



CAPÍTULO 9

ESTRUCTURAS PLANAS BAJO LA ACCIÓN DE CARGAS MÓVILES

9.1.- CARGAS ACCIDENTALES FIJAS Y MÓVILES.-

Designamos como carga a toda fuerza externa activa aplicada a una estructura.- Las hemos diferenciado por la forma en que están aplicadas: concentradas cuando lo es sobre un punto y distribuidas cuando lo es sobre una sucesión de puntos a lo largo del eje de la estructura o parte de él.- A ambas las hemos considerado ubicadas en una determinada posición, sin considerar si ésta es permanente o accidental.-

Cargas permanentes son cargas concentradas o distribuidas que actúan continua e invariablemente como ser: el peso propio de la estructura y de la superestructura sustentada por ella (pavimentos, cielosrasos, cubiertas de techo), empuje de tierras, etc...-

Cargas accidentales son las que actúan discontinuamente pudiendo experimentar o no variaciones como ser las cargas útiles o sobrecargas (peso de personas, mercaderías, muebles, máquinas, vehículos), empuje de líquidos o materiales a granel sobre los recipientes que los contienen, las fuerzas producidas por agentes naturales (acciones sísmicas, empuje del viento, peso de la nieve, variaciones volumétricas originadas por cambios térmicos, etc...)- Se observa, en los ejemplos dados, que unas son fijas y otras móviles y que, tanto unas como las otras, pueden ser de intensidad variable.-

En cuanto a los efectos que las cargas accidentales originan en las estructuras, **es importante el tiempo en que las variaciones de intensidad o posición se producen.**- Efectivamente, en algunos casos dicho tiempo es muy breve (instantáneo en el caso de las percusiones como ser el impacto de la masa sobre la cabeza del pilote) imprimiendo en la estructura aceleraciones y fuerzas de inercia elevadas que se traducen en vibraciones: son acciones dinámicas que están fuera del campo de la estática y que, por su importancia, son motivo de estudios especiales en otras materias de la ingeniería.- En otros casos las variaciones de las cargas accidentales se producen en tiempos mayores **originando cambios suaves, paulatinos, no causantes de vibraciones permitiendo considerarlas como acciones estáticas**, que serán las que tendremos en estudio.-

Es evidente que **los efectos que una carga móvil produce en la estructura que la sustenta** (caso de un vehículo que circula sobre un puente por ejemplo) **varían a medida que aquélla va cambiando de posición:** si el efecto que consideramos es la reacción en el apoyo por el cual ingresa el vehículo, su valor será igual al peso de éste en el instante inicial y se irá reduciendo a medida que avanza hasta alcanzar un valor nulo al ubicarse sobre el apoyo por el cual egresa del puente.- Es necesario entonces, **para conocer el valor de un cierto efecto** (una reacción externa o un esfuerzo interno) **en una sección preestablecida** (apoyo izquierdo o derecho, mitad de la luz u otro punto intermedio cualquiera), **determinar la ley de variación del mismo en función de la posición de la carga** (expresada en la generalidad de los casos por su abscisa) **y, en particular, el mayor valor que alcanza ese efecto y la abscisa de la posición que lo produce.**-

Esto se realiza convenientemente por **el método de las líneas de influencia** que permite obtener no sólo los objetivos enunciados, sino también, para cargas accidentales móviles trazar el **diagrama envolvente que consiste en un diagrama representativo de los máximos valores que un cierto efecto puede alcanzar en cada una de las secciones de la estructura.**-

9.2.- MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA.-

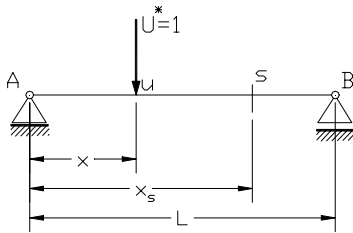


Fig. 9.1

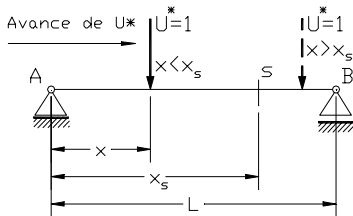
Este método, en lugar de comenzar el análisis de la estructura bajo la acción de las cargas móviles reales a que estará sometida, lo hace considerando inicialmente que actúa una sola carga concentrada, móvil, de intensidad unitaria “ $U^* = 1$ ” y dirección constante.- Su posición la establece la abscisa “ x ” sobre un eje coincidente con el de la estructura, perpendicular al cual se mantiene la carga en su desplazamiento sobre ella, figura 9.1.-

En el caso de los sistemas estructurales rígidos, tal como se consideran los sistemas isostáticos, el efecto en consideración podrá ser una cualquiera de las siguientes magnitudes físicas:

- Una de las componentes, M_s^* , Q_s^* , N_s^* , de la reacción interna originada en una sección determinada de una estructura plana de alma llena.-
- Reacción interna de una barra de reticulado T_{i-j}^* .-
- Reacción de vínculo externo: R_A^* , R_B^* , M_A^* , M_B^* , o sus componentes vertical u horizontal V_A^* , V_B^* , H_A^* , H_B^* .-
- Reacción interna en la articulación relativa entre dos chapas, o sus componentes.-

En las notaciones adoptadas para las magnitudes precedentes los subíndices ($s - A - B - i - j$) indican la sección, el apoyo o los extremos de la barra donde se produce la magnitud que se investiga, y al asterisco * se lo utiliza para indicar que se trata del efecto producido por una carga unitaria de las características dadas.- Estas notaciones se emplearán cuando se trate a cada una de las magnitudes en particular, pero al hablar genéricamente de cualquiera de ellas utilizaremos la designación E_s^* que se leerá **efecto o influencia de la carga unitaria en la sección “s”**.-

Volvamos a la figura 9.1. , y consideremos que en un instante determinado la carga unitaria está aplicada en un punto “u” de abscisa “x” : su efecto o influencia sobre la magnitud en consideración tomará un cierto valor, E_s^* .- Pero como la posición de la carga variará de instante a instante, variará también el valor de E_s^* en función de la variación de “x”.- Se tendrá:



$$E_s^* = f(x)$$

Esta función representa la **ecuación de la línea de influencia** que, referida al eje de abscisas (designado como base de la línea de influencia) representa **el valor que toma la magnitud E^* en la sección fija “s” por influencia de la carga unitaria móvil**.- Su representación gráfica se designa **línea de influencia del efecto E_s^*** , y cada una de sus ordenadas expresan el valor de éste cuando la carga móvil se ubica en correspondencia con la vertical de la ordenada que se lee.-

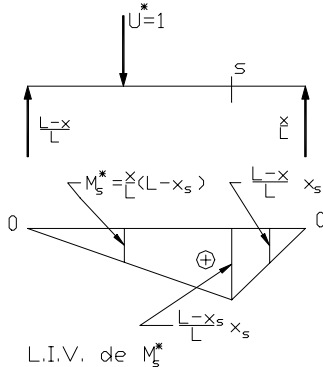


Fig. 9.2

De lo expresado surge un primer procedimiento para calcular las ordenadas de la línea de influencia , es designado **estático** porque utiliza exclusivamente recursos que brinda esta disciplina.- **Consiste en lo siguiente: se supone que la carga unitaria actúa en el punto “u”, figura 9.2; se determinan las reacciones que se originan en los apoyos y se traza el diagrama de cuerpo libre.- A partir de éste se determina el valor de la magnitud considerada en la sección “s” que se lleva a escala en correspondencia con la vertical de “u”.- Se repite este cálculo para distintos puntos de aplicación de $U^* = 1$, lo que permite trazar la línea de influencia**

por puntos.- En casos simples es sencillo plantear estáticamente la o las ecuaciones que definen la línea de influencia, como se verá a continuación.-



9.3.- TRAZADO DE LÍNEAS DE INFLUENCIA : MÉTODO ESTÁTICO.-

Sea la viga simplemente apoyada de la figura 9.2.- Se quiere obtener la ecuación y el trazado de la línea de influencia del momento flector en la sección “s” para cargas que actúan verticalmente: sintéticamente la designaremos con la sigla L.I.V. de M_s^* .-

Conocida la abscisa de “s” y supuesta la carga unitaria en el punto “u” de abscisa “x”, *se traza el D.C.L y se calculan las reacciones en A y B*.- Se establece ahora las ecuaciones que expresan el momento flector a uno y otro lado de la sección “s” ya que, para cada una de dichas posiciones, la función momento queda definida por expresiones distintas:

- Si $U^* = 1$ actúa a la izquierda de “s” es “ $x < x_s$ ”: resulta más sencillo calcular el momento flector en dicha sección utilizando la reacción en B por ser la única fuerza actuante a su derecha en cambio, a su izquierda, actúan dos fuerzas; se tiene:

$$M_s^* = \frac{x}{L} (L - x_s) \quad (1)$$

- Si “ $U^* = 1$ ” actúa a la derecha de “s” es “ $x > x_s$ ”: conviene tomar el momento en dicha sección considerando la reacción en A ya que es la única fuerza aplicada a su izquierda en cambio, a su derecha, actúan dos fuerzas; será:

$$M_s^* = \frac{L - x}{L} x_s \quad (2)$$

Representadas gráficamente las dos funciones se habrá trazado la línea de influencia pedida que será binaria por estar definida por dos funciones distintas.- Como ambas son lineales es suficiente representar dos de sus puntos y trazar la recta que los une:

- En la (1) si $x = 0$ la carga actúa en el apoyo A y resulta: $M_s^* = 0$
 si $x = x_s$ la carga actúa en “s” y resulta: $M_s^* = \frac{x_s}{L} (L - x_s)$
- En la (2) si $x = x_s$ la carga actúa en “s” y resulta: $M_s^* = \frac{L - x_s}{L} x_s$
 si $x = L$ la carga actúa en el apoyo B y resulta: $M_s^* = 0$

Se adopta una escala para representar los momentos flectores y se hace la representación gráfica de ambas ecuaciones que, como se dijo, constituye la L.I.V. de M_s : sus ordenadas se miden verticalmente en la escala utilizada y cada una de ellas da el momento flector que, en la sección s, produce la carga unitaria cuando está ubicada en la vertical de la ordenada que se lee.- Estas ordenadas las designaremos con la letra griega heta η ; además se coloca en el gráfico el signo del momento flector en correspondencia con la posición de la carga unitaria: positivo en este caso para toda la luz de la viga.-

Multiplicando la longitud de η (expresada en centímetros), por la escala adoptada (que llamaremos escala de influencia), se tiene:

$$M_s^* = \eta(\text{cm}) \times \text{Escala de influencia}$$

La dimensión de las ordenadas de la línea de influencia queda determinada por la dimensión del cociente entre la dimensión de la magnitud estudiada (kilográmetros, por ejemplo) y la dimensión de la fuerza unitaria (adimensional si se toma $U^* = 1$); la escala de influencia será: $\alpha \text{ kgm/l cm}$.-

Si además de la L.I.V. de M_s^* se necesitara la del esfuerzo de corte en la sección “s”, Q_s^* , o de las reacciones en los apoyos, R_A^* , R_B^* , se procede en forma igual a la efectuada para M_s^* , lo que se resume en la figura 9.3., y en la tabla siguiente donde se vuelcan las respectivas ecuaciones de influencia:



Posición de la carga unitaria	$R_A^* (x_S = 0)$	$R_B^* (x_S = L)$	M_S^*	Q_S^*
$x < x_S$ tramo de "A" a "s"	no existen secciones con $x < x_S$	$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L}(L - x_S)$	$-\frac{x}{L}$
$x > x_S$ tramo de "s" a B	$\frac{L-x}{L}$	no existen secciones con $x > x_S$	$\frac{L-x}{L} x_S$	$\frac{L-x}{L}$

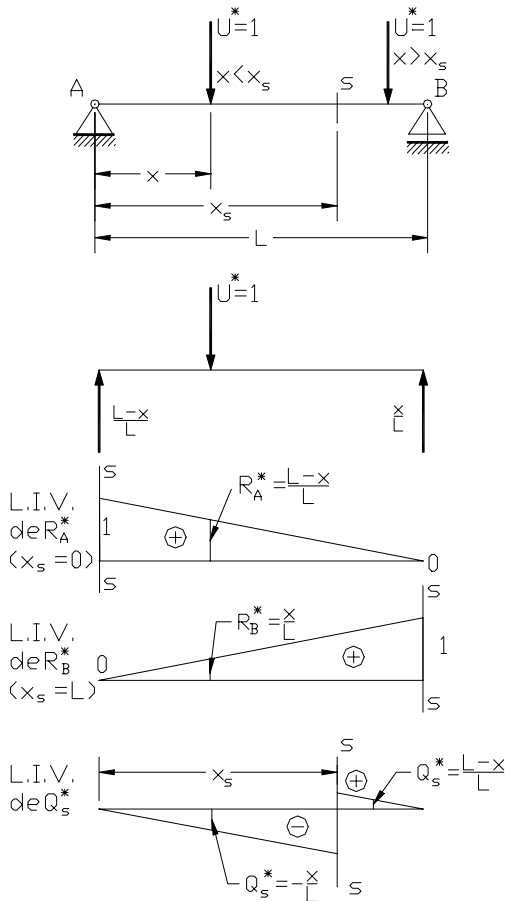


Fig. 9.3

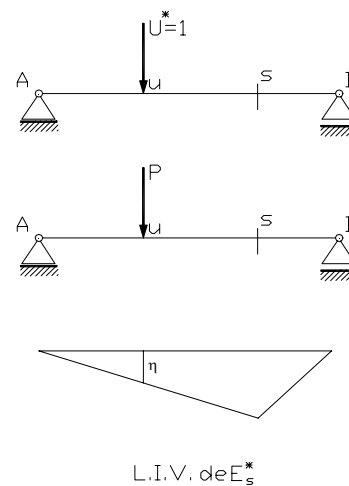


Fig. 9.4

Las líneas de influencia de las reacciones de apoyo consisten en un único segmento de recta que se extiende de extremo a extremo ; en cambio las de los esfuerzos internos consta de dos segmentos de recta, presentando una discontinuidad en correspondencia con "s".-

No obstante la sencillez conceptual del método estático, su aplicación resulta conveniente sólo en los casos de estructuras simples por cuanto, para las más complejas, la determinación de las ecuaciones de influencia requeridas es laboriosa.- En el apartado 9.9 se verá el método aplicado al trazado de líneas de influencia por puntos combinándolo con el método cinemático.-

9.4.- INFLUENCIA DE CARGAS CONCENTRADAS.-



Trazada la línea de influencia de una magnitud estática en una sección de una estructura se conoce el valor que toma esa magnitud cuando es recorrida por una carga unitaria de dirección predeterminada, vertical u horizontal generalmente.- Siendo E_S^* el valor, efecto o influencia de la carga unitaria, **al actuar una carga de igual dirección pero de intensidad P veces mayor**, figura 9.4., **por el principio de independencia de las acciones y superposición de los efectos la influencia E_S de \bar{P}** valdrá:

$$E_S = E_S^* \cdot P$$

Pero siendo

$$E_S^* = \eta \cdot \text{Escala de influencia}$$

será:

$$E_S = P \cdot E_S^* = P \cdot \eta \cdot \text{Escala de influencia}$$

Si en lugar de una sola carga P tuviésemos varias paralelas a U^* , P_1, P_2, P_3 , figura 9.5. aplicadas en los puntos u_1, u_2, u_3 de la estructura, la influencia de este sistema de cargas será:

$$E_S = (P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3) \cdot \text{Escala de influencia}$$

$$E_S = (\sum P \cdot \eta) \cdot \text{Escala de influencia}$$

Expresión que define la **influencia de un sistema de cargas concentradas paralelas a $U^* = 1$** .-

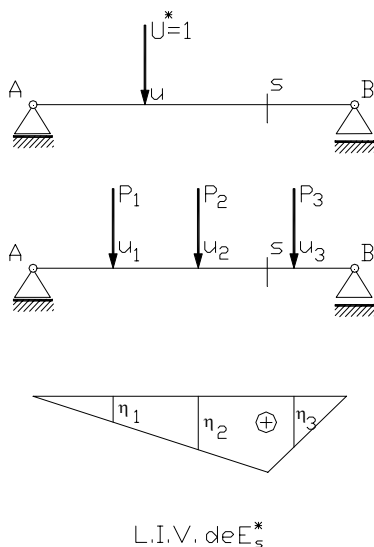


Fig. 9.5

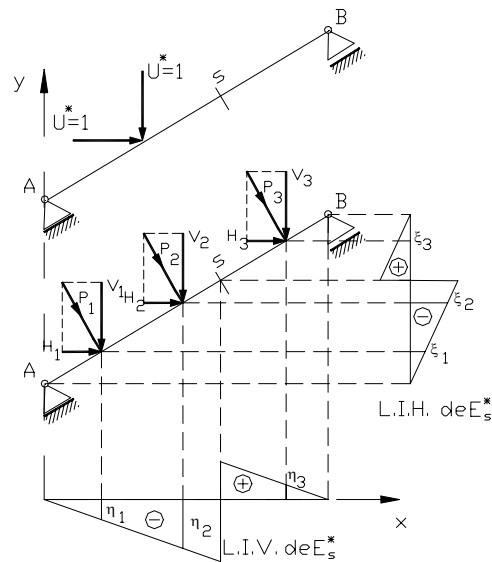


Fig. 9.6

Sea ahora un sistema de cargas concentradas de cualquier dirección aplicadas sobre un viga simplemente apoyada de eje inclinado, figura 9.6.- Sean además conocidas la L.I.V. y la L.I.H. de una magnitud E_S^* cuya naturaleza no precisamos.- Con iguales razonamientos que los expuestos para cargas verticales se obtiene que la abscisa ξ (x_i) de la línea de influencia horizontal nos dará, en una cierta escala, el valor de la magnitud E_S^* en la sección "s" cuando en correspondencia con ella actúa una fuerza unitaria horizontal $U^* = 1$.-

Sea $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ el sistema de fuerzas concentradas aplicadas en los puntos u_1, u_2, u_3 que expresamos por sus componentes rectangulares horizontal y vertical.- Se tiene:

$$\bar{P}_1 = \bar{V}_1 + \bar{H}_1 \quad \bar{P}_2 = \bar{V}_2 + \bar{H}_2 \quad \bar{P}_3 = \bar{V}_3 + \bar{H}_3$$



Por el principio de superposición de efectos e independencia de acciones, la influencia de cada una de las fuerzas dadas es igual a la suma de la influencia de sus respectivas componentes actuando independientemente.- La influencia del sistema en la sección “s”, valdrá:

$$E_s = \text{Influencia de } \bar{P}_1 + \text{Influencia de } \bar{P}_2 + \text{Influencia de } \bar{P}_3$$

que expresada en función de sus componentes toma la siguiente forma:

$$E_s = \text{Infl. de } V_1 + \text{Infl. de } H_1 + \text{Infl. de } V_2 + \text{Infl. de } H_2 + \text{Infl. de } V_3 + \text{Infl. de } H_3$$

Expresando éstas en función de las intensidades de las componentes por sus respectivas ordenadas de influencia y ordenando primero las verticales y luego las horizontales, será:

$$E_s = (V_1 \eta_1 + V_2 \eta_2 + V_3 \eta_3 + H_1 \xi_1 + H_2 \xi_2 + H_3 \xi_3) \cdot \text{Esc. Infl.}$$

Sintetizando se tiene como expresión final de la influencia de un sistema de fuerzas concentradas de cualquier dirección la siguiente expresión:

$$E_s = (\sum V \eta + \sum H \xi) \cdot \text{Escala de influencia}$$

en la cual las sumatorias deben extenderse a las componentes de todas las fuerzas del sistema, debiendo considerarse las ordenadas η y abscisas ξ con el signo indicado en la respectiva línea de influencia ; las componentes de las fuerzas se tomarán positivas o negativas según tengan el sentido de la rama positiva del eje correspondiente o el opuesto.-

9.5.- INFLUENCIA DE CARGAS DISTRIBUIDAS.-

Para establecer la influencia de una carga distribuida de intensidad “p” constante, figura 9.7, se comienza considerando la influencia de una carga infinitésima, “p.dx”, actuante sobre el elemento “dx” de longitud de la viga, que vale:

$$dE_s = E_s^* \cdot dP = \eta \cdot p \cdot dx \cdot \text{Esc. Infl.}$$

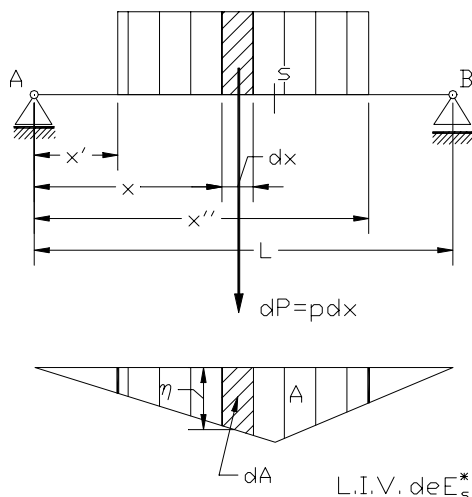


Fig. 9.7

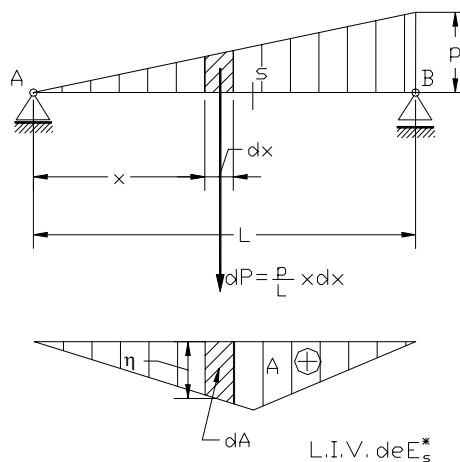


Fig. 9.8



Integrando en toda la longitud cargada y omitiendo el factor Esc.Infl. dando por sobrentendido que cada vez que aparezca la ordenada “ η ” o “ ξ ” de línea de influencia debe ser interpretada en su correspondiente escala:

$$E_S = \int_{x'}^{x''} dE_S = p \int_{x'}^{x''} \eta dx = p.A$$

Es decir que la **influencia de una carga uniformemente distribuida es igual al producto de la intensidad de carga por el área de influencia** que es el área delimitada por la línea de influencia, su base y las ordenadas correspondiente a los extremos de la carga.- Si multiplicamos y dividimos por la longitud cargada $x''-x'$ se tendrá la siguiente expresión:

$$E_S = p.A = p.A \cdot \frac{x''-x'}{x''-x'} = P \cdot \eta_m$$

Que expresa que la **influencia de una carga uniformemente distribuida también puede obtenerse como producto de su resultante por la ordenada media del área de influencia.**-

