

TEMA 1: ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA Y DEL CUERPO RÍGIDO

TEMA 1.A: SISTEMA DE FUERZAS

PRINCIPIOS PUNDAMENTALES – FUERZA – REPRESENTACIÓN GRÁFICA – OBJETIVOS DE LA ESTÁTICA – SISTEMAS DE FUERZAS

1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Mecánica es la parte de la física que estudia las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas. Por la naturaleza del cuerpo de que se trate se divide en:

Mecánica $\left\{ \begin{array}{l} \text{de los cuerpos rígidos} \\ \text{de los cuerpos deformables} \\ \text{de los fluidos} \end{array} \right.$

La mecánica de los cuerpos rígidos se subdivide en ESTÁTICA y DINÁMICA que estudian respectivamente, las condiciones de reposo o el movimiento de los cuerpos. Los cuerpos con que trabaja se consideran tales que las distancias entre dos cualesquiera de sus puntos se mantiene invariable bajo la acción de las fuerzas.

Sin embargo, en las estructuras de máquinas u obras en ingeniería esta hipótesis no se cumple, deformándose bajo la acción de las cargas. La magnitud de estas deformaciones y su compatibilización con la naturaleza y seguridad de las obras son motivo de la RESISTENCIA DE MATERIALES, que es una parte de la mecánica de los cuerpos deformables.

La ESTÁTICA se apoya en cuatro principios fundamentales de la mecánica elemental, basados en la evidencia experimental.

1.1. LEY DEL PARALELOGRAMO PARA LA SUMA DE FUERZAS

Dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser reemplazadas por una sola, llamada RESULTANTE, dada por la diagonal del paralelogramo que tiene lados iguales a las fuerzas dadas. Decir que pueden ser reemplazadas las primeras, llamadas componentes, por su resultante, significa que producen el mismo efecto sobre la partícula.

1.2. PRINCIPIO DE TRASMISIBILIDAD

Establece que una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido no altera su efecto si se desplaza su punto de aplicación a lo largo de su recta de acción. Expresar que no altera su efecto significa que no se alteran las condiciones de reposo o de movimiento del cuerpo.

Si el cuerpo es deformable no es posible deslizar la fuerza a lo largo de su recta de acción sin alterar la deformación que la fuerza origina en el cuerpo.

1.3. PRIMERA LEY DE NEWTON

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo, si originalmente estaba en reposo, o se moverá con movimiento rectilíneo uniforme, si originalmente estaba en movimiento.

O sea que si sobre una partícula actúa un conjunto de fuerzas tales que su resultante es nula, la partícula se mantendrá en reposo y las fuerzas actuantes están en EQUILIBRIO.

1.4. PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

En la naturaleza las fuerzas se presentan de a dos: toda acción implica existencia de una reacción, de igual intensidad y recta de acción y sentido contrario.

2. FUERZA

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro. Puede ser ejercida por contacto directo (presión del viento, empuje de agua o tierra, rozamiento, etc.), o a distancia como las fuerzas gravitacionales y magnéticas.

Para determinar una fuerza se debe establecer su magnitud o intensidad, dirección, sentido y punto de aplicación. Es por tanto un vector aplicado.

2.1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA – ESCALA DE FUERZAS

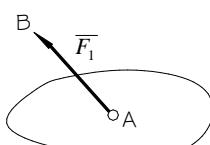


Figura 1

Sea una fuerza \overline{F}_i aplicada en el punto A del cuerpo rígido de la figura 1. El vector \overline{AB} es la representación geométrica de la fuerza, adoptando como origen el punto de aplicación.

De este modo quedan establecidos: la dirección (por la recta de acción), el punto de aplicación (en este caso A), el sentido, y la intensidad (longitud del segmento \overline{AB} , $|AB| = F_i$).

Para la representación de las fuerzas es, pues, indispensable la elección de una ESCALA, de tal modo que si la intensidad F de la fuerza está expresada kilogramos, y la longitud AB que la representa es de $a[cm]$, la escala de representación de las fuerzas, o simplemente Escala de Fuerzas (E.F.), estará dada por la relación:

$$\frac{F[kg]}{a[cm]} = \frac{\frac{F}{a}[kg]}{[cm]}$$

en la cual, como en toda escala, el numerador es la magnitud a representarse, y el denominador la que la representa.

Ejemplo.

$$F_1 = 2500 \text{ kg} \quad E.F. = \frac{1000 \text{ kg}}{2 \text{ cm}}$$

$$a[\text{cm}] = \frac{F_1}{E.F.} = \frac{2500 \text{ kg}}{\frac{1000 \text{ kg}}{2 \text{ cm}}} = 5 \text{ cm}$$

O bien, si los datos son

$$a = 5 \text{ cm} \quad E.F. = \frac{1000 \text{ kg}}{2 \text{ cm}}$$

$$F_1[\text{kg}] = a[\text{cm}] \cdot E.F. \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right] = 5 \text{ cm} \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{2 \text{ cm}} = 2500 \text{ kg}$$

2.2. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas externas representan la acción de otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Son las únicas responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Éstas harán que el cuerpo se mueva o aseguraran que permanezca en reposo.

Las fuerzas internas son las fuerzas que mantienen unidas las partículas que forman el cuerpo, es decir, representan las interacciones entre ellas.

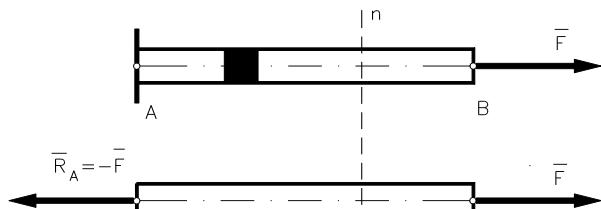


Figura 2

Se objetivizan estos conceptos si se considera una pieza prismática de eje recto cuya sección transversal tiene dimensiones mucho menores que su largo. Por el extremo A, la pieza está fija a tierra y libre por el B.

Si aplicamos una fuerza \bar{F} en su extremo B y en la dirección del eje AB, que tenderá a imprimir a la pieza una traslación en su dirección, que no se realiza por la fijación de A, se originará en el elemento de fijación, como consecuencia del principio de acción y reacción, una fuerza igual a $-\bar{F}$ (figura 2). \bar{R}_A se designa REACCIÓN DE APOYO en A.

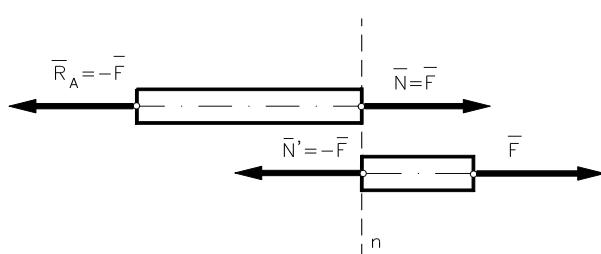


Figura 3

Si se practica un corte transversal de la barra en la sección n-n (figura 3), para mantener unidas las partes originadas por aquel, es necesario aplicar las fuerzas \bar{S} y \bar{S}' (iguales y opuestas) en ambas caras del corte.

Puesto que las partes estaban unidas antes del corte, fuerzas internas equivalentes a \bar{S} y \bar{S}' deben haber existido como interacciones de las partículas situadas a ambos lados del corte. \bar{S} y \bar{S}' se designan FUERZAS INTERNAS o ESFUERZOS INTERNOS en la sección $n-n$ de la barra.

3. OBJETIVOS DE LA ESTÁTICA

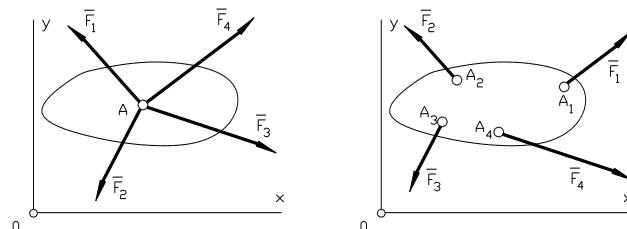
- Determinación de las fuerzas externas y reactivas que nacen en los elementos que mantienen fija una determinada estructura y que se designan como REACCIONES.
- Determinación de las fuerzas internas que originan las cargas en las estructuras y que se designan como ESFUERZOS INTERNOS.

4. SISTEMAS DE FUERZAS

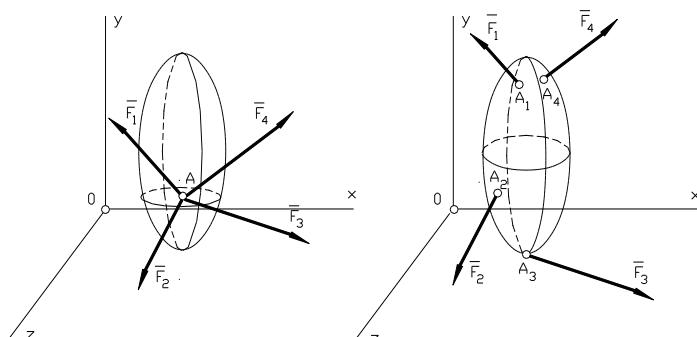
El conjunto de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido o sobre una partícula se designa como SISTEMA DE FUERZAS.

Por partícula se debe entender una cantidad muy pequeña de materia que se supone concentrada en un punto del espacio. Un cuerpo rígido está formado por un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí.

Si las fuerzas actúan sobre una partícula o sobre un mismo punto de un cuerpo rígido, se llama SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES. En caso de actuar en distintos puntos del cuerpo rígido se llama SISTEMA DE FUERZAS NO CONCURRENTES.



Sistemas planos de Fuerzas



Sistemas espaciales de Fuerzas

En ambos casos el sistema de fuerzas podrá ser coplanar o no.

TEMA 1.B: COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EL PLANO

ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA – COMPOSICIÓN, DESCOMPOSICIÓN Y EQUILIBRIO DE SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES

1. ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA

El estudio de las condiciones de reposo de una partícula es previo al del cuerpo rígido. Por otra parte los resultados obtenidos para una partícula, pueden emplearse directamente en un gran número de situaciones relacionadas con las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales como ser, cuando las fuerzas están aplicadas en un mismo punto del cuerpo.

Hablar de estática de la partícula significa establecer las condiciones de reposo de una partícula bajo la acción de un sistema de fuerzas que, necesariamente, tendrán que ser concurrentes a ellas.

Para ello, en primer término debe reducirse el sistema de fuerzas a otro equivalente (es decir que produce igual efecto que el sistema dado) y que esté constituido por el menor número de elementos posibles. Esto se hace mediante la **COMPOSICIÓN O SUMA DE FUERZAS**.

Reducido el sistema de fuerzas dado a su mínima expresión se establecen las condiciones de su nulidad, que representan, por la Primera Ley de Newton, las condiciones de **EQUILIBRIO**.

A menudo conviene expresar las fuerzas utilizando sus componentes, para lo cual deben conocerse los procedimientos de **DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS**.

2. SISTEMAS DE FUERZAS PLANO

2.1. PROCEDIMIENTO GRÁFICO

2.1.1. COMPOSICIÓN

Dos fuerzas concurrentes se ubican necesariamente en un mismo plano y se componen o suman según el principio del paralelogramo; por tratarse de magnitudes vectoriales.

Sean las fuerzas \bar{F}_1 y \bar{F}_2 , que actúan sobre la partícula A (figura 1); a partir de un punto O cualquiera del plano de las fuerzas, llevamos vectores de dirección y sentidos coincidentes con las fuerzas dadas y cuyos módulos

representan a escala la intensidad de las fuerzas. Esta escala es del tipo: $E.F. = \frac{\alpha [kg]}{1[cm]}$

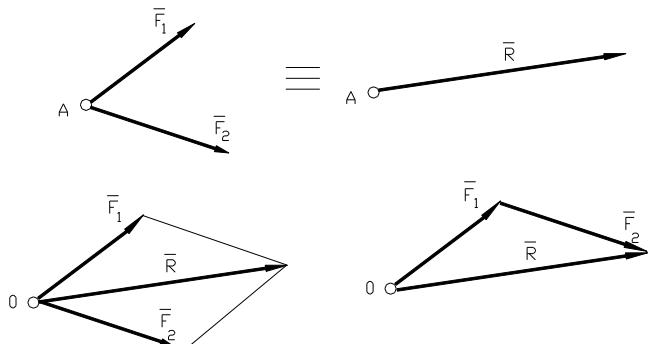


Figura 1

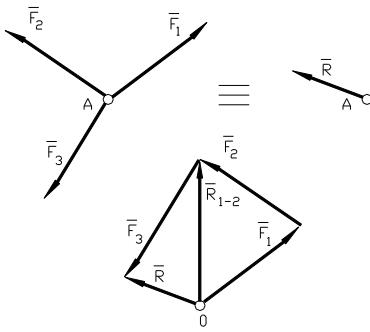


Figura 2

Se completa el paralelogramo cuyos lados son $\overline{F_1}$ y $\overline{F_2}$, y la diagonal representa en dirección, intensidad y sentido la resultante de las fuerzas $\overline{F_1}$ y $\overline{F_2}$.

Para que \overline{R} sea efectivamente la resultante, es decir, que produzca sobre la partícula A el mismo efecto que $\overline{F_1}$ y $\overline{F_2}$, debe estar aplicada en A .

Se ha practicado la suma geométrica o vectorial. Si se altera el orden de los sumandos se mantiene inalterable la suma.

Si en lugar de dos fuerzas tenemos tres o más $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ y $\overline{F_3}$ (figura 2), la suma se obtiene llevando un vector representativo de cada fuerza a continuación del otro (Polígono de Fuerzas). El vector que resulta de unir el origen del primero con el extremo del último nos determina la fuerza suma del sistema dado.

2.1.2. EQUILIBRIO

Las condiciones que debe satisfacer un sistema plano de fuerzas que actúan sobre una partícula para hallarse en EQUILIBRIO, surgen de considerar la Primer Ley de Newton que expresa la nulidad de la resultante como requisito para que la partícula esté en reposo. Para que $\overline{R}=0$, es condición necesaria y suficiente que el extremo de la última fuerza del polígono de fuerzas coincida con el origen de la primera fuerza (figura 3).

Para que un sistema plano de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio es condición necesaria y suficiente que el polígono de fuerzas sea cerrado.

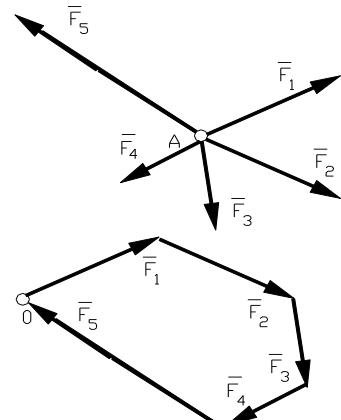


Figura 3

2.1.3. DESCOMPOSICIÓN

La descomposición de una fuerza \overline{F} en dos componentes consiste en sustituir aquella por dos fuerzas $\overline{F_1}$ y $\overline{F_2}$ que produzcan igual efecto.

Sea descomponer la fuerza \overline{F} (figura 4) según dos direcciones predeterminadas (1) y (2) concurrentes al punto de aplicación A de la fuerza dada.

Se efectúa aplicando la ley del paralelogramo y trazando por los extremos de \overline{F} rectas paralelas a las direcciones dadas. Orientando los segmentos obtenidos en el sentido que va del origen de \overline{F} a su extremo se obtienen $\overline{F_1}$ y $\overline{F_2}$ en intensidad, dirección y sentido; su punto de aplicación es el de \overline{F} .

