CAPITULO 8

ANÁLISIS DE CABLES

8.1.- CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS, CONSTRUCTIVAS Y MECÁNICAS.-

Se da el nombre de **cable flexible** a un cuerpo que presenta las siguientes características:

- Geométricamente su longitud es muchas veces mayor que las dimensiones de su sección transversal.
- Su construcción generalmente corresponde al tipo de cordones arrollados en espiral y formados cada uno de ellos por hilos redondos arrollados también en espiras y ejecutados con un material altamente resistente a la tracción, acero en los casos de aplicación en estructuras.-
- Las dos características enunciadas hacen que los cables no constituyan cuerpos rígidos sino flexibles, es decir deformables por flexión.- Por esto, la capacidad de un cable para transmitir de sección a sección momentos flectores, esfuerzos transversales y axiales de compresión es tan pequeña que se desprecia: sólo puede resistir fuerzas axiales que le originen tracción, alargamiento.-

No siendo rígidos, ***los cables sólo constituyen elementos estructurales eficaces si las fuerzas externas que los solicitan son tales que originan en ellos esfuerzos internos axiales de tracción únicamente***.- De conformidad con lo que se ha visto en el apartado 2.8.2 esto es posible si la forma que toma el cable coincide con alguno de los infinitos polígonos (o curvas) funiculares de las cargas que actúan traccionándolo (podrían comprimirlo como en los arcos) ya que ellos son sus posibles posiciones de equilibrio estable.- Si se admite que en estas condiciones el cable constituye un hilo homogéneo, flexible e inextensible, las ecuaciones de equilibrio estático nos permitirán analizarlo determinando reacciones externas e internas como así también las características geométricas de la forma de equilibrio que el hilo tomará.-

Los cables tienen gran campo de aplicación en obras fijas de ingeniería (puentes colgantes, líneas de transmisión de energía eléctrica, tirantes de torres elevadas), en medios de transporte de pasajeros en alta montaña (ferrocarriles funiculares, medios de elevación en pistas de esquí, ascensores de edificios), y de transporte de cargas (grúas funiculares, grúas en general, montacargas).-

El análisis de los cables lo encararemos primero para cuando están solicitados por cargas concentradas fijas y por cargas distribuidas después, tal como se ha hecho anteriormente con otras estructuras ; no analizaremos el caso de cargas móviles que se presentan en funiculares y otros.-

8.2.- CABLES CARGADOS CON FUERZAS CONCENTRADAS.-

Sea un cable con sus extremos en dos soportes A y B que por el momento suponemos sean dos articulaciones fijas.- Está cargado con fuerzas concentradas verticales P_1 , P_2 ,..., P_i ,..., P_n coplanares con A y con B aplicadas en los puntos J_1 , J_2 ..., J_i ,..., J_n de intersección de sus rectas de acción con el cable, figura 8.1.- Dada su flexibilidad admitimos que estos puntos son articulaciones ubicadas en ellos.- Damos por conocidas L, las coordenadas de A y B y las abscisas de las rectas de acción de las cargas x_1 , x_2 ,..., x_i ,..x_n.-

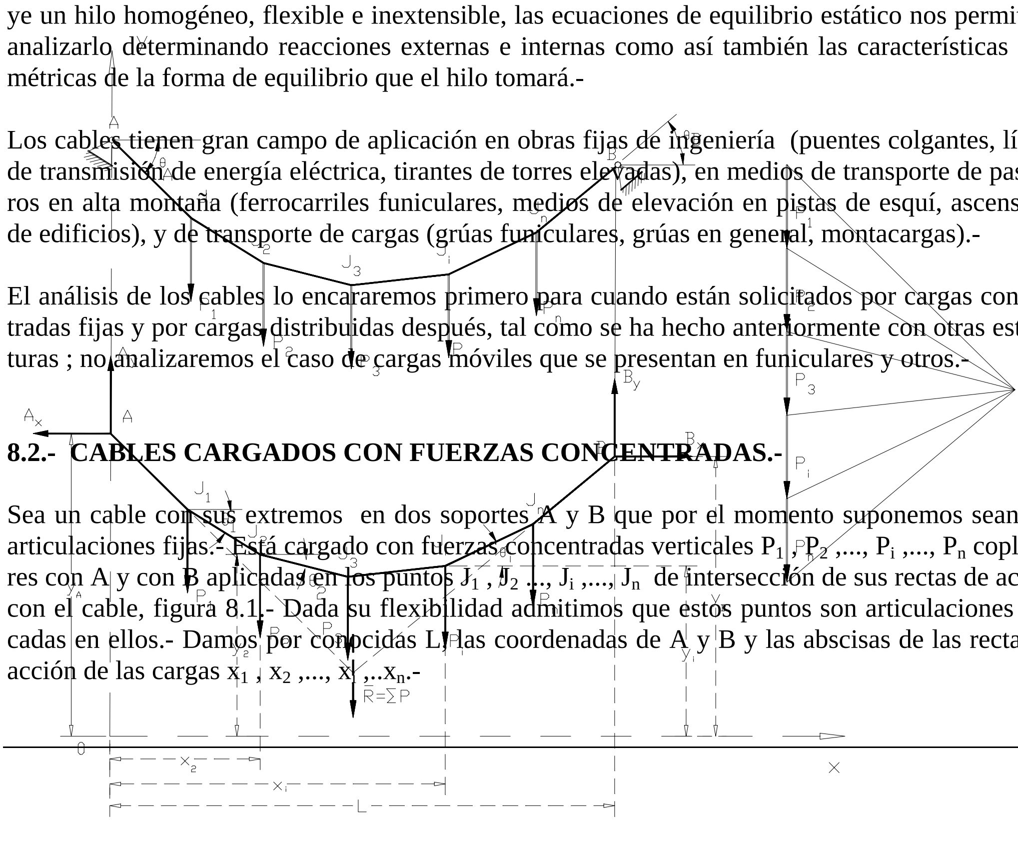

Fig. 8.1

Por A y B pasan infinitos polígonos funiculares del sistema de fuerzas actuantes: cada uno de ellos representa una forma de equilibrio posible del cable; una de ellas es el funicular dibujado en la figura 8.1 que corresponde al polígono de fuerzas actuantes cuyo polo es el punto O.- Para determinar el problema podemos fijar la posición de un tercer punto por el cual pase el polígono o curva funicular ya que por tres puntos pasa un solo funicular.- En el caso planteado de cargas concentradas pueden ser las coordenadas de uno de los vértices del polígono o un punto cualquiera de la curva funicular si la carga fuese distribuida; sea J_2 el vértice cuya posición fijamos lo que implica conocer y_2 además de x_2.-