Si la carga distribuida varía linealmente en toda la luz de la viga, figura 9.8. será:

$$dE_S = E_S^* \cdot dP = \eta \frac{P}{L} \cdot x \cdot dx$$

$$E_S = \frac{P}{L} \int_0^L x \cdot \eta dx = \frac{P}{L} \int_0^L x \cdot dA = \frac{P}{L} S_0$$

En donde S_0 es el momento estático del área de influencia respecto al eje “y” pasante por el extremo izquierdo de la carga.- Si se recuerda además que “ $S_0 = x_C \cdot A$ ”, en donde “A” es el área de influencia correspondiente a la longitud cargada y “ x_C ” la abscisa de su baricentro tomada con origen en el extremo izquierdo de la carga, se tendrá:

$$E_S = \frac{P}{L} S_0 = \frac{P}{L} \cdot A \cdot x_C = p \cdot \eta_m \cdot x_C$$

En donde η_m es la ordenada media del área de influencia, es decir el cociente entre el área del diagrama de carga y la longitud cargada.-

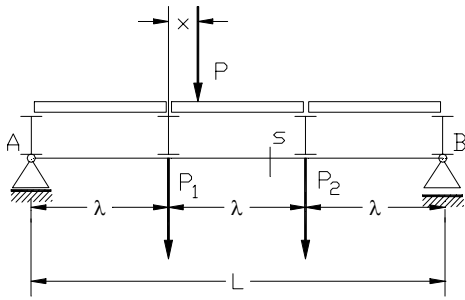
9.6.- INFLUENCIA DE CARGAS TRASMITIDAS INDIRECTAMENTE.-

Sea AB, figura 9.9, la viga principal que recibe una carga concentrada a través de viguetas transversales.- Sean además: A’C’B’ la L.I.V. de E_S^* en el supuesto que la carga actuase directamente sobre la viga principal; “s” una sección cualquiera de ésta y P la carga que actúa sobre el tramo donde se ubica la sección considerada.- La carga puede expresarse por dos componentes P_1 y P_2 paralelas a P, y aplicadas directamente a la viga principal AB por las viguetas adyacentes a ella- Se tiene:

$$P = P_1 + P_2 \quad \text{con : } P_1 = \frac{\lambda - x}{\lambda} \cdot P \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{x}{\lambda} \cdot P$$

Por el principio de independencia de acciones y superposición de efectos la influencia de P actuando indirectamente será igual a la suma de las influencia de sus componentes, P_1 y P_2 , que actúan directamente, es decir:

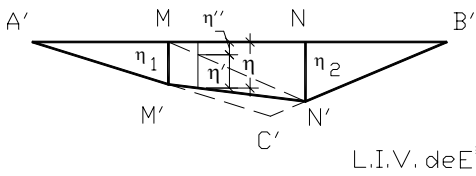
$$E_S = \text{Infl.de } P = \text{Infl.de } P_1 + \text{Infl.de } P_2$$



Expresando la influencia de las componentes en función de las ordenadas de la línea de influencia conocida resulta:

$$E_s = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 = P \left[\frac{\lambda - x}{\lambda} \eta_1 + \frac{x}{\lambda} \eta_2 \right]$$

Si en el trapecio MM'NN' se traza la diagonal MN', por semejanza de triángulos resulta que los segmentos η' y η'' que ella determina sobre la vertical de P valen:



$$\eta' = \frac{\lambda - x}{\lambda} \eta_1 \qquad \eta'' = \frac{x}{\lambda} \eta_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, se tiene finalmente:

$$E_s = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 = P [\eta' + \eta''] = P \eta$$

Fig. 9.9

En donde η es la ordenada en correspondencia con P que responde a una variación lineal entre puntos de transmisión de la carga.- M'N' será entonces la línea de influencia para el tramo de viga comprendido entre las viguetas adyacentes a la carga.-

En resumen, cuando una fuerza concentrada o distribuida se transmite a la estructura en forma indirecta, se traza la línea de influencia de la magnitud que se considera como si la carga se aplicase directamente a la estructura, línea A'C'B'.- En aquellos tramos entre vigueta y vigueta donde esta línea no responda a una única ley lineal, se la corrige mediante una recta M'N'.- La influencia de la fuerza sobre la incógnita considerada se obtendrá en este tramo multiplicando la intensidad de la carga por la ordenada que corresponda a su posición, medida hasta la recta de corrección M'N'.- Si la carga fuese distribuida, el área de influencia también se medirá hasta dicha recta de corrección.-

9.7.- MÉTODO CINEMÁTICO.- FUNDAMENTOS.-

Las líneas de influencia pueden trazarse en la forma analítica vista, o por métodos diversos de los que se desarrollará el método cinemático.- Para ello se requiere recordar y complementar conocimientos vistos en el primer curso de Física y que se tratan a continuación.-

9.7.1.- COMPLEMENTOS DE CINEMÁTICA PLANA.-

9.7.1.1.- Rotación infinitésima de un chapa rígida en su plano.-

Sea, figura 9.10.(a), un punto móvil que en un cierto instante ocupa la posición A.- Al cabo de un tiempo Δt pasa a la posición A' describiendo una trayectoria cualquiera.- El vector que va de la posición inicial a la posición final, $\overline{AA'} = \delta_A$, se designa **desplazamiento o corrimiento del punto A**.- Depende exclusivamente de las posiciones extremas independientemente de la trayectoria descrita en su movimiento.-

Supongamos ahora que la chapa (S), ubicada en un plano vertical en el cual "x" es horizontal e "y" vertical, figura 9.10.(b), experimenta una rotación en su plano alrededor del eje perpendicular Oz pasando a la posición (S'), la recta OA girará un ángulo θ que representa la intensidad de la rotación



de la chapa.- El punto A describirá una trayectoria circular con centro en el polo O y pasará a ocupar la posición A' efectuando el desplazamiento $\overline{AA'}$.-

Si se considera que la rotación θ es infinitamente pequeña se puede establecer la igualdad y coincidencia de la cuerda AA', con el arco que subtiende AA', y la tangente AA''.- Se puede entonces, en los casos de θ infinitamente pequeña, tomar como desplazamiento al vector $\overline{AA''}$, perpendicular a \overline{OA} y de intensidad:

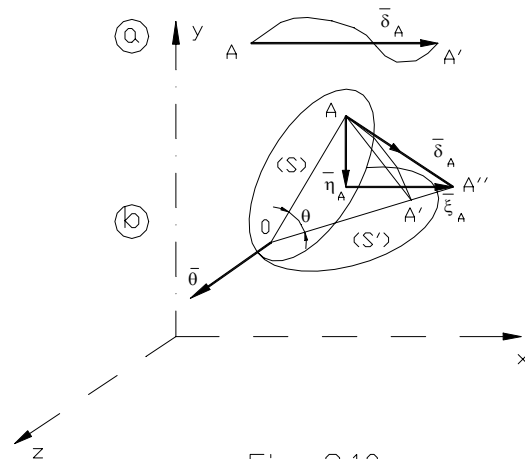


Fig. 9.10

$$\delta_A = AA'' = OA \cdot \tan \theta = OA \cdot \theta = AO \cdot \theta$$

Prescindiendo del concepto matemático de “infinitamente pequeño” se toman como infinitésimas aquellas rotaciones que, dado su grado de pequeñez, escapan a la apreciación de los aparatos de medición de uso común en la construcción.- En lo sucesivo, y mientras no se exprese lo contrario, al hablar de rotaciones se entenderá rotaciones infinitésimas que cumplen que $\theta = \tan \theta$.- Es el caso general de las deformaciones elásticas experimentadas por las estructuras, cuya magnitud es despreciable frente a las dimensiones de estas últimas no alterándose la configuración de las mismas y requiriéndose aparatos especiales para su medición.-

En mecánica, las rotaciones de los cuerpos se caracterizan por un vector de intensidad igual al valor del ángulo rotado; de recta de acción determinada por el eje de rotación perpendicular al plano de las trayectorias de los puntos del cuerpo; y de sentido determinado por la regla de “la mano derecha”.- En el presente capítulo mantendremos los sentidos de los ejes “x” $\rightarrow +$ e “y” $\uparrow +$ pero, para las rotaciones tomaremos como positivas las horarias “mano izquierda”.- Por ello, y dadas las características del vector $\bar{\theta}$ y del vector posición \overline{AO} del centro de rotación respecto al punto considerado, se puede expresar vectorialmente el desplazamiento $\bar{\delta}_A$ y sus componentes escalares vertical η_A y horizontal ξ_A :

$$\bar{\delta}_A = \overline{AO} \wedge \bar{\theta} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_0 - x_A & y_0 - y_A & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \end{vmatrix}$$

Por ser:

- El desplazamiento $\bar{\delta}_A$ perpendicular al plano definido por el punto A y el vector rotación $\bar{\theta}$.-
- Su intensidad δ_A resulta la obtenida más arriba ya que el ángulo formado por los dos vectores factores es recto y su seno igual a uno.-
- La rotación $\bar{\theta}$ se coloca con signo negativo para adecuar la convención de signos a utilizar con la terna de ejes dextrógiros fijado para el cálculo vectorial.-

La expresión anterior nos dice que *el desplazamiento que efectúa un punto cualquiera de una chapa rígida en virtud de una rotación infinitésima en su plano es igual al momento del vector rotación respecto al punto considerado.*- Desarrollando el determinante resulta:

$$\bar{\delta}_A = -(y_0 - y_A) \cdot \theta \cdot \bar{i} + (x_0 - x_A) \cdot \theta \cdot \bar{j} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \xi_A = -(y_0 - y_A) \cdot \theta = (y_A - y_0) \cdot \theta \\ \eta_A = (x_0 - x_A) \cdot \theta = -(x_A - x_0) \cdot \theta \end{cases} \quad (1)$$



A estas componentes del desplazamiento $\bar{\delta}_A$ del punto se las denomina, abreviada pero no correctamente, como *desplazamiento horizontal y vertical del punto A.*

9.7.1.2.- **Diagramas de desplazamientos debidos a una rotación.-**

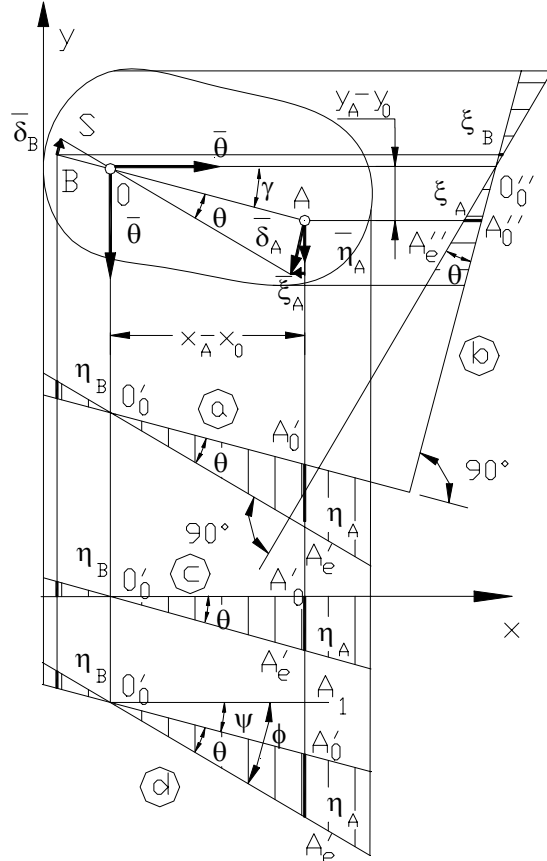


Fig. 9.11

Sea ahora la chapa de la figura 9.11., que experimenta una rotación horaria θ alrededor del polo O.- Siendo la chapa rígida, la rotación θ tiene el mismo valor para cualquiera de sus puntos, y por las (1), los valores de ξ_A y de η_A son proporcionales a $(y_A - y_0)$ y a $(x_A - x_0)$ respectivamente.- Esto significa que el *desplazamiento horizontal, o vertical, de un punto cualquiera de una chapa rígida que experimente una rotación θ es igual al producto de la intensidad de ésta por la distancia vertical $(y_A - y_0)$, u horizontal $(x_A - x_0)$ desde el punto al polo O.*

Como para todos los puntos de la chapa situados sobre una recta horizontal, o vertical, sus distancias vertical $(y_A - y_0)$, u horizontal $(x_A - x_0)$, al polo son iguales, resultarán también iguales sus corrimientos horizontal (o vertical).- De esto y de la proporcionalidad dada por las expresiones (1), resultará además que *el diagrama representativo de los desplazamientos verticales (u horizontales) de todos los puntos de la chapa rígida será lineal quedando representados ambos diagramas de desplazamientos por líneas rectas.*

Si a la chapa S le aplicamos un rotación infinitésima θ , se pueden trazar los diagramas de desplazamientos verticales y horizontales de sus puntos cuando se conoce el polo O (x_0, y_0) y la posición de un punto A (x_A, y_A) .- Efectivamente, dibujada la chapa a escala del tipo $\frac{\alpha \text{ metros}}{1 \text{ cm}}$, sobre una recta de referencia cualquiera, figura 9.11.(a), proyectamos el polo O en O_0' y el punto A en A_0' .- A partir de éste llevamos verticalmente un segmento arbitrario $A_0'A_e'$ representativo del desplazamiento η_A ; como el polo O no experimenta desplazamiento alguno, uniendo O_0' con A_e' tendremos representado un diagrama que determina la relación existente entre los desplazamientos de los diversos puntos de la chapa y que satisface los requisitos necesarios para su aplicación al trazado de líneas de influencia.- No está determinada ni la escala de desplazamientos ni el valor de la rotación θ .- Si hubiese necesidad de precisarlos se parte de la expresión :

$$\theta = - \frac{\eta_A}{x_A - x_0} = - \frac{A_0'A_e'(\text{cm}) \cdot (\text{Esc. desplazamientos})}{(x_A - x_0) \cdot (\text{Esc. longitudes})}$$

Se establece las escala de desplazamientos de acuerdo a las necesidades gráficas, se mide el segmento $A_0'A_e'$ en centímetros, se efectúan las operaciones indicadas en la expresión y se tiene determinado el valor de la rotación.-

El sentido de η_A surgirá del sentido del vector desplazamiento $\bar{\delta}_A$ y éste, del sentido de la rotación θ y de la posición del punto respecto al polo.-



Para el diagrama de desplazamientos horizontales ξ , figura 9.11.(b), se toma una recta de referencia $O_0''A_0''$ perpendicular a $O_0'A_0'$.- La recta $O_0''A_e''$, perpendicular a $O_0'A_e'$, determina los desplazamientos horizontales ξ .- Efectivamente, los triángulos $A_0'O_0'A_e'$ y $A_0''O_0''A_e''$ son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\xi_A}{\eta_A} = - \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0}$$

Como resulta de dividir una por la otra las ecuaciones (1).-

Demostremos ahora que el ángulo $A_0'O_0'A_e'$ determinado por las dos rectas nos da la rotación θ de la chapa, sea cual fuese la inclinación de la recta de referencia $O_0'A_0'$.- Efectivamente, ***tome-mos en primer término la recta de referencia en posición horizontal***, figura 9.11.(c), si se despeja θ en la segunda de las (1) y recordando que se trata de rotaciones infinitésimas, se tiene:

$$\theta = - \frac{\eta_A}{x_A - x_0}$$

Observando la figura y trabajando con valores absolutos, se establece que:

$$\text{Tang } \text{ang} (A_0'O_0'A_e') = \frac{A_0'A_e'}{O_0'A_0'} = \frac{\eta_A / \text{Esc. despl.}}{(x_A - x_0) / \text{Esc. long.}} = \theta \frac{\text{Esc. long.}}{\text{Esc. despl.}} = \theta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \text{tang } \theta \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

α y β constituyen el número de metros representados en un centímetro de longitud del dibujo; pero como las longitudes de la estructura representadas en el gráfico son del orden de los metros y en cambio, las de los desplazamientos son del orden de las diez milésimas del metro, para obtener una figura en que ambas dimensiones sean del orden de los centímetros es necesario que α sea mucho mayor que β , del orden de las diez mil veces.- En consecuencia, la expresión anterior nos dice que ***la tangente trigonométrica del ángulo dibujado representa, muy ampliada, la rotación θ supuesta infinitésima***, o su igual $\text{tang } \theta$.- Indudablemente que podemos adoptar como unidad de medida de los desplazamientos el milímetro (o 10^{-1} mm.) en lugar del metro, con la ventaja de mayor concordancia entre la unidad y su magnitud; se ha adoptado el metro al sólo objeto de una más clara evidencia de la ampliación de la rotación θ .-

Se toma, en figura 9.11.(d), ***la recta de referencia $O_0'A_0'$ con una inclinación cualquiera***; omitiendo escribir las escalas por las razones ya dadas y trabajando con valores absolutos, se tendrá:

$$\text{Tang } \varphi - \text{tang } \psi = \frac{A_1A_e'}{x_A - x_0} - \frac{A_1A_0'}{x_A - x_0} = \frac{A_0'A_e'}{x_A - x_0} = \frac{\eta_A}{x_A - x_0} = \theta = \text{tang } \theta$$

Efectuando un razonamiento análogo para los corrimientos horizontales, resulta:

$$\eta_A = - (x_A - x_0) \cdot \theta \quad \text{y} \quad \xi_A = (y_A - y_0) \cdot \theta$$

Recuérdese finalmente que el uso del término desplazamiento vertical u horizontal de un punto no es otra cosa que la designación abreviada de las componentes vertical u horizontal del desplazamiento real del punto.

9.7.1.3.- Elación vertical y horizontal de una chapa.-

Si se da una rotación a una chapa pasa de una posición (S) a otra (S'); como consecuencia de ello, todos sus puntos experimentan una transformación biunívoca de su posición compatible con la condiciones que imponen sus vínculos: inmovilidad del polo O e invariabilidad de las distancias entre ellos (rigidez).-



Si imaginamos ahora que todos los puntos de la chapa de la figura 9.11, experimentan primero los corrimientos verticales (proporcionales a sus distancias horizontales al polo), y luego los corrimientos horizontales (proporcionales a sus distancias verticales al polo), la chapa pasaría de la posición (S) a la (S') igual que con la rotación θ .- Pero estas dos transformaciones de la posición de los puntos de la chapa son imaginarias, pues no son compatibles con sus vínculos, razón por la cual se les asigna designación especial:

- **Elación vertical**, a la transformación imaginaria, biunívoca, por efecto de la cual todos los puntos experimentan desplazamientos verticales proporcionales a sus respectivas distancias horizontales al polo; se la representa con un vector vertical ubicado en el plano de la chapa y aplicado en el polo O.-
- **Elación horizontal**, a la transformación imaginaria, biunívoca, por efecto de la cual todos sus puntos experimentan corrimientos horizontales, proporcionales a las distancias verticales al polo O; se la representa con un vector horizontal, coplanar con la chapa, aplicado también en dicho polo.-

Si recordamos las expresiones de los corrimientos verticales (u horizontales) de un punto A de la chapa cuando se le da una rotación θ

$$\eta_A = - (x_A - x_0) \cdot \theta \quad \text{y} \quad \xi_A = (y_A - y_0) \cdot \theta$$

observamos que son respectivamente iguales al momento de la elación θ vertical (u horizontal) respecto al punto A considerado.- En consecuencia, *el trazado del diagrama de desplazamientos verticales correspondientes a una rotación θ coincide con la representación gráfica de una elación vertical de intensidad θ ; lo mismo es válido para los diagramas de desplazamientos horizontales y la elación horizontal.-*

Dado que el mismo valor angular θ define la intensidad de la rotación y de sus elaciones, es frecuente utilizar ambos términos en forma indistinta.- Conceptualmente debe tenerse presente la esencia de las diferencias que se han expuesto: La rotación es un cambio real de posición en el espacio, las elaciones consisten en cambios imaginarios no compatibles con sus vínculos físicos.-

9.7.1.4.- Determinación de polos en sistemas vinculados de un grado de libertad.-

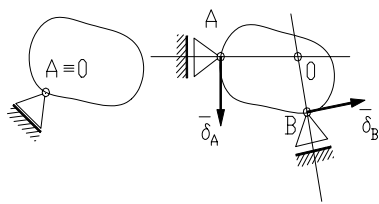


Fig. 9.12

Se acaba de ver que para trazar los diagramas de las componentes vertical u horizontal de los desplazamientos de los puntos de una chapa rígida es necesario conocer la posición de un punto y la rotación de la chapa, es decir su polo, intensidad y sentido.- Nos ocuparemos ahora de la determinación de los polos o centros de rotación en los sistemas formados por una o más chapas cuando poseen un grado de libertad.-

Si se trata de un sistema constituido por una chapa, tendrá un grado de libertad cuando posea sólo dos vínculos simple a tierra, figura 9.12.- En caso de tratarse de un apoyo fijo el polo coincide con su articulación A.- Si se trata de dos apoyos móviles A y B, como estos posibilitan sólo los desplazamientos δ_A y δ_B indicados, en la intersección de las normales a estos estará el polo O.-

Tomemos ahora , figura 9.13, una cadena cinemática de dos chapas con un grado de libertad y articulación real en A_{1-2} .- La chapa S_1 por tener el punto A fijo sólo puede rotar alrededor de él, o sea que O_1 coincide con A.- En la chapa S_2 los vínculos determinan la dirección del desplazamiento de dos de sus puntos: A_{1-2} y B; en la intersección de las normales a dichos desplazamientos está O_2 .- Observando la posición

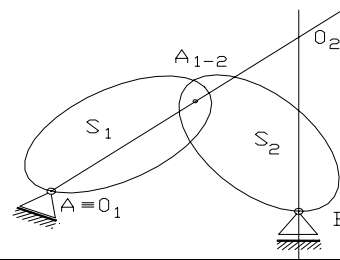


Fig. 9.13



de O_1 , O_2 y A_{1-2} se puede establecer la siguiente regla: **Los polos absolutos O_1 y O_2 de dos chapas adyacentes se encuentran alineados con el polo relativo de ambas, la articulación intermedia A_{1-2}** .-

Esta regla que se ha evidenciado para una cadena de dos chapas es general para cualquier cadena de un grado de libertad sea cual fuese el número de sus chapas.- **Recordemos además que se definía como articulación relativa entre dos chapas de una cadena cinemática al punto alrededor del cual rota una de ellas cuando la otra se considera fija.**-