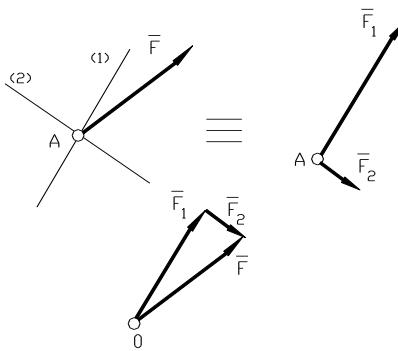


Figura 4

2.2. PROCEDIMIENTO ANALÍTICO

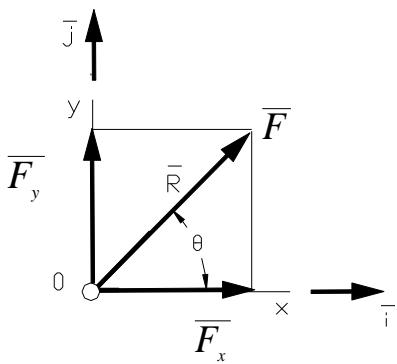


Figura 5

Analíticamente se puede expresar una fuerza por su modulo y el ángulo que ella forma con la paralela a la rama positiva de un eje de referencia trazada por su punto de aplicación ($\bar{F}; \theta$). Al ángulo lo medimos en sentido antihorario (figura 5).

En muchas oportunidades conviene expresar la fuerza por dos componentes ortogonales entre sí, que suelen tomarse horizontal y vertical.

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y$$

Llamando i y j a los versores de los ejes X y Y respectivamente, podemos expresar:

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y = F_x \cdot i + F_y \cdot j$$

Recordando que el producto de un vector por un número real es igual a otro vector de igual dirección y sentido que el dado y cuyo módulo es tantas veces mayor que el módulo del vector dado, como lo indica el número real, y siendo los versores vectores unitarios, resulta:

$$\bar{F}_x = F_x \cdot i \quad \bar{F}_y = F_y \cdot j$$

Conociendo F y θ , las componentes rectangulares se obtienen por las expresiones:

$$F_x = F \cdot \cos \theta \quad F_y = F \cdot \sin \theta$$

Que las definen en valor absoluto y signo si θ varía de 0° a 360° .
Si en cambio se conocen F_x y F_y , se obtiene \bar{F} y θ por las expresiones:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \quad \sin \theta = \frac{F_y}{F} \quad \tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

2.2.1. COMPOSICIÓN

Sea un sistema plano de fuerzas que actúan en la partícula A , su resultante será:

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$$

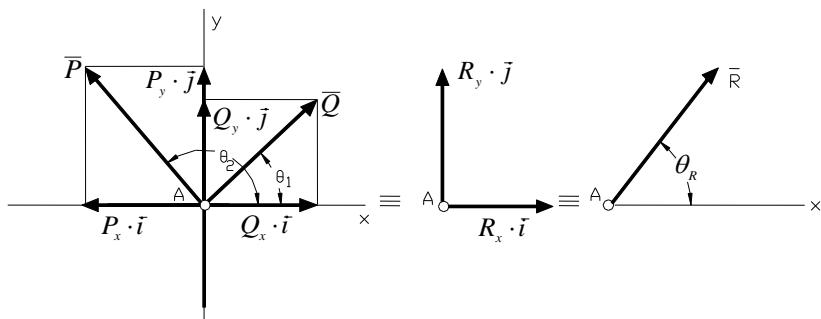


Figura 6

Expresando cada una de las fuerzas por sus componentes rectangulares y sumando miembro a miembro:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= P_x \cdot \bar{i} + P_y \cdot \bar{j} \\ \bar{Q} &= Q_x \cdot \bar{i} + Q_y \cdot \bar{j} \\ \bar{P} + \bar{Q} &= (P_x + Q_x) \cdot \bar{i} + (P_y + Q_y) \cdot \bar{j} \quad (1)\end{aligned}$$

Expresando la resultante por sus componentes rectangulares:

$$\bar{R} = R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2) deducimos que:

$$\begin{aligned}R_x &= P_x + Q_x = \sum F_x \\ R_y &= P_y + Q_y = \sum F_y\end{aligned}$$

Es decir que las componentes X e Y de la resultante \bar{R} de un sistema plano de fuerzas concurrentes, se obtienen sumando algebraicamente las componentes X e Y respectivamente, de las fuerzas del sistema.

Obtenemos el módulo y dirección de la resultante mediante:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos \theta_R = \frac{R_x}{R} \quad \sin \theta_R = \frac{R_y}{R} \quad \tan \theta_R = \frac{R_y}{R_x}$$

2.2.2. EQUILIBRIO

Se ha obtenido:

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

para que las fuerzas estén en equilibrio y la partícula en reposo, su resultante debe ser nula, luego deberá cumplirse que:

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

2.2.3. DESCOMPOSICIÓN

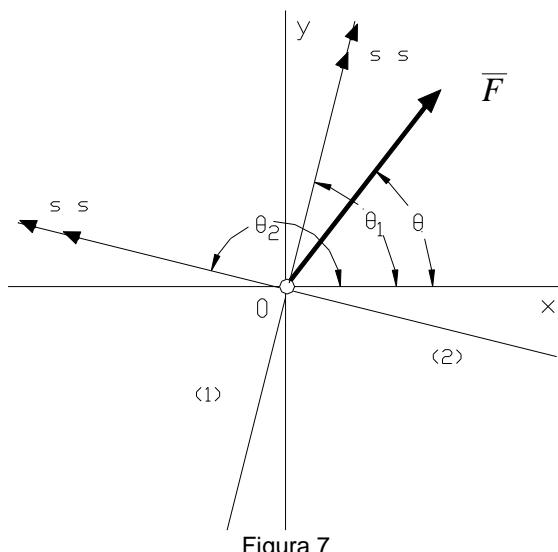


Figura 7

Sea una fuerza \bar{F} expresada por F y θ . Se deben calcular las intensidades F_1 y F_2 de sus componentes según dos direcciones determinadas (1) y (2) concurrentes a un punto de la recta de acción de la fuerza, donde se ubica el origen de los ejes X e Y (figura 7).

A las componentes F_1 y F_2 se les supone un sentido (S.S.) y en función de él se expresan los ángulos θ_1 y θ_2 .

Debe ser $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$.

Lo que expresado mediante las componentes rectangulares se convierte en dos ecuaciones escalares:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

O también:

$$F \cdot \cos \theta = F_1 \cdot \cos \theta_1 + F_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$F \cdot \sin \theta = F_1 \cdot \sin \theta_1 + F_2 \cdot \sin \theta_2$$

Que constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (F_1 y F_2), que se puede resolver. Si el valor de F_1 o de F_2 que resulta del cálculo es positivo significa que el sentido supuesto (S.S.) es correcto. Si fuese negativo se debe invertir el sentido supuesto.

Se podría resolver este problema con las mismas ecuaciones obtenidas si las incógnitas fuesen las direcciones o la dirección e intensidad de una de las fuerzas, pero solo pueden calcularse dos incógnitas por cuanto tenemos dos ecuaciones.

3. SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES

Sea una fuerza expresada en el espacio por un vector de origen O y extremo A. La fuerza quedará determinada por su módulo F y los ángulos directores θ_x , θ_y , θ_z que forma su recta de acción con la rama positiva de los ejes X, Y, Z. Estos ángulos varían de 0° a 180° .

Si por el extremo A del vector fuerza se consideran tres planos proyectantes paralelos respectivamente a los planos de los ejes yz, zx, xy que interceptaran en los puntos B, C, D a los tres ejes, determinando los vectores \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z designados componentes rectangulares vectoriales de \bar{F} en el espacio. Se cumple que:

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$$

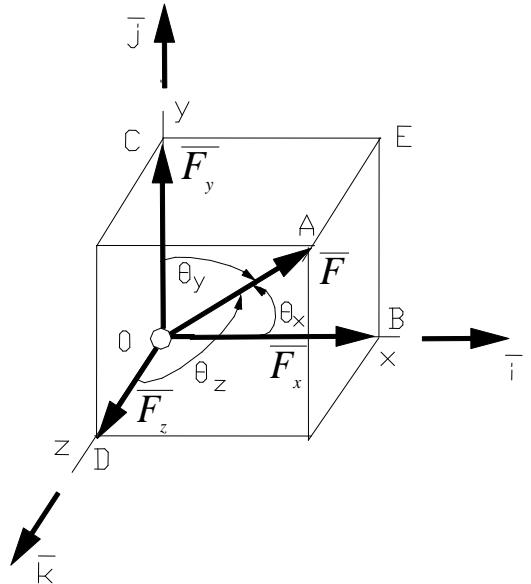


Figura 8

ya que $\bar{F} = \bar{OA}$ se obtiene uniendo el origen y el extremo del polígono vectorial espacial que se forma llevando uno tras otro los vectores $\bar{F}_x = \bar{OB}$, $\bar{F}_y = \bar{BE}$, $\bar{F}_z = \bar{EA}$.

Expresando las componentes vectoriales en función de la componente escalar y el versor respectivo, se tiene:

$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}$$

en donde:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \theta_x \\ F_y &= F \cdot \cos \theta_y \\ F_z &= F \cdot \cos \theta_z \end{aligned}$$

Se concluye que conocido el módulo de una fuerza y los cosenos directores de su recta de acción se pueden calcular sus componentes según los ejes X, Y, Z. Viceversa conocidas las componentes X, Y, Z de una fuerza, o sea sus proyecciones ortogonales sobre dicho ejes, se puede calcular su módulo y cosenos directores por las expresiones:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos \theta_x &= \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \end{aligned}$$

El signo de las componentes rectangulares y de los cosenos directores surge considerando que para ángulos comprendidos entre 0° a 90° el coseno director y la componente rectangular respectiva serán positivos; en cambio, serán negativos para ángulos comprendidos entre 90° a 180° . Con el signo de las tres componentes rectangulares se puede establecer el octante en el que se ubica la fuerza.

Volviendo a la expresión:

$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}$$

y sustituyendo las componentes por su valor:

$$\bar{F} = F \cdot \cos \theta_x \cdot \bar{i} + F \cdot \cos \theta_y \cdot \bar{j} + F \cdot \cos \theta_z \cdot \bar{k}$$

Si llamamos λ al versor de la recta de acción de la fuerza:

$$\bar{F} = F \cdot \lambda = F \cdot \cos \theta_x \cdot \bar{i} + F \cdot \cos \theta_y \cdot \bar{j} + F \cdot \cos \theta_z \cdot \bar{k}$$

O sea que los cosenos directores de una recta representan las componentes rectangulares de su versor:

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z$$

Y como:

$$\lambda = 1 = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}$$

se verifica que:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

3.1. COMPOSICIÓN

Se determina la resultante \bar{R} de un sistema espacial de fuerzas concurrentes sumando las componentes rectangulares de las fuerzas del sistema en forma análoga a la utilizada en el plano.

Dado un sistema \bar{P} y \bar{Q} y ubicando el origen de los ejes X, Y, Z en el punto de concurrencia se tiene:

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q} = \sum \bar{F}$$

$$\begin{aligned}\bar{P} &= P_x \cdot \bar{i} + P_y \cdot \bar{j} + P_z \cdot \bar{k} & \begin{cases} P_x = P \cdot \cos \theta_{x1} \\ P_y = P \cdot \cos \theta_{y1} \\ P_z = P \cdot \cos \theta_{z1} \end{cases} \\ \bar{Q} &= Q_x \cdot \bar{i} + Q_y \cdot \bar{j} + Q_z \cdot \bar{k} & \begin{cases} Q_x = Q \cdot \cos \theta_{x1} \\ Q_y = Q \cdot \cos \theta_{y1} \\ Q_z = Q \cdot \cos \theta_{z1} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\bar{P} + \bar{Q} = (P_x + Q_x) \cdot \bar{i} + (P_y + Q_y) \cdot \bar{j} + (P_z + Q_z) \cdot \bar{k}$$

Como:

$$\bar{F} = R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} + R_z \cdot \bar{k}$$

Será:

$$\begin{aligned}R_x &= P_x + Q_x = \sum F_x \\ R_y &= P_y + Q_y = \sum F_y \\ R_z &= P_z + Q_z = \sum F_z\end{aligned}$$

Estas expresiones establecen que las componentes X, Y, Z de la resultante son respectivamente iguales a la suma algebraica de las componentes X, Y, Z de las fuerzas del sistema dado.

Conocidas R_x , R_y , R_z se obtiene:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos \theta_R &= \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_R = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_R = \frac{R_z}{R}\end{aligned} \qquad \text{(Cosenos Directores)}$$

3.2. EQUILIBRIO

Para que un sistema de fuerzas espaciales que actúa sobre una partícula esté en equilibrio, lo que sucede cuando la partícula está en reposo, la resultante de aquellas debe ser nula.

Vectorialmente:

$$\bar{R} = \sum \bar{F} = 0$$

Lo que exige que sus tres componentes escalares sean también nulas:

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$R_z = \sum F_z = 0$$

Estas ecuaciones expresan las tres condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema espacial de fuerzas concurrentes.

3.3. DESCOMPOSICIÓN

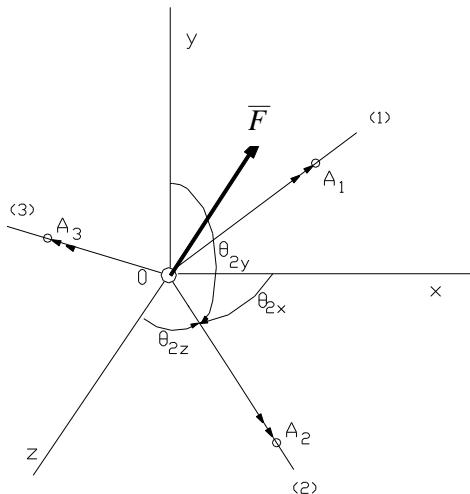


Figura 9

Se trata de descomponer una fuerza según tres direcciones espaciales determinadas (1), (2) y (3) (figura 9). De la fuerza \bar{F} conocemos su módulo F y sus ángulos directores θ_x , θ_y , θ_z . De sus componentes F_1 , F_2 , F_3 conocemos comúnmente dos puntos; les asignamos un sentido y calculamos los tres ángulos directores correspondientes a cada una de ellas.

Debe cumplirse que:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

Ecuación vectorial que en el espacio implica tres ecuaciones escalares:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z}$$

Que desarrolladas establecen que:

$$F \cdot \cos \theta_x = F_1 \cdot \cos \theta_{1x} + F_2 \cdot \cos \theta_{2x} + F_3 \cdot \cos \theta_{3x}$$

$$F \cdot \cos \theta_y = F_1 \cdot \cos \theta_{1y} + F_2 \cdot \cos \theta_{2y} + F_3 \cdot \cos \theta_{3y}$$

$$F \cdot \cos \theta_z = F_1 \cdot \cos \theta_{1z} + F_2 \cdot \cos \theta_{2z} + F_3 \cdot \cos \theta_{3z}$$

Sistema que nos permite calcular F_1 , F_2 , F_3 .