Se va a establecer la forma del cable o sea las ordenadas de los vértices restantes J_1 , J_2 , ..., J_n ; la inclinación θ_A, θ_1, θ_2, ...,θ_n de cada uno de sus tramos; el esfuerzo de tracción T_A, T_1, T_2, ...,T_n en cada uno de ellos ; sus longitudes s_{A-1}, s_{1-2}, ..., s_{nB} y la longitud total s_{A-B} del cable.- Para ello se recurre al trazado de los diagramas de cuerpo libre (D.C.L.) de todo el cable, de tramos parciales, y de las articulaciones A y B.-

Con los datos conocidos se plantean los D.C.L. para todo el cable desde A hasta B, figura 8.1, y para el tramo A J_1 J_2 ,figura 8.2.- De ellos se obtiene, respectivamente:

$$+\hookleftarrow \sum M_B = A_Y\, L - A_X\,(y_A-y_B) -\sum P_i\,(L-x_i) = 0 \qquad (1)$$

$$+\hookleftarrow \sum M_{J2} = A_Y\, x_2 - A_X\,(y_A-y_2) - P_1\,(x_2-x_1) = 0 \qquad (2)$$

De este sistema de dos ecuaciones lineales se despejan los valores de las componentes A_X , A_Y de la reacción en el apoyo A.- Volviendo al D.C.L. de figura 8.1 , se tiene:

$$+\rightarrow \sum X = B_X - A_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_X = A_X$$
$$+\uparrow \sum Y = A_Y + B_Y - \sum P_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_Y = \sum P_i - A_y$$

Con lo que quedan calculadas las componentes B_X y B_Y de la reacción en el apoyo B.- Si se plantea el D.C.L. de la articulación A, se tiene, figura 8.3. :

$$+\rightarrow \sum X = T_A \cos\theta_A - A_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_A \cos\theta_A = A_X \quad (3)$$
$$+\uparrow \sum Y = T_A \operatorname{sen}\theta_A + A_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_A \operatorname{sen}\theta_A = -A_Y \quad (4)$$

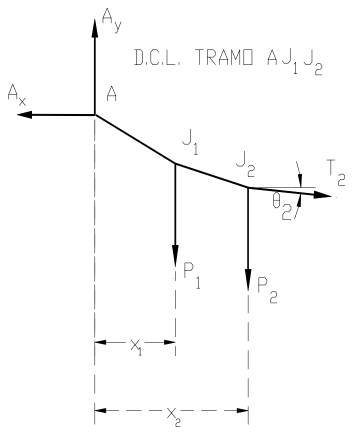

Fig. 8.2

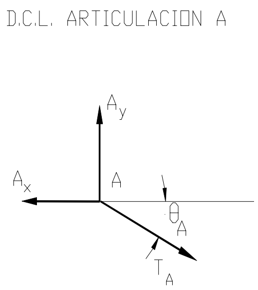

Fig. 8.3

En donde las funciones trigonométricas se toman con el signo correspondiente a su cuadrante y de tracción (positivo) el esfuerzo en el cable.- De (3) y (4) se obtiene:

$$T_A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}$$

$$\tan\theta_A = -\frac{A_Y}{A_X} = \frac{y_1 - y_A}{x_1 - x_A} \qquad \Rightarrow \qquad y_1 = y_A + (x_1 - x_A)\tan\theta_A$$

$$\cos\theta_A = \frac{A_X}{T_A} \qquad ; \qquad s_{A-1} = \frac{x_1 - x_A}{\cos\theta_A}$$

Para el tramo AJ_1 del cable, figura 8.4. será:

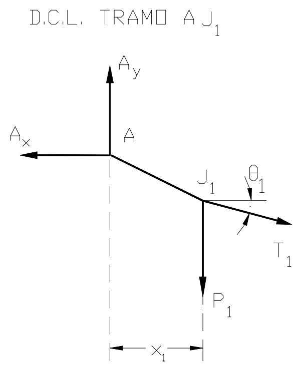

Fig. 8.4

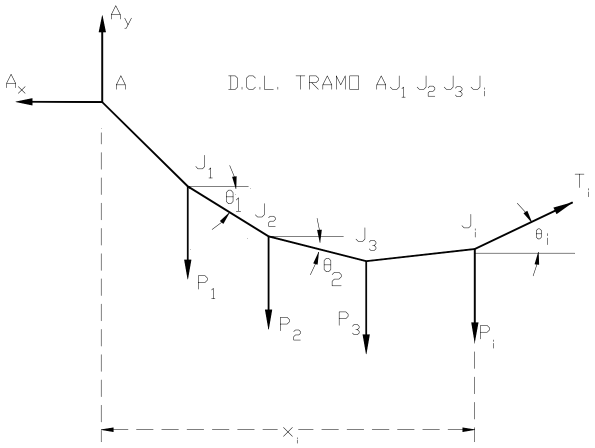

Fig. 8.5

$$\sum X = -A_X + T_1\cos\theta_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_1\cos\theta_1 = A_X$$
$$\sum Y = A_Y - P_1 + T_1\,\text{sen}\,\theta_1 = 0 \;\Rightarrow\; T_1\,\text{sen}\,\theta_1 = -A_Y + P_1$$