Sean ahora las cadenas cinemáticas formadas por dos chapas vinculadas con dos bielas que se ilustran en la figura 9.14.; poseen un grado de libertad y sus articulaciones relativas son ficticias, propia en un caso e impropia en el otro.- En ambas se puede observar la determinación de los polos de las chapas, aplicando los conceptos explicados en los casos precedentes.- La variante se presenta cuando las bielas de enlace entre las dos chapas son paralelas, en cuyo caso la articulación relativa es impropia (el punto impropio de la dirección de los ejes de las bielas) ; para unir O_1 con $A_{(1-2)\infty}$ se traza por O_1 una recta paralela a las bielas : la intersección de esta recta con la normal al apoyo C determina el polo O_2 .-

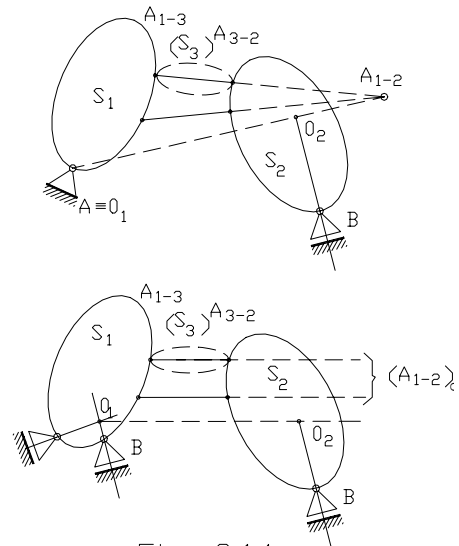


Fig. 9.14

Si consideramos las bielas que vinculan S_1 con S_2 como chapas (S_3) y (S_4) se tiene una cadena cinemática cerrada de un grado de libertad que permite establecer, al observar las figuras, una nueva regla para la determinación de los polos: **El polo relativo A_{1-2} entre dos chapas no consecutivas S_1 y S_2 , ligadas entre sí mediante una chapa intermedia (S_3), se encuentra alineado con los polos respectivos O_1 y O_2 y con las articulaciones intermedias A_{1-3} y A_{2-3}** .-

Esta regla la utilizamos para determinar la articulación relativa A_{1-3} en la cadena cinemática abierta de tres chapas y un grado de libertad de la figura 9.15, donde se observa que las articulaciones relativas son todas reales, a excepción de A_{1-3} .-

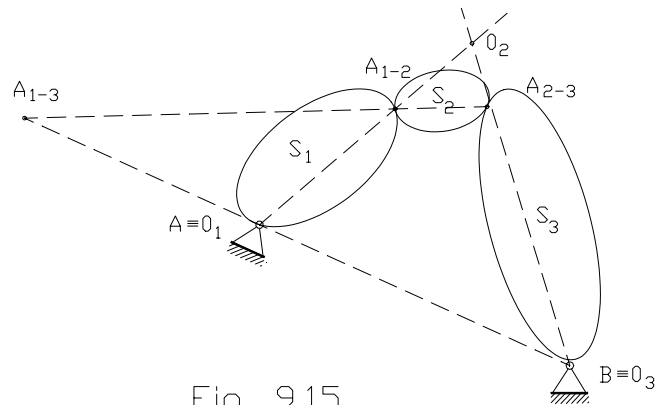


Fig. 9.15

Finalmente, en la figura 9.16., se representa una cadena cinemática de cuatro chapas, un grado de libertad, articulaciones relativas reales y ficticias, propias e impropias, en la cual se han ubicado los polos aplicando las reglas enunciadas.-

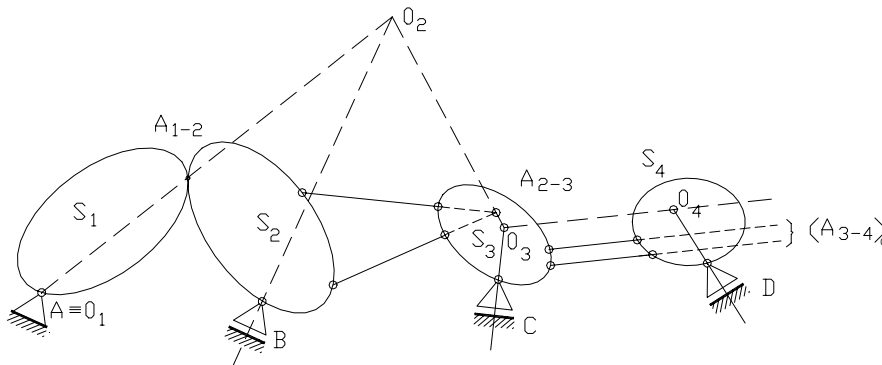


Fig. 9.16

En síntesis, una cadena cinemática, abierta (o cerrada), de “n” chapas tiene $n+2$ (o n) grados de libertad.- Impuestas a la cadena $n+1$ (o $n-1$) condiciones de vínculo, le quedará un solo grado de libertad, en virtud del cual cada una de las chapas podrá girar alrededor de un polo cuya posición queda determinada por los procedimientos explicados.- Conocidos los polos, dando una rotación arbitraria θ_i a la chapa S_i , quedan determinadas las rotaciones en todas las demás chapas de la cadena y, por lo tanto, definido el diagrama de desplazamientos verticales y horizontales debidos a dicha rotación θ_i . - Veamos como se trazan estos diagramas.-

9.7.1.5.- Diagramas de desplazamientos de una cadena cinemática de un grado de libertad.-

Sea la cadena cinemática de dos chapas y un grado de libertad representada en la figura 9.17.- Por ser A una articulación fija coincidirá con el polo O_1 de la chapa S_1 .- El polo O_2 de la chapa S_2 estará alineado con O_1 y A_{1-2} , y se encuentra sobre la normal al apoyo móvil pasante por B.-

Imaginemos una rotación infinitésima positiva θ_1 alrededor de su polo; la chapa S_2 por acción del enlace A_{1-2} experimentará una rotación θ_2 alrededor de O_2 . - A continuación se trazarán **los diagramas de desplazamientos verticales y horizontales producidos por la rotación θ_1 en la cadena de dos chapas con articulación relativa real** representada en la figura 9.17.-

Sobre una recta horizontal de referencia se proyectan en O_1' , A_{1-2}' , O_2' los polos absolutos y relativo de las chapas ; por O_1' se traza la recta $O_1'(A_{1-2}')$ bajo un ángulo cualquiera que representará la intensidad de rotación θ_1 . - Esta recta, referida a $M'N'$, constituirá la elación vertical de la chapa S_1 y la denominamos $(S_1')_e$; el segmento $A_{1-2}'(A_{1-2}')$ será el desplazamiento vertical de la articulación A_{1-2} que vale:

$$\eta_{1-2} = - \theta_1 (x_{1-2} - x_0)$$

La elación vertical $(S_2')_e$ de la chapa S_2 queda determinada por dos de sus puntos: $(A_{1-2}')_e$ y O_2' y la intensidad de la rotación alrededor de O_2 está dada por el ángulo θ_2 respecto a $M'N'$.- El diagrama de desplazamientos verticales de la cadena se extenderá desde M' hasta N' , proyecciones verticales tangentes de los extremos M y N de las chapas de la cadena.-

Para el diagrama de desplazamientos horizontales puede repetirse el procedimiento empleado para los verticales con la diferencia que las proyecciones son ahora horizontales.- Resulta más simple



tomar $O_1''O_2'' \perp O_1'O_2'$ y trazar por O_1'' la elación horizontal de la chapa S_1 perpendicular a la vertical, o sea: $(S_1'')_e \perp (S_1')_e$; y para la chapa S_2 , su elación horizontal será perpendicular a la vertical, es decir: $(S_2'')_e \perp (S_2')_e$.-

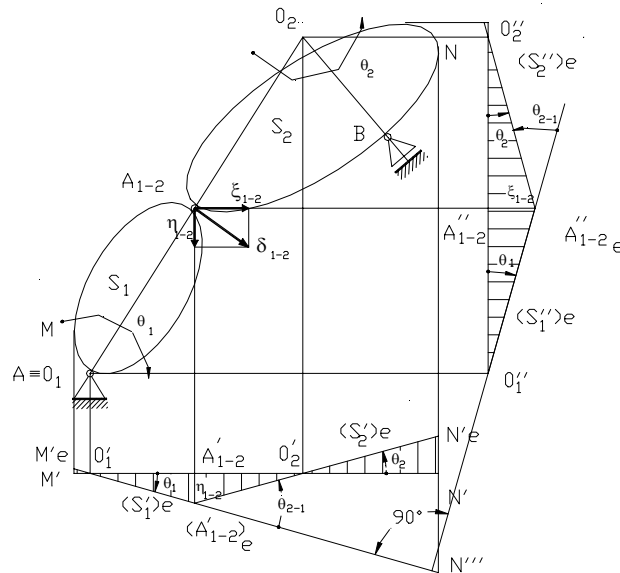


Fig. 9.17

Frecuentemente en el trazado de líneas de influencia se necesita poner en evidencia el desplazamiento relativo de una chapa respecto a otra; para ello se concibe el diagrama de desplazamientos anterior, efectuado bajo la siguiente secuencia: se considera las chapas S_1 y S_2 rígidamente vinculadas entre sí comportándose como chapa única enlazada a tierra en el apoyo A solamente; se la hace girar alrededor del polo O_1 , con lo que se obtendría el diagrama $M_e'N''$ referido al eje $M'N'$ en el cual la chapa S_2 estaría representada por el segmento $(A_{1-2}')_e N''$.- A continuación se restituye la articulación A_{1-2} y se hace girar la chapa S_2 alrededor de ella hasta llevarla a su posición definitiva representada en el diagrama por la recta $(S_2')_e$ determinada por los puntos $(A_{1-2}')_e$ y la proyección del polo O_2' .- Este segundo desplazamiento será, por definición, el desplazamiento relativo de S_2 respecto a S_1 , consistente en una rotación relativa alrededor de A_{1-2} , que designamos θ_{2-1} (rotación de la chapa S_2 respecto a S_1), está representada en el diagrama por el ángulo que va desde $(S_1')_e$ hasta $(S_2')_e$.- De la figura 9.17. se deduce que será negativa y su valor absoluto vale

$$\theta_{2-1} = \theta_1 + \theta_2$$

Consideremos ahora **la cadena de dos chapas, S_1 y S_2 , con articulación ficticia A_{1-2} entre ellas y los apoyos móviles A B y C** , figura 9.18.- El polo de la chapa S_1 queda determinado por la intersección de las normales a los apoyos A y B ; el polo O_2 de la chapa S_2 está sobre la normal al apoyo C y alineado con los puntos O_1 y A_{1-2} .- Sobre un eje horizontal, $M'T'$, se proyectan verticalmente los polos O_1 , O_2 y A_{1-2} en O_1' , O_2' y A_{1-2}' .-

Por O_1' se traza la recta $O_1'(A_{1-2}')_e \equiv (S_1')_e$ bajo un ángulo cualquiera que, referida a $M'T'$, representará la intensidad de la elación vertical θ_1 , arbitraria, que hemos aplicado a la chapa S_1 ; el diagrama es válido entre los puntos M_e' y N_e' situados sobre las verticales tangentes pasantes por los extremos M y N de la chapa.- Respecto a la chapa S_2 , el segmento de recta pasante por $(A_{1-2}')_e$ y por O_2' determinado por las verticales tangentes a la chapa, constituirá el diagrama de desplazamientos verticales producido por una elación de intensidad θ_2 de la chapa S_2 .-

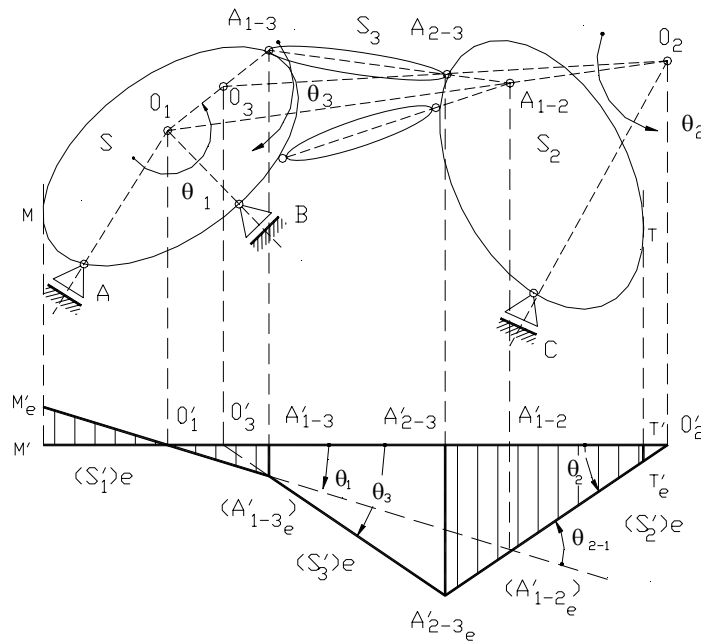


Fig. 9.18

Considerada la biela S_3 como una chapa, es inmediata la determinación del diagrama de desplazamientos verticales de los puntos que le pertenecen.- En efecto, son conocidos los desplazamientos de dos de sus puntos, A_{1-3} y A_{2-3} por pertenecer también a las chapas S_1 y S_2 respectivamente; la chapa S_3 girará alrededor de un cierto polo, y los desplazamientos verticales de sus puntos serán proporcionales a sus distancias horizontales a dicho polo, variando por lo tanto linealmente desde A_{1-3} hasta A_{2-3} . - El diagrama respectivo estará dado por el segmento de recta $(A_{1-3}')_e (A_{2-3}')_e \equiv (S_3')_e$ referida al eje $M'T'$. - Como el polo de S_3 debe estar alineado con O_1 y A_{1-3} por una parte, y por otra con O_2 y A_{2-3} , su intersección será O_3 : si la construcción es prolija, la recta $(S_3')_e$ concurrirá a un punto con el eje $M'T'$ y la vertical pasante por O_3 .

Sea ahora el caso en que la articulación, a más de ser ficticia sea impropia, que se presenta cuando las bielas de enlace son paralelas, figura 9.19.-

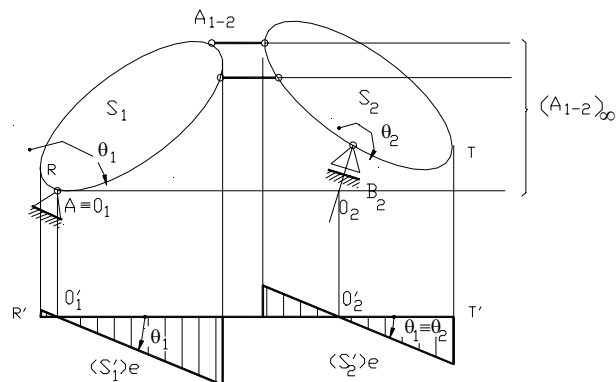


Fig. 9.19



En este caso el polo O_2 de la chapa S_2 , debiendo estar alineado con O_1 y A_{1-2} , se ubicará sobre la paralela a ambas bielas pasante por O_1 y su intersección con la normal al apoyo B.- Por otra parte, siendo el polo relativo entre S_1 y S_2 un punto impropio, el desplazamiento relativo entre ambas chapas será una rotación alrededor de un punto impropio, es decir, una traslación.- Por lo tanto $(S_1)'_e$ será paralela a $(S_2)'_e$, resultando $\theta_{1-2} = 0$.

Por lo expuesto el procedimiento constructivo será el siguiente: se traza un eje de referencia horizontal $R'T'$, y se proyectan sobre él los polos O_1 y O_2 en O'_1 y O'_2 .- Por O'_1 se traza $(S_1)'_e$ formando un ángulo cualquiera θ_1 representativo de la intensidad de la elación aplicada en el polo O_1 a la chapa S_1 .- La paralela a $(S_1)'_e$ pasante por O'_2 será $(S_2)'_e$ que, referida a $R'T'$, constituirá la elación vertical de la chapa S_2 .-

Sea ahora, figura 9.20, *la cadena cinemática de cuatro chapas con cinco condiciones de vínculos y*

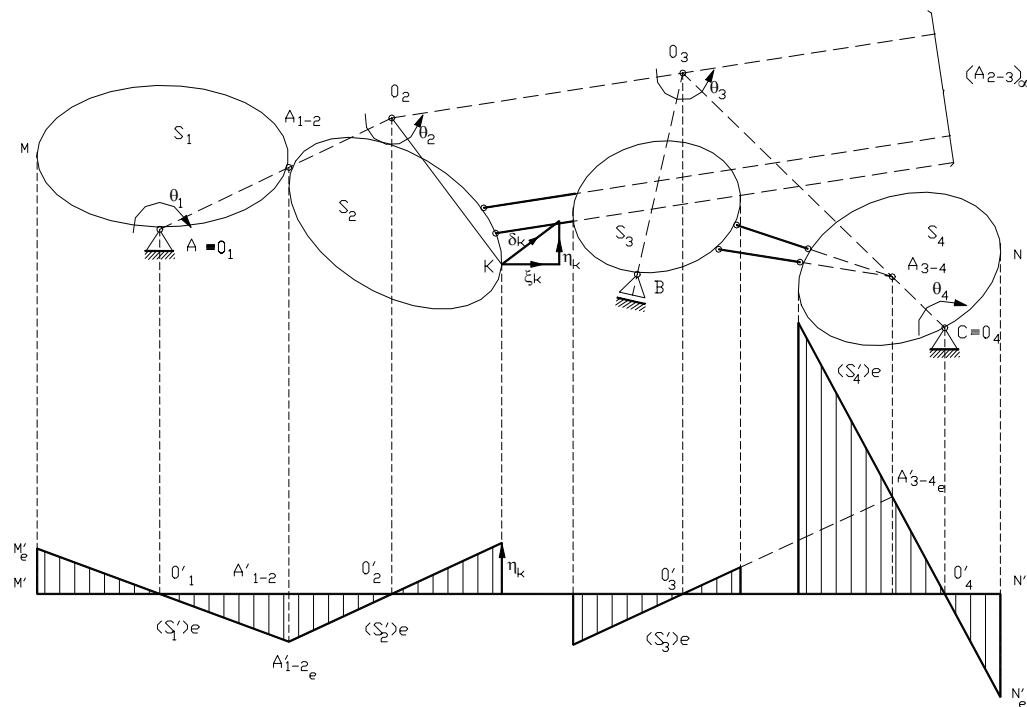


Fig. 9.20

un grado de libertad.-

El polo O_1 de la chapa S_1 es coincidente con la articulación del apoyo doble A; del mismo modo y por igual causa $O_4 \equiv C$.-

El polo O_2 de S_2 queda determinado por la intersección de la recta pasante por O_1 y A_{1-2} con la recta determinada por O_3 (aún no determinado) y $(A_{2-3})_\infty$ punto impropio de las bielas paralelas.- Al no conocer O_3 no podemos seguir avanzando de izquierda a derecha, pero sí podemos hacerlo partiendo de O_4 hacia la izquierda.- Efectivamente, el polo O_3 se ubica en la intersección de la normal al apoyo móvil B y la recta determinada por los puntos O_4 (ya determinado) y A_{3-4} (articulación ficticia situada en la intersección de las bielas de enlace).- Determinado O_3 se puede completar la ubicación de O_2 que había quedado inconclusa.- Fijadas las posiciones de los polos se proyectan verticalmente sobre un eje horizontal de referencia $M'N'$.-



Demos ahora una rotación arbitraria a S_1 alrededor de O_1 trazando bajo el ángulo θ_1 la elación $(S_1')_e$ pasante por O_1' .- La elación vertical de S_2 queda determinada por dos de sus puntos: O_2' y $(A_{1-2}')_e$ (posición en la elación del punto común a las chapas S_1 y S_2): uniéndolos se obtiene la elación $(S_{1-2}')_e$.- la paralela a ésta pasante por O_3' nos da la elación $(S_3')_e$ ya que la articulación relativa entre S_2 y S_3 es un punto impropio.- Por último la elación $(S_4')_e$ de la chapa S_4 queda dada por la recta que une O_4' con el punto $(A_{3-4}')_e$ intersección de $(S_3')_e$ con el rayo proyectante de A_{3-4} .

Si ahora se desea conocer el desplazamiento $\bar{\delta}_k$ de uno cualquiera de los puntos del sistema, K por ejemplo, se determina en primer término su dirección que sabemos es normal a la recta que une el punto con el polo.- Desproyectando en esta dirección la magnitud de la componente vertical η_k del diagrama se obtienen la magnitud de $\bar{\delta}_k$ y de $\bar{\xi}_k$.