TEMA 1.C: MOMENTO Y PARES DE FUERZAS

MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO Y A UN EJE – PARES

1. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO

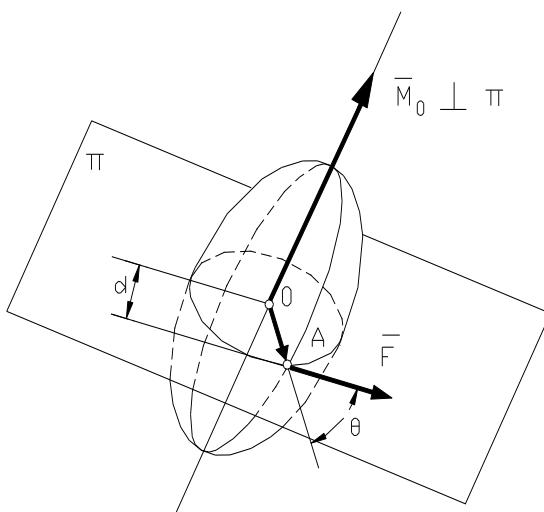


Figura 1

Consideremos un cuerpo rígido en uno de cuyos puntos A está aplicada una fuerza \bar{F} . La posición de A la damos con respecto a un punto fijo O mediante el vector posición \overline{OA} .

El plano π (figura 1) es el de \overline{OA} y \bar{F} .

Definimos como momento de la fuerza \bar{F} respecto del punto O al producto vectorial de \overline{OA} por \bar{F}

$$\overline{M}_o = \overline{OA} \wedge \bar{F}$$

\overline{M}_o es un vector con las siguientes características:

- La dirección es perpendicular al plano de \overline{OA} y \bar{F} .
- El sentido corresponde a la rotación θ a aplicarle a \overline{OA} para llevarlo a superponer con la recta de acción de \bar{F} . Este sentido coincide con el de la rotación que la fuerza tiende a imprimirla al cuerpo.
- El módulo o intensidad vale:

$$M_o = OA \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d$$

porque $d = OA \cdot \sin\theta$, siendo d la distancia perpendicular del centro de momento O a la fuerza F , y se designa: BRAZO DE LA FUERZA.

La dimensión del momento es por lo tanto una fuerza por una longitud.

$$[kg \cdot m] \quad [kg \cdot cm] \quad [t \cdot m] \quad [t \cdot cm]$$

Físicamente el vector \overline{M}_o caracteriza la rotación que la fuerza tiende a imprimir al cuerpo determinando:

- El eje de rotación por la recta de acción, perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto centro del momento.
- El sentido de rotación, por el sentido del vector.
- La intensidad de la tendencia a rotar por su módulo.

1.1. ESTRUCTURAS PLANAS

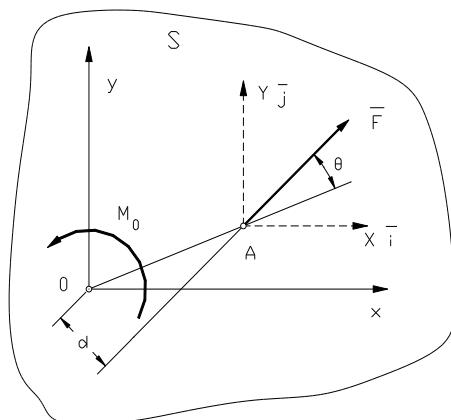


Figura 2

En muchas aplicaciones de la ingeniería se utilizan estructuras cuyo largo y alto son mucho mayor que el espesor, sometidas a fuerzas que actúan en el plano de simetría que aquellas generalmente poseen: reticulados, vigas, pórticos, arcos, etc.

En general desde el punto de vista de la estática se las designa: CHAPAS RÍGIDAS y se las define como un conjunto o sistema de partículas rígidamente unidas entre sí, ubicadas en un mismo plano, de forma indefinida y con capacidad de resistir fuerzas contenidas en un plano.

Si se considera una chapa rígida sobre la cual actúa una fuerza \overline{F} coplanar (figura 2). El momento de \overline{F} respecto a O, \overline{M}_o , será un vector aplicado en O, normal al plano de la chapa, de sentido dirigido hacia el observador y de intensidad $M_o = F \cdot d$.

El momento de cualquiera de las fuerzas actuante en el plano de la chapa será también de dirección perpendicular al mismo. Por lo tanto el momento queda perfectamente determinado con sólo fijar su intensidad y su sentido. Esto se indica con un arco alrededor del centro de momento, orientado con el sentido de la rotación que \overline{F} tiende a imprimirla a la chapa.

Como para todas las fuerzas sus momentos son vectores paralelos, la suma vectorial tiene por módulo un valor igual a la suma escalar de los módulos de los vectores sumando. Cuando trabajamos con estructuras planas es posible y conveniente operar con valores escalares.

1.2. TEOREMA DE VARIGNON

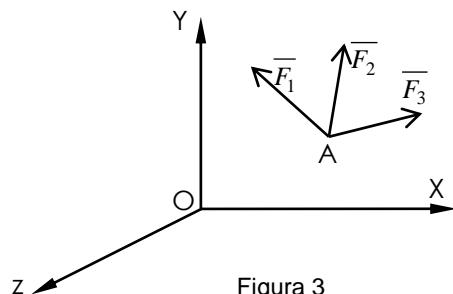


Figura 3

La propiedad distributiva de los productos vectoriales puede utilizarse para determinar el momento de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes.

Si tomamos momento de las fuerzas \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 concurrentes en A, respecto al punto O (figura 3) será:

$$\begin{aligned}\bar{M}_o &= \overline{OA} \wedge \bar{F}_1 + \overline{OA} \wedge \bar{F}_2 + \overline{OA} \wedge \bar{F}_3 \\ \bar{M}_o &= \overline{OA} \wedge (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3) = \overline{OA} \wedge \bar{R} \quad \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3\end{aligned}$$

El momento con respecto a un punto O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo punto O.

1.3. COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO

En general, la determinación del momento de una fuerza se simplificará considerablemente si la fuerza y el vector posición de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares.

Consideremos el momento \bar{M}_o de la fuerza \bar{F} respecto al punto O (figura 4) como:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k} \\ \overline{OA} &= x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}\end{aligned}$$

Y recordando:

$$\bar{M}_o = \overline{OA} \wedge \bar{F}$$

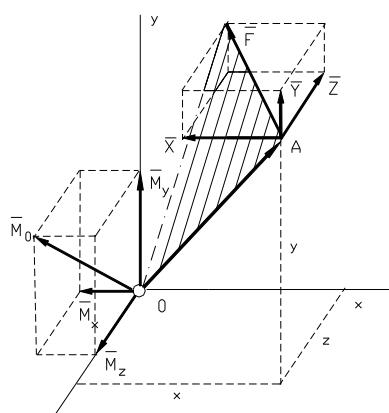


Figura 4

Efectuamos el producto vectorial:

$$\overline{M}_o = (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \bar{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \bar{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \bar{k} \quad (1)$$

Como:

$$\overline{M}_o = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}$$

Será:

$$M_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y$$

$$M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z$$

$$M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

Podemos escribir \overline{M}_o en forma de determinante:

$$\overline{M}_o = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

En el caso de estructuras planas (figura 5) podemos considerar que la fuerza \bar{F} actúa en el plano xy , siendo por lo tanto: $z = 0$ y $F_z = 0$ obteniendo al reemplazar en (1):

$$\overline{M}_o = (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \bar{k}$$

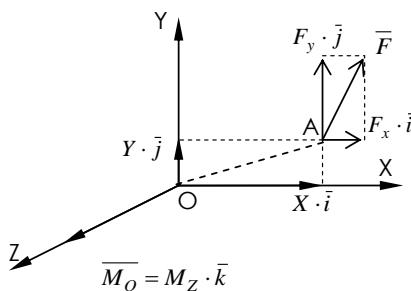


Figura 5

Comprobamos que el momento de \bar{F} respecto a O es perpendicular al plano de la figura y queda perfectamente definido por el escalar:

$$M_o = M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

2. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE

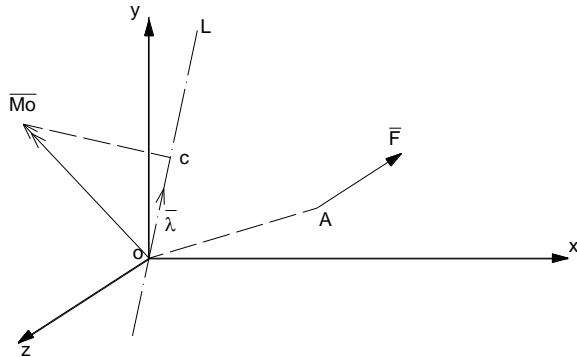


Figura 6

Definimos como momento de una fuerza \bar{F} respecto al eje OL , a la proyección sobre este eje del momento de la fuerza respecto a un punto cualquiera del eje.

$$M_{ol} = \overline{M}_o \times \bar{\lambda} = \overline{OA} \wedge \bar{F} \times \bar{\lambda} \quad \bar{\lambda} = \text{Versor del eje } OL$$

Expresión que en función de las componentes rectangulares de \overline{OA} , \bar{F} , $\bar{\lambda}$ vale:

$$M_{ol} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{vmatrix}$$

El significado físico del M_{ol} es más claro si descomponemos \bar{F} en dos componentes rectangulares: \bar{F}_1 paralela al eje OL , y \bar{F}_2 contenida en un plano π perpendicular al eje OL (figura 7).

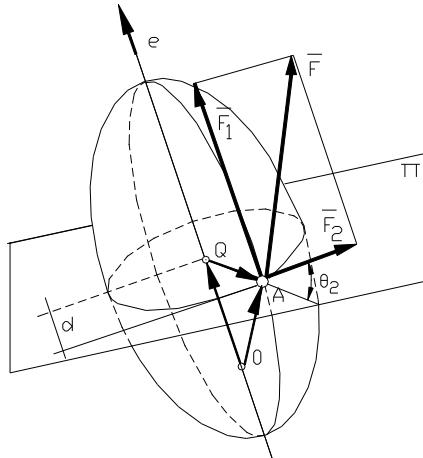


Figura 7

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$$\overline{OA} = \overline{OQ} + \overline{QA}$$

$$M_{ol} = \overline{OA} \wedge \bar{F} \times \bar{\lambda} = (\overline{OQ} + \overline{QA}) \wedge (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \times \bar{\lambda}$$

Operando:

$$M_{ox} = \overline{OQ} \wedge \overline{F}_1 \times \bar{\lambda} + \overline{OQ} \wedge \overline{F}_2 \times \bar{\lambda} + \overline{QA} \wedge \overline{F}_1 \times \bar{\lambda} + \overline{QA} \wedge \overline{F}_2 \times \bar{\lambda}$$

$\overline{OQ} \wedge \overline{F}_1 = 0$ por ser dos vectores paralelos, entonces $\overline{OQ} \wedge \overline{F}_1 \times \bar{\lambda} = 0$.

$\overline{OQ} \wedge \overline{F}_2$ es un vector perpendicular al eje, o sea, perpendicular a $\bar{\lambda}$, que al multiplicarlo escalarmente por $\bar{\lambda}$ se anula, entonces $\overline{OQ} \wedge \overline{F}_2 \times \bar{\lambda} = 0$.

$\overline{QA} \wedge \overline{F}_1$ es también perpendicular a $\bar{\lambda}$, entonces $\overline{QA} \wedge \overline{F}_1 \times \bar{\lambda} = 0$.

Por tanto:

$$M_{ox} = \overline{QA} \wedge \overline{F}_2 \times \bar{\lambda} = QA \cdot F_2 \cdot \sin\theta_2 = F_2 \cdot d$$

Expresión que nos dice que el momento de una fuerza respecto a un eje es el producto de la componente F_2 contenida en un plano perpendicular al eje (o proyección de \overline{F} sobre dicho plano) por la distancia d de esa componente o proyección al eje.

El momento respecto a un eje será nulo cuando $F_2 = 0$ o $d = 0$. En el primer caso la fuerza \overline{F} debe ser paralela al eje y en el segundo debe cortarlo. Es decir que el momento respecto a un eje es nulo cuando la fuerza y el eje son coplanares.

2.1. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A LOS EJES COORDENADOS

Expresamos el momento de la fuerza \overline{F} con respecto al eje OX (figura 8).

$$M_{ox} = \overline{M_o} \times \bar{i} = M_x$$

Se observa que es igual a la componente X de $\overline{M_o}$ (momento de la fuerza respecto al punto O). De igual modo será:

$$M_{oy} = \overline{M_o} \times \bar{j} = M_y$$

$$M_{oz} = \overline{M_o} \times \bar{k} = M_z$$

Y en función de las componentes rectangulares de \overline{OA} y \overline{F}

$$M_{ox} = M_x = \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y)$$

$$M_{oy} = M_y = \sum (z \cdot F_x - x \cdot F_z)$$

$$M_{oz} = M_z = \sum (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

En adelante llamaremos M_x , M_y , M_z tanto el momento de una fuerza respecto a OX , OY , OZ , como a la componente X , Y , Z del momento de una fuerza respecto a un punto.

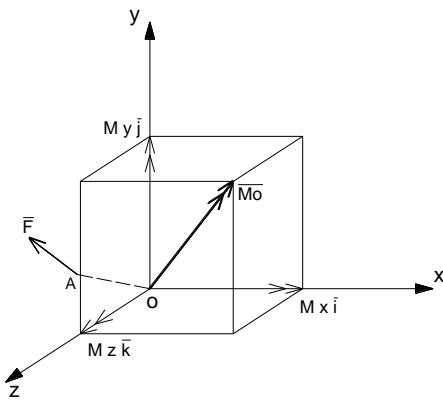


Figura 8

3. PARES O CUPLAS DE FUERZAS

Dos fuerzas constituyen un PAR o CUPLA cuando son de igual intensidad, rectas de acción paralelas y sentidos opuestos (figura 9).

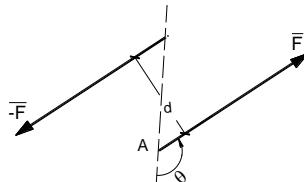


Figura 9

Características del par:

- La suma vectorial de las fuerzas del par es 0. $\bar{R} = 0$
- El momento propio del par es igual al momento de una de las fuerzas con respecto a un punto de la otra fuerza. Tomando momento de \bar{F} respecto a B será:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \overline{BA} \wedge \bar{F} \\ M &= BA \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d\end{aligned}$$

- El momento del par con respecto a cualquier punto del espacio es constante y de módulo igual a $F \cdot d$. (figura 10).

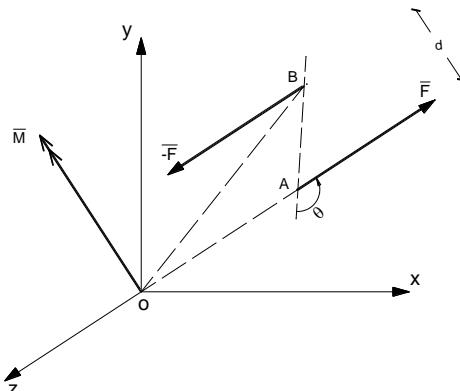


Figura 10

Tomando momento respecto al punto O :

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \overline{OA} \wedge \overline{F} + \overline{OB} \wedge (-\overline{F}) \\ \overline{M} &= (\overline{OA} - \overline{OB}) \wedge \overline{F} \\ \overline{M} &= \overline{BA} \wedge \overline{F} \quad (2) \\ M &= BA \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d\end{aligned}$$

La expresión (2) no depende del punto que hayamos tomado como centro de momento, es evidente que su valor será el mismo para cualquier punto del espacio. Por lo tanto \overline{M} , vector representativo del momento del par, puede aplicarse en cualquier punto siendo consecuentemente un VECTOR LIBRE.