De estas expresiones de las componentes A_X y A_Y se obtiene:

$$T_1 = \sqrt{A_X^2 + (-A_Y + P_1)^2}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{-A_Y + P_1}{A_X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \Rightarrow \qquad y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)\tan\theta_1$$

$$\cos\theta_1 = \frac{A_X}{T_1} \qquad ; \qquad s_{1-2} = \frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_1}$$

Para el tramo de cable AJ_1J_2 se tendrá, figura 8.2. :

$$+\!\rightarrow \sum X = -A_X + T_2\cos\theta_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_2\cos\theta_2 = A_X$$
$$+\!\uparrow \sum Y = A_Y - P_1 - P_2 + T_2\,\text{sen}\,\theta_2 = 0 \;\Rightarrow\; T_2\,\text{sen}\,\theta_2 = -A_Y + P_1 + P_2$$

De estas dos expresiones de las componentes de T_2 se tiene:

$$T_2 = \sqrt{A_X^2 + (-A_Y + P_1 + P_2)^2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{A_X}{T_2} \qquad ; \qquad \tan\theta_2 = \frac{-A_Y + P_1 + P_2}{A_X} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$s_{2-3} = \frac{x_3 - x_2}{\cos\theta_2} \qquad ; \qquad y_3 = y_2 + (x_3 - x_2)\tan\theta_2$$

Con lo que quedan calculados los parámetros del tramo.-

Si se traza el D.C.L. para el tramo A J_1 J_2 ...J_i correspondiente a la parte del cable comprendida entre el apoyo izquierdo A y el punto de aplicación de la carga genérica P_i , figura 8.5. , se tiene:

$$+\rightarrow \sum X = -A_X + T_i \cos\theta_i = 0 \quad \Rightarrow \quad T_i \cos\theta_i = A_X$$

$$+\uparrow \sum Y = A_Y - \sum P_i + T_i \operatorname{sen}\theta_i = 0 \Rightarrow T_i \operatorname{sen}\theta_i = -A_Y + \sum P_i$$

$$T_i = \sqrt{A_X^2 + (-A_Y + \sum P_i)^2} \qquad T_i = \frac{A_X}{\cos\theta_i}$$

$$\cos\theta_i = \frac{A_X}{T_i} \quad ; \quad \operatorname{tang}\theta_i = \frac{-A_Y + \sum P_i}{A_X} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\Delta s_{i-(i+1)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\cos\theta_i} \quad ; \quad s_{AB} = \sum s_i \quad ; \quad y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)\operatorname{tang}\theta_i$$

Se observa lo siguiente:

- La componente horizontal del esfuerzo en el cable, $T_i \cos\theta_i$, tiene un valor constante igual a A_X en toda la longitud del cable.- Obsérvese que todas las cargas son verticales.-
- El esfuerzo en el cable T_i queda expresado por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes rectangulares según los ejes x e y ; se lo puede expresar además por el cociente entre la componente horizontal de la reacción de apoyo y el coseno del ángulo de inclinación , θ_i , del tramo considerado.- ***El máximo valor del esfuerzo en el cable, T_{max} , se presenta en el tramo para el cual ese coseno es mínimo, lo que sucede cuando la inclinación θ_i es máxima : esto se alcanza en uno de los tramos adyacentes a sus soportes.-***

8.3.- CABLES CARGADOS CON FUERZAS DISTRIBUIDAS.-

Si las cargas que actúan son distribuidas, el cable toma la forma de su curva funicular y la reacción interna en un punto cualquiera es una fuerza de tracción de dirección tangente a ella en el punto considerado.- Para cada tipo de carga corresponde una curva funicular distinta: parábola de segundo grado si la intensidad de la carga es constante.-

Desde el punto de vista de las aplicaciones de la ingeniería, el análisis se encara desde el siguiente punto de vista:

- Si el esfuerzo de tracción que los soportes ejercen reactivamente sobre el cable son tan elevados que se originan curvas con flechas pequeñas en relación a la distancia entre ellos, se puede tomar, sin gran error, su peso constante en proyección horizontal: la funicular resultará una parábola cuadrática.- Se admite que esto sucede cuando la flecha es menor o igual a un octavo de la luz : **f ≤ L / 8** y al cable en este estado se lo designa como ***cable tenso***.- La distancia horizontal “L” entre los soportes A y B se llama ***luz del cable***, y la distancia vertical máxima entre la cuerda AB y la tangente al cable paralela a AB, es la ***flecha.-***
- Si la flecha es mayor que el octavo de la luz, **f > L / 8** , la magnitud de la variación de la inclinación del cable hace que la proyección de su propio peso no pueda considerarse constante a lo largo de su luz.- La funicular correspondiente a la acción exclusiva del peso propio es un curva llamada ***catenaria*** ; bajo este estado al cable se lo designa ***cable flojo***.-

8.3.1.- ANÁLISIS DE CABLES TENSOS.-

8.3.1.1.- **Soportes a igual nivel.-**

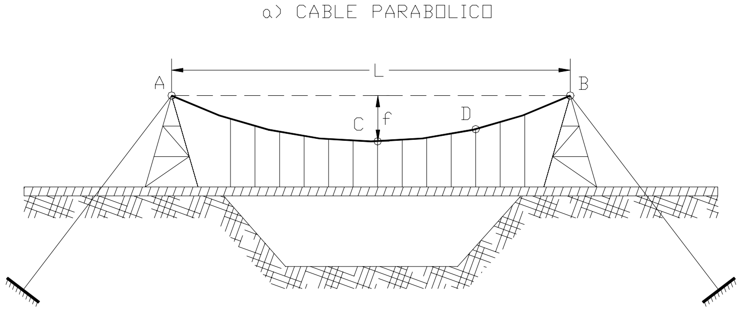

Fig. 8.6

Los cables de los puentes colgantes pueden considerarse solicitados por una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal ya que, el peso de los cables es pequeño comparado con el peso de la carga permanente que se toma uniforme: tableros de puentes carreteros o ferroviarios, tuberías para transporte de fluidos, etc., figura 8.6.- En el caso representado se ubican los soportes a igual nivel.- Siendo "p" la intensidad de carga por metro lineal se traza el D.C.L. del tramo CD del cable; C es su punto más bajo y está determinado por la horizontalidad de su tangente (paralela a la cuerda AB, horizontal en este caso) y D un punto genérico cualquiera de coordenadas "x" e "y".- El origen de coordenadas coincide con C siendo horizontal el eje de las "x" y vertical el "y".- Se tiene, figura 8.7. :

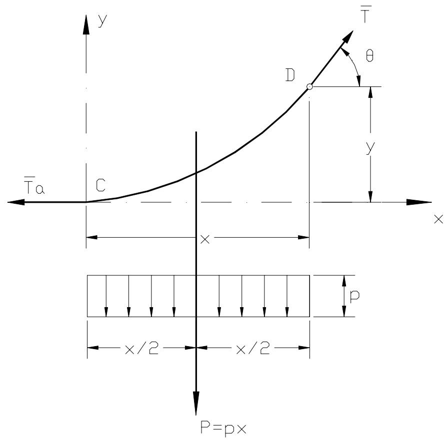

Fig. 8.7

$+\rightarrow \sum X = -T_0 + T\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = T_0$

$+\uparrow \sum Y = -px + T\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T\,\mathrm{sen}\,\theta = px$

Que establecen el valor de las componentes rectangulares del esfuerzo en el cable; su módulo e inclinación valen:

$$T = \sqrt{T_0^2 + p^2x^2} \qquad (1)$$

$$\mathrm{Tang}\,\theta = \frac{px}{T_0} \qquad (2)$$

$$\theta = \mathrm{arc\ tang}\frac{px}{T_0} = \mathrm{tang}^{-1}\frac{px}{T_0}$$

Como el punto D puede ser cualquiera se deduce que la componente horizontal del esfuerzo del cable es constante para cualquiera de sus puntos e igual al esfuerzo mínimo T_0 en el punto más bajo ($x = 0$; $\theta_C = 0$).- El esfuerzo máximo en el cable se presenta en sus extremos A y B donde el valor absoluto de x es máximo y su inclinación también es máxima.- Con $x = \pm L/2$, será:

$$T_{max} = T_B = T_A = \sqrt{T_0^2 + \frac{p^2L^2}{4}}$$

$$\mathrm{tang}\,\theta_{máx} = \frac{pL}{2T_0} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{máx} = \mathrm{arc\ tang}\frac{pL}{2T_0} = \tan^{-1}\frac{pL}{2T_0}$$

La tercer ecuación de equilibrio, aplicada al D.C.L. del tramo CD, permite determinar la ecuación de la curva que adopta el cable:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = T_0\, y - ½\, px^2 = 0 \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{px^2}{2T_0} \qquad (3)$$

que es una parábola cuadrática de parámetro $\mathbf{k} = \dfrac{p}{2T_0}$ (4)

Si en la ecuación de la curva se introducen las coordenadas del extremo B se tiene:

$$f = \frac{pL^2}{8T_0} \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = \frac{pL^2}{8f} \qquad (5)$$

que permite calcular el valor de T_0, a introducir en las expresiones anteriores, en función de la intensidad de la carga y de la luz y flecha del cable.-

Si se abandonase la suposición de la articulación fija en los extremos (figura 8.3) sustituyéndola por el dispositivo de la figura 8.6, se equilibra la tensión del cable T_A con dos fuerzas: una vertical de compresión en la columna y la otra de tracción según la dirección de la prolongación del cable.- Éste se amarra a un muro o masa de hormigón bajo tierra, asegurando la estabilidad del conjunto por el peso de la masa de anclaje y el empuje de tierras.-

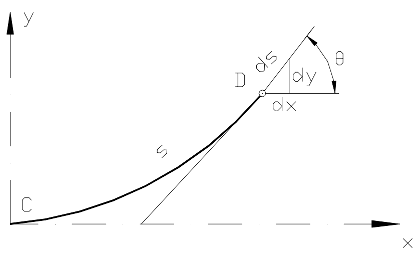

Fig. 8.8

Para **establecer la longitud del cable,** se considera un tramo de longitud "s" de cable comprendido entre el punto más bajo C y un punto D cualquiera de coordenadas "x" e "y", figura 8.8.- A partir de este último se proyecta un tramo "ds"(infinitésimo) de cable sobre las paralelas a los ejes pasantes por el punto D.- Se tendrá:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

Si se reproduce y deriva la ecuación del cable se tiene:

$$y = \frac{px^2}{2T_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{px}{T_0} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{p^2x^2}{T_0^2}$$

Reemplazando e integrando, se tiene:

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{p^2x^2}{T_0^2}} \qquad \Rightarrow \qquad s_{CB} = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{p^2x^2}{T_0^2}}\, dx$$

Para resolver esta integral resulta práctico desarrollar el radical en serie binomia :

$$\sqrt{1+z} = 1 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{8}z^2 + ...$$

$$\sqrt{1 + \frac{p^2x^2}{T_0^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{p^2x^2}{T_0^2} - \tfrac{1}{8}\frac{p^4x^4}{T_0^4} + ...$$

Esta serie resulta convergente para valores de $z = \frac{p^2 x^2}{T_0^2} < 1$.- Reemplazando valores en esta expresión se tiene: si $x = 0$ es $z = 0$ y si $x = ½ L$ es $z = 16\left[f/L \right]^2$.- En los cables tensos es $\frac{f}{L} \le \frac{1}{8}$, y para ellos resulta $z \le 0{,}25$ lo que permite operar con los dos primeros términos de la serie por ser despreciable la suma de los términos no considerados.-

Por lo tanto la longitud del tramo CB de cable vale:

$$s_{CB} = \int_0^{x_B} \left[1 + \frac{p^2 x^2}{2T_0^2} \right] dx = \int_0^{x_B} dx + \frac{p^2}{2T_0^2} \int_0^{x_B} x^2 dx = x_B + \frac{p^2 x_B^3}{6T_0^2} = x_B \left[1 + \frac{p^2 x_B^2}{6T_0^2} \right]$$