9.7.1.6. - Variación de distancia entre dos puntos de una cadena.-

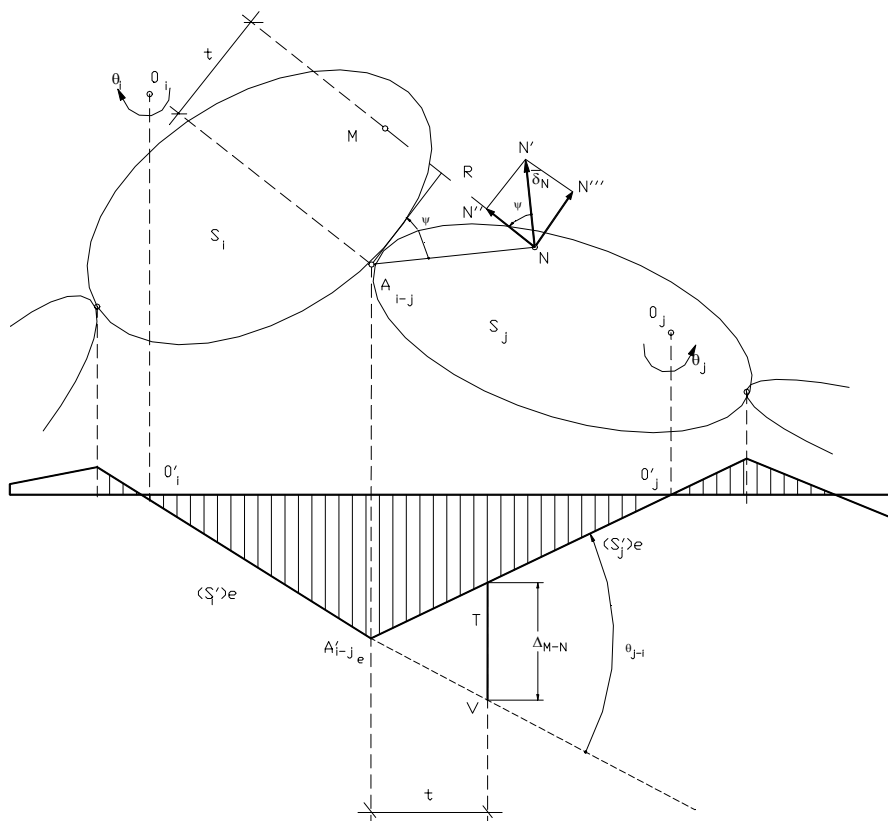


Fig. 9.21

Sean S_i y S_j dos chapas consecutivas de una cadena cinemática con un grado de libertad, figura 9.21., y sean ya conocidas sus elaciones verticales $(S_i')_e$, $(S_j')_e$.- El desplazamiento relativo de la chapa S_j respecto a S_i (supuesta fija) es una rotación alrededor de A_{i-j} de intensidad y sentido θ_{j-i} determinado en el diagrama de corrimientos verticales.- Sea M un punto cualquiera de la chapa S_i y N otro perteneciente a la chapa S_j ; en la rotación θ_{j-i} el punto M no se desplaza, en cambio el N experimenta un desplazamiento normal a la dirección $A_{i-j}N$ de intensidad:

$$\delta_N = NN' = (A_{i-j}N) \cdot \theta_{j-i}$$



Este desplazamiento se puede expresar por dos componentes, una paralela y otra normal a la recta MN que une ambos puntos:

$$\overline{\delta_N} = \overline{NN'} = \overline{NN''} + \overline{NN'''}$$

La componente normal, NN''', por ser infinitésima no produce variación de distancia en la dirección MN.- Por lo tanto, la variación de distancia del punto N respecto al punto M, Δ_{N-M} quedará expresada por NN'':

$$\Delta_{N-M} = NN'' = NN' \cos \psi = \theta_{j-i} (A_{i-j}N) \cdot \cos \psi = \theta_{j-i} \cdot t$$

Donde "t" es la menor distancia del polo relativo de ambas chapas a la recta que une los puntos cuya variación de distancia queremos conocer ; en síntesis queda que:

$$\Delta_{N-M} = \theta_{j-i} \cdot t$$

Conocido el diagrama de desplazamientos de una cadena cinemática podemos establecer la variación de distancia entre dos puntos (pertenecientes a chapas cuyo centro relativo conocemos) por el segmento VT, determinado por las intersecciones de las elaciones de ambas chapas $(S_i')_e$ y $(S_j')_e$, sobre la vertical trazada a la distancia "t" del polo A_{i-j} .- El signo de la variación de distancia, aumento o disminución, depende del sentido de la rotación relativa θ_{i-j} .-

9.7.2.- EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.-

9.7.2.1.- Desplazamiento virtual.-

Se entiende por *desplazamiento virtual de un sistema a todo desplazamiento infinitésimo compatible con sus condiciones de vínculo*.- Así por ejemplo, el sistema de la figura 9.22. constituido por una chapa S articulada en O a un apoyo fijo, sólo admite como posibles rotaciones alrededor de O.- De modo que, por definición, toda rotación *infinitésima* alrededor de O será un desplazamiento virtual.-

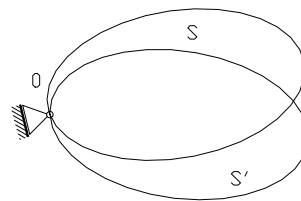


Fig. 9.22

De la misma manera el sistema, figura 9.23., constituido por una chapa S articulada en A a un apoyo móvil tiene dos desplazamiento infinitésimos posibles o virtuales: una traslación según la dirección del apoyo móvil y una rotación alrededor de A.- Si la chapa estuviese libre podría experimentar tres desplazamientos virtuales: dos traslaciones y una rotación independientes.- Se considerarán solamente los sistemas con un grado de libertad.-

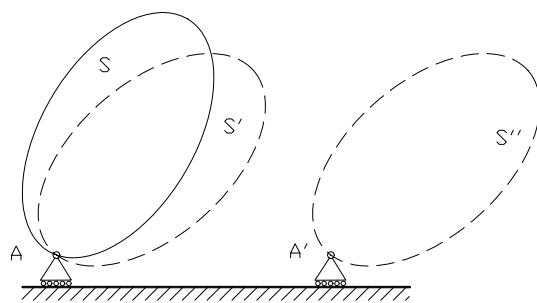


Fig. 9.23

Se ha visto al tratar los sistemas vinculados que las reacciones de vínculo son fuerzas que reemplazan al vínculo.- De modo tal que, para ponerlas en evidencia manteniendo la equivalencia de sistemas, debe suprimirse el vínculo y aplicar en su lugar la fuerza que en él originan las cargas.- Sea por ejemplo, figura 9.24., el sistema constituido por un arco isostático sustentado por un apoyo fijo en A y otro móvil en B, bajo la acción de la fuerza \bar{P} .- Puesta en evidencia la reacción \bar{R}_B se obtiene un sistema en equilibrio consistente en una chapa con un grado de libertad bajo la acción de \bar{P} y de \bar{R}_B .- A este



mecanismo se le puede dar un solo desplazamiento virtual consistente en una rotación alrededor del polo O coincidente con A.-

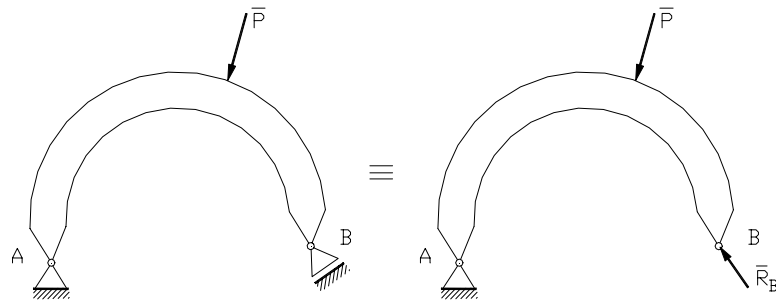


Fig. 9.24

Del mismo modo el sistema de dos chapas atirantadas indicado en la figura 9.25. es isostático.- Si aplicamos una fuerza P se originará en la barra MN un esfuerzo T que constituye la interacción entre las chapas.- Cortada la barra MN para mantener el equilibrio es necesario aplicar en M y en N dos fuerzas iguales y opuestas T que constituyen la reacción interna de la barra MN: se tiene una cadena con un grado de libertad en equilibrio, a la que se le puede dar un desplazamiento virtual.-

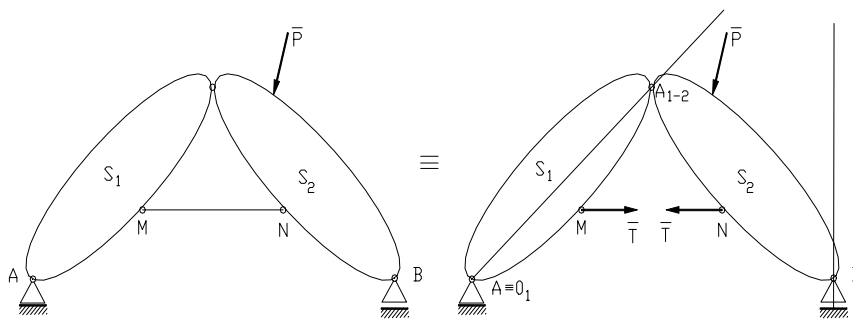


Fig. 9.25

Observemos que en los dos casos expuestos los desplazamientos virtuales pueden efectuarse en uno u otro sentido: *el desplazamiento es reversible* y el vínculo que lo permite se designa *bilateral*.- Si los desplazamientos no fuesen reversibles los vínculos se designan *unilaterales*.- Todos los vínculos usados en construcciones se comportan como bilaterales.-

9.7.2.2.- Trabajo mecánico.-

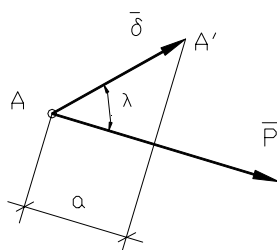


Fig. 9.26

Se desarrollan a continuación las expresiones que nos dan el trabajo mecánico efectuado por fuerzas o por pares de fuerzas cuando los sistemas en que están aplicados experimentan desplazamientos.- Recordemos en primer término la definición de trabajo mecánico:

Sea la fuerza \bar{P} aplicada al punto A que, tras un desplazamiento, pasa a ocupar la posición A', figura 9.26.- Si el vector $\overline{AA'} = \bar{\delta}$ es el desplazamiento del punto A se define como *trabajo mecánico efectuado por la fuerza \bar{P} al experimentar el desplazamiento $\bar{\delta}$ al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento de su punto de aplicación* es decir que:



$$W = \bar{P} \times \bar{\delta} = P \cdot \delta \cdot \cos \lambda = P \cdot a$$

El trabajo mecánico es una magnitud escalar dada, según la última expresión, por el producto de la intensidad de la fuerza por el valor de la proyección del desplazamiento sobre la dirección de aquella o viceversa, el producto del desplazamiento por la proyección de la fuerza sobre él. - Será positivo si los sentidos de la fuerza y la proyección del desplazamiento son coincidentes (negativo en caso contrario) : esto requiere que el ángulo λ que forma la fuerza con el desplazamiento sea menor de 90° ; negativo si λ está comprendido entre 90° y 180° .- Al hablar de trabajo efectuado debe interpretarse tanto trabajo producido como absorbido.-

Sean P_1 y P_2 dos de las fuerzas que actúan en una chapa plana que consideramos aplicadas en su punto de intersección A, y sea \bar{R}_{1-2} su resultante, figura 9.27.- Demos un desplazamiento infinitésimo a la chapa consistente en una rotación θ alrededor de un cierto polo O.- El desplazamiento del punto A será normal a la dirección OA y su intensidad valdrá $\delta = OA \cdot \theta$.- Llamando W_1 , W_2 y W_{1-2} los trabajos de P_1 , P_2 y R_{1-2} respectivamente, al efectuar el desplazamiento $\bar{\delta}$, se tiene:

$$W_1 = P_1 \cdot \delta \cdot \cos \lambda_1 \qquad W_2 = P_2 \cdot \delta \cdot \cos \lambda_2 \qquad W_{1-2} = R_{1-2} \cdot \delta \cdot \cos \lambda_{1-2}$$

Sumando las dos primeras : $W_1 + W_2 = \delta (P_1 \cos \lambda_1 + P_2 \cos \lambda_2)$

En donde la expresión entre paréntesis es la suma de las proyecciones de las dos fuerzas componentes sobre la dirección del desplazamiento que es igual a la proyección de su resultante sobre esa misma dirección y cuyo valor es $R_{1-2} \cos \lambda_{1-2}$.- Sustituyendo se tiene:

$$W_1 + W_2 = \delta \cdot R_{1-2} \cos \lambda_{1-2} = W_{1-2}$$

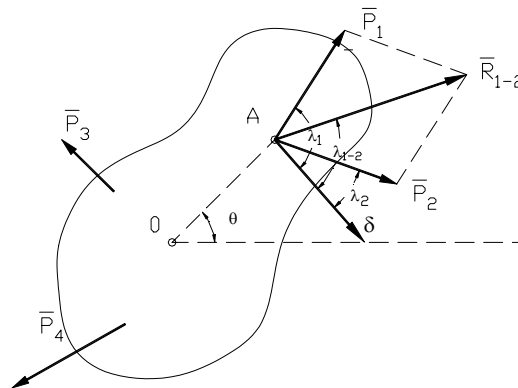


Fig. 9.27

Repitiendo el razonamiento con la fuerza \bar{R}_{1-2} y una tercera fuerza \bar{P}_3 que actúe sobre la chapa, y a la resultante de éstas con una cuarta fuerza P_4 y así sucesivamente hasta completar la totalidad de las fuerzas del sistema, se deduce que: **El trabajo producido por un sistema de fuerzas que actúan sobre una chapa rígida es igual al trabajo de su resultante.**-

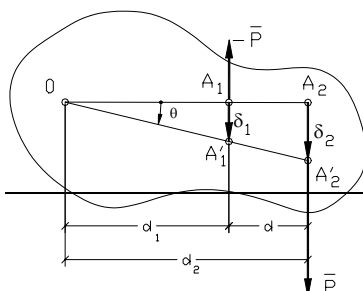


Fig. 9.28

Sea que a la chapa S, sobre la actúa un par de fuerzas \bar{P} y $-\bar{P}$, se le da una rotación virtual θ alrededor de O, figura 9.28.- Antes de la rotación θ , la recta normal a las fuerzas pasante por el polo O



corta sus rectas de acción en A_1 y A_2 que experimentan los desplazamientos δ_1 y δ_2 . El trabajo que produce el par de fuerzas en la rotación vale:

$$W = P\delta_2 - P\delta_1 = P.\theta.d_2 - P\theta.d_1 = P.\theta.d = M.\theta$$

Es decir que **el trabajo efectuado por un par al efectuar una rotación virtual la chapa sobre la que está aplicado, es igual al momento del par por la intensidad de la rotación.**- Será positivo si el momento y la rotación tienen igual sentido.-

El trabajo efectuado por dos fuerzas iguales y opuestas, figura 9.29., aplicadas en puntos M y N de chapas integrantes de una cadena de un grado de libertad, se determina suponiendo fija la chapa S_1 .- En esta condición, la fuerza \bar{T} aplicada en M no trabaja, W valdrá:

$$W = \bar{T} \times \bar{\delta}_N = T. \delta_N . \cos MNN' = T.\Delta_{N-M}$$

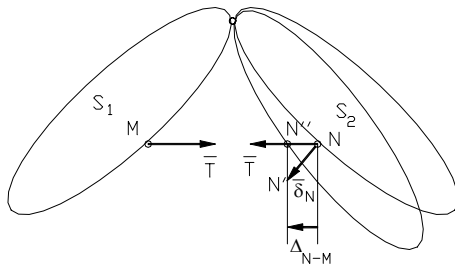


Fig. 9.29

En donde Δ_{N-M} es la variación de distancia del punto N respecto al punto M.- Esta expresión nos dice que el **trabajo efectuado por dos fuerzas iguales y opuestas cuando la cadena sobre la que actúan efectúa un desplazamiento virtual es igual al producto de la intensidad de las fuerzas por la variación de distancia que experimentan los puntos de aplicación de las mismas.**-

Análogamente, figura 9.30., si dos pares iguales y opuestos actúan sobre dos chapas consecutivas de una cadena cinemática con un grado de libertad, el trabajo efectuado al suponer fija la chapa S_1 valdrá:

$$W = M . \theta_{2-1}$$

siendo θ_{2-1} la rotación relativa de S_2 respecto a S_1 alrededor de la articulación relativa A_{1-2} .- Por lo tanto, **el trabajo efectuado por dos pares iguales y opuestos aplicados en dos chapas consecutivas de una cadena cinemática de un grado de libertad que experimenta un desplazamiento virtual, es igual al producto de la intensidad de los pares por la rotación relativa experimentada por las chapas sobre las que actúan.**-

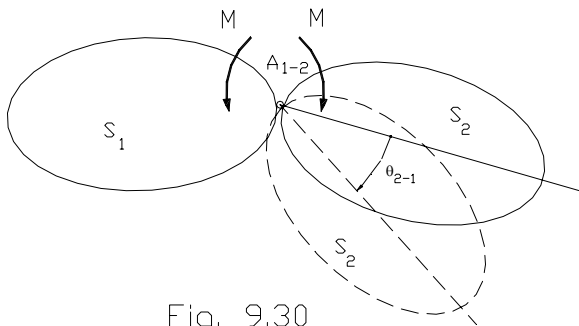


Fig. 9.30

Recuérdese que sea cual fuese la posición de los pares en sus respectivas chapas, los mismos pueden ser trasladados, sin alterar sus efectos, aplicándolos en la articulación relativa.-

9.7.2.3.- El principio de los trabajos virtuales.-

Consideremos nuevamente los sistemas isostáticos de las figuras 9.24. y 9.25. solicitados por una o varias fuerzas.- Al suprimir un vínculo simple sustituyéndolo por la reacción correspondiente, el sistema isostático se nos ha transformado en una chapa o cadena cinemática con un grado de libertad, representadas en las figuras indicadas.- Demos un desplazamiento virtual a cualquiera de ellas; los puntos de aplicación de las fuerzas experimentarán desplazamientos virtuales y las fuerzas efectuarán trabajo que llamamos trabajo virtual por corresponder a un desplazamiento de esta naturaleza.- **El principio de los trabajos virtuales expresa que es condición necesaria y suficiente de equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre la chapa o cadena cinemática con un grado de libertad, que la suma de los trabajos de todas ellas durante el desplazamiento virtual sea nula (o negativa en caso de desplazamientos irreversibles).**-



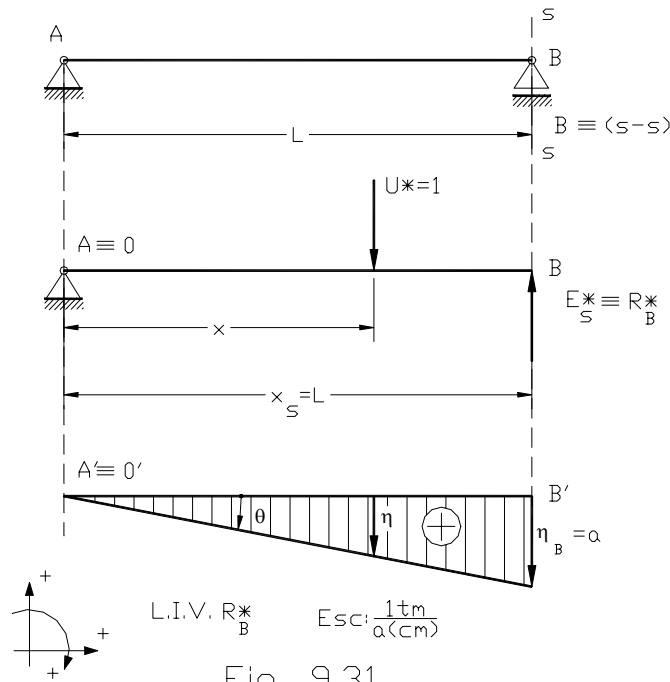
Este principio constituye una ley física de carácter universal establecida empíricamente: no se puede demostrar, sólo es susceptible de comprobación experimental.- Es general, no presenta excepciones.-

Observemos nuevamente la cadena cinemática de la figura 9.24. que permanecerá en reposo ya que R_B sustituye al apoyo: no habiendo desplazamiento el trabajo de todas las fuerzas será nulo.- Si imaginamos que damos un incremento a la intensidad de \bar{P} , manteniendo constante a \bar{R}_B , se produciría el desplazamiento de su punto de aplicación en el sentido de \bar{P} : la suma de los trabajos sería positiva y el conjunto de fuerzas no estaría en equilibrio.-

Utilizaremos el principio de los trabajos virtuales para el trazado de líneas de influencia por el método cinemático.- *Su aplicación puede extenderse a la determinación de cualquiera de las incógnitas estáticas vistas anteriormente.-*

9.8.- TRAZADO DE LÍNEAS DE INFLUENCIA POR EL MÉTODO CINEMÁTICO.-

En los apartados 9.1. y 9.2. se expuso el concepto de líneas de influencia, su definición, las diversas variables que intervenían y sus denominaciones, y en el apartado 9.3. se desarrolló el método estático para el trazado de las mismas.- A continuación se expone la secuencia de pasos que constituyen el método cinemático para el trazado de líneas de influencia y, en el apartado 9.9, se efectúa su aplicación para diversos casos de estructuras e incógnitas estáticas con la finalidad de clarificar conceptos y ampliar detalles.-



Dado un sistema isostático para una de cuyas secciones se quiere trazar la línea de influencia de una determinada magnitud por el método cinemático, se requieren los siguientes pasos, figura 9.31:

1. Representar gráficamente a escala el sistema isostático en consideración con demarcación de la sección cuya línea de influencia se quiere trazar.-



2. Someter el sistema a la acción de una carga unitaria móvil, “ $U^* = 1$ ”, que podrá ser vertical u horizontal, según sea la dirección de las cargas que actuarán sobre la estructura.- En tanto y cuanto no se especifique otra, la dirección debe entenderse que es vertical.-
3. Transformar el sistema isostático en una chapa o cadena cinemática de un grado de libertad eliminando el vínculo, externo o interno, cuya reacción se busca conocer, sustituyéndolo por la reacción incógnita.- Con dicho objeto se colocará un mecanismo tal que sólo permita desplazamientos de dicha incógnita.-
4. Determinar los polos de la chapa o cadena cinemática de un grado de libertad que se ha formado y dar un desplazamiento virtual, estableciendo los corrimientos de los puntos de aplicación de las fuerzas en equilibrio: “ η ” de la fuerza unitaria “ $U^* = 1$ ” y “ a ” de la magnitud incógnita E_S^* .- El desplazamiento de la incógnita se lo designa en forma genérica “ a ” pero, según la naturaleza de la magnitud incógnita, podrá ser: 1) la proyección “ a ” de un desplazamiento sobre la dirección de la fuerza; 2) la variación Δ_{NM} de distancia entre dos puntos; 3) la rotación absoluta θ de una chapa o, 4) la rotación relativa $\theta_{j,i}$ de una chapa respecto a otra.-
5. Plantear la ecuación del trabajo efectuado por ambas fuerzas cuya suma, por el principio de los trabajos virtuales, debe ser nula (la fuerza unitaria se introduce con su signo):

$$(-1) \cdot \eta + E_S^* \cdot a = 0 \quad (1)$$

6. Despejar la incógnita de esta ecuación:

$$E_S^* = \frac{\eta}{a} \quad (2)$$

Que nos expresa que **las ordenadas de la línea de influencia buscada están dadas, en intensidad y signo, por el cociente entre el corrimiento del punto de aplicación de la fuerza unitaria y el desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita, cociente en el que ambos desplazamientos deben ser introducidos con su signo.-**

Siendo “ a ” un valor constante, existe proporcionalidad entre la ordenada de influencia E_S^* en correspondencia con la posición de la fuerza unitaria, y el desplazamiento vertical η del punto de aplicación de dicha fuerza.- Consecuentemente, **el diagrama de desplazamientos verticales, η (u horizontales, ξ), cambiado de escala, representa la línea de influencia vertical (u horizontal), de la magnitud E_S^* .-** La escala del diagrama de desplazamiento puede ser arbitraria, ya que no interesa su valor absoluto en razón de que en la (2) aparece en el numerador y en el denominador simplificándose, sin influir en el valor del cociente.-