- **PARES EQUIVALENTES:** dos pares coplanares cuyos elementos (fuerza y brazo) son distintos, serán equivalentes si sus momentos son iguales.

$$F_1 = d_1 \quad \text{siendo } F_1 \neq F_2; \quad d_1 \neq d_2$$

Es decir que están representados por vectores iguales (sentido, dirección y módulo son iguales).

3.1. COMPOSICIÓN DE PARES

Si se desea sumar dos pares que actúan sobre un cuerpo, se los traslada a un mismo punto O , por ejemplo (figura 11), y se los suma vectorialmente. El vector obtenido representa el par suma y da todas sus características.

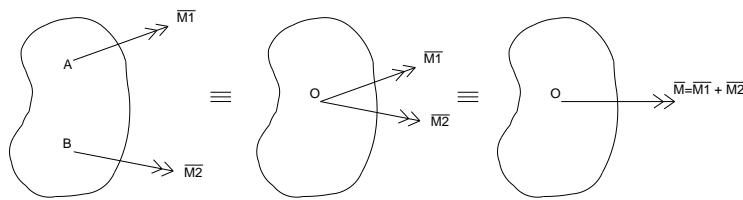


Figura 11

3.2. COMPOSICIÓN DE UNA FUERZA Y UN PAR

Sea una fuerza \overline{F} aplicada en un punto O del cuerpo rígido (figura 12). Actúa además sobre el cuerpo un par \overline{M} que puede estar aplicado en cualquier punto del cuerpo, en particular en el mismo donde actúa la fuerza \overline{F} .

En general \overline{M} y \overline{F} aplicados ambos en O forman un ángulo cualquiera. Pero vamos a considerar en particular, por ser de especial interés, el caso en que los vectores sean normales entre sí.

Consideramos un plano π pasante por O , perpendicular a \overline{M} y que contendrá a \overline{F} . (figura 12)

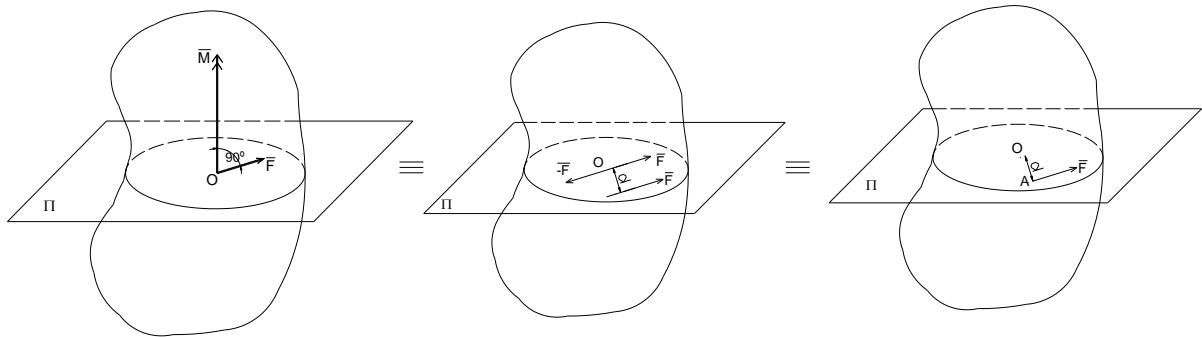


Figura 12

El vector \bar{M} representa a un par como el formado por \bar{F} aplicada en A y $-\bar{F}$ aplicada en O , siempre que la posición de A sea tal que: $\bar{M} = \bar{OA} \wedge \bar{F}$ o sea que:

$$M = BA \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d$$

Lo que requiere que:

$$d = \frac{M}{F}$$

Un par y una fuerza ortogonales entre sí pueden ser reducidos a una única fuerza de igual intensidad, dirección y sentido que la dada y actuante a una distancia $d = \frac{M}{F}$ del punto de aplicación del par y hacia el lado que tienda a imprimir igual sentido de rotación que el par.

Inversamente, cualquier fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido puede desplazarse a un punto arbitrario O , si se agrega un par de momento igual al momento de \bar{F} respecto a O .

Si la fuerza \bar{F} y el par \bar{M} no fueran ortogonales, el sistema fuerza-par se reduce a dos fuerzas no coplanares.

TEMA 1.D DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN EL ESPACIO

COMPOSICIÓN – DESCOMPOSICIÓN Y EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS NO CONCURRENTES

1. SISTEMA DE FUERZAS PLANO

1.1. COMPOSICIÓN

Si se reduce un sistema plano de fuerzas que actúa sobre una chapa al origen O de los ejes X , Y se tiene:

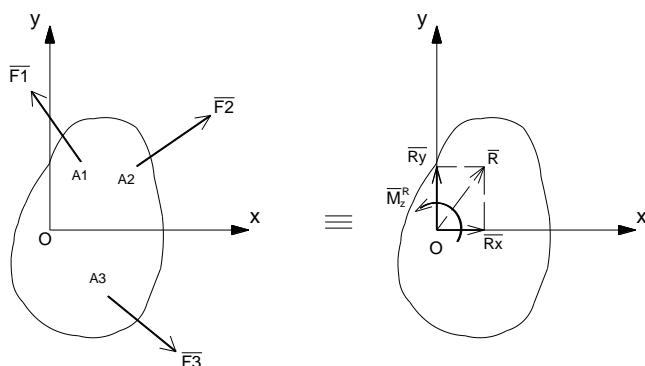
$$\begin{aligned}\bar{R} &= R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} = \sum \bar{F} \quad \begin{cases} R_x = \sum F_x \\ R_y = \sum F_y \\ R_z = \sum F_z \end{cases} \\ \bar{M}_o^R &= M_z^R \cdot \bar{k} = \sum (\overline{OA} \wedge \bar{F}) \quad \begin{cases} M_x^R = 0 & \text{por ser coplanares fuerza y eje} \\ M_y^R = 0 & \text{por ser coplanares fuerza y eje} \\ M_z^R = \sum M_z = \sum (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \end{cases}\end{aligned}$$

Los elementos de este par-fuerza son normales entre sí, y como los vectores momentos de todas las fuerzas son también perpendiculares al plano de la chapa, pueden sustituirse por su intensidad y sentido que indicamos con un arco orientado en el sentido de la rotación que la respectiva fuerza tiende a impartir a la chapa. El sistema queda expresado por tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}R_x &= \sum F_x \\ R_y &= \sum F_y \\ M_o^R &= \sum M_o\end{aligned}$$

en donde se indican los momentos respecto a O en lugar de hacerlo respecto a Z en razón de ser esta dirección común para cualquier punto que se tomara como centro de reducción, y por ser:

$$M_o^R = M_z^R \quad \wedge \quad M_o = M_z$$



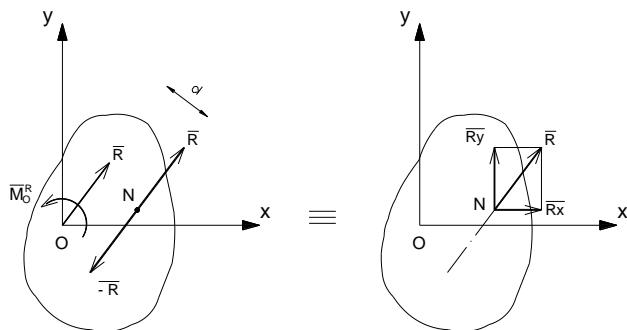


Figura 1

Si aplicamos en N un sistema nulo: R y $-R$ a una distancia $d = \frac{M_o^R}{R}$ (figura 1), se tendrá el par formado por \bar{R} aplicada en O y $-\bar{R}$ aplicada en N que se anula con M_o^R , quedando sólo \bar{R} aplicada en N .

Considerando que N sea un punto genérico de coordenadas X_N e Y_N , aplicando Varignon con respecto a O se tiene (considerando como positivo el sentido antihorario):

$$X_N \cdot R_y - Y_N \cdot R_x = \sum M_o$$

ecuación de la recta de acción de la resultante. Para determinar las coordenadas en el origen de esta recta de acción hacemos:

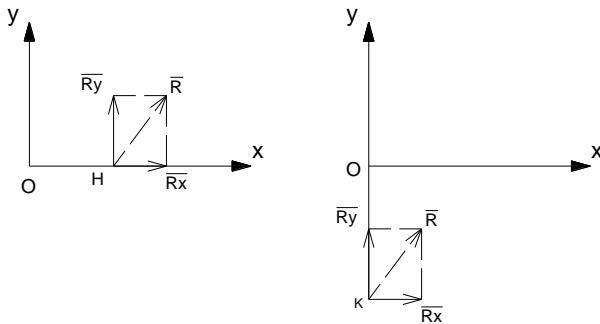


Figura 2

$$X_H \cdot R_y = \sum M_O \quad -Y_k \cdot R_x = \sum M_O$$

$$X_H = \frac{\sum M_o}{R_y}; \quad Y_H = 0 \quad Y_k = -\frac{\sum M_o}{R_x}; \quad X_k = 0$$

1.2. EQUILIBRIO

Para que un sistema de fuerzas actúa en el plano de una estructura bidimensional esté en equilibrio son condiciones necesarias y suficientes que las sumas de las componentes X e Y de todas las fuerzas del sistema sean nulas, y que también sea nula la suma de los momentos de todas ellas respecto de un punto cualquiera del plano.

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$M_o^R = \sum M_o = 0$$

TEMA 2: EQUILIBRIO EXTERNO DE LOS CUERPOS VINCULADOS

TEMA 2.A EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDO

GRADOS DE LIBERTAD – VÍNCULOS – REACCIONES – SISTEMAS VINCULADOS – CÁLCULO DE REACCIONES

1. GRADOS DE LIBERTAD

Para determinar los grados de libertad que posee una chapa en un plano analizaremos los desplazamientos que sufre para pasar de la posición S a la S_1 (figura 1)

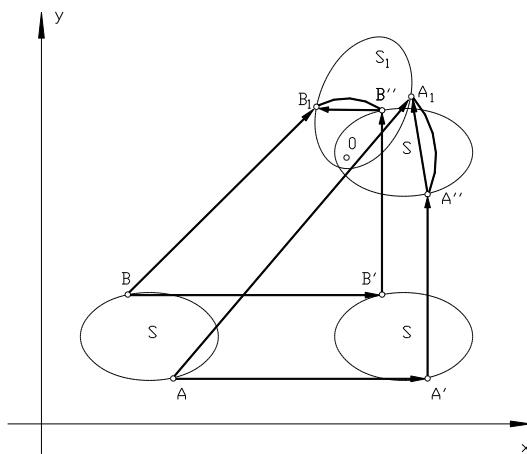


Figura 1

El punto A experimenta un desplazamiento $\overline{AA_1}$. Podemos expresarlo en función de tres desplazamientos componentes:

$$\overline{AA_1} = \overline{AA'} + \overline{A'A''} + \overline{A''A_1}$$

Donde $\overline{AA'}$ es el desplazamiento del punto A en el movimiento componente de translación según la dirección X ; $\overline{A'A''}$ es el desplazamiento correspondiente a la rotación de la chapa alrededor de O .

Por lo tanto, la chapa en su plano posee tres grados de libertad de movimiento: dos translaciones y una rotación.

Si fijamos una condición: la ordenada de uno de sus puntos, la chapa sólo puede trasladarse según el eje X y rotar. Si fijamos dos condiciones: las coordenadas de uno de sus puntos, la chapa sólo puede rotar alrededor del punto fijo. Si fijamos tres condiciones: las coordenadas de uno de sus puntos y una coordenada de otro punto, la chapa ha sido inmovilizada.

Si hacemos extensivo el razonamiento anterior a un cuerpo que se puede mover en el espacio se concluye que posee seis grados de libertad: tres translaciones según los ejes X , Y , Z y tres rotaciones alrededor de los mismos. Son los seis movimientos fundamentales de un cuerpo en el espacio.

2. VÍNCULOS

Todo dispositivo que condiciona total o parcialmente los movimientos fundamentales de una chapa o cuerpo se llama vínculo, enlace o conexión.

Pueden ser externos o absolutos si el movimiento impedido es con respecto a la tierra, e internos o relativos si el movimiento impedido es con respecto a otra chapa o cuerpo.

Se los clasifica por el número de movimientos impeditos; en base a ello se distinguen tres tipos de vínculos para las estructuras planas:

- Vínculos de primera especie, que impiden un movimiento o sea que restringen un grado de libertad.
- Vínculos de segunda especie, que restringen dos grados de libertad.
- Vínculos de tercera especie, que restringen tres grados de libertad.

2.1. VÍNCULOS DE PRIMERA ESPECIE

Un dispositivo constituido por una pieza prismática de sección triangular en cuya arista superior se inserta un pasador que lo une al punto A de la chapa, y en su base apoya sobre rodillos que pueden rodar sobre un plano fijo a tierra (figura 2), se llama APOYO MÓVIL. Está impeditida la traslación de la chapa en la dirección Y , pero puede rotar alrededor de A y trasladarse en dirección X .

2.2. VÍNCULOS DE SEGUNDA ESPECIE

Si la base de la pieza prismática descripta anteriormente esta fija a tierra se tiene un dispositivo llamado APOYO FIJO o ARTICULACIÓN que restringe dos grados de libertad: las traslaciones X e Y , quedando un solo grado de libertad para la chapa, el de rotar alrededor de A . (Figura 3)

2.3. VÍNCULOS DE TERCERA ESPECIE

Si se fija un punto de la chapa y una dirección, se inmoviliza totalmente la misma suprimiéndose sus tres grados de libertad. Este enlace se denomina EMPOTRAMIENTO. (Figura 4)

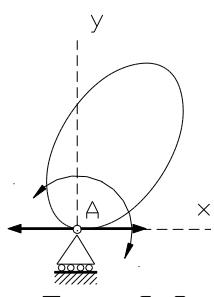


Figura 2

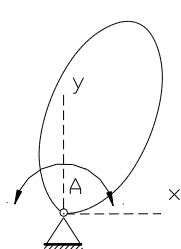


Figura 3

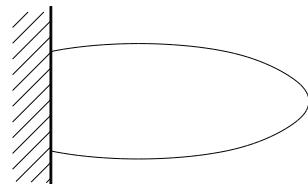


Figura 4

3. REACCIONES

Consideremos una chapa vinculada a tierra en A mediante un apoyo móvil (figura 5).

Si sobre ella se ejerce una acción \bar{F} , para que la chapa se encuentre en reposo es necesario que \bar{F} pase por A y que sea normal al plano de deslizamiento.

Esta acción \bar{F} ejercida sobre la chapa se transmite al apoyo por el punto A . La reacción en el vínculo será opuesta a aquella y se llama: REACCIÓN DE APOYO ($\bar{R}_A = -\bar{F}$). Si se supone suprimido el apoyo y se coloca en su lugar la reacción, la chapa permanecerá en reposo.

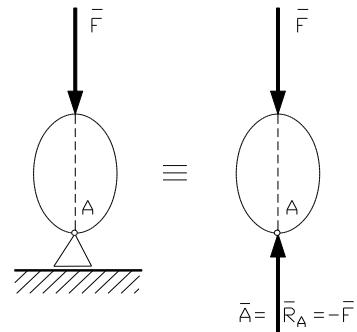


Figura 5

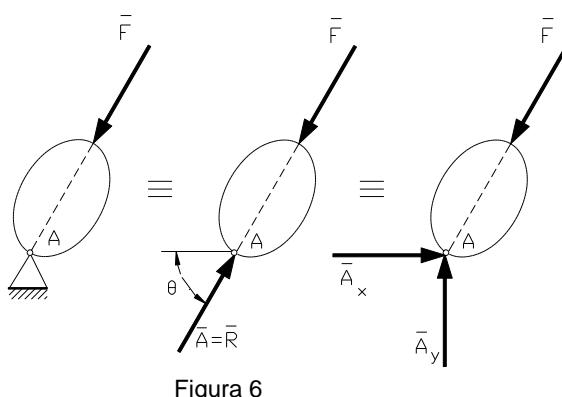


Figura 6

Esta operación de suprimir el enlace y colocar en su lugar la reacción que en él se origina se llama: poner en evidencia la incógnita, es decir, la reacción.

Por lo tanto, cuando en una chapa hay colocado un apoyo móvil, se conoce el punto de aplicación y la dirección de la reacción del vínculo, desconociéndose frecuentemente su intensidad. Determinar la reacción de un vínculo de primera especie implica entonces el cálculo de una sola incógnita, la intensidad, ya que el destino surge del signo de ésta.

Consideremos ahora que la chapa tenga un vínculo de segunda especie (figura 6); la acción \bar{F} debe pasar por A para que la chapa permanezca en reposo.

La rotación de vínculo podrá tener cualquier dirección, conociéndose sólo su punto de aplicación A : determinarla implica calcular dos incógnitas, intensidad y dirección o sus componentes X e Y .

Consideremos finalmente que la chapa esté empotrada siendo A el baricentro de la sección de empotramiento (figura 7). La chapa está inmovilizada y permanecerá en reposo sea cual fuese la acción que sobre ella se ejerza. La reacción debe ser opuesta a la acción y si ésta se aplica en B , un punto cualquiera de la chapa, en él no hay vínculo alguno capaz de reaccionar.

Como el enlace está en A debe originarse en él un sistema par-fuerza equivalente a $\bar{B} = -\bar{F}$.

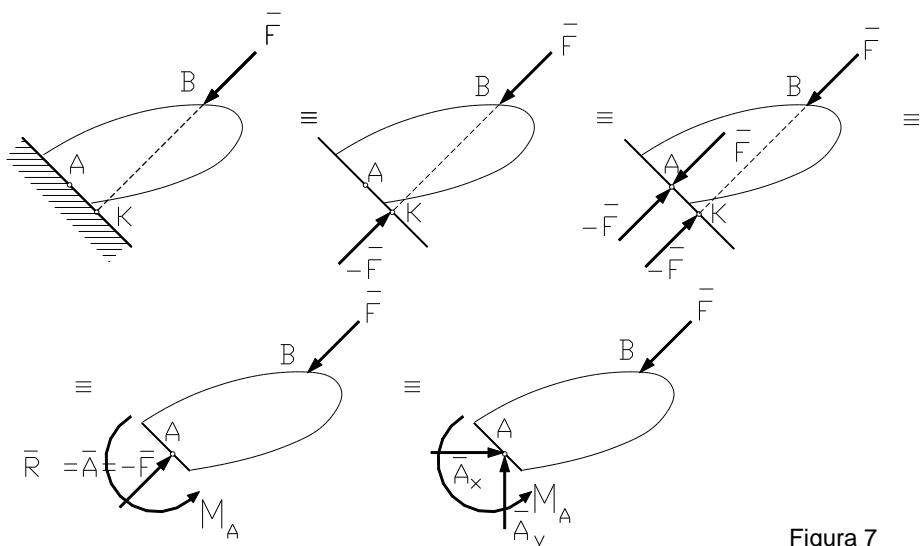


Figura 7

Se observa que un empotramiento reacciona mediante una fuerza \bar{R}_A (reacción de empotramiento) y un par M_A (par de empotramiento). Su determinación implica el cálculo de tres incógnitas: intensidad y dirección de la reacción e intensidad del par, o bien las componentes X e Y de la reacción y la intensidad del par.

4. SISTEMAS VINCULADOS

La chapa como representación de una estructura plana, no se encuentra libre, sino que está generalmente inmovilizada por vínculos que la ligan a tierra o a otras chapas. Al conjunto formado por la chapa y por los vínculos que se le colocan para inmovilizarla lo designaremos SISTEMA VINCULADO PLANO, y reservamos la designación de ESTRUCTURA PLANA para la chapa sin vínculos.

Consideremos un sistema vinculado sometido a la acción de las fuerzas \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 . Como la chapa posee en el plano tres grados de libertad, será necesario colocarle tres vínculos eficientes para inmovilizarla (figura 8).

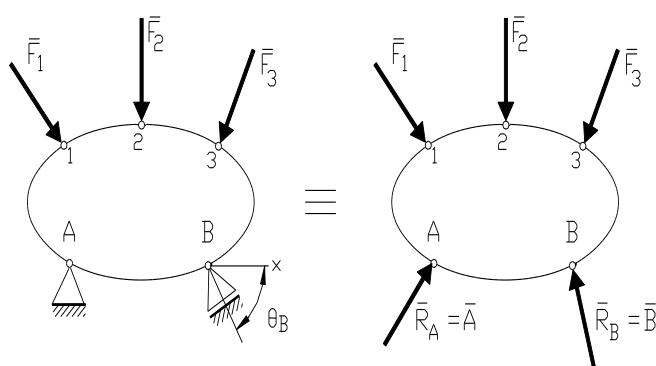


Figura 8

En el apoyo fijo A se originará una reacción pasante por dicho punto (la descomposición de \bar{R}_{AX} y \bar{R}_{AY}), y en el apoyo móvil B la reacción pasará por el punto y será normal a la dirección del plano de deslizamiento (\bar{R}_B).

Las fuerzas activas y reactivas que actúan sobre la chapa se encontrarán en equilibrio debiendo satisfacer las ecuaciones generales deducidas para el equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes, que son:

ecuaciones generales deducidas para el equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes, que son:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

Sistema de tres ecuaciones que permite determinar tres incógnitas cualesquiera que pudiesen existir en el sistema. En este caso: $\overline{R_{AX}}$, $\overline{R_{AY}}$, $\overline{R_B}$.

Se puede reemplazar cualquiera de las ecuaciones de proyección por otra de momentos con respecto a otro punto del plano, por ejemplo:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

Siempre y cuando la recta que une los dos centros de momento (A y B), no sea perpendicular al eje X .

Si tomamos tres ecuaciones de momentos:

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

Tenemos que controlar que los tres centros de momento (A , B , C) no estén situados sobre una recta.

En la práctica resulta conveniente la situación de condiciones de suma de componentes por suma de momentos por cuanto permiten plantear ecuaciones en que aparece una sola incógnita, de resolución inmediata, eliminándose la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas.

En la chapa de la figura 8 observamos que tenemos tres incógnitas ($\overline{R_{AX}}$, $\overline{R_{AY}}$, $\overline{R_B}$), como disponemos de tres ecuaciones de equilibrio el valor de las incógnitas puede calcularse por medio de ellas.

Las reacciones cuyos valores quedan determinados por las ecuaciones de equilibrio estático se designan: REACCIONES ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS.

El sistema vinculado que tiene reacciones determinables estáticamente se llama: SISTEMA ISOSTÁTICO.

5. CÁLCULO DE REACCIONES

Consideremos un sistema isostático formado por una sola chapa (figura 9) y pongamos en evidencia las reacciones de apoyo. El diagrama que resulta de eliminar los vínculos y poner en evidencia las reacciones se llama DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE, por tratarse de un cuerpo supuesto libre y sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio.

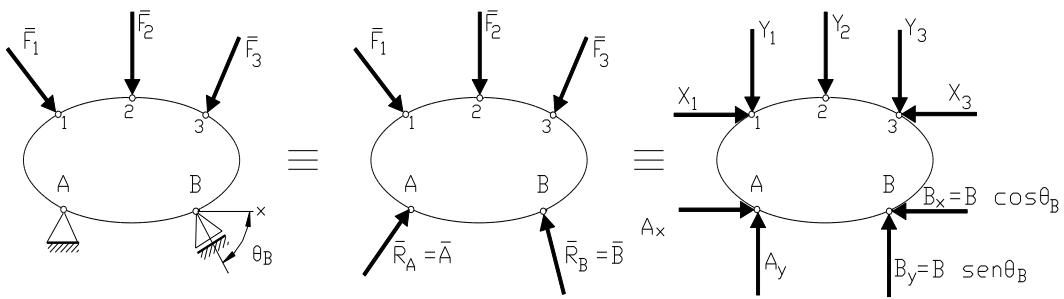


Figura 9

A las incógnitas se les supone un sentido y se plantean las tres ecuaciones de equilibrio; como las incógnitas son también tres, su valor se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones planteado. Para simplificar esta resolución conviene plantear ecuaciones de momento donde aparezca una sola incógnita. Para ello se toma momento respecto al punto A , intersección de las rectas de acción de \bar{R}_{AX} y \bar{R}_{AY} , y se despeja el valor de \bar{R}_B .

Luego se toma el momento respecto a B intersección de \bar{R}_{AX} y \bar{R}_B , despejándose \bar{R}_{AY} . Finalmente se suman las componentes X , obteniéndose \bar{R}_{AX} .

$$\sum M_A = F_{1X} \cdot (Y_1 - Y_A) + F_{1Y} \cdot (X_1 - X_A) - F_{2X} \cdot (Y_2 - Y_A) + F_{2Y} \cdot (X_2 - X_A) - R_B \cdot (X_B - X_A) = 0$$

$$R_B = \frac{1}{X_B - X_A} [F_{1X} \cdot (Y_1 - Y_A) + F_{1Y} \cdot (X_1 - X_A) - F_{2X} \cdot (Y_2 - Y_A) + F_{2Y} \cdot (X_2 - X_A)]$$

$$\sum M_B = F_{1X} \cdot (Y_1 - Y_B) - F_{1Y} \cdot (X_B - X_1) - F_{2X} \cdot (Y_2 - Y_B) - F_{2Y} \cdot (X_B - X_2) + R_{AY} \cdot (X_B - X_A) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{1}{X_B - X_A} [-F_{1X} \cdot (Y_1 - Y_B) + F_{1Y} \cdot (X_B - X_1) + F_{2X} \cdot (Y_2 - Y_B) + F_{2Y} \cdot (X_B - X_2)]$$

$$\sum F_x = R_{AX} + F_{1X} - F_{2X} = 0$$

$$R_{AX} = -F_{1X} + F_{2X}$$

Si los resultados son positivos, los sentidos supuestos son correctos. En cambio deben ser invertidos cuando los valores finales de las incógnitas sean negativos.

TEMA 2.B CADENAS CINEMÁTICAS

1. DETERMINACIÓN DE REACCIONES EN SISTEMAS DE VARIAS CHAPAS

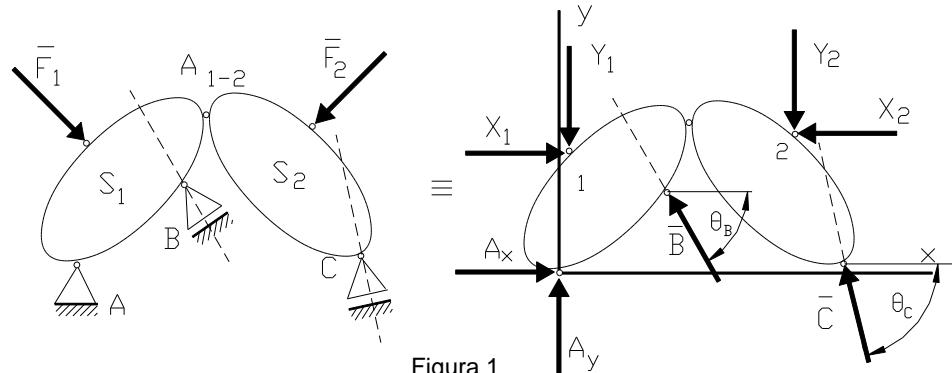
Estudiaremos el tema en el siguiente orden:

- Determinación de reacciones en base a la aplicación de ecuaciones de equilibrio de todo el sistema de fuerzas planteado en un diagrama de cuerpo libre para toda la estructura.
- Determinación de reacciones en base a la aplicación de las condiciones de equilibrio de las fuerzas actuantes en cada una de las chapas del sistema, planteando un sistema de equilibrio para cada una de ellas separadamente. En el diagrama de cuerpo libre de cada chapa deben ponerse en evidencia, a más de las reacciones externas, las internas o interacciones que nacen entre ellas al actuar las cargas.
- Determinación gráfica.
- Determinación de reacciones en vigas articuladas o vigas Gerber.

1.1. DETERMINACIÓN ANALÍTICA GENERAL

Consiste en plantear el diagrama de cuerpo libre a toda la estructura, es decir considerar el conjunto de chapas sometidas a la totalidad de las fuerzas externas, activas y reactivas, y establecer las ecuaciones de equilibrio que en cada caso correspondan.

Sea el sistema de la figura 1 del cual se conocen todas las dimensiones y se pueden determinar las coordenadas de todos los puntos particulares respecto a un sistema x-y.



Analicemos en primer término la isostática del sistema:

vínculos simples:	$v.s. = 4$
grados de libertad:	$g.l. = n + 2 = 4$
vínculos aparentes:	$v.a. = \text{no hay}$
resultado del análisis:	afirmativo

A la derecha se ha trazado el diagrama de la estructura libre donde observamos cuatro incógnitas:

$$A_x; A_y; B; C$$

Para determinarlas disponemos por una parte de las tres ecuaciones generales de equilibrio para un sistema plano de fuerzas. Además la existencia de la articulación A_{1-2} exige, para que las chapas estén en reposo, que el momento de las fuerzas situadas a izquierda de la articulación (o derecha) sea nulo. Evidentemente si imaginamos fija la chapa S_2 y si el momento de las fuerzas situadas a la izquierda de la A_{1-2} fuese distinto de cero la chapa S_1 rotaría; y viceversa, la chapa S_2 rotaría en torno de A_{1-2} si el momento de las fuerzas situadas a la derecha de este punto no fuese nulo e imaginamos a S_1 fija.

Esta condición física, independientemente de las tres anteriores se expresa matemáticamente por cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$\sum M_{A_{1-2}}^{izq} = 0 \quad \sum M_{A_{1-2}}^{der} = 0$$

Dispondremos por lo tanto de un sistema de cuatro ecuaciones independientes:

$$\sum x = 0 \quad \sum y = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_{A_{1-2}}^{izq} = 0$$

con el que queda definido el valor de las cuatro incógnitas.

Conviene plantear las ecuaciones de equilibrio en forma tal que aparezca, en lo posible, una sola incógnita por ecuación. Para ello se pueden utilizar ecuaciones alternativas de momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a puntos (articulaciones externas en general) distintos del A y/o tomando momentos respecto a articulaciones relativas de las fuerzas ubicadas a su derecha en vez de las ubicadas a su izquierda.

En las ecuaciones de momentos que se plantean a continuación se toma el signo en función del sentido de rotación que la fuerza tiende a producir alrededor del centro de momentos y, en valor absoluto, la intensidad de la fuerza y la longitud del brazo de palanca.

$$\sum M_{A_{1-2}}^{der} = (x_C - x_{A_{1-2}}) \cdot C \cdot \sin(\theta_C) - (y_{A_{1-2}} - y_C) \cdot C \cdot \cos(\theta_C) - (x_2 - x_{A_{1-2}}) \cdot y_2 - (y_2 - y_{A_{1-2}}) \cdot x_2 = 0$$

De esta ecuación se despeja la reacción C .

$$\begin{aligned} \sum M_A = & (x_C - x_A) \cdot C_y + (y_C - y_A) \cdot C_x - (x_2 - x_A) \cdot y_2 + (y_2 - y_A) \cdot x_2 + \\ & (x_B - x_A) \cdot B \cdot \sin(\theta_B) + (y_B - y_A) \cdot B \cdot \cos(\theta_B) - (x_1 - x_A) \cdot y_1 - (y_1 - y_A) \cdot x_1 = 0 \end{aligned}$$

De esta ecuación se despeja la reacción B .

$$\begin{aligned} \sum x_i = A_x + x_1 - B_x - x_2 - C_x &= 0 \quad \therefore \quad A_x = -x_1 + B_x + x_2 + C_x \\ \sum y_i = A_y - y_1 + B_y - y_2 + C_y &= 0 \quad \therefore \quad A_y = y_1 - B_y + y_2 - C_y \end{aligned}$$

Los sentidos de las incógnitas han sido supuestos, quedando confirmados si los valores resultantes son positivos debiendo ser cambiados en caso contrario. Se reitera: en la primera ecuación intervienen sólo fuerzas situadas a la derecha del centro de momentos tomado, la articulación A_{1-2} entre ambas chapas. En las tres ecuaciones restantes deben considerarse la totalidad de las fuerzas externas.

Analicemos el sistema de la figura 2.

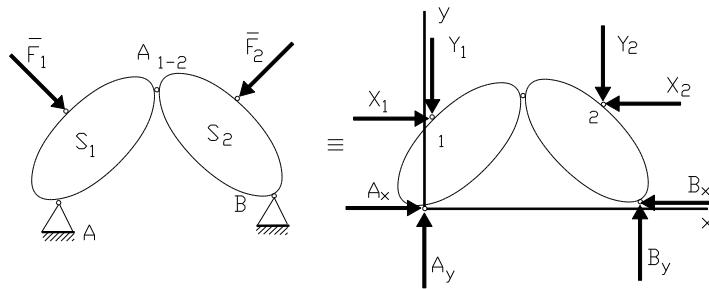


Figura 2

$$g.l. = 4$$

$$v.s. = 4$$

v.a. = no hay (en este sistema se presenta restricción impropia si las tres articulaciones están alineadas)

El sistema es isostático.

Trazado el diagrama de la estructura libre, se plantean las ecuaciones que nos permiten determinar las incógnitas A_x , A_y , B_x , B_y .

Del sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sum M_{A_{1-2}}^{derecha} &= 0 \\ \sum M_A &= 0\end{aligned}$$

se calculan B_x , B_y

De la ecuación	$\sum x_i = 0$	se despeja A_x
De la ecuación	$\sum y_i = 0$	se despeja A_y

Veamos sistemas de tres chapas, figura 3:

Disponemos ahora de cinco ecuaciones: las tres de equilibrio general y una de equilibrio parcial para cada una de las articulaciones intermedias.

$$\begin{aligned}\sum M_{A_{2-3}}^{derecha} &= 0 \quad \Rightarrow \quad D = \dots \\ \sum M_{A_{1-2}}^{derecha} &= 0 \quad \Rightarrow \quad C = \dots \\ \sum M_A &= 0 \quad \Rightarrow \quad B = \dots \\ \sum x_i &= 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = \dots \\ \sum y_i &= 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \dots\end{aligned}$$

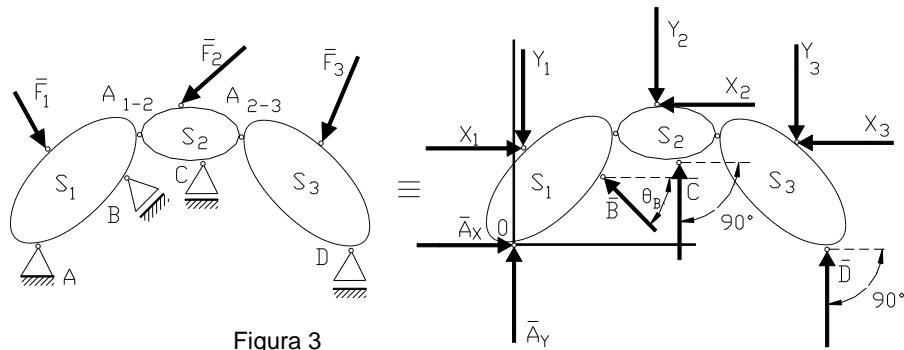


Figura 3

$$g.l. = 5$$

$$v.s. = 5$$

v.a. = no hay; se analizó en 3,2

El sistema es isostático.

Si se tuviese un número n de chapas, la cadena cinemática tendría $n+2$ grados de libertad. Para inmovilizarla hay que colocar $n+2$ vínculos simples cinemáticamente eficientes, que sería también el número de incógnitas a determinar. Dispondremos de las tres ecuaciones de equilibrio general del sistema de fuerzas, más una ecuación de equilibrio parcial por cada articulación relativa; el número de ecuaciones sería:

$$E = 3 + (n-1) = n+2$$

es decir estamos ante un sistema estáticamente determinado. Se resuelve en la forma vista en los ejemplos anteriores.

1.2. RESOLUCIÓN POR CHAPAS SEPARADAS

Corresponde en este caso dos tipos de análisis según exista o no alguna chapa que tenga tres vínculos simples a tierra que la inmovilizan. Si hay una chapa en tales condiciones las cargas que sobre ella actúan son equilibradas por las reacciones de los tres vínculos simples externos, no transmitiendo acción alguna a las chapas articuladas a ella. Por el contrario la chapa inmovilizada recibe la acción de las otras y reacciona ante ellas. Debe comenzar a resolverse por aquella chapa que apoya en la otra.

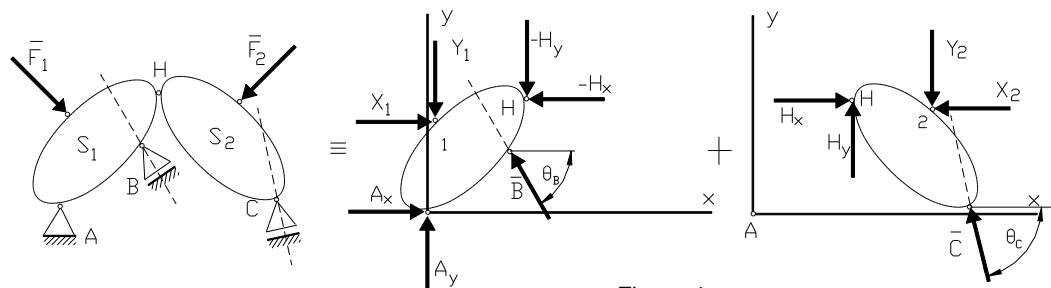


Figura 4

Consideremos el caso del sistema vinculado de la figura 4, en donde la articulación relativa A_{1-2} entre las chapas S_1 y S_2 la designamos con la letra H con el solo objeto de simplificar la nomenclatura: en adelante utilizaremos indistintamente las letras A_{1-2} y A_{2-3} o H y K para designar las articulaciones relativas entre las chapas, $S_1 - S_2$ y $S_2 - S_3$ respectivamente.

Separamos las chapas S_1 y S_2 efectuando un corte por la articulación H . Para mantener la estabilidad de cada una de ellas es necesario aplicar las interacciones que en H originan las acciones externas: esta reacción interna está constituida por dos fuerzas iguales y opuestas pasantes por el punto a las que designaremos con \bar{H} y $-\bar{H}$. Sus componentes rectangulares serán H_x y H_y a las que supondremos un sentido que se confirmará o no según que el resultado de los cálculos dé valores positivos o negativos.

Se trazan los diagramas de cuerpo libre de las chapas S_1 y S_2 separadamente. En la S_2 , no inmovilizada por sus propios vínculos externos, aparecen tres incógnitas: C , H_x , H_y ; en cambio en la S_1 , inmovilizada por sus propios vínculos externos, surgen cinco incógnitas: A_x , A_y , B , H_x , H_y .

Como para cada una de las chapas disponemos de sólo de tres ecuaciones de equilibrio independientes se comienza el cálculo con la S_2 . De su diagrama de cuerpo libre planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\sum M_H = 0, \text{ que permite despejar y calcular el valor de } C.$$

$$\sum x_i = 0, \text{ de esta ecuación se obtiene el valor de } H_x.$$

$$\sum y_i = 0, \text{ de la cual se despeja } H_y.$$

Previo a continuar con la chapa S_1 , donde se utilizarán los valores obtenidos de C , H_x , H_y , conviene verificar los cálculos realizados. Para esto se comprueba el cumplimiento de alguna otra ecuación de equilibrio, distinta de las ya utilizadas y en la que preferentemente aparezca el mayor número de incógnitas calculadas, por ejemplo la ecuación de momento respecto al punto de aplicación de \bar{F}_2 , $\sum M_2 = 0$, en la que aparecen \bar{C} , \bar{H}_x , \bar{H}_y . Al volcar en ella los valores obtenidos debe llegar a una identidad $0 = 0$ [cero = cero]. De no ser así debe repetirse el cálculo para localizar el error y proceder a su corrección.

Pero esta identidad es una expresión teórica cuya exactitud numérica puede ser absoluta sólo si trabajamos con números enteros o fraccionarios pero en cuanto aparecen números irracionales o racionales en cuya escritura decimal finita o periódica despreciamos cifras a partir de cierto rango, llegaremos a valores cercanos a cero pero no a éste.

En la solución de un determinado problema la precisión de los valores requeridos como solución dependen de: 1) la trascendencia del problema a resolver; 2) el grado de exactitud de los datos utilizados y 3) la precisión de los cálculos.

Dentro del marco de las aplicaciones comunes de la Ingeniería Civil, una diferencia aceptable en la exactitud es del orden del dos por mil (2‰).

Dado que a la precisión del cálculo podemos aumentarla a medida que aumentamos las cifras significativas de los números con que operamos, la cuestión radica en establecer el número de cifras necesario para asegurar una precisión igual o superior al grado de exactitud de los datos que se emplean. Prácticamente, utilizando una calculadora electrónica de bolsillo,

ello se obtiene tomando cuatro cifras en los números que comienzan con 1 y tres cifras en los otros.

Cuando en la verificación de los cálculos llegamos a que en uno de los miembros es cero y el otro es un valor cercano a éste podemos dar por verificados los valores en consideración ya que, cuando hay alguna equivocación operativa ello se evidencia por la magnitud de la desigualdad que suele ser grosera.

Del diagrama de cuerpo libre de la chapa S_1 planteamos las siguientes ecuaciones.

$$\sum M_A = 0 \quad \text{de donde se obtiene} \quad B = \dots$$

$$\sum x = 0 \quad \text{de donde se obtiene} \quad A_x = \dots$$

$$\sum y = 0 \quad \text{de donde se obtiene} \quad A_y = \dots$$

Obtenidos estos valores se verifican con otra ecuación, por ejemplo $\sum M_1 = 0$. Si resulta satisfactorio tenemos el problema resuelto.

TEMA 3: ESFUERZOS INTERNOS EN ESTRUCTURAS DE ALMA LLENA

TEMA 3.A ESFUERZOS INTERNOS

VIGAS – ESFUERZOS INTERNOS - DIAGRAMAS

1. VIGAS: DIFERENTES TIPOS Y CARGAS

Un elemento estructural diseñado para sostener cargas en varios puntos a lo largo de él se conoce como: VIGA. En la mayoría de los casos las cargas son perpendiculares al eje de la viga y producirán sólo corte y flexión en ella. Cuando las cargas no son perpendiculares al eje de la viga, producirán también fuerzas axiales en ella.

Sin embargo, las fuerzas axiales pueden ser despreciadas en el diseño de las vigas, debido a que la capacidad de una viga para resistir corte y, especialmente flexión, es más crítica que su capacidad para resistir fuerzas axiales.

Desde el punto de vista de su configuración se las clasifica en vigas de alma calada y vigas de alma llena. Las vigas de alma calada son los reticulados formados por barras unidas en sus extremos.

Otra clasificación corresponde hacer en base a la forma de vincular la viga a tierra dando lugar a diversos tipos, siendo las más frecuentes:

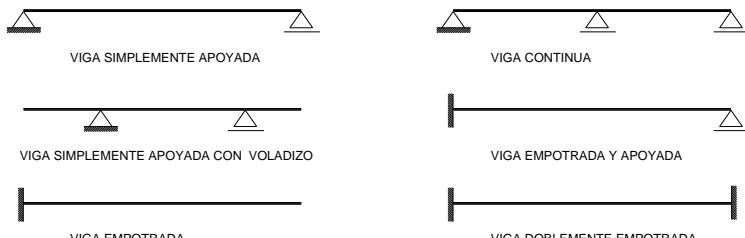


Figura 1

Las vigas dibujadas a la izquierda constituyen todas sistemas hipostáticos, en cambio las de la derecha son hiperestáticas.

Las vigas pueden estar sometidas a cargas concentradas o a cargas distribuidas. Si p (intensidad de carga o carga por unidad de longitud) es constante se habla de carga uniformemente distribuida y el diagrama de carga es rectangular. Si p varía linealmente, el diagrama es triangular o trapecial. La carga puede extenderse a toda la luz de la viga o solo parcialmente.

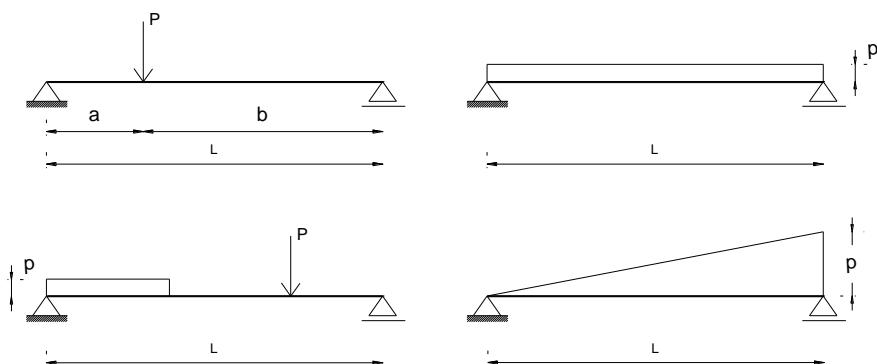
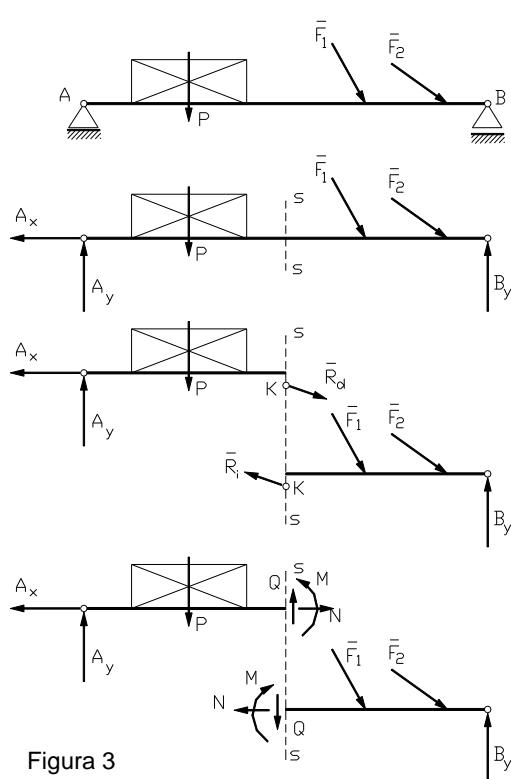


Figura 2

2. ESFUERZOS INTERNOS

Consideremos la viga simplemente apoyada sometida a cargas concentradas y distribuidas, coplanares con su eje (figura 3). Pongamos en evidencia las reacciones externas o, en otros términos, tracemos el diagrama de cuerpo libre para la viga, que se encontrará en reposo bajo la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio.



Practicamos un corte $s - s$ normal al eje de la pieza. Para restablecer el equipo en los dos trozos en que queda seccionada la viga, se deben aplicar las interacciones que existían entre las partículas adyacentes al corte, antes de que se practicase el mismo.

Es decir que en la cara izquierda del corte se deben aplicar las acciones que la parte derecha de la viga le transmite a través de todos los puntos de la sección de corte. Viceversa, en la parte derecha se deben aplicar, sobre la cara del corte, las acciones que recibe de la parte izquierda.

Estas acciones constituyen dos sistemas de fuerzas distribuidas en las dos secciones del corte y pueden ser reducidas a sus respectivas resultantes que se indican en la figura como R_i y R_d , donde el subíndice i o d indica que es la acción resultante de la parte izquierda sobre la derecha (o viceversa).

Estas dos fuerzas iguales y opuestas, resultantes de las acciones internas se designan: REACCIÓN INTERNA en la sección $s - s$ de la viga.

Obsérvese que R_d es la equilibrante de las fuerzas exteriores actuantes en el trozo de viga situado a la izquierda de la sección $s - s$; R_i , igual y opuesta a R_d , será por lo tanto equivalente al sistema de fuerzas exteriores situada a la izquierda de la sección, o sea su resultante. Igual razonamiento corresponde para R_d como resultante de las fuerzas exteriores situadas a la derecha del corte.

En la práctica, generalmente resulta conveniente reducir la reacción interna al baricentro de la sección considerada y expresarla mediante sus tres componentes M , N , Q respecto de dicho punto. Estas tres componentes, expresadas cada una de ellas por dos elementos iguales y opuestos según se considere la cara izquierda o derecha del corte, se denominan ESFUERZOS INTERNOS, en la sección transversal.

2.1. MOMENTO FLECTOR

El momento flector M es una componente de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan en la sección, y se calcula sumando algebraicamente los momentos, respecto al baricentro de la sección, de todas las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección considerada.

El momento flector en la sección se considera de signo positivo si el momento resultante de las fuerzas exteriores a la izquierda de la sección es horario, y el de las fuerzas de la derecha antihorario. En caso contrario es negativo. El efecto físico de las fuerzas exteriores que originan momentos flectores positivos consiste en encorvar la viga con la parte convexa hacia abajo, lo que significa que tracciona sus fibras inferiores y comprime las superiores (figura 4).

2.2. ESFUERZO DE CORTE

El esfuerzo de corte Q es una componente de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan en la sección, y se calcula sumando algebraicamente las proyecciones sobre el plano de la sección, de las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección considerada.

El esfuerzo de corte en la sección se considera de signo positivo si la proyección de la resultante de las fuerzas exteriores a la izquierda de la sección, está dirigida hacia arriba y la de las fuerzas de la derecha hacia abajo. En caso contrario el esfuerzo de corte se considera negativo. El efecto físico de las fuerzas externas que originan esfuerzos de corte positivos consiste en cortar la viga según la sección $s-s$ desplazando la parte izquierda hacia arriba y la derecha hacia abajo (figura 4).

2.3. ESFUERZO NORMAL

El esfuerzo de corte Q es una componente de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan en la sección, y se calcula sumando algebraicamente las proyecciones sobre el plano de la sección, de las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección considerada.

El esfuerzo normal en la sección se considera de signo positivo si las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección tienden a alargar la viga o sea que producen tracción, en cambio es negativo si las fibras son comprimidas (figura 4).

Fuerzas externas que originan esfuerzos internos positivos y negativos con indicación del efecto físico que producen o tienden a producir, en el caso de esfuerzos internos positivos tenemos:

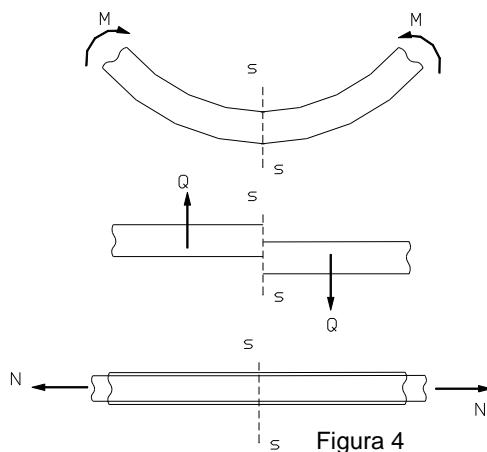


Figura 4

TEMA 3.B DETERMINACION DE SOLICITACIONES

3. DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS

3.1. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

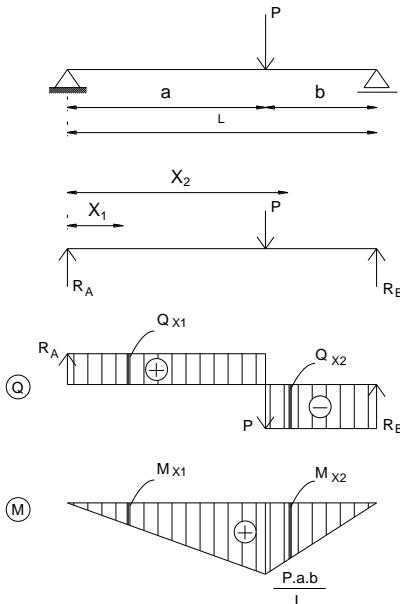


Figura 5

Sea la viga de la figura 5 sobre la que actúa una única carga concentrada. Se trata de establecer cómo varían los esfuerzos internos en las secciones transversales existentes a lo largo del eje de la viga. Se determinan las reacciones de vínculo externo:

$$R_A = \frac{P \cdot b}{l} \quad R_B = \frac{P \cdot a}{l}$$

Si se consideran ahora dos secciones genéricas, una de abscisa x_1 , situada en cualquier punto entre A y D , y la otra x_2 , entre D y B .

Aplicando la definición de esfuerzo de corte para la sección de abscisa x_1 , se observa que a su izquierda actúa la fuerza R_A , que por ser normal al eje se proyecta en toda su magnitud sobre el plano de la sección, por lo cual:

$$Q_{x1} = R_A$$

Esta expresión es válida para cualquier punto comprendido entre los puntos de aplicación de R_A y P . Si se representa gráficamente esta función se obtiene una recta paralela al eje de referencia situada a la distancia R_A del mismo en sentido positivo.

Considerando la sección x_2 :

$$Q_{x2} = R_A - P = R_B$$

Su gráfica es otra recta paralela al eje de referencia trazado a la distancia R_B en la zona negativa. Se adopta llevar los esfuerzos cortantes positivos hacia arriba del eje y los negativos hacia abajo. El diagrama trazado se designa **diagrama de ESFUERZOS CORTANTES**, y sus ordenadas nos dan el valor del mismo en correspondencia de la sección que se desee.

La representación de las fuerzas de corte se hace en la escala de fuerzas, y la posición de las secciones en la escala de longitudes.

Si se establece el valor del momento flector respecto a la sección x_1 :

$$M_{x_1} = R_A \cdot x_1$$

Y respecto a x_2 :

$$M_{x_2} = R_A \cdot x_2 - P \cdot (x_2 - a) = R_B \cdot (l - x_2)$$

Representando gráficamente estas funciones se obtiene el **diagrama de momentos flectores**, que se dibuja del lado de la fibra traccionada, por lo cual cuando la gráfica de momentos se encuentre debajo del eje de referencia se estarán representando momentos positivos. Los momentos flectores negativos se dibujarán por encima de la línea de referencia. Estos momentos se representan en una escala de momentos adecuada.

En particular se observa que en los apoyos el esfuerzo de corte alcanza los valores de las respectivas reacciones y son los valores extremos del mismo. En cambio, el momento flector en ellos es nulo. El momento flector alcanza su máximo valor:

$$M_D = M_{\max} = R_A \cdot a = \frac{P_{ab}}{l}$$

VIGA CON VARIAS CARGAS CONCENTRADAS

a. Reacciones de apoyo

$$\begin{aligned}\sum M_A &= R_A \cdot 7m - 2t \cdot 5m - 3t \cdot 3m = 0 \\ R_A &= 2,71t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= -R_B \cdot 7m + 2t \cdot 2m + 3t \cdot 4m = 0 \\ R_B &= 2,29t\end{aligned}$$

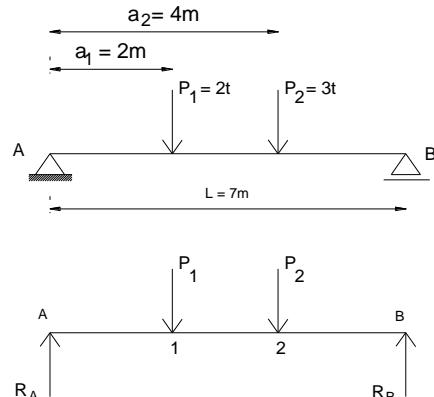


Figura 6

b. Esfuerzos de corte

$$Q_A = R_A = 2,71t$$

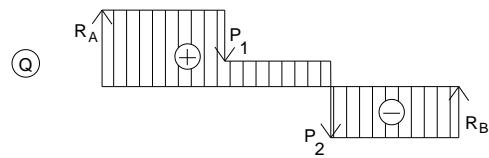
$$Q_1^{izq} = Q_A = 2,71t$$

$$Q_1^{der} = Q_A - P_1 = 0,71t$$

$$Q_2^{izq} = Q_1 = 0,71t$$

$$Q_2^{der} = Q_1 - P_2 = -2,29t = -R_B$$

$$Q_B = Q_2 = -R_B = -2,29t$$



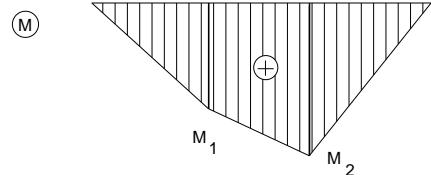
c. Momento flector

$$M_A = 0$$

$$M_1 = R_A \cdot 2m = 5,42tm$$

$$M_2 = R_A \cdot 4m - P_1 \cdot 2m = 6,48tm$$

$$M_B = 0$$



VIGA EMPOTRADA

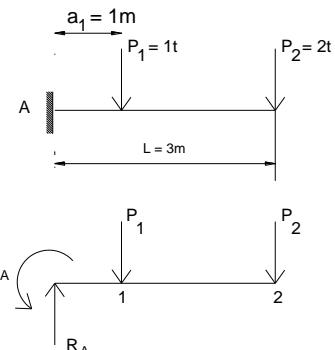
a. Reacciones de apoyo

$$\sum M_A = -M_A + P_1 \cdot 1m + P_2 \cdot 3m = 0$$

$$M_A = 7tm$$

$$\sum F_y = R_A - P_1 - P_2 = 0$$

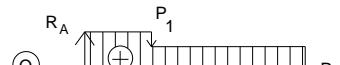
$$R_A = 3t$$



b. Esfuerzos de corte

$$Q_A = R_A = 3t$$

$$Q_1^{der} = Q_A - P_1 = 2t$$



c. Momento flector

$$M_A = -7tm$$

$$M_1 = M_A + R_A \cdot 1m = -4tm$$

$$M_2 = 0$$



Figura 7

4. RELACIONES ENTRE CARGA, ESFUERZO DE CORTE Y MOMENTO FLECTOR

Consideremos una viga, y un tramo "dx" de ella, sometida a flexión bajo los efectos de una carga repartida, definida en cada punto por la intensidad de carga "p".

Generalmente las solicitudes Q y M varían de sección a sección. Las magnitudes p , Q y M son funciones de la abscisa "x" de la sección. Estas tres funciones están ligadas por relaciones fundamentales que deduciremos a continuación.

Supongamos conocidos los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores y sean Q y M los esfuerzos internos en una sección " S " de abscisa "x"; $Q + dQ$ y $M + dM$ las solicitudes en la sección " S_1 " a una distancia "dx" de " S "; siendo $p \cdot dx$ la carga que actúa en el tramo "dx" (figura 8.a.b.c.).

Separado este elemento y dibujando el diagrama de cuerpo libre, pondremos en evidencia los esfuerzos internos que actúan en las caras " S " y " S_1 " para restituir el equilibrio (figura 8.d).

Por lo tanto:

$$\sum F_y = 0; \quad Q - p \cdot dx - (Q + dQ) = 0$$

$$dQ = -p \cdot dx \quad \begin{cases} Q = -\int p \cdot dx + C_1 & (1) \\ p = -\frac{dQ}{dx} & (2) \end{cases}$$

Si tomamos momentos respecto a " S_1 ":

$$\sum M_{S_1} = 0; \quad M + Q \cdot dx - p \cdot dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

Simplificando y despreciando infinitésimos de segundo orden:

$$dM = Q \cdot dx \quad \begin{cases} M = \int Q \cdot dx + C_2 & (3) \\ Q = \frac{dM}{dx} & (4) \end{cases}$$

Derivando la (4) y sustituyendo por la (2):

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -p \quad (5)$$

Estas ecuaciones nos dicen que la derivada del esfuerzo cortante es igual a la carga unitaria y la derivada del momento flector es igual al esfuerzo cortante.

Inversamente el esfuerzo de corte es la integral de la intensidad de carga y el momento flector la integral del esfuerzo cortante. Por lo tanto las expresiones anteriores nos permiten, conocida la función que define uno de los diagramas, conocer por integración o derivación, según el caso, las correspondientes a cualquiera de las otras.

De las expresiones anteriores se obtienen las siguientes conclusiones:

- De las ecuaciones (1) y (3) se deduce que en los tramos descargados, $p=0$, Q es constante y M varia linealmente.
- En los tramos sometidos a cargas distribuidas Q y M varían con leyes continuas de primero y de segundo grado respectivamente, si $p=cte$. De segundo y de tercer grado si p varía linealmente.
- En casos muy particulares de carga Q puede ser nulo en una longitud finita de un tramo de viga y por la (3) resulta $M=cte$.
- De la (4) se concluye que en las secciones en la que el esfuerzo cortante se anula, el momento flector se hace máximo; y no mínimo porque por la ecuación (5) la derivada segunda de M es negativa.
- Si en un punto de abscisa "x" trazamos una tangente al diagrama de momentos flectores formará un ángulo α con el eje de referencia; por la (4) se tiene que:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha)$$

Es decir que la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica en un punto del diagrama de momentos con el eje de referencia, es igual al esfuerzo de corte en ese punto. En particular para los extremos de la viga, los ángulos que forman las tangentes extremas al diagrama de momentos quedan dadas por los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha_A) &= Q_A = R_A \\ \operatorname{tg}(\alpha_B) &= Q_B = -R_B\end{aligned}$$

donde el signo positivo corresponde a un ángulo horario.

- Cabe un razonamiento análogo para el diagrama de esfuerzo de corte. Por la (2) se tiene:

$$-p = \frac{dQ}{dx} = \operatorname{tg}(\beta)$$

En particular para los apoyos:

$$\begin{aligned}-p_A &= \operatorname{tg}(\beta_A) \\ -p_B &= \operatorname{tg}(\beta_B)\end{aligned}$$

Como p_A y p_B están dirigidos hacia abajo, negativos, los ángulos β_A y β_B resultan positivos, es decir, horarios.

5. CARGAS DISTRIBUIDAS

Las cargas que actúan sobre las estructuras frecuentemente están distribuidas sobre volúmenes, superficies o líneas. Son fuerzas distribuidas sobre volúmenes las fuerzas de masa como el peso de los cuerpos, las fuerzas de inercia y las fuerzas magnéticas.

Son fuerzas distribuidas sobre superficies el peso de los cuerpos apoyados sobre áreas de contacto, o el empuje debido a la presión de los fluidos, vientos, agua o de tierras y materiales a granel.

Tenemos fuerzas distribuidas sobre líneas en el caso de cables sometidos a su propio peso o a la acción del viento.

Es frecuente la existencia de fuerzas distribuidas simétricamente respecto a la línea media de la franja de superficie sobre la que actúan.

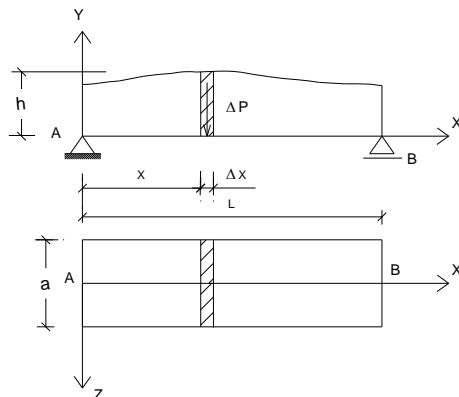


Figura 9

Vamos a caracterizar este tipo de fuerzas y determinar su resultante.

Sea un cuerpo, arena por ejemplo, apoyado sobre una franja de superficie de área $a \cdot l$, y repartida simétricamente respecto al plano vertical pasante por la línea media AB de la superficie, materializando el eje de la viga.

El peso de la arena que incide sobre un área elemental de ancho a y largo Δx será:

$$\Delta P = \gamma \cdot a \cdot h \cdot \Delta x \quad [kg]$$

Este peso se distribuye en todo el ancho a pero, dada la simetría supuesta, la resultante, o sea ΔP , tendrá su recta de acción sobre la línea media AB de la franja.

Esta conclusión es válida no solo para el peso incidente sobre el área elemental $a \cdot \Delta x$, sino también para toda la superficie cargada $a \cdot l$, lo que permite sustituir el peso del material distribuido sobre toda la franja, por un sistema de fuerzas paralelas ΔP actuantes a lo largo de la línea media AB , que llamaremos en forma general "línea cargada".

Si establecemos el cociente:

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = p_m \quad \left[\frac{kg}{m} \right]$$

tenemos expresada la intensidad media de la fuerza o carga distribuida en la longitud Δx de la línea cargada AB .

Si hacemos Δx infinitamente pequeño:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dp}{dx} = p \quad \left[\frac{kg}{m} \right]$$

tenemos expresada la intensidad de la carga distribuida en el punto de abscisa x de la línea cargada cuando se conoce la ley de variación de la carga en función de la posición, mediante su derivada respecto de x .

Si conocemos la intensidad de carga p , la fuerza infinitesimal que actúa sobre una longitud dx de la línea cargada será:

$$dP = p \cdot dx$$

Y la carga total que actúa sobre la línea AB de longitud l será:

$$P = \int_0^l p \cdot dx$$

En muchas aplicaciones de la ingeniería es suficiente tomar como intensidad de carga en un punto, la intensidad media correspondiente a una longitud unitaria $\Delta x = 1m$, o sea:

$$p \equiv \frac{\Delta P}{1m}$$

y se define entonces como intensidad de carga a la carga por unidad de longitud.

Si en lugar de establecer el cociente entre ΔP y la longitud Δx de la línea cargada, lo hubiéramos establecido entre ΔP y el área $a \cdot \Delta x$ de la superficie cargada, tendríamos:

$$\frac{\Delta P}{a \cdot \Delta x} = q \quad \left[\frac{kg}{m^2} \right]$$

que expresa la intensidad media de la carga en el área $a \cdot \Delta x$. Si tomamos $a \cdot \Delta x = 1m^2$ se tendrá la carga por unidad de superficie que puede tomarse como intensidad de carga superficial.

Si multiplicamos la expresión anterior por a se tiene:

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = a \cdot q = p$$

que expresa la relación entre las intensidades de carga por unidad de longitud y de superficie en el supuesto de la simetría planteada, o sea de $h = cte$ en el sentido de las z .

Si adopta una escala $\frac{\alpha \left[\frac{kg}{m} \right]}{1[cm]}$, llevamos en coincidencia de cada punto una ordenada que representa en dicha escala la correspondiente intensidad de carga, los extremos de las mismas configurarán una línea denominada línea de carga. La superficie comprendida entre la línea de carga, la línea cargada y las ordenadas extremas, se denomina diagrama de carga.

5.1. RESULTANTE DE UNA FUERZA DISTRIBUIDA

Sea una fuerza distribuida sobre la línea AB representada por su diagrama de carga.

Una fuerza distribuida sobre una línea recta constituye un sistema de infinitas fuerzas paralelas de intensidad: $dP = p \cdot dx$

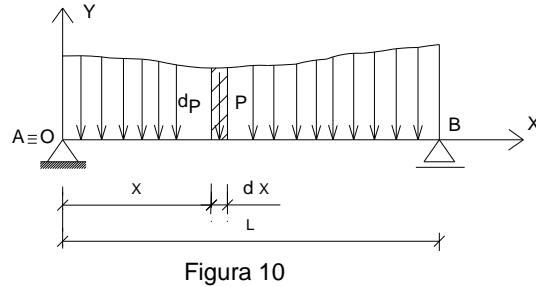


Figura 10

Se sabe que todo sistema de fuerzas paralelas puede reducirse a una única fuerza de igual dirección, la resultante del sistema, cuya intensidad vale:

$$P = \int_0^l dP = \int_0^l p \cdot dx$$

Pero vemos en la figura 10 que $dP = p \cdot dx = dA$, es decir que la intensidad de la fuerza que actúa sobre la longitud dx está dada por el área del rectángulo infinitésimo rayado en la figura.

La resultante de la carga distribuida en toda la longitud l de la línea cargada será:

$$P = \int_0^l dP = \int_0^l p \cdot dx = \int_0^l dA = A$$

La intensidad de la resultante de una carga distribuida sobre una línea recta está determinada por el área del diagrama de carga.

El punto K en que la resultante corta a la línea cargada se denomina centro de presión. Para determinar su posición respecto de A aplicamos Varignon respecto a este punto:

$$x_K \cdot P = \int_0^l x \cdot dP \quad \therefore \quad x_K = \frac{\int_0^l x \cdot dP}{P}$$

Sustituyendo dP y P por sus iguales del diagrama de carga, dA y A , tenemos:

$$x_K = \frac{\int_0^l x \cdot dP}{P} = \frac{\int_0^l x \cdot dA}{A} \quad \text{posición del baricentro del área del diagrama de carga}$$

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORME

- a. Reacciones de apoyo

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = \frac{p \cdot l}{2}$$

- b. Esfuerzos de corte

Aplicando la definición en la sección x , vale:

$$Q_x = R_A - p \cdot x = \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x$$

c. Momento flector

$$M_x = R_A \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cdot l \cdot x}{2} - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

Se ha visto que en la sección para la cual el esfuerzo de corte se anula, el momento flector se hace máximo.

$$\begin{aligned} Q_{x_0} &= \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x_0 \quad \therefore \quad x_0 = \frac{l}{2} \\ M_{x_0} &= M_{\max} = p \frac{l}{2} \frac{l}{2} - \frac{p}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = p \cdot \frac{l^2}{8} \end{aligned}$$

Para trazar el diagrama determinamos las tangentes extremas:

$$\begin{aligned} B_0 \cdot B_1 &= l \cdot \tan(\alpha_A) = l \cdot Q_A = l \cdot R_A = p \frac{l^2}{2} \\ A_0 \cdot A_1 &= l \cdot \tan(\alpha_B) = l \cdot Q_B = -l \cdot R_B = p \frac{l^2}{2} \end{aligned}$$

Para el esfuerzo de corte:

$$\begin{aligned} B'_0 \cdot B'_1 &= l \cdot \tan(\beta_A) = l \cdot p_A = l \cdot p \\ A'_0 \cdot A'_1 &= l \cdot \tan(\beta_B) = l \cdot p_B = l \cdot p \end{aligned}$$

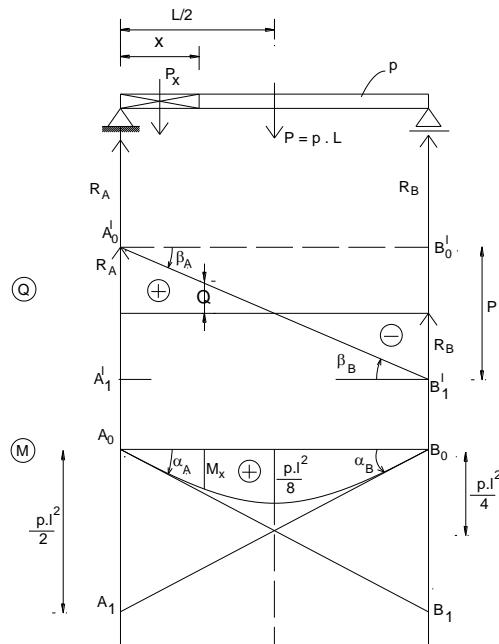


Figura 11

TEMA 4: ESFUERZOS INTERNOS EN RETICULADOS PLANOS

TEMA 4.A RETICULADOS SIMPLES

1. DEFINICIÓN

La armadura o reticulado es uno de los principales tipos de estructuras empleadas en ingeniería. Proporcionan una solución práctica y económica a muchas situaciones en ingeniería, especialmente en el diseño de puentes y edificios.

Una armadura está constituida por varias barras (de acero, madera, hormigón) unidas por sus extremos en puntos llamados nudos, de manera tal que el conjunto así formado sea rígido. Se diseña para que soporte las cargas que actúan en su plano y, en consecuencia, puede considerarse como una estructura bidimensional.

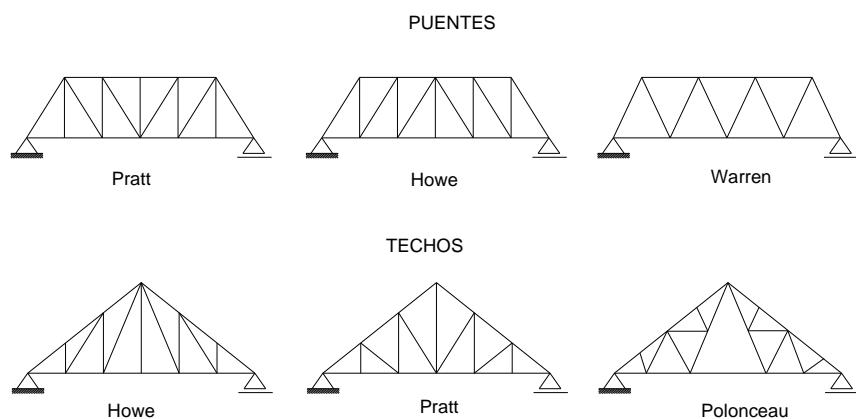
Los elementos de una armadura son delgados y sólo pueden soportar cargas transversales pequeñas; por tanto, todas las cargas deben aplicarse en las uniones y no en los mismos elementos o barras.

Cuando se aplica una carga concentrada entre dos nudos o cuando la armadura soporta una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proveerse un sistema de piso que transmita la carga a los nudos mediante el uso de viguetas y largueros. Se supone que el peso propio de las barras de la armadura está aplicado en los nudos.

Aunque en realidad las barras están unidas por medio de bulones o soldaduras, se considera la unión como si estuviera materializada por un pasador (articulación). En consecuencia, las fuerzas que actúan en cada extremo de la barra se reducen a una fuerza única y axial y no a un par. De este modo las barras están solicitadas solamente a esfuerzos de tracción o se compresión.

2. TIPOS

Los reticulados planos se utilizan en techos y puentes.



Las barras se designan: barras de contornos o exteriores, barras de alma o interiores. Las barras de contorno forman el CORDÓN superior o inferior de la armadura.

Las primeras trabajan frecuentemente a compresión y las segundas a tracción. Las barras de alma se designan MONTANTES si son verticales y DIAGONALES cuando están inclinadas.

3. GENERACIÓN DE RETICULADOS

En base al proceso de generación de un reticulado se distinguen tres tipos: Reticulados Simples, Reticulados Compuestos y Reticulados Complejos.

3.1. RETICULADOS SIMPLES – CONDICIÓN DE RIGIDEZ

Supongamos tres barras articuladas entre sí de modo que constituyen una cadena cinemática abierta, por lo tanto tiene cinco grados de libertad. Si articulamos entre sí las dos barras extremas obtenemos una cadena cinemática cerrada que tiene tres grados de libertad. Es decir que tres barras rígidas articuladas entre sí por sus extremos se comportan como una chapa rígida.

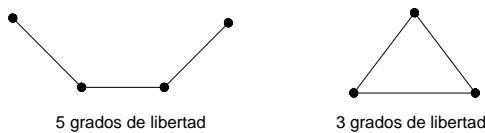


Figura 2

Si a dos cualesquiera de los vértices del triángulo así obtenido les articulamos dos nuevas barras, el resultado será una nueva cadena cinemática de tres chapas con cinco grados de libertad. Articulando entre sí los extremos de las dos barras agregadas al triángulo primitivo volvemos a tener una cadena cinemática cerrada con tres grados de libertad, comportándose como una chapa rígida.

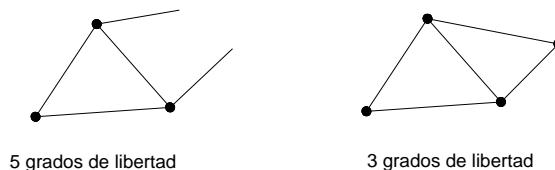


Figura 3

Articulando pares de barras a vértices consecutivos o no consecutivos del reticulado que se va formando, y articulándolas entre sí, se obtiene un RETICULADO SIMPLE. Si se articulan a vértices consecutivos, el reticulado estará sólo formado por triángulos y se le designa TRIANGULADO SIMPLE.

Si llamamos " n " al número de pares de barras que se agregan al triángulo primitivo, el número total de barras será:

$$b = 3 + 2 \cdot n$$

Como cada par de barras dá origen a un vértice, el número total de éstos será:

$$v = 3 + n$$

Despejando y reemplazando en la anterior:

$$\begin{aligned} b &= 3 + 2 \cdot (v - 3) \\ b &= 2 \cdot v - 3 \end{aligned}$$

Condición de rigidez de un reticulado. Para que sea estrictamente indeformable el número total de barras del mismo debe ser igual al doble de vértices o nudos, menos tres.

3.2. RETICULADOS COMPUESTOS

Son los que se obtienen de unir dos reticulados simples mediante tres vínculos eficientes. Puede ser: una articulación y una barra que no pase por ella (Polonceau); o tres barras que no concurren a un punto.

La condición de rigidez es la misma que para el reticulado simple:

$$b = 2 \cdot v - 3$$

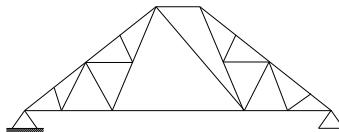


Figura 4

3.3. RETICