadas a la izquierda del mismo (*solicitud izquierda*).- Viceversa,  $(\bar{R}_d, \bar{M}_d)$ , reacción interna aplicada en el baricentro de la cara izquierda del corte, es equivalente al sistema de fuerzas derechas y equilibrante del conjunto de fuerzas izquierdas.-

Sobre la sección A correspondiente a la cara derecha del corte tomemos una terna de ejes ortogonales con origen en su baricentro C y con las siguientes características:

- El eje “x” se toma perpendicular al plano de la sección A coincidiendo con el eje de la viga, si es rectilínea, o con su tangente en el punto C si es curvilínea.-



- Los ejes “y” y “z” se toman en el plano de la sección, coincidiendo preferentemente con sus ejes principales de inercia.-

Si se expresa la reacción interna,  $\bar{R}_i$ ,  $\bar{M}_i$ , por sus componentes rectangulares según los ejes descriptos, y recordando el apartado 2.4.3, tendremos que la resultante de todas las fuerzas izquierdas será:

$$\bar{R}_i = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$$

y el momento resultante de las fuerzas izquierdas respecto a C será:

$$\bar{M}_{C-i}^R = \sum M_X \bar{i} + \sum M_Y \bar{j} + \sum M_Z \bar{k}$$

En las cuales se tiene que:

- $X = \sum X_i$ , es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas situadas a la izquierda de la sección sobre el eje de las “x”.-
- $Y = \sum Y_i$ , es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas situadas a la izquierda de la sección sobre el eje de las “y”.-
- $Z = \sum Z_i$ , es la suma de las componentes “z” de todas las fuerzas que preceden la sección.-
- $\sum M_X$  es la suma de los momentos de todas las fuerzas izquierdas respecto al eje “x”.-
- $\sum M_Y$  es la suma de los momentos de todas las fuerzas izquierdas respecto al eje “y”.-
- $\sum M_Z$  es la suma de los momentos de todas las fuerzas izquierdas respecto al eje “z”.-

Estos seis parámetros definen las características de la sollicitación de la sección y de sus equivalentes los esfuerzos internos.- De igual modo que para los sistemas planos los esfuerzos internos pueden ser obtenidos con las fuerzas situadas a la derecha de la sección.- En el caso más general los esfuerzos internos son seis, figura 7.23, a saber:

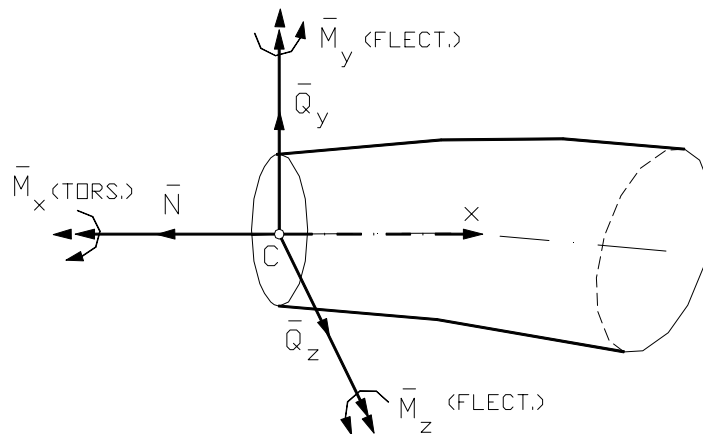


Fig. 7.23

**El esfuerzo normal** tiende a alargar o acortar la viga; está dado por:

$$N = X = \sum X_i$$

**El esfuerzo de corte** tiende a cortar la viga; está expresado por dos componentes:

$$Q_Y = Y = \sum Y_i$$



$$Q_Z = Z = \sum Z_i$$

$$Q = \sqrt{Q_Y^2 + Q_Z^2}$$

*El momento flector* tiende a doblar la viga, queda expresado por dos componentes:

$$M_{Y-FLEC} = \sum M_Y$$

$$M_{Z-FLEC} = \sum M_Z$$

$$M_{FLEC} = \sqrt{M_{Y-FLEC}^2 + M_{Z-FLEC}^2}$$

*El momento torsor* tiende a torcer la viga; está establecido por la siguiente expresión:

$$M_T = \sum M_X$$

El número de esfuerzos internos que aparecen en la sección transversal resulta inferior a seis si se cumplen algunas condiciones particulares, a saber:

- Si el eje geométrico está contenido en un plano y las fuerzas son coplanares con él, resulta  $M_T = 0$  ya que las fuerzas cortan al eje "x" en un punto propio o impropio.- Para que haya momento torsor es necesario que alguna de las fuerzas tenga componente perpendicular al plano que contiene al eje y que no lo intercepte.-
- Si además, el eje "y" coincide con la intersección del plano de las fuerzas con el plano de la sección, se anulan también  $Q_Z$  y  $M_{Y-FLEC}$  restando sólo  $N$ ,  $Q_Y$ , y  $M_{Z-FLEC}$  que es el caso de los pórticos, arcos y vigas rectas que se han visto al tratar los sistemas planos.-
- En el caso de las vigas de eje recto si, a más de las características dadas en el párrafo anterior, las cargas son normales al eje "x", se presentan solamente esfuerzos de corte  $Q_Y$  y momento flector  $M_{Z-FLEC}$  .-
- Si las fuerzas son paralelas al eje de la viga recta se presenta esfuerzo axial  $N$  y momento flector  $M_{Z-FLEC}$  .-
- Si las fuerzas son coincidentes con el eje de la barra sólo se presenta esfuerzo axial  $N$ .- Es el caso de las barras de reticulado vistas en el capítulo 5.-