Multiplicando el segundo término entre corchetes por el cociente y_B^2 / y_B^2 expresado en función del valor de $y_B = px_B^2 / 2T_0$ obtenido de la ecuación de la parábola aplicada al punto B, se llega a:

$$s_{CB} = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right] \qquad \text{Análogamente se obtiene} \qquad s_{CA} = x_A \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_A}{x_A} \right)^2 \right]$$

Dado que en el caso en análisis los soportes se consideran al mismo nivel, se tiene:

$x_A = x_B = ½ L$ e $y_A = y_B = f$ reemplazando en la anterior resulta:

$$s_{AB} = 2\, s_{CB} = L \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{f}{L} \right)^2 \right]$$

8.3.1.2.- **Soportes a distinto nivel.-**

En este caso (figura 8.9.) el punto más bajo C (determinado por la horizontalidad de su tangente), no coincide con la mitad de la luz del cable donde ubica la flecha fijada por la tangente paralela a la cuerda AB, por tratarse de una parábola cuadrática.- Con el objeto de utilizar las expresiones obtenidas en el apartado anterior, ubiquemos el origen de coordenadas en el punto C y tomemos los ejes coordenados como en el caso anterior , uno horizontal y el otro vertical.-

Seccionemos el cable en C y tracemos los D.C.L. para los tramos AC y CD del cable.- Se conoce $y_C = 0$, por haber tomado el origen en C ; L, y_A e y_B por ser datos del problema ; debemos calcular las abscisas x_A , x_B y el esfuerzo mínimo en el punto más bajo T_0 .-

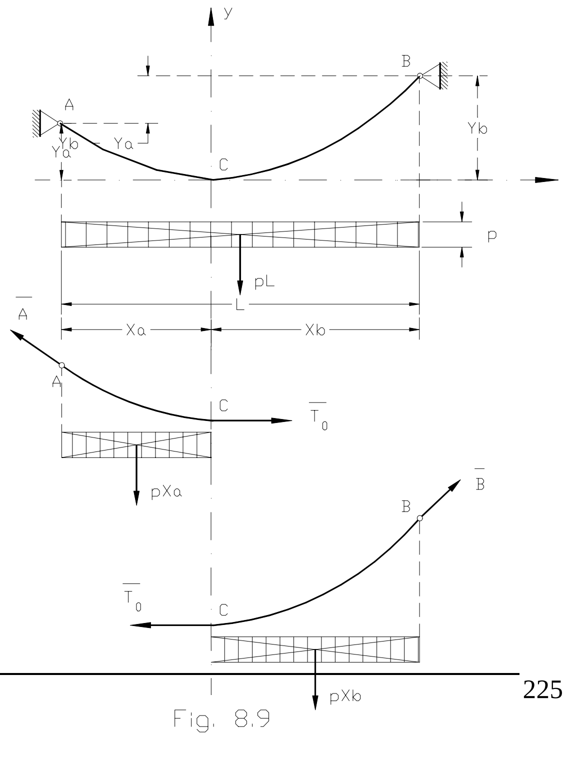

Fig. 8.9

Del D.C.L. tramo AC, y del D.C.L. tramo CB, respectivamente se tiene:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = px_A \cdot \tfrac{1}{2} x_A - T_0 y_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{px_A^2}{2y_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_A^2}{y_A} = \frac{x_B^2}{y_B} \qquad (1)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = -px_B \cdot \tfrac{1}{2} x_B + T_0 y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{px_B^2}{2y_B} \Rightarrow$$

Si observamos que $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $x_A + x_B = L$ (2)

Despejando x_A de (2) e introduciéndola en (1) se obtiene una ecuación de segundo grado que permite calcular x_A , x_B , T_0 .- Estos valores, introducidos en las expresiones del apartado 8.3.1.1., dan solución a la determinación del resto de los parámetros característicos del cable.-

8.3.2.- ANÁLISIS DE CABLES FLOJOS CON SOPORTES A IGUAL NIVEL.-

Cuando un cable se encuentra sometido a su propio peso, caso de los cables de líneas eléctricas, el valor de la intensidad de carga vertical es distinta del peso “g” por unidad de longitud de cable en razón de la fuerte variación de la inclinación θ del mismo a lo largo de su luz.- Cuando la relación f/L es mayor que 1/8 esa diferencia es grande no siendo admisible fundar el cálculo en la hipótesis de la uniformidad de la intensidad de carga a lo largo de la horizontal.- La intensidad de carga es variable y vale:

$$p = g/\cos\theta$$

como cosθ es mínimo en los extremos y máximo en el centro, la carga será máxima en los apoyos y mínima en el centro del tramo, figura 8.10.-

La curva representativa de las posiciones de equilibrio de un hilo pesado, homogéneo, totalmente flexible e inextensible, suspendido en dos puntos se llama **catenaria.-** Es una curva de eje vertical que constituye la curva funicular de la intensidad de carga real del hilo, g/cos θ.- Entre dos puntos fijos, A y B, existen infinitas catenarias del cable de peso “g”, variando para cada una de ellas la flecha y la longitud.-

En las líneas eléctricas, por razones de seguridad, es necesario fijar la distancia mínima del cable a tierra en función de la tensión eléctrica a que trabaja la línea de transmisión de energía.- Cuando los soportes se encuentran a igual nivel, eso implica fijar la flecha de la catenaria con lo cual se establece la posición del punto C más bajo del cable.- El problema consiste ahora en determinar las características de la catenaria que pasa por A, B y C.-

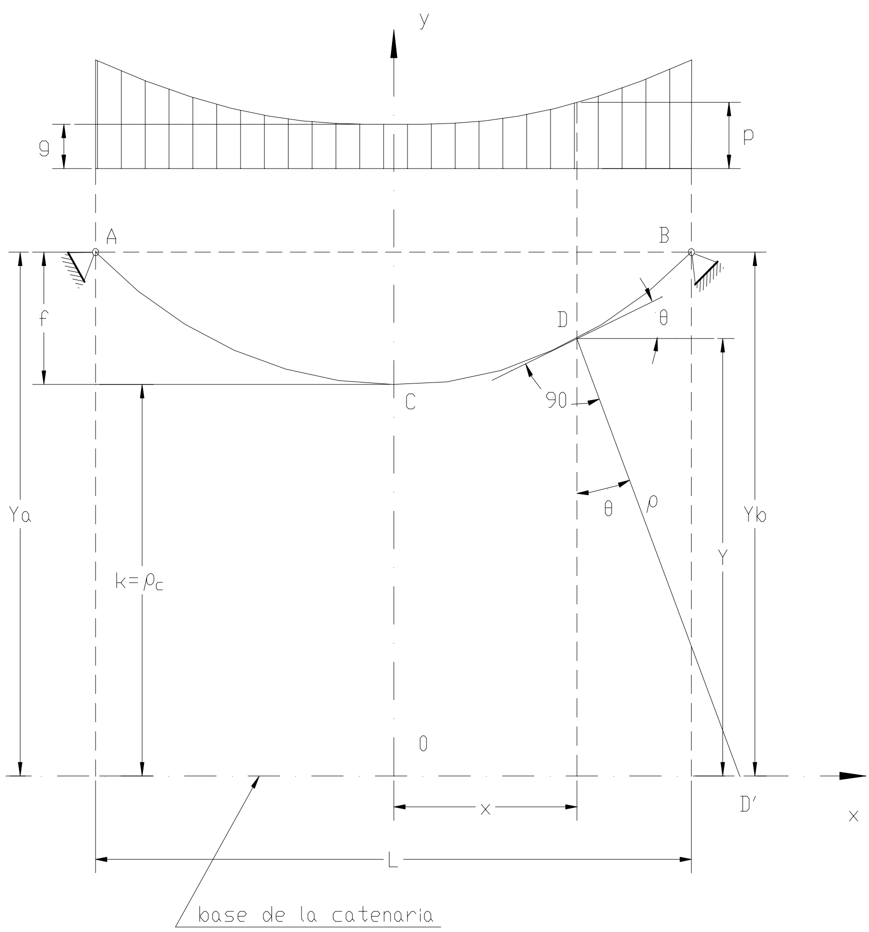

Fig. 8.10

Tomemos vertical al eje de ordenadas “y”, imponiéndole la condición de pasar por el punto C ; no se establece por el momento la posición del eje horizontal “x”.- A continuación se traza el diagrama de cuerpo libre del tramo CD de cable, figura 8.11.- Si llamamos “s” la longitud del tramo CD su peso será G = g.s , su recta de acción vertical, sentido hacia abajo pero no se conoce la posición de su recta de acción dada por la abscisa del punto medio de la longitud “s”.- Se tendrá:

$$+\rightarrow \sum X = -T_0 + T\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T\cos\theta = T_0$$

De donde:

$$+\uparrow \sum Y = -G + T\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T\,\mathrm{sen}\,\theta = G$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + G^2} \quad ; \quad \cos\theta = T_0/T \quad ; \quad \mathrm{tg}\,\theta = G/T_0 = \frac{gs}{T_0}$$

De la última ecuación, se obtiene:

$$s = \frac{T_0}{g}\tan g\theta \qquad \text{en donde} \qquad \frac{T_0}{g} = k$$

Es un valor constante determinante de las características geométricas de una única catenaria por lo cual es denominado **parámetro de la catenaria;** la dimensión de k es una longitud igual al radio de curvatura en el vértice C; su magnitud determina la posición de una recta normal al eje “y” designada **directriz o base de la catenaria,** figuras 8.10 y 8.11**.- E**l segmento DD’ de recta normal a la catenaria en uno cualquiera de sus puntos determina, entre éste y su intersección con la base, la longitud del radio de curvatura en ese punto ρ = DD’ = $y/\cos\theta$: el centro de curvatura está ubicado en oposición a D’, del lado convexo de la curva.-

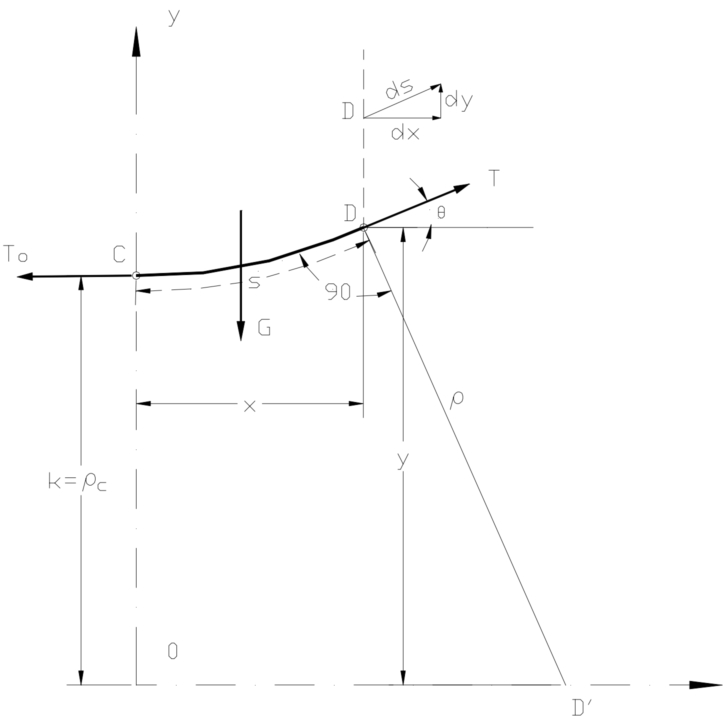

Fig. 8.11

Tomemos a la recta base como eje de las “x” con lo cual, la ordenada del vértice C de la curva y_C resultará igual al parámetro k, cuyo valor, por el momento, no conocemos.-

$$y_C = k$$

La ordenada de los apoyos en caso de estar a igual nivel valdrá:

$$y_A = y_B = y_C + f = k + f$$

Definido el parámetro k, expresemos algunos de los valores ya obtenidos en función del mismo:

Componente horizontal del esfuerzo en el cable $T_0 = gk$
Peso del tramo “s” de cable $G = gs$
Esfuerzo en un punto genérico D $T = \sqrt{T_0^2 + G^2} = g\sqrt{k^2 + s^2}$ (1)

Se desarrolla a continuación, a título ilustrativo o de consulta, la secuencia analítica que permite determinar características geométricas de la catenaria en función del parámetro k.- Las expresiones resultantes se sintetizan más adelante.-

Si en la figura 8.11. a partir del punto D, consideramos un elemento infinitésimo de cable “ds” cuyas proyecciones sobre los ejes son “dx” y “dy”.- Se tiene:

$$dx = \cos\theta \, .ds = \frac{T_0}{T} ds = \frac{g.k.ds}{g\sqrt{k^2+s^2}} = k\frac{ds}{\sqrt{k^2+s^2}} = k\frac{d(s/k)}{\sqrt{1+(s/k)^2}} = dx \quad (2)$$

Previo a integrar la (2) se van a recordar algunos conceptos sobre funciones hiperbólicas y de área.- Las ***funciones hiperbólicas*** se definen en base de las siguientes expresiones:

Seno hiperbólico de φ : $u = \text{senh}\,\varphi = ½\,(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$

Coseno hiperbólico de φ : $v = \cosh\varphi = ½\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$

Las funciones hiperbólicas "u" y "v" están tabuladas en manuales de matemáticas o pueden obtenerse directamente con una calculadora científica; el argumento "φ" se expresa en radianes.- Si se aplican sus expresiones o se recurre a una calculadora se obtiene que para "$\varphi = 0$" resulta "senh 0 = 0" y "cosh 0 = 1" , coincidiendo para este valor particular con las funciones circulares seno y coseno.- Para valores reales de la variable "φ", la función seno hiperbólico varía de "$-\infty$" a "$+\infty$" pasando por el valor 0 y se ubica en el primer y tercer cuadrante, para "$\varphi > 0$" y "$\varphi < 0$" respectivamente; la función coseno hiperbólico varía de "+1" a "$+\infty$" desarrollándose en el primer cuadrante para "$\varphi > 0$" y en el segundo para "$\varphi < 0$".- En abscisas se lleva el argumento "φ" y en ordenadas las funciones "u" o "v".-

Si se suma y se resta "v" y "u" , y luego se multiplican sus resultados, se tiene:

$$v + u = \cosh\varphi + \text{senh}\,\varphi = e^{\varphi} \qquad ; \qquad v - u = \cosh\varphi - \text{senh}\,\varphi = e^{-\varphi}$$

$$(v + u)\ (v - u) = \cosh^2\varphi - \text{senh}^2\varphi = 1$$

Obsérvese la similitud de forma de esta expresión con la conocida relación ($\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$) entre las funciones circulares seno y coseno, sólo las diferencia el signo de la función seno hiperbólico.- Si ahora derivamos "u" y "v" respecto de φ, se tiene:

$$du/d\varphi = d\,\text{senh}\,\varphi / d\varphi = \cosh\varphi \qquad \text{que integrada da:} \qquad \text{senh}\,\varphi = \int \cosh\varphi \, d\varphi$$

$$dv/d\varphi = d\cosh\varphi / d\varphi = \text{senh}\,\varphi \qquad \text{que integrada da:} \qquad \cosh\varphi = \int \text{senh}\,\varphi \, d\varphi$$

También similares a las funciones circulares diferenciándose en el signo de las derivada de la función "v" y de la integral de la función "u".-

La inversión de las funciones hiperbólicas da por resultado las ***funciones de área*** , así llamadas por estar relacionadas con el área de un sector de hipérbola.- Comparadas con las inversas de las funciones circulares recordemos que éstas están relacionadas con un arco de circunferencia.- Si se tiene:

$$\text{senh}\,\varphi = u$$

su función inversa φ, será:

$$\varphi = \text{ár senh } u = \text{senh}^{-1} u$$

que se lee φ igual al área cuyo seno hiperbólico es u, o a la inversa del seno hiperbólico de u.- Lo mismo para:

$$\cosh\varphi = v$$

$$\varphi = \text{ár cosh } v = \cosh^{-1} v$$

que se lee φ igual al área cuyo coseno hiperbólico es v, o a la inversa del coseno hiperbólico de v.-

Recordados estos conceptos, prosigamos con la integración de la (2) ; para ello se recurre a las tablas de integración de funciones irracionales y lo haremos de extremo a extremo del tramo de catenaria en consideración, o sea entre el vértice C (x=0 ; s=0) y el punto genérico D (abscisa x ; longitud arco s): se tiene:

$$x = k\int_0^s \frac{d(s/k)}{\sqrt{1+(s/k)^2}} = k\left[\operatorname{senh}^{-1}(s/k)\right]_0^s = k.\operatorname{senh}^{-1}(s/k)$$

Pasando k al primer miembro e invirtiendo, se tiene:

$$(x/k) = \operatorname{senh}^{-1}(s/k) \quad \therefore \quad (s/k) = \operatorname{senh}(x/k) \quad ; \quad \text{operando} \quad s = k \operatorname{senh}(x/k) \qquad (3)$$

Observando nuevamente la figura 8.11, se tendrá:

$$dy = \tan g\ \theta\ .\ dx = \frac{G}{T_0}dx = \frac{gs}{gk}dx = \operatorname{senh}\frac{x}{k}\ dx$$

Integrando entre C ($x_C = 0$; $y_C = k$) y D ($x_D = x$; $y_D = y$) :

$$\int_k^y dy = \int_0^x \operatorname{senh}(x/k)dx = k\int_0^x \operatorname{senh}(x/k)\ d(x/k)$$

$$y\text{-}k = k\ \left[\cosh(x/k)\right]_0^x = k\cosh(x/k) - k$$

$$\mathbf{y = k \cosh (x/k) \qquad (4)}$$

Que es la ecuación de una catenaria de eje vertical.- Elevando al cuadrado las ecuaciones (4) y (3), restando miembro a miembro (4) menos (3) y despejando la función y, se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} y^2 = k^2 \cosh^2 (x/k) & (4) \\ s^2 = k^2 \operatorname{senh}^2 (x/k) & (3) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 - s^2 = k^2 \\ y = \sqrt{k^2+s^2} \end{array}\right.$$

Sustituyendo esta última en la (1) queda : $T = gy$

Cuyos máximo y mínimo se producirán en los puntos de máxima y mínima ordenada.-

Resumamos los resultados obtenidos:

- Parámetro de la catenaria $k = T_0 / g$
- Abscisa del punto genérico $x = k \operatorname{senh}^{-1} (s/k) = k$ ár senh (s/k)
- Ecuación de la catenaria $y = k \cosh (x/k) = \sqrt{k^2+s^2}$
- Longitud del arco de catenaria $s = k \operatorname{senh} (x/k)$
- Esfuerzo o “tensión” en un punto $T = gy$
- Peso de un arco de cable $G = gs$
- Componente horizontal del esfuerzo $T_0 = gk$
- Ordenada de los apoyos $y_A = y_B = k+f$

Se ha dicho que existen infinitas posiciones de equilibrio del cable que pasa por dos puntos fijos : cada una de ellas estará caracterizada por un valor distinto de k.- Fijando la abscisa y la ordenada de un punto adicional, u otras dos condiciones equivalentes, queda determinada la catenaria correspondiente a la única posición de equilibrio posible que cumpla la condición de pasar por los tres puntos dados.- En el caso que se considera de soportes a igual nivel, el parámetro “k” se puede calcular fijando dos de las tres siguientes características geométricas: luz del vano L, longitud s y flecha f del cable.- Obtenido el parámetro “k”, como se verá a continuación, se calcula el resto de los valores requeridos.-

8.3.2.1.- Cálculo del parámetro k conocidas la luz L del vano y la flecha f de la catenaria.-

Se dispone de las dos relaciones independientes siguientes:

- Ecuación de la catenaria **$y = k \cosh (x/k)$**
- Relación entre el parámetro, la flecha y la ordenada de B **$y_B = k + f$**

Como para el punto B ($x = ½ L$; $y = y_B$) de la catenaria, el valor de “k” debe ser tal que satisfaga a ambas expresiones, se tiene:

$$y_B = k \cosh ½ (L / k) \qquad (a)$$
$$y_B = k + f \qquad (b)$$

Para determinar el valor del parámetro k, es práctico recurrir al método de aproximaciones sucesivas utilizando tablas de funciones hiperbólicas y de área o una calculadora científica.- Para ello se introduce en la ecuación (a) un valor estimado del mismo, k'_1, que permite obtener un primer valor de la ordenada y_{B1} del apoyo B.- Evidentemente, introducido en la ecuación (b) no la va a satisfacer pero posibilita obtener un nuevo valor k_1 del parámetro; con él se establece la diferencia entre el valor calculado y el valor estimado: $\Delta_1 = k_1 - k'_1$ la que podrá ser positiva o negativa.- Estimando un segundo valor k'_2 se repite el procedimiento anterior obteniéndose una segunda diferencia entre los valores calculado y estimado: $\Delta_2 = k_2 - k'_2$.-

Comparando Δ_1 con Δ_2 se puede establecer el sentido de la búsqueda de valores de tanteo ya que las diferencias Δ_i deben ir reduciendo su valor absoluto hasta llegar, teóricamente, a cero.- Cuando cambia el signo de estas diferencias se habrá sobrepasado el valor de k que satisface ambas ecuaciones; se puede entonces ajustar la solución hasta obtener diferencias tan pequeñas como se necesite.-

8.3.2.2.- Cálculo del parámetro k conocidas la longitud s_{AB} del cable y la flecha f de la catenaria.-

Las ecuaciones anteriores permiten calcular directamente el valor del parámetro.- Efectivamente, para el punto B de abscisa ½ L y longitud de cable $s_{CB} = ½ s_{AB}$ se tiene:

$$y_B = \sqrt{k^2 + s_{CB}^2} \qquad (a)$$
$$y_B = k + f \qquad (b)$$

Igualando (a) con (b) y operando se tiene:

$$k + f = \sqrt{k^2 + s_{CB}^2}$$
$$k^2 + 2kf + f^2 = k^2 + s_{CB}^2$$
$$k = \frac{s_{CB}^2 - f^2}{2f}$$

Determinado k, se calculan las restantes incógnitas geométricas y estáticas.-

8.3.2.3.- Cálculo del parámetro k conocidas la luz L del vano y la longitud s_{AB} del cable.-

La ecuación

$$s = k \operatorname{senh} (x/k)$$

aplicada al punto B, con $s_{CB} = ½\, s_{AB}$ y $x = ½\, L$, luego de pasar k al primer miembro será:

$$\frac{s_{AB}}{2k} = \operatorname{senh} \frac{L}{2k}$$

despejando, queda:

$$k = \frac{s_{AB}}{2 \operatorname{senh}(L / 2k)}$$

Se introduce un valor aproximado k'_1 en el segundo miembro de la ecuación y se calcula el primer valor k_1 del parámetro; se efectúa la diferencia $\Delta_1 = k_1 - k'_1$.- Luego se estima k'_2 y se calcula k_2 cuya diferencia será $\Delta_2 = k_2 - k'_2$.- En forma similar a la anteriormente explicada se prosigue hasta que la diferencia entre el valor calculado y el estimado sea tan pequeña como se requiera.-