La escala de la línea de influencia a utilizar para leer el diagrama de desplazamiento debe incluir, a más del factor de proporcionalidad $1/a$, su dimensión en base a lo expresado en 9.3 y será:

$$\text{Dimensión de la línea de influencia} = \frac{\text{dimensión magnitud considerada}}{\text{dimensión fuerza unitaria}}$$

Si se toma la fuerza unitaria “ U^* ” como adimensional, la dimensión de la línea de influencia coincidirá con la dimensión de la magnitud considerada.- Suponiendo que la fuerza esté expresada en toneladas y los momentos en tonelámetros, se tendrá:

$$\text{Si } E_S^* \text{ es una fuerza: Escala de la línea de influencia} = \frac{1 \text{ tonelada}}{a \text{ (cm)}}$$

$$\text{Si } E_S^* \text{ es un momento: Escala de la línea de influencia} = \frac{1 \text{ tonelámetro}}{a \text{ (cm)}}$$

donde a (cm) es el valor del desplazamiento de la incógnita medido en centímetros.- Por lo tanto para el caso de que la incógnita estática fuese la reacción en el apoyo B, su valor será:



$$E_S^* = R_B^* = \eta(\text{cm}) \frac{1 \text{ t}}{a(\text{cm})}$$

El signo de la magnitud cuya línea de influencia se ha trazado, se vuelca al gráfico en correspondencia con la posición de la fuerza unitaria, y se lo determina estableciendo el signo del cociente entre los desplazamientos de la fuerza unitaria, “ η ”, y de la incógnita, “ a ”.- El signo de η (o el de ξ) se establece en base al sentido del eje “ y ” (o el de “ x ”).- Para el signo de “ a ” se sigue el mismo criterio pero, dado que el desplazamiento de la incógnita cambia según cual sea la magnitud, se expondrá mas adelante al tratar el trazado de la línea de influencia de cada una de ellas.- Tanto “ η ” como “ a ” se miden en centímetros.-

9.9.- APLICACIONES: GRÁFICAS Y GRAFO-ANALÍTICAS EN COMBINACIÓN CON EL MÉTODO ESTÁTICO.-

9.9.1.- LÍNEA DE INFLUENCIA DE REACCIONES DE VÍNCULOS EXTERNOS.-

Sea un arco simplemente apoyado, figura 9.32(a), para el cual se quiere **trazar la línea de influencia vertical de la reacción en el apoyo móvil B**.- Ejecutamos los pasos 1 y 2 detallados en el apartado 9.8 , y sustituimos el apoyo móvil por R_B^* ; de ella conocemos la dirección y le asignamos sentido supuesto hacia arriba (que tomamos como positivo ya que su proyección sobre el eje “ y ” es del sentido adoptado como positivo para ese eje) .-

Recordemos las reglas de signos que hemos adoptado:

- Fuerzas y desplazamientos horizontales positivos: $+ \rightarrow$
- Fuerzas y desplazamientos verticales positivos: $+ \uparrow$
- Momentos y rotaciones positivos: $+ \curvearrowright$

Determinamos el polo de la chapa , $O \equiv A$, y damos la elación vertical arbitraria θ ; se traza el diagrama de desplazamientos verticales del cual se obtiene el desplazamiento η de la fuerza unitaria y la componente vertical η_B del desplazamiento $\bar{\delta}_B$ del punto B.- Dado que de éste conocemos su dirección, perpendicular a OB, desproyectamos η_B según la dirección de $\bar{\delta}_B$ con lo que se conoce este vector en intensidad dirección y sentido.- Ahora proyectamos el desplazamiento del punto B sobre la dirección de la incógnita R_B^* , y se obtiene la proyección “ a ” requerida para aplicar el principio de los trabajos virtuales.-

Como ya se dijo en el apartado anterior, la línea de influencia vertical de R_B^* (L.I.V. de R_B^*) es decir el valor de la reacción en el apoyo B para cualquier posición “ x ” de la carga unitaria, expresado ahora en kilonewton por ejemplo, está dado por:

$$R_B^* (\text{kN}) = \eta (\text{cm}) \frac{1 \text{ kN}}{a(\text{cm})}$$

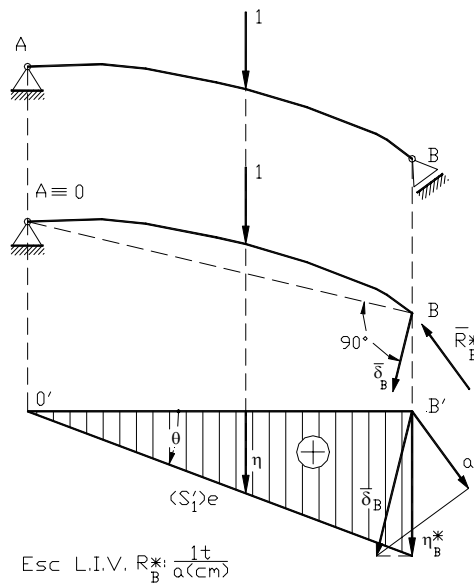


Fig. 9.32(a)

Establezcamos ahora el signo de la L.I.V. de R_B^* de acuerdo a lo dicho en el apartado 9.8.- Se tiene:

$$\eta < 0 \quad ; \quad a < 0 \quad \therefore \quad \frac{\eta}{a} > 0 \quad \rightarrow \quad R_B^* > 0$$

El sentido supuesto para la reacción en B es correcto y se coloca el signo (+) en correspondencia con la posición de la fuerza unitaria para la que se hizo el análisis, con independencia de que el área afectada por él se encuentre por arriba o por abajo de la base de la L.I.V. de R_B^* .- Este signo afecta a toda área ubicada en igual posición respecto al eje de referencia; las áreas situadas al otro lado de éste llevan signo opuesto.-

Siempre resulta práctico y objetivo verificar el signo obtenido con la ecuación de trabajo virtual.- Como la suma del trabajo efectuado por la fuerza unitaria y el de la incógnita debe ser cero, necesariamente si el primero es positivo, el segundo será negativo, y viceversa.- Observando la L.I.V. de R_B^* y considerando el signo supuesto a la incógnita se tiene:

- Trabajo de la fuerza unitaria > 0 por ser η y U^* de igual sentido.-
 - Trabajo de la fuerza incógnita < 0 por ser R_B^* y "a" de sentidos opuestos.-
- Confirmando de esta forma el signo obtenido anteriormente.-

Al observar esta línea de influencia vemos que el valor de la reacción es nulo en el apoyo A, crece linealmente con la abscisa x, y alcanza su máximo en correspondencia con el apoyo B.- Esto nos expresa que, conocida la forma del diagrama de desplazamientos, es posible el trazado por puntos de la L.I.V. de R_B^* por el método estático calculando solamente el valor de la reacción en B cuando la carga unitaria se encuentra en la vertical de este apoyo.- Ello es así porque el diagrama es una recta y, en correspondencia con el polo de rotación, la ordenada es nula.-

Para ello, figura 9.32(b), ***se traza el D.C.L. de la estructura con la carga unitaria situada sobre el apoyo B para el cual $x = L$.***- De la ecuación de equilibrio

$$+\curvearrowleft \quad \sum M_A = 1.L - R_B^* . \text{sen}\beta . L + R_B^* . \text{cos}\beta . h = 0$$



Se despeja

$$R_B^* = \frac{L}{L \cdot \text{sen } \beta - h \cos \beta}$$

Expresión que da, en intensidad y signo, el valor de R_B^* cuando U^* actúa en la vertical del apoyo B.-

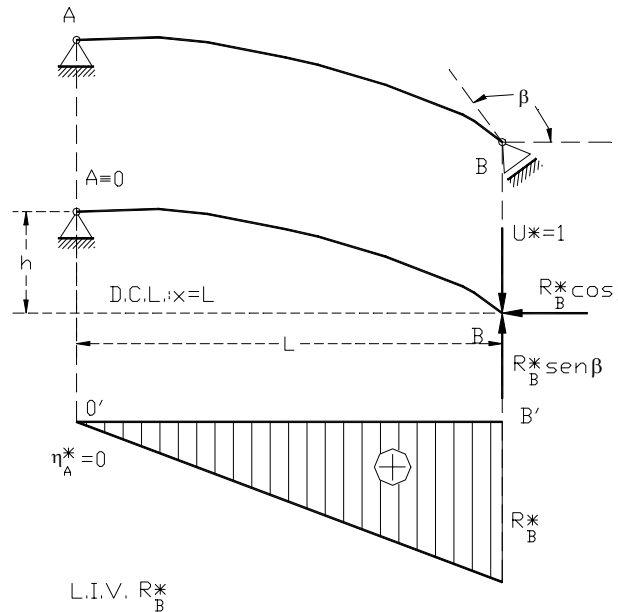


Fig. 9.32(b)

El valor numérico resultante y su signo se vuelcan en el gráfico en correspondencia con la posición de la carga unitaria.- Como es evidente este gráfico no requiere precisión ya que, teniendo el valor numérico de la reacción en la respectiva ordenada la interpolación analítica para cualquier valor de "x" resulta más expeditiva y precisa que cualquier procedimiento gráfico.-

Cabe agregar que si el apoyo móvil fuese horizontal, como en la figura 9.31, el problema se simplifica ya que al ser $\beta = 90^\circ$ el desplazamiento δ_B del punto B coincide con su componente vertical η_B , con la dirección de la reacción y con la proyección "a" sobre esta última.- La simplificación es mayor aún si se combina con el método estático pues al ser $\text{sen } \beta = 1$ y $\text{cos } \beta = 0$ resulta $R_B^* = 1$.-

Para trazar la **línea de influencia de la componente vertical de una reacción de apoyo fijo**, el mecanismo que permite el desplazamiento de la incógnita en su dirección consiste en sustituir el apoyo fijo por uno móvil cuya dirección posibilite ese desplazamiento, figura 9.33.- Se realizan los pasos 1 y 2 del apartado 9.8. y se determina el polo; se da un desplazamiento virtual a la cadena de un grado de libertad y se establecen η y η_A , coincidente ahora con "a".- Se completa el trazado con la fijación de la escala de influencia y determinación de signo como en el caso anterior.- La validez de la L.I.V. de V_A^* va desde la vertical de A hasta la de B.-

Trazado el diagrama de desplazamientos, mediante el método estático se puede establecer el valor de la ordenada η_A de la L.I.V de V_A^* , y como se conoce la posición de O' para el cual la ordenada es nula, la línea de influencia queda determinada.- Para ello se traza el D.C.L. con la fuerza unitaria aplicada en el apoyo A, y se plantea:



$$+\downarrow \sum M_A = R_B^* \cdot d = 0 \quad ; \quad \text{siendo } d \neq 0 \text{ resulta: } R_B^* = 0 \quad \text{y} \quad H_B^* = H_A^* = 0$$

$$+\downarrow \sum M_B = V_A^* \cdot L - 1 \cdot L = 0 \quad \text{Por lo tanto} \quad V_A^* = 1 = \eta_A$$

La interpolación analítica es muy simple teniendo presente que $O'B' = h \operatorname{tg}(\beta - 90^\circ)$.- Los valores numéricos de η_A y de η_B se vuelcan directamente al gráfico de la L.I.V. de V_A^* .-

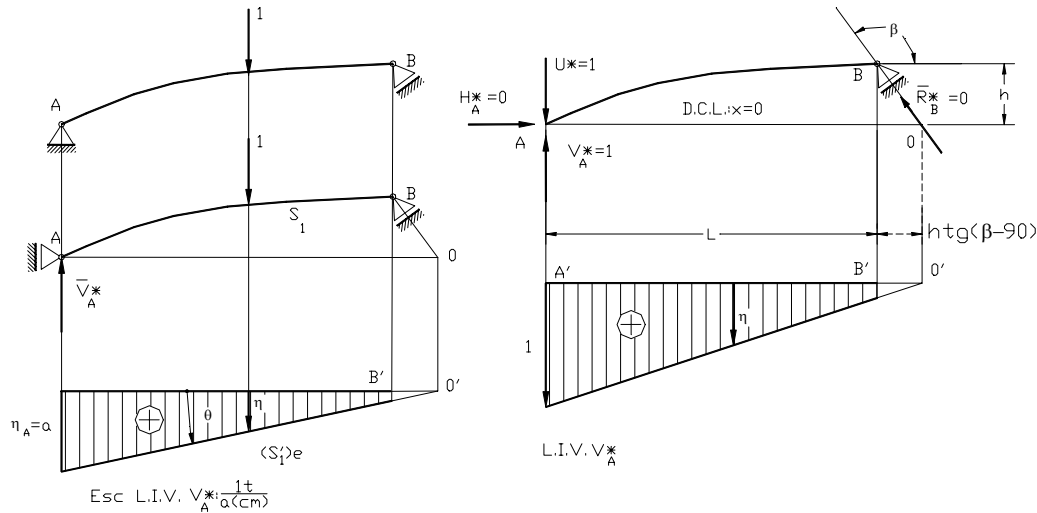


Fig. 9.33

El trazado de la L.I.V. del momento de empotramiento de una viga de este tipo, figura 9.34, se realiza sustituyendo el empotramiento en A por un apoyo doble que permitirá las rotaciones θ alrededor de dicho punto.-

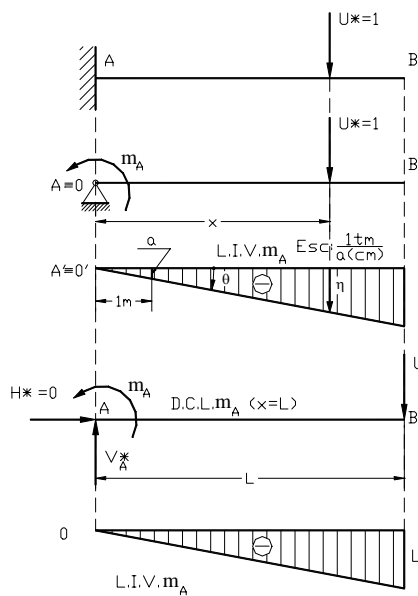


Fig. 9.34

El trazado gráfico se ejecuta como en los casos anteriores presentando como novedad la determinación del valor del desplazamiento "a" correspondiente a la rotación θ de la incógnita m_A^* .- Gráficamente se lo obtiene llevando horizontalmente y en sentido de las "x" positivas a partir del polo O' del diagrama de desplazamientos, un radio de longitud unitaria (en la misma escala y unidad dimensional en que se ha representado el sistema): la ordenada del diagrama así determinada nos da el denominador "a" que se lleva a la escala de influencia.- Efectivamente, siendo una rotación infinitésima, será:

$$\theta = \operatorname{tang} \theta = \frac{a}{1} = a$$

El signo de "a" es el de la rotación θ .- La escala de influencia y su signo se establecen de acuerdo a lo expresado en el apartado 9.8.- A partir de la (2) del apartado 9.8. se tiene:

$$\eta < 0 \quad ; \quad \theta > 0 \quad \therefore \quad \frac{\eta}{\theta} < 0 \quad \rightarrow \quad m_A^* < 0$$

Verificando con la (1), se tiene:



- Trabajo de la fuerza unitaria > 0 por tener η y U^* sentidos coincidentes
- Trabajo del par incógnita < 0 por tener θ y \mathbf{m}_A^* sentidos opuestos

El sentido supuesto para el par es correcto: $\mathbf{m}_A^* < 0$.

Para aplicar el método analítico observamos el diagrama de desplazamientos, el que en muchos casos puede ser simplemente croquisado, y deducimos que cuando $U^* = 1$ está ubicada en el empotramiento A su influencia es nula, en cambio es máxima cuando se sitúa sobre el extremo B.- Trazamos el D.C.L. para este estado de carga y se tiene:

$$+\uparrow \sum Y = 0 \quad \therefore \quad V_A^* = 1 \quad ; \quad +\downarrow \sum M_A = -\mathbf{m}_A^* + 1.L = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{m}_A^* = L$$

El signo que le hemos supuesto al momento de empotramiento se verifica; por lo tanto lo volcamos en la L.I.V. de \mathbf{m}_A^* y colocamos, en la ordenada correspondiente al extremo B, el valor numérico obtenido cuya dimensión será la del momento de una fuerza.-

9.9.2.- LÍNEA DE INFLUENCIA DE ESFUERZOS INTERNOS EN ESTRUCTURAS DE ALMA LLENA.-

9.9.2.1.- Línea de influencia de momentos flectores.-

Sea el caso sencillo de un viga simplemente apoyada de eje horizontal para cuya sección s-s se desea trazar la L.I.V. de M_s^* , figura 9.35.- El procedimiento a seguir es el que se ha utilizado hasta acá, pero es necesario hacer aclaraciones respecto de la incógnita y su desplazamiento.- El mecanismo que pone en evidencia la incógnita permitiéndole un desplazamiento virtual, se obtiene introduciendo una articulación en correspondencia con la sección considerada transformando la estructura isostática en una cadena cinemática de un grado de libertad.- La incógnita está indicada por dos cuplas iguales,

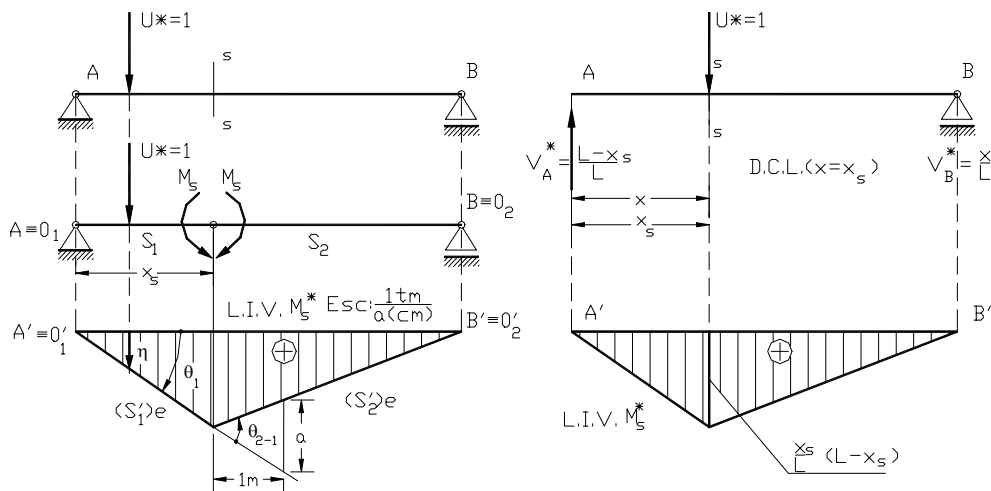


Fig. 9.35

opuestas, que representan el momento flector en la sección s-s supuesto positivo: su desplazamiento está dado por la rotación relativa de una chapa respecto a la otra, θ_{2-1} .- Si al conjunto de las dos chapas (supuestas rígidamente vinculadas) se le da la rotación θ_1 , la fuerza unitaria desarrollará el trabajo positivo $1.\eta$ en cambio la incógnita no producirá trabajo ya que no hay desplazamiento relativo.- Si ahora se deja fija la chapa S_1 y a la chapa S_2 se la hace rotar alrededor de su centro relativo (la articu-



lación que hemos introducido) hasta que su elación pase por la proyección O_2' del polo de la chapa S_2 , queda terminado el diagrama de desplazamientos.-

Obsérvese que en este desplazamiento relativo θ_{2-1} , de la chapa S_2 respecto a la S_1 , la cupla izquierda no efectúa trabajo alguno efectuándolo solamente la cupla derecha (**cupla que define el signo del momento flector**), y que realiza el trabajo $M_{S^*} \cdot \theta_{2-1} < 0$. - El valor numérico de la rotación relativa θ_{2-1} se obtiene como en el caso anterior por el segmento "a" de ordenada determinada por las intersecciones de las rectas correspondientes a las dos elaciones, $(S_1')_e$ y (S_2') , con la vertical trazada por el extremo de un radio unitario llevado horizontalmente y hacia la derecha de la proyección del polo relativo sobre el diagrama de desplazamientos.- Su signo es el de la rotación θ_{2-1} . -

Con "a" y "η" se establece la escala y el signo de la línea de influencia, este último conviene verificarlo con la ecuación de trabajo.- En la figura 9.35: $\eta < 0$, $\theta_{2-1} < 0$; resultando $M_{S^*} > 0$; verificando con la ecuación de trabajo se tiene: $1 \cdot \eta > 0$ para el trabajo de la fuerza unitaria, y $M_{S^*} \theta_{2-1} < 0$ para el trabajo del par incógnita, lo que verifica el signo positivo supuesto.-

Conocido el diagrama de desplazamiento, se observa que sólo hay que determinar el momento M_{S^*} cuando la fuerza unitaria actúa en correspondencia con la sección: se traza el D.C.L., se calculan las reacciones de apoyo y luego el momento flector en la sección considerada; este valor constituirá la ordenada de la L.I.V buscada.-

Si se tiene ahora el sistema de la figura 9.36, se sigue el proceso que se ha descrito en los casos anteriores, como surge del análisis de dicha figura.- Nos limitaremos a explicar el método combinado.-

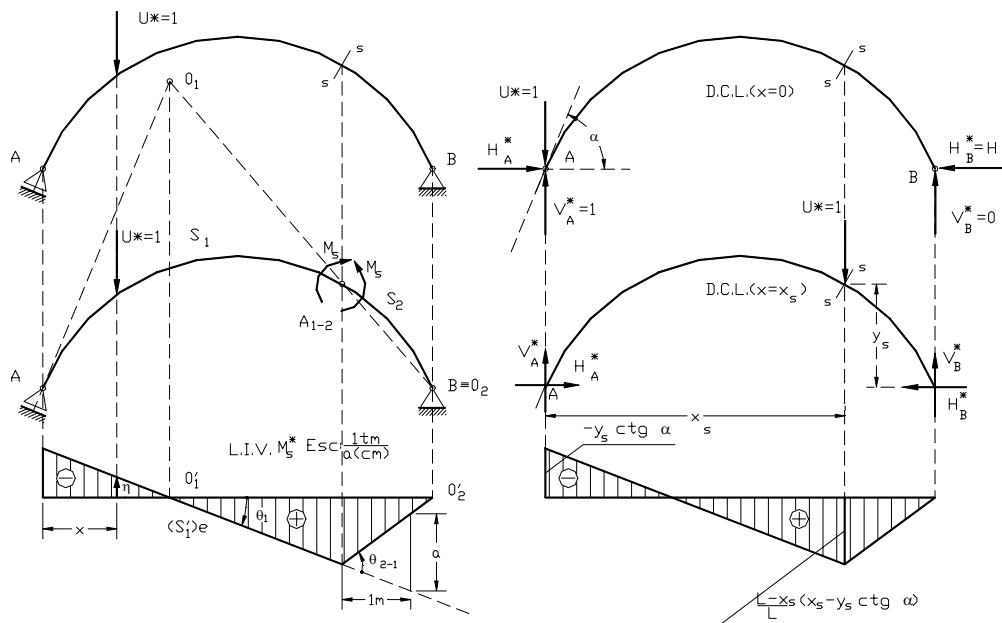


Fig. 9.36

Trazado el diagrama de desplazamientos verticales se observa que el polo O_2 coincide con B, por ello la ordenada de influencia en O_2' es nula.- Para completar la L.I.V de M_{S^*} se requiere calcular las ordenadas en el apoyo A y en correspondencia con la sección considerada.- Con ese fin se han trazado los D.C.L. para esas dos posiciones de la fuerza unitaria, y se obtiene:

Para $U^* = 1$, sobre el apoyo A, las reacciones valen

$$V_A^* = 1 ; V_B^* = 0 ; H_A^* = V_A^* \cotg \alpha = H_B^* = \cotg \alpha$$



y la ordenada de la línea de influencia en A, vale:

$$M_S^* = -y_S \cot g \alpha$$

Para $U^* = 1$, en correspondencia con la sección s-s, será

$$V_A^* = \frac{L - x_S}{L} \quad ; \quad V_B^* = \frac{x_S}{L} \quad ; \quad H_A^* = V_A^* \cot g \alpha = H_B^* = \frac{(L - x_S) \cdot \cot g \alpha}{L}$$

y la ordenada de la línea de influencia en la sección s-s vale:

$$M_S^* = \frac{L - x_S}{L} (x_S - y_S \cdot \cot g \alpha)$$

9.9.2.2.- Línea de influencia de esfuerzos cortantes.-

El proceso de trazado del diagrama de desplazamiento es siempre el mismo, pero cabe repetir algunos conceptos vistos anteriormente y formular algunas aclaraciones.-

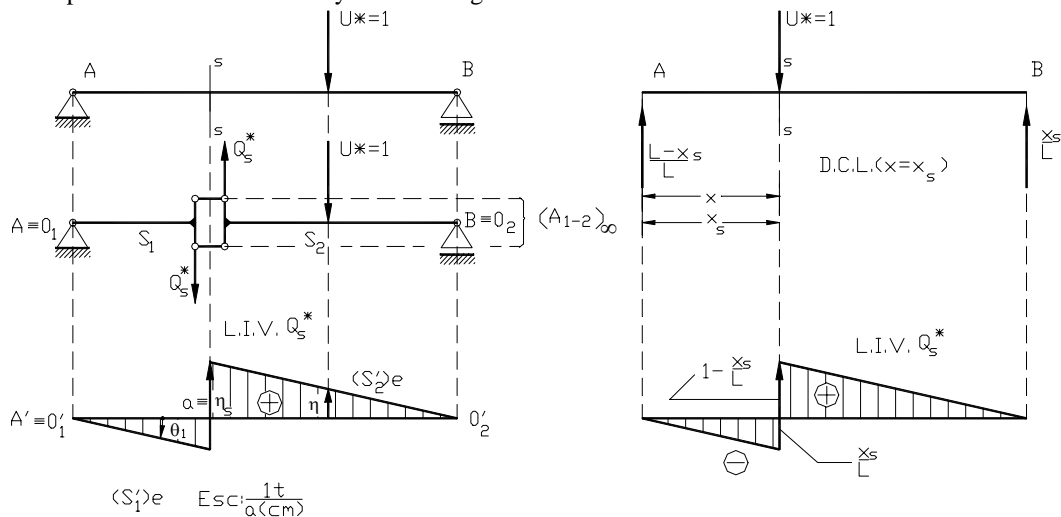


Fig. 9.37

En primer término recuérdese que del par de fuerzas iguales y opuestas que definen el esfuerzo tangencial en una sección, la que actúa en la cara derecha del corte es la que determina el signo del mismo: será positivo si ella va dirigida hacia arriba o afuera, o si el efecto físico es tal que las fuerzas externas tienden a cortar la viga, pilar o arco en la sección considerada llevando hacia arriba o hacia afuera la parte izquierda de la estructura, y hacia abajo o adentro la derecha.-

En segundo término, el mecanismo que permite los desplazamientos tangenciales de una cara respecto a la otra, figuras 9.37 y 9.38, se lo concibe formado por dos bielas paralelas doblemente articuladas a ambas caras de la sección del corte, y dispuestas perpendiculares al plano de las mismas.- Lógicamente ésta es una concepción imaginaria ya que se trataría de bielas infinitamente cortas pues ambos planos son coincidentes.-

Obsérvese finalmente que, al ser las bielas paralelas, el centro de rotación relativo se ubica en el punto impropio de la dirección del eje de la estructura, o de su tangente en caso de ser éste curvo; el despla-



zamiento relativo de una chapa respecto a la otra es una traslación, y sus elaciones serán rectas paralelas pasantes por los polos absolutos de cada una de las chapas.-

Veamos escalas y signos.- En el caso de la viga, figura 9.37, el desplazamiento η_s coincide con el desplazamiento de la incógnita por ser el plano de la sección y la fuerza unitaria verticales.- No pasa lo mismo en el caso del arco, figura 9.38, por lo que hay que desproyectar el corrimiento vertical sobre la dirección del desplazamiento de la incógnita obteniéndose la proyección "a".- Determinado "a" se tiene la escala de influencia por la que hay que multiplicar los desplazamientos η .-

En cuanto al signo, en ambos casos el cociente $\frac{\eta}{a}$ es positivo, lo que determina que la fuerza Q_s^* derecha (que es la que trabaja durante el desplazamiento relativo) sea mayor que cero, con lo que el esfuerzo de corte resulta positivo como se ha supuesto.- Este resultado se comprueba aplicando el principio de los trabajos virtuales: el trabajo de la fuerza unitaria es negativo por lo tanto el trabajo de la incógnita será positivo, coincidiendo con lo que se observa en la L.I.V. de Q_s^* .-

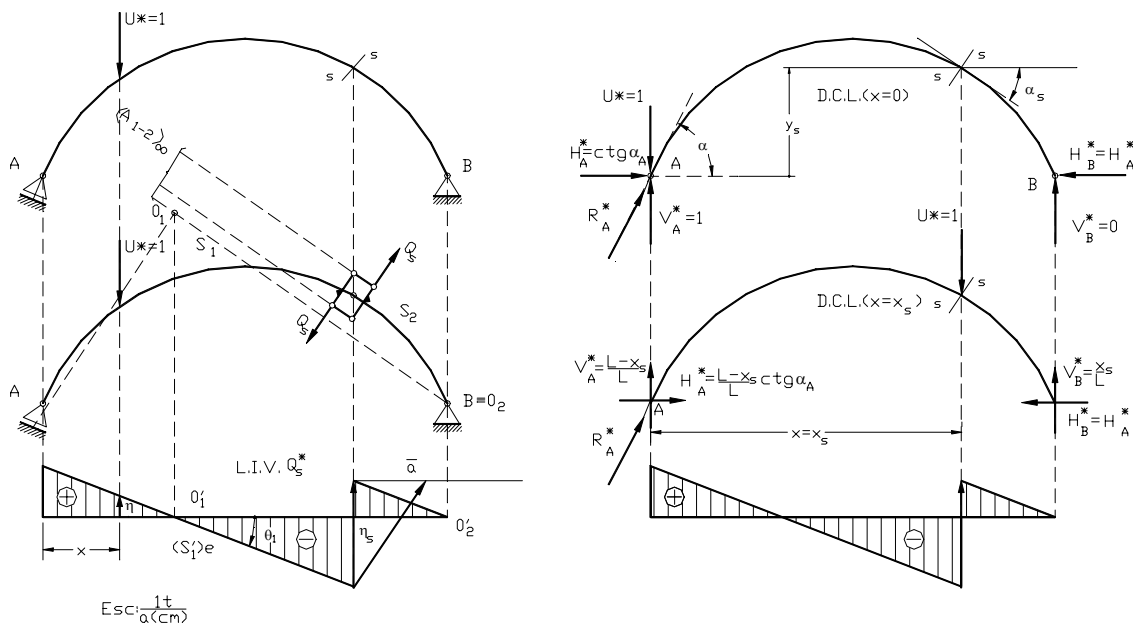


Fig. 9.38

Para aplicar el método estático, consideremos en primer término el caso de la viga de la figura 9.37.- Observemos el diagrama de desplazamientos verticales: vemos que en correspondencia con los apoyos ellos son nulos y que los valores extremos (de uno y otro signo) se producen cuando la fuerza unitaria se encuentra inmediatamente a la izquierda e inmediatamente a la derecha de la sección considerada.- El D.C.L. es el mismo para ambas posiciones ya que están infinitamente próximas; se tiene:

$$V_A^* = \frac{L - x_s}{L} \quad ; \quad V_B^* = \frac{x_s}{L}$$

Si $U^*=1$ se ubica inmediatamente a la izquierda de s-s con $x = x_s$, el esfuerzo de corte vale:

$$Q_{S(izq)}^* = \frac{L - x_s}{L} - 1 = -\frac{x_s}{L}$$

Y si $U^*=1$ se ubica inmediatamente a la derecha de s-s con $x = x_s$, el esfuerzo de corte valdrá:



$$Q_{S(\text{der})}^* = \frac{L - x_S}{L}$$

Efectuada la resolución numérica, se vuelcan en el diagrama de desplazamientos los valores con su dimensión y signo con lo que se completa el trazado de la L.I.V. de Q_S^* .

Veamos el trazado de la L.I.V. de Q_S^* en el caso del arco de la figura 9.38, del cual ya conocemos el diagrama de desplazamientos verticales.- De su observación se deduce que, como el polo O_2 coincide con el apoyo B, para la determinación de la línea de influencia buscada se necesita conocer el valor del esfuerzo de corte producido en la sección s-s cuando $U^*=1$ se ubica sobre el apoyo A y cuando se sitúa inmediatamente a izquierda y derecha de la sección considerada.- En la parte derecha de la figura se han trazado los D.C.L de la estructura para las posiciones de la fuerza unitaria indicadas de los cuales se obtienen las expresiones de los esfuerzos de corte requeridos.- Efectivamente:

Si $U^*=1$ se sitúa sobre el apoyo A, con $x = 0$ se tiene

$$V_A^* = 1 \quad ; \quad V_B^* = 0 \quad ; \quad H_A^* = H_B^* = \cotg \alpha_A \quad \therefore \quad Q_S^* = \cotg \alpha_A \cdot \text{sen } \alpha_S = \eta_A$$

Si $U^* = 1$ se ubica sobre la sección s-s, con $x = x_S$, será:

$$V_A^* = \frac{L - x_S}{L} \quad ; \quad V_B^* = \frac{x_S}{L} \quad ; \quad H_A^* = H_B^* = \frac{L - x_S}{L} \cotg \alpha_A$$

Si $U^* = 1$ actúa inmediatamente a izquierda y derecha de la sección el esfuerzo de corte vale respectivamente:

$$Q_{S(\text{izq})}^* = \frac{L - x_S}{L} \cos \alpha_S - \cos \alpha_S + \frac{L - x_S}{L} \cotg \alpha_A \cdot \text{sen } \alpha_S = \eta_{S(\text{izq})}$$

$$Q_{S(\text{der})}^* = \frac{L - x_S}{L} \cos \alpha_S + \frac{L - x_S}{L} \cotg \alpha_A \text{sen } \alpha_S = \eta_{S(\text{der})}$$

Introducidos los datos que figuran en estas expresiones se obtienen los valores numéricos y signos del esfuerzo de corte en la sección s-s calculados para las diversas posiciones de la fuerza unitaria, los que se vuelcan en las ordenadas correspondientes del diagrama de desplazamiento; con ello queda determinada la L.I.V. de Q_S^* de la estructura dada.- El valor de la abscisa del polo O_1 puede utilizarse para verificar resultados ya sea que haya sido obtenida gráficamente -trabajando a escala- o calculada trigonométricamente.-

9.9.2.3.- Líneas de influencia de esfuerzos axiales.-

Sea el pórtico triarticulado de la figura 9.39; se desea trazar la L.I.V. de N_S^* respecto a una sección s-s de la columna derecha.- Se practica un corte en el plano transversal de la sección considerada y se introduce un mecanismo que permita que la fuerza incógnita se pueda desplazar en su dirección efectuando trabajo mecánico; este mecanismo consiste en dos bielas biarticuladas dispuestas paralelas al plano de la sección de corte que funcionarían como dos tubos telescópicos paralelos a N_S^* .

En cada cara del corte se aplican dos fuerzas, iguales y opuestas, de intensidad dada por el esfuerzo normal N_S^* que origina la fuerza unitaria; el signo de este esfuerzo lo suponemos positivo produciendo tracción en las dos partes en que ha quedado dividida la columna.-

Trazamos el diagrama de desplazamientos virtuales en la forma conocida demarcando los corrimientos verticales η de la fuerza unitaria y η_S de la incógnita; η_S se desproyecta en la dirección de N_S^* obte-



niéndose en dirección , intensidad y sentido el desplazamiento \bar{a} de la incógnita, que permite establecer la escala de la L.I.V. de N_s^* .- En la vertical de η su signo es:

$$\eta < 0 \quad ; \quad a > 0 \quad \therefore \quad \frac{\eta}{a} < 0 \quad \rightarrow \quad N_s^* < 0$$

Verificación:

Trabajo de la fuerza unitaria $U^* \cdot \eta > 0$ (sentidos coincidentes)
 Trabajo de la incógnita $N_s^* \cdot a > 0$ (sentidos coincidentes)

Esto no es posible ya que su suma debe ser nula; se debe cambiar el sentido positivo supuesto, con-

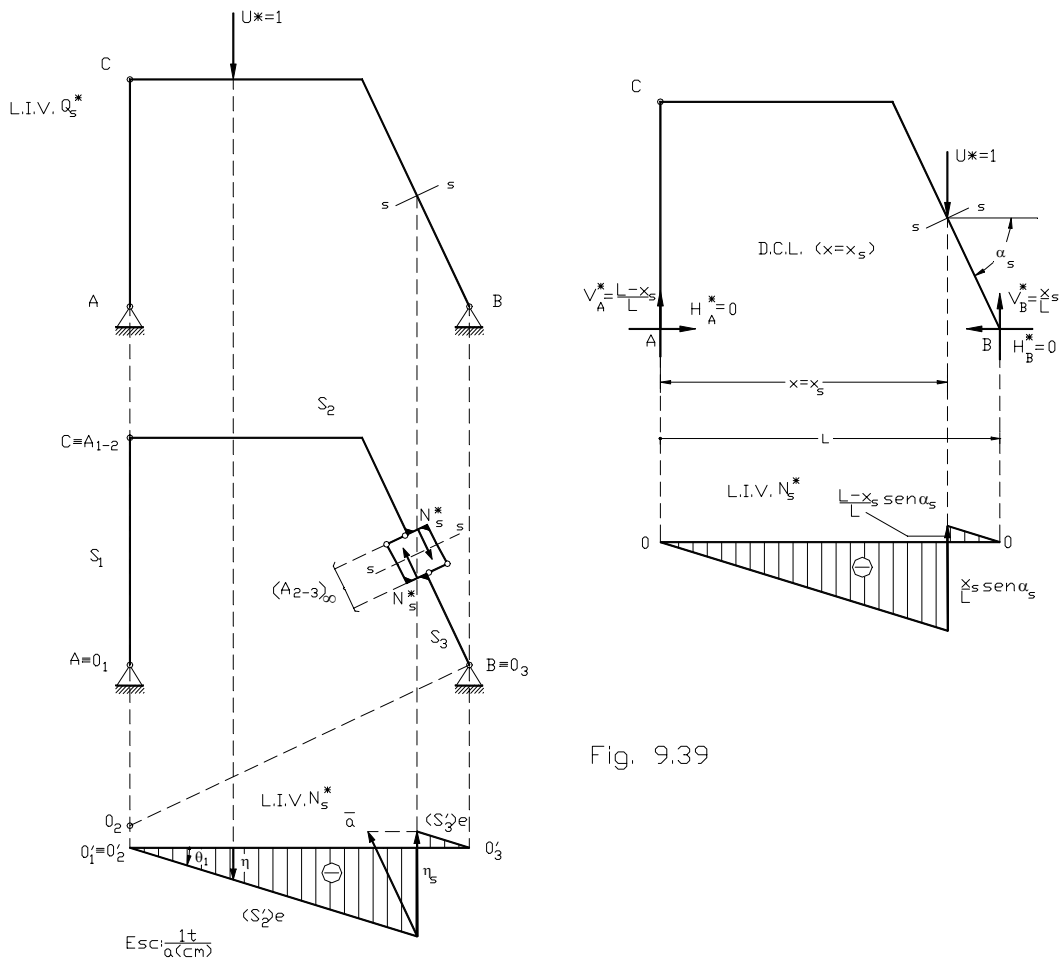


Fig. 9.39

firmando lo obtenido al dividir η y “a” que dió $N_s^* < 0$.-

Resolvamos ahora por el método estático partiendo del diagrama de desplazamientos.- De su observación se deduce que las ordenadas de la L.I.V. de N_s^* en correspondencia con los apoyos (polos O_1 y O_3) son nulas, y que para obtener sus valores extremos se debe calcular el esfuerzo axial a ambos lados de la fuerza unitaria cuando actúa sobre la sección s-s.-

Con U^* en la posición indicada se construye el diagrama de cuerpo libre.- Se tiene:

$$V_A^* = \frac{L - x_s}{L} \quad ; \quad V_B^* = \frac{x_s}{L} \quad ; \quad H_A^* = H_B^* = 0$$



Si U^* actúa inmediatamente a izquierda y derecha de la sección, será en el orden dado:

$$N_{S(izq)}^* = \left[\frac{L - x_S}{L} - 1 \right] \text{sen } \alpha_S = -\frac{x_S}{L} \text{sen } \alpha_S < 0$$

$$N_{S(der)}^* = \frac{L - x_S}{L} \text{sen } \alpha_S > 0$$

Introduciendo en estas expresiones los datos por ellas requeridos, se calculan los valores extremos numéricos con sus signos, que se vuelcan en el diagrama de desplazamientos verticales, obteniéndose la línea de influencia buscada de lectura directa sin necesidad de escala.- Los valores intermedios se calculan interpolando analíticamente.- Se debe verificar el paralelismo de ambas ramas de la línea de influencia ya que $A_{2,3}$ es un punto impropio.- Esto se puede efectuar analíticamente por semejanza de triángulos.-

9.9.3.- LÍNEA DE INFLUENCIA DEL ESFUERZO EN BARRAS DE RETICULADOS.-

9.9.3.1. - Línea de influencia del esfuerzo en una barra de cordón.-

El esfuerzo, cuya línea de influencia se busca, se pone en evidencia eliminando o cortando la barra en consideración.- Para sustituirla se colocan en los nudos extremos dos fuerzas iguales y opuestas, que designaremos T^* , y le supondremos inicialmente signo positivo; éste corresponde al sentido de las fuerzas alejándose del nudo respectivo originando esfuerzo de tracción en la barra, figura 9.40.-

En la forma conocida se determinan los polos de la cadena cinemática y se traza el diagrama de desplazamientos verticales.- El corrimiento de U^* , η , se obtiene directamente en su vertical, y el desplazamiento de la incógnita, $\Delta_{N-M} = a$, en la forma vista en 9.7.1.6.- Conocido "a" se tiene la escala de la L.I.V. de T^* ; veamos su signo.-

Respecto al corrimiento η como está dirigido hacia abajo es negativo.- Para la variación de distancia se procede de la siguiente manera: En el diagrama de desplazamientos observamos el sentido de la rotación relativa, $\theta_{2,1}$, de la chapa S_2 respecto a S_1 (antihoraria en nuestro caso) que, aplicada a la chapa S_2 cuando la S_1 está fija, produce un acercamiento de N hacia M.- Este desplazamiento tiene sentido coincidente con el que supusimos para $T^* > 0$ (tracción) correspondiéndole el mismo signo que a ésta, positivo.- Se tiene:

$$\eta < 0 \quad ; \quad \Delta_{N-M} > 0 \quad \therefore \quad \frac{\eta}{\Delta_{N-M}} < 0 \quad \rightarrow \quad T^* < 0$$

Esto nos dice que el sentido supuesto es erróneo y que la barra trabaja a compresión, lo que es evidente por tratarse de una barra de cordón superior.- No obstante esto, verifiquemos el sentido supuesto con la ecuación de trabajo:

Trabajo de la fuerza unitaria	$U^* \cdot \eta > 0$	(sentidos coincidentes)
Trabajo de la incógnita	$T^* \cdot \Delta_{N-M} > 0$	(sentidos coincidentes)

Como esto no es posible debemos cambiar el sentido supuesto y será: $T^* < 0$

Determinada la forma del diagrama de desplazamientos podemos determinar la L.I.V. de T^* por medio del método estático.- Efectivamente, las ordenadas en los apoyos son nulas y el máximo valor del



esfuerzo en la barra se produce cuando la carga unitaria se ubica sobre la articulación $A_{1,2}$ coincidente con el nudo C del reticulado.- Se construye el D.C.L. para esta posición de U^* , y se tiene:

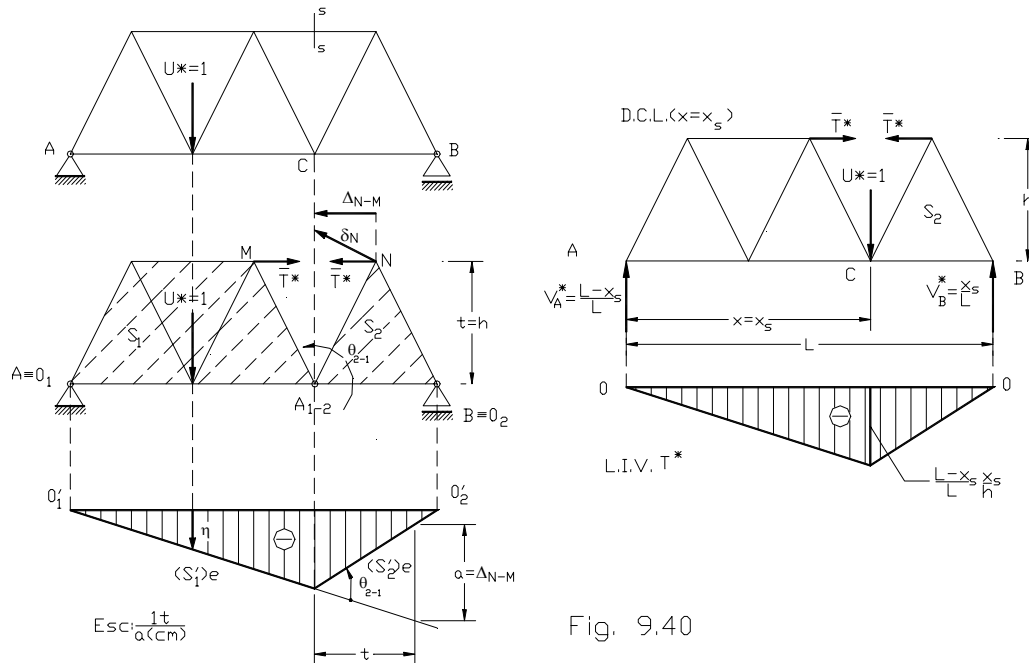


Fig. 9.40

$$V_A^* = \frac{L - x_C}{L} ; \quad V_B^* = \frac{x_C}{L}$$

Si en la estructura practicamos un corte de Ritter vertical por el nudo C, seccionando la barra de cuyo esfuerzo queremos trazar la línea de influencia, y tomando momento respecto a C de las fuerzas situadas a la izquierda del corte, se tiene :

$$\sum_{izq} M_C = \frac{L - x_C}{L} \cdot x_C + T^* \cdot h = 0 \quad \therefore \quad T^* = -\frac{L - x_C}{L} \cdot \frac{x_C}{h}$$

Se vuelcan los valores numéricos y signo al diagrama de desplazamientos y se tiene la L.I.V de T^* .- Se presenta una variante a tener en cuenta si la barra pertenece al cordón por el cual circulan las cargas ya que, como en estas estructuras generalmente la transmisión de ellas es indirecta, la línea de influencia trazada debe modificarse según lo indicado en el apartado 9.6.-

9.9.3.2.- Línea de influencia del esfuerzo en una barra diagonal.-

Sea la viga Pratt de la figura 9.41 de una de cuyas diagonales, MN, necesitamos la línea de influencia.- Siguiendo el método cinemático no hay variantes respecto al caso anterior.- Analicemos los signos:

$$\eta > 0 ; \quad \Delta_{N-M} > 0 \quad \therefore \quad \frac{\eta}{\Delta_{N-M}} > 0 \quad \rightarrow \quad T^* > 0$$

Verifiquemos con la ecuación de trabajo:

$$\text{Trabajo de la fuerza unitaria} \quad U^* \cdot \eta < 0 \quad (\text{Sentidos opuestos})$$



Trabajo de la incógnita

$T^* \cdot \Delta_{N-M} > 0$ (Sentidos coincidentes)

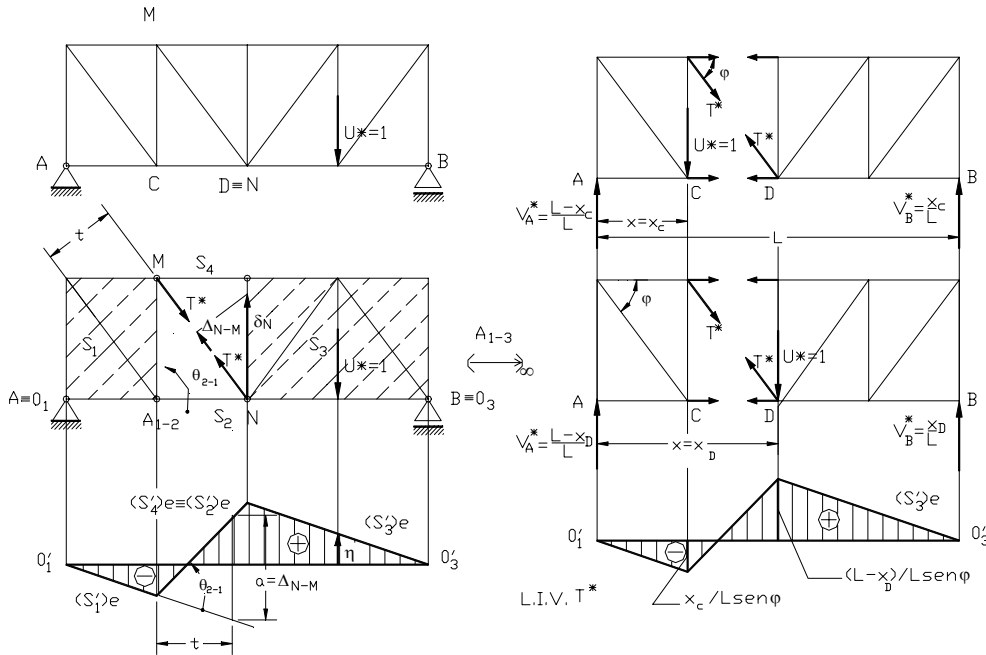


Fig. 9.41

Para la posición indicada de la fuerza unitaria la barra trabaja a tracción, alcanzando su máximo en correspondencia con el nudo D de la estructura; entre C y D invierte su signo pasando a un mínimo en correspondencia con el nudo C.- Para determinar analíticamente la L.I.V. de T^* se construye el D.C.L y colocando la fuerza unitaria primero en C y luego en D, se calcula el valor de la incógnita para esas posiciones.- Practicando un corte de Ritter que intercepte la diagonal cuyo esfuerzo se busca y considerando las fuerzas actuantes a la izquierda del corte, se tiene:

Aplicada $U^*=1$ en el nudo C ($x=x_c$)

$$\sum_{izq} Y = \frac{L - x_c}{L} - 1 - T^* \operatorname{sen} \varphi = -\frac{x_c}{L} - T^* \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$T^* = -\frac{x_c}{L \operatorname{sen} \varphi}$$

Aplicada $U^*=1$ en el nudo D ($x=x_D$)

$$\sum_{izq} Y = \frac{L - x_D}{L} - T^* \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$T^* = \frac{L - x_D}{L \operatorname{sen} \varphi}$$

Los valores numéricos y signos que resultan de introducir los datos del problema en las ecuaciones anteriores se vuelcan al diagrama de desplazamientos quedando determinada la L.I.V. del esfuerzo en la diagonal elegida.- Se cierra el cálculo verificando el paralelismo entre la primera y tercera ramas de la línea de influencia.-



9.9.4.- LÍNEA DE INFLUENCIA EN SISTEMAS DE VARIAS CHAPAS.-

Sea la viga Gerber de la figura 9.42.- Se efectuará el trazado de la L.I.V. de M_s^* en una sección del primero de sus tres tramos.- Formada la cadena cinemática mediante la introducción de una articulación en la sección s-s establecida, se determinan los polos de las cuatro chapas que coinciden con los cuatro apoyos de la viga.- Con ellos se traza el diagrama de desplazamientos verticales que no ofrece novedad alguna.- Determinemos los signos para la posición que se ha fijado a la carga unitaria:

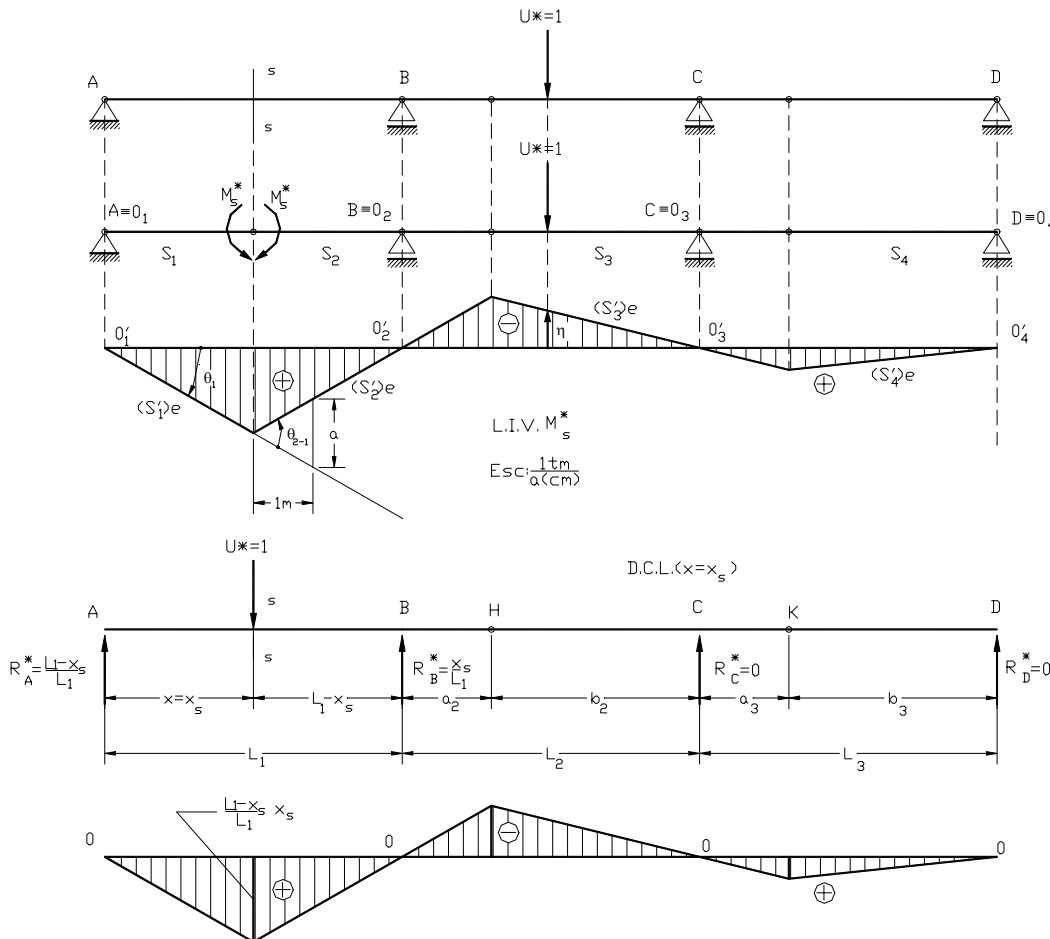


Fig. 9.42

$$\eta > 0 ; a = l \cdot \theta_{2-1} < 0 \quad \therefore \frac{\eta}{a} < 0 \quad \rightarrow \quad M_s^* < 0$$

Verificación con la ecuación de trabajo

Trabajo de la fuerza unitaria	$U^* \cdot \eta < 0$	(sentidos opuestos)
Trabajo de la incógnita	$M_s^* \cdot \theta_{2-1} < 0$	(sentidos opuestos)

Como esto no es posible, resulta erróneo el sentido supuesto , por lo tanto $M_s^* < 0$.-

Conocido el esquema del diagrama de desplazamientos verticales se lo convierte en L.I.V de M_s^* calculando el momento flector en la sección s-s cuando la fuerza unitaria actúa en correspondencia con ella.- Esto es así por cuanto se conoce la posición de los cuatro polos en coincidencia con los apoyos,



para los cuales la ordenada de la línea de influencia es nula.- Se construye el D.C.L. y se calculan las reacciones en los apoyos para la carga unitaria actuando en la sección s-s; se tiene:

$$R_A^* = \frac{L_1 - x_s}{L_1} ; R_B^* = \frac{x_s}{L_1} ; R_C^* = 0 ; R_D^* = 0$$

Si U^* se ubica sobre la sección s-s será:

$$M_s^* = \frac{L_1 - x_s}{L_1} \cdot x_s$$

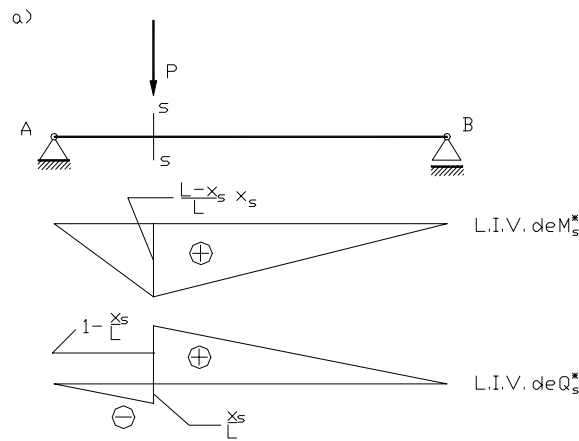
Este valor se vuelca con su signo en el tramo (1) del diagrama de desplazamientos.- En los tramos (2) y (3) los valores extremos del momento en la sección s-s se producen cuando la fuerza unitaria pasa sobre las articulaciones intermedias pero, como la posición de las articulaciones es un dato de la geometría de la viga, su cálculo por interpolación analítica resulta elemental.-

9.10.- DIAGRAMAS ENVOLVENTES.-

Demos una visión general a lo expuesto sobre fuerzas reactivas en las estructuras y sus apoyos:

- En los capítulos anteriores se ha desarrollado para diversos tipos de estructuras el trazado de los diagramas de esfuerzos internos que nos dan, **para una determinada posición fija de la carga, el valor del esfuerzo interno de que se trate, en todas las secciones de la estructura.-**
- Las líneas de influencia, vistas en el presente capítulo, permiten conocer **los valores del esfuerzo que se desarrolla, en una sección fija preestablecida, cuando la estructura es recorrida por una carga móvil.-**
- Permiten asimismo, establecer **las posiciones de la carga que originan el máximo y el mínimo valor del esfuerzo en la sección considerada.-**

Para conocer las condiciones más desfavorables posibles en cualquier sección de la estructura, nos



falta establecer un último tipo de diagramas que pasamos a considerar.-

Sea la viga simplemente apoyada de la figura 9.43.a) y sea s-s una sección para la cual conocemos las líneas de influencia del momento flector y del esfuerzo de corte.- Sabemos que si ubicamos la carga \bar{P} :

- en correspondencia con la sección s-s, se obtendrá **el máximo valor posible del momento flector en ella**; este valor lo designamos $M_{S_{máx}}$.-
- inmediatamente a la derecha de la sección se tendrá **el máximo valor del esfuerzo cortante en la sección**, que se designa $Q_{S_{máx}}$.-
- inmediatamente a la izquierda de ella se origina **el mínimo valor posible del esfuerzo de corte en s-s**, $Q_{S_{mín}}$

Obtenidos estos valores se considera otra sección s'-s' de la misma viga, figura 9.43.b) y se trazan las líneas de influencia del momento flector y del esfuerzo de corte en ella, se podrán determinar los valores de los esfuerzos máximos y mínimos que se originan en ella: $M_{S'_{máx}}$, $Q_{S'_{máx}}$, $Q_{S'_{mín}}$.-

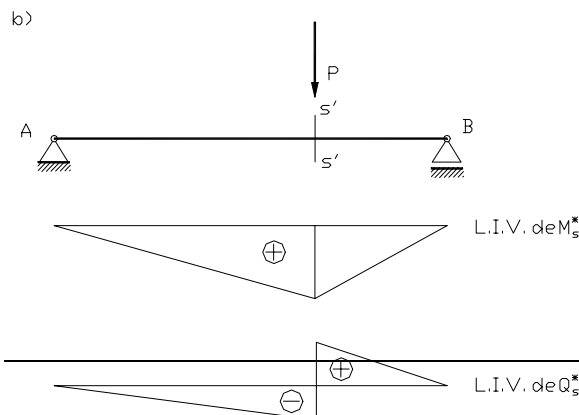


Fig. 9.43



Repitiendo el procedimiento expresado para un número suficiente de secciones y llevando, en correspondencia con la respectiva sección y a partir de un eje de referencia, los valores máximos y mínimos de un determinado esfuerzo interno, se obtiene el diagrama llamado de **máxima y mínima sollicitación o diagrama envolvente del esfuerzo en consideración**.- Este diagrama permite el cálculo, o la verificación, de las dimensiones de cualquier sección de la estructura para las sollicitaciones más peligrosas que puedan presentarse en ellas.-

Las condiciones de cargas accidentales que conviene considerar son las siguientes:

1. Una sola carga \bar{P} concentrada y móvil, de intensidad, dirección y sentido constantes;
2. Una carga distribuida de intensidad “p” constante que puede ocupar cualquier posición y variar la longitud cargada como ser muchedumbres, mercaderías etc. ...;
3. Un tren móvil de cargas concentradas $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ que mantienen entre sí distancias mutuas invariables.-

Debe tenerse presente además una carga permanente distribuida de intensidad “g” constante correspondiente el peso propio de la estructura y al peso de los elementos constructivo que ella soporta y se encuentran adheridos a la misma, como ser entrepisos, pisos, techos, cielorrasos tabiques, etc.- Como estructura consideraremos **sólo el caso de la viga simplemente apoyada**.-

9.10.1.- DIAGRAMA ENVOLVENTE: CARGA ACCIDENTAL \bar{P} (concentrada y móvil).-

9.10.1.1.- Diagrama envolvente actuando sólo la carga accidental.-

Prescindamos inicialmente de la carga permanente “g” y consideremos sólo a \bar{P} , figura 9.44.- La L.I.V. de M_S^* para una sección genérica s-s indica que el momento flector es máximo cuando \bar{P} está sobre s-s de abscisa x_S , y se tiene, recordando 9.3. y 9.4.:

$$M_{S\text{máx}} = P\eta_{\text{máx}} = \frac{P(L - x_S) \cdot x_S}{L} = -\frac{P \cdot x_S^2}{L} + P \cdot x_S$$

La expresión anterior representa **una parábola de segundo grado si se toma $x = x_S$ como variable independiente**.- Esta abscisa determina simultáneamente, la posición de la sección genérica s-s y la de la carga móvil \bar{P} que actúa sobre ella: sus ordenadas dan para cualquier sección los valores del máximo momento flector que en ella se produce.-

Estas ordenadas son nulas en A y B y alcanza el máximo $\frac{PL}{4}$ para la carga situada a la mitad de la luz, $x_S = \frac{1}{2} L$.- Observemos que si se une S_1 con A_1 y B_1 , se obtiene el diagrama de momentos flectores para \bar{P} inmóvil sobre s-s.-



En todas las secciones el momento es mínimo cuando la viga está descargada: $M_{\min} = 0$.-

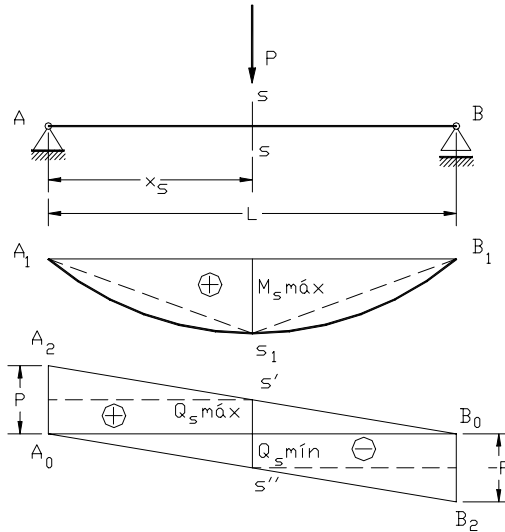


Fig. 9.44

Se ha visto que el esfuerzo de corte máximo en una sección cualquiera de abscisa x_s , $Q_{s\text{máx}}$, se produce cuando \bar{P} se ubica inmediatamente a la derecha de s-s, y su valor será, apartado 9.9.2.2.:

$$Q_{s\text{máx}} = P \cdot \eta_{\text{máx}} = \frac{P(L - x_s)}{L} = -\frac{P}{L}x_s + P$$

que es la ecuación de una recta; $x = x_s$ varía entre 0 y L; se representa tomando:

$$\text{para } x_s = 0 : Q_{s\text{máx}} = P \quad \text{y para } x_s = L : Q_{s\text{máx}} = 0$$

Esta recta constituye el diagrama envolvente de esfuerzos de corte máximos.-

$Q_{s\text{mín}}$ se produce cuando \bar{P} está inmediatamente a la izquierda de s-s, apartado 9.9.2.2. , y se tiene:

$$Q_{s\text{mín}} = P \cdot \eta_{\text{mín}} = -\frac{P \cdot x_s}{L}$$

ecuación de una recta que constituye el diagrama envolvente de esfuerzos de corte mínimos que se representa tomando

$$\text{para } x_s = 0 : Q_{s\text{mín}} = 0 \quad \text{y para } x_s = L : Q_{s\text{mín}} = -P$$

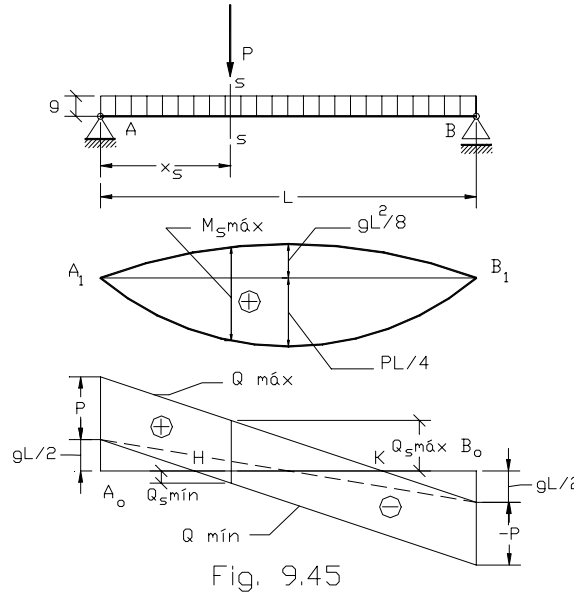
Obsérvese que si se traza la vertical $S'S''$ en correspondencia con una sección cualquiera se obtiene el diagrama $A_0A_2S'S''B_2$ B_0 correspondiente al esfuerzo de corte originado por P inmóvilizada sobre la sección s-s.- Interesa la determinación de los esfuerzos mínimos porque puede ser que, en valor absoluto, superen el valor absoluto del esfuerzo máximo.-

9.10.1.2.- Diagrama envolvente : carga accidental concentrada más carga permanente.-

La carga permanente “g” distribuida en toda la luz de la viga produce momentos flectores positivos representados por el diagrama parabólico de ordenada máxima $gL^2/8$, figura 9.45.- Esta parábola, de momentos positivos, constituye también el diagrama de $M_{s\text{mín}}$ cuando la viga está descargada.- Su-



mándolo con el diagrama obtenido para la carga accidental concentrada \bar{P} en el apartado anterior, determina el diagrama de momentos flectores producidos por la carga accidental más la permanente, que vale:



$$M_{S\text{max}} = \frac{gLx_s}{2} - \frac{gx_s^2}{2} + \frac{P(L-x_s)x_s}{L} = \frac{gx_s(L-x_s)}{2} + \frac{Px_s(L-x_s)}{L}$$

Para $x_s = \frac{1}{2}L$ vale: $M_{\text{m}\acute{a}\text{x.m}\acute{a}\text{x}} = \frac{gL^2}{8} + \frac{PL}{4}$

Que es el valor máximo de los máximos llamado máximo maximórum.-

La carga permanente “g” produce esfuerzos cortantes representados por la recta punteada de ordenadas extremas $\frac{1}{2}gL$ (positivos en la mitad izquierda de la viga y negativos en la derecha).- Sumando algebraicamente este diagrama con el calculado para la carga accidental \bar{P} , concentrada y móvil, se obtienen los diagramas totales de máximas y mínimas solicitaciones:

$$Q_{S\text{max}} = \frac{gL}{2} - gx_s + \frac{P(L-x_s)}{L} = g\left(\frac{L}{2} - x_s\right) + \frac{P(L-x_s)}{L}$$

$$Q_{S\text{min}} = \frac{gL}{2} - gx_s - \frac{Px_s}{L} = g\left(\frac{L}{2} - x_s\right) - \frac{Px_s}{L}$$

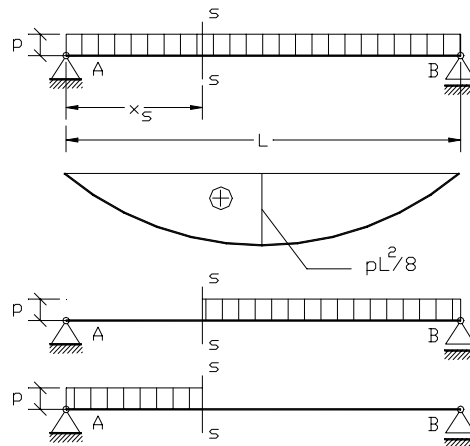
En las secciones comprendidas entre A_0 y H no sólo es positivo $Q_{S\text{m}\acute{a}\text{x}}$ sino que también lo es $Q_{S\text{m}\acute{i}\text{n}}$, porque el esfuerzo cortante positivo debido a la carga permanente “g” es de mayor valor absoluto que el negativo originado por P .- En las secciones del tramo B_0 K es negativo no sólo $Q_{S\text{m}\acute{i}\text{n}}$ sino también $Q_{S\text{m}\acute{a}\text{x}}$.- En las secciones del tramo HK se tiene $Q_{S\text{m}\acute{a}\text{x}}$ positivo y $Q_{S\text{m}\acute{i}\text{n}}$ negativo.-

9.10.2.- DIAGRAMA ENVOLVENTE: CARGA ACCIDENTAL “p” (distribuida y móvil).-

9.10.2.1.- Diagrama envolvente actuando sólo la carga accidental “p”.-



La línea de influencia de M_S^* para una sección cualquiera s-s, indica que cualquier carga que actúe sobre la viga produce en ella momento flector positivo.- Por consiguiente, figura 9.46., el máximo valor de M_S se presenta cuando la viga está totalmente cargada sea cual fuese la sección considerada.- El diagrama de $M_{S\text{máx}}$ es el diagrama de momentos flectores correspondiente a una carga uniforme total, es decir una parábola cuadrática de ordenada máxima $pL^2/8$.- Los momentos mínimos corresponden a la viga descargada y vale: $M_{S\text{mín}} = 0$.-



La línea de influencia de Q_S^* para una sección cualquiera s-s indica que toda carga que actúa a su derecha contribuye a producir un esfuerzo de corte positivo, mientras que toda carga situada a la izquierda de s-s origina un valor negativo del esfuerzo de corte.- Por consiguiente, el valor máximo del esfuerzo de corte se presenta cuando se carga toda la longitud de viga situada a la derecha de la sección s-s y el tramo ubicado a su izquierda está descargado: la sobrecarga debe actuar solamente desde la sección hasta el apoyo B.- El valor mínimo se origina cargando desde el apoyo A hasta la sección s-s.- Para estos estados de carga sus respectivas áreas de influencia valen (véase figura 9.43 y apartado 9.5.):

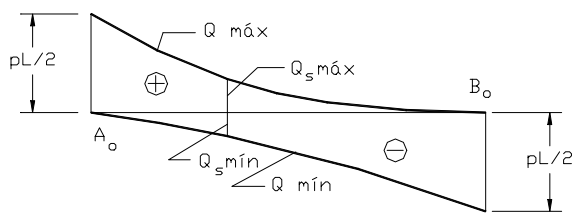


Fig. 9.46

Para estos estados de carga sus respectivas áreas de influencia valen (véase figura 9.43 y apartado 9.5.):

$$A_{\text{inf.máx}} = \frac{1}{2} \frac{(L-x_s)}{L} (L-x_s) = \frac{(L-x_s)^2}{2L}$$

$$A_{\text{inf.mín}} = -\frac{1}{2} \frac{x_s}{L} x_s = -\frac{x_s^2}{2L}$$

Los diagramas de esfuerzos máximos y mínimos, y sus valores extremos serán:

$$Q_{S\text{máx}} = p \cdot A_{\text{inf.máx}} = \frac{p(L-x_s)^2}{2L} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \text{Si } x_s = 0 \rightarrow Q_{S\text{máx}} = \frac{pL}{2} = R_A \\ \text{Si } x_s = L \rightarrow Q_{S\text{máx}} = 0 \end{cases}$$

$$Q_{S\text{mín}} = p \cdot A_{\text{inf.mín}} = -\frac{p \cdot x_s^2}{2L} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \text{Si } x_s = 0 \rightarrow Q_{S\text{mín}} = 0 \\ \text{Si } x_s = L \rightarrow Q_{S\text{mín}} = -\frac{pL}{2} = -R_B \end{cases}$$

Por consiguiente el diagrama de $Q_{S\text{máx}}$ es una parábola cuadrática con el vértice en la vertical del apoyo B.- El máximo se presenta en el apoyo A cuando la viga esté cargada en toda su luz.- El diagrama de $Q_{S\text{mín}}$ es también parabólico y antimétrico de $Q_{S\text{máx}}$ con el vértice en correspondencia con A y el mínimo en B con la viga totalmente cargada.-

Obsérvese que cuando $x_s = \frac{1}{2} L$, resulta $Q_{S\text{máx}} = -Q_{S\text{mín}} = pL/8$, cargándose la mitad de la derecha o de la izquierda, mientras que cuando se carga toda la viga el esfuerzo de corte es nulo.-



9.10.2.2.- Diagrama envolvente: carga accidental distribuida más carga permanente.-

Los diagramas totales de $Q_{S\text{máx}}$ y $Q_{S\text{mín}}$ se obtienen sumando algebraicamente el diagrama de esfuerzos de corte producidos en la viga con la carga distribuida “g” en toda la luz de la viga con el diagrama envolvente de la carga distribuida “p” obtenidos en el apartado anterior (véase parte inferior de la figura 9.47.- Esas funciones valdrán:

$$Q_{S\text{máx}} = \frac{gL}{2} - gx_S + \frac{p(L - x_S)^2}{2L} = g\left(\frac{L}{2} - x_S\right) + \frac{p(L - x_S)^2}{2L}$$

$$Q_{S\text{mín}} = g\left(\frac{L}{2} - x_S\right) - \frac{px_S^2}{2L}$$

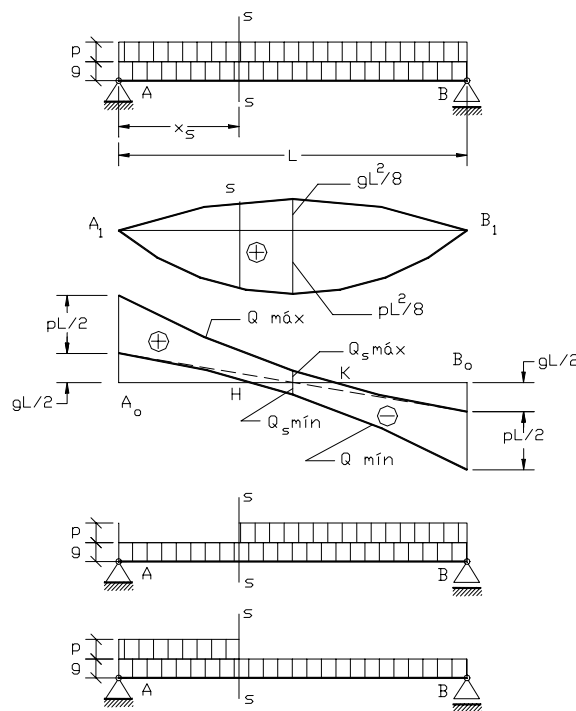


Fig. 9.47

También en este caso las secciones del tramo HK están sometidas a inversión del esfuerzo cortante según que la carga esté a derecha o izquierda de s-s, mientras las secciones de los tramos A₀ H y B₀ K se encuentran sometidas a esfuerzo cortante positivo o negativo, respectivamente.-

El diagrama envolvente total de $M_{S\text{máx}}$ (véase parte superior de la figura 9.47) se obtiene sumando el diagrama de la carga accidental distribuida en toda su luz, con la parábola cuadrática de ordenada máxima $\frac{gL^2}{8}$ correspondiente a la carga permanente. Su valor es:

$$M_{S\text{máx}} = \frac{gL}{2} x_S - \frac{gx_S^2}{2} + \frac{pL}{2} x_S - \frac{px_S^2}{2} = \frac{1}{2} [gx_S(L - x_S) + px_S(L - x_S)] = \frac{1}{2} (g + p) x_S (L - x_S)$$



$$M_{S_{\min}} = \frac{1}{2} [g L x_S - g x_S^2] = \frac{1}{2} [g x_S (L - x_S)]$$

9.10.3.- DIAGRAMA ENVOLVENTE DE UN TREN DE CARGAS CONCENTRADAS.-

Sea la viga AB simplemente apoyada indicada en la figura 9.48; sobre ella incide una carga accidental constituida por un tren de fuerzas concentradas \bar{P}_i que avanzan de izquierda a derecha manteniendo invariable la distancia entre ellas, como así también sus respectivos sentidos, dirección e intensidad.- **En primer término necesitamos establecer la posición del tren de cargas que origina el mayor valor del momento flector en una determinada sección s-s de la viga.-**

Consideremos inicialmente una **1a. posición del tren de cargas** caracterizada porque todas ellas se ubican a la izquierda de la sección considerada.- El valor del momento flector en s-s cuando se conoce la L.I.V. de M_s^* , $A_1 S_1 B_1 A_1$, considerando al tren formado por cuatro fuerzas será:

$$M_{S.1a.} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + P_4 \eta_4$$

Si ahora **suponemos que el tren de cargas se desplaza hacia la derecha una longitud Δx** , sin llegar la primer fuerza a alcanzar la sección s-s, el momento flector variará su intensidad en la siguiente cantidad:

$$\Delta M_{S.1a.} = P_1 \cdot \Delta \eta_1 + P_2 \cdot \Delta \eta_2 + P_3 \cdot \Delta \eta_3 + P_4 \cdot \Delta \eta_4 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \Delta x \cdot \text{tang} \alpha$$

en donde :

$$\Delta \eta_1 = \Delta \eta_2 = \Delta \eta_3 = \Delta \eta_4 = \Delta x \cdot \text{tang} \alpha$$

son las variaciones de las ordenadas de la línea de influencia al desplazarse las fuerzas \bar{P}_i la longitud Δx .-

Como todas las cargas actúan en el tramo $A_1 S_1$ de la línea de influencia, que tiene ordenadas crecientes hacia la derecha, la variación del momento flector al desplazarse las cargas en la forma expresada será positiva ya que el signo de la línea así lo es.- $\Delta M_{S.1a.}$ resulta mayor que cero y la función $M_{S.1a.}$ crecerá rápidamente pues todos sus términos son positivos.-

Si se considera ahora una **2a. posición del tren de cargas** en la cual P_1 **incide sobre la sección s-s**, y a partir de ella **damos un desplazamiento positivo Δx** al tren de cargas, la variación del momento flector originada por este avance Δx de las cargas será:

$$\Delta M_{S.2a.} = [(P_2 + P_3 + P_4) \text{tang} \alpha - P_1 \text{tang} \beta] \cdot \Delta x$$

Si en esta nueva variación del momento flector predomina el término positivo, la función seguirá creciendo pero con menor pendiente que cuando el tren de cargas se desplazaba con todas las fuerzas a la izquierda de s-s.-

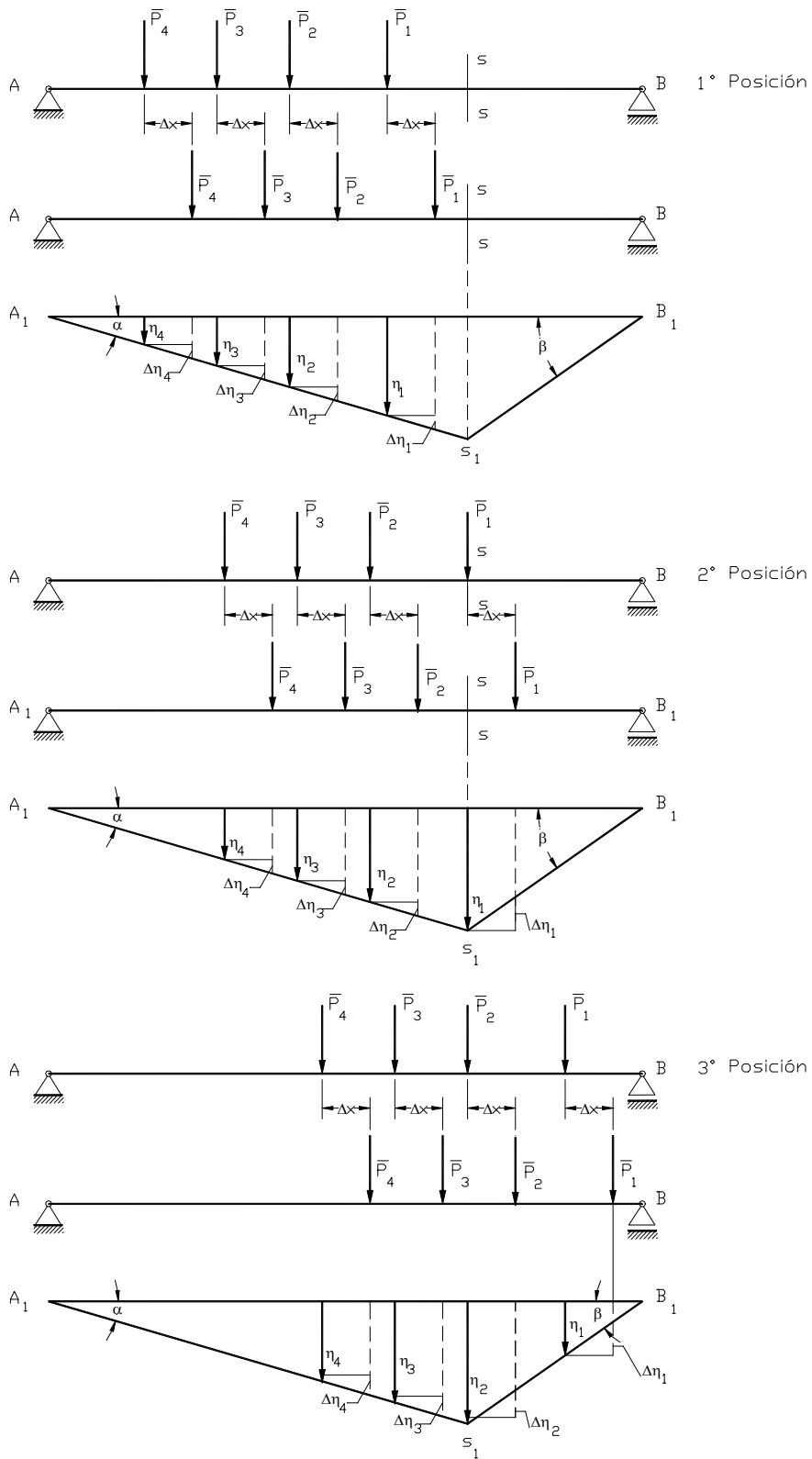


Fig. 9.48



En el avance del tren de cargas se toma ahora una **3a. posición en la cual \bar{P}_2 se encuentra sobre la sección s-s y damos un desplazamiento Δx a las cargas**, la variación del momento flector será:

$$\Delta M_{S.3a.} = [(P_3 + P_4)\text{tang}\alpha - (P_2 + P_1)\text{tang}\beta] \cdot \Delta x$$

Suponiendo que en esta expresión el término negativo sea de mayor valor absoluto que el término positivo $\Delta M_{S.3a.}$, resultará negativo y **la función M_S será ahora decreciente, lo que indica que pasó por un máximo cuando \bar{P}_2 estaba sobre s-s.**

Sintetizando lo expuesto, resulta que si el tren de cargas se mueve sin que alguna de las cargas pase de uno a otro lado de la sección considerada, la variación del momento flector es lineal y proporcional a Δx , o sea que:

$$\frac{\Delta M_S}{\Delta x} = \text{constante}$$

Al pasar una carga de uno a otro lado de la sección varía esta relación y si ella pasa de positiva a negativa significa que la función M_S pasa por un máximo.- Se deduce entonces que **el momento flector en la sección considerada sólo puede ser máximo cuando una de las cargas está ubicada sobre la sección.**

Hay procedimientos para establecer cual es la carga cuyo paso por la sección determina el valor máximo, como el del polígono de Winkler que se ilustra en la figura 9.48.b.-

Polígono de WINKLER

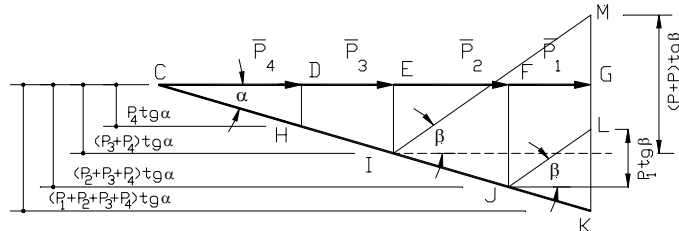


Fig. 9.48b

Un procedimiento gráfico que por su sencillez resulta útil para el trazado del diagrama envolvente para un tren de cargas es el que se expone en el siguiente párrafo.-

9.10.3.1.- Diagrama envolvente por el método del papel transparente.-

Se dibuja el tren de cargas sobre una recta horizontal x-x de referencia y su correspondiente polígono de fuerzas en escala de longitudes el primero y de fuerzas el segundo, figura 9.49.- Adoptando un polo se traza el polígono funicular del sistema de fuerzas constituido por el tren de cargas.- Por debajo del funicular (o separadamente si se prefiere) se dibuja la viga AB con la misma escala utilizada para el tren de cargas y se marca un cierto número de secciones en correspondencia con las cuales llevaremos los valores de los respectivos momentos flectores máximos que nos dará, construido por puntos, el diagrama envolvente $M_{S\text{máx}}$.-

Por otra parte, en una hoja de papel transparente se repite el dibujo de la viga AB graficando las rectas de acción de las reacciones y las secciones que se han marcado en el otro gráfico de la viga.- Se toma el papel transparente y se lo coloca con el eje de la viga coincidiendo con la horizontal de referencia



del tren de cargas y llevando una de las secciones demarcadas (la s-s por ejemplo) a coincidir con la vertical de una de las fuerzas que suponemos puede producir el máximo momento.-

El polígono funicular del dibujo principal y las rectas de acción de las reacciones del transparente determinarán la línea de cierre del diagrama de momentos flectores originado por esta posición del tren de cargas: sobre la vertical de la fuerza que se encuentra en coincidencia con la sección medimos el momento flector y lo interpretamos en la escala de momentos que resulta de multiplicar la distancia por las escalas de fuerzas y de longitudes.- (Si hubiese dudas se efectúan tanteos, probando con otras fuerzas, hasta determinar la fuerza que produce dicho máximo).- El valor obtenido se lo lleva al diagrama de máximos momentos flectores en correspondencia con la sección s-s que se ha considerado.-

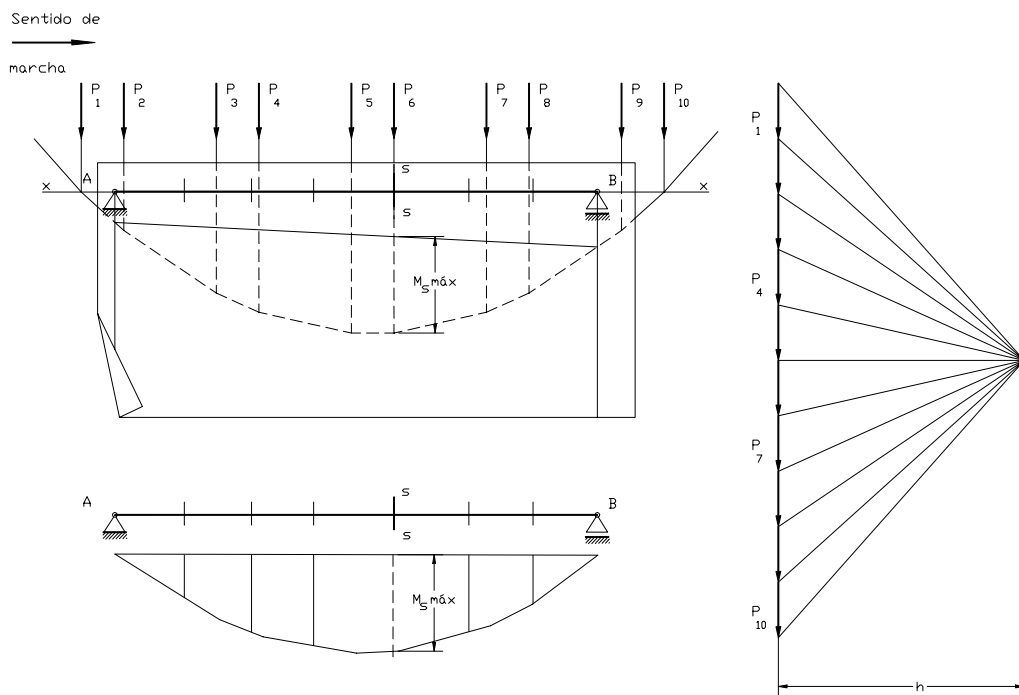


Fig. 9.49

Los pasos dados con la sección s-s se repiten para las otras secciones y los resultados se van volcando al diagrama envolvente hasta completarlo.- Si las cargas móviles circulan en sentido contrario al supuesto, su diagrama envolvente es simétrico al obtenido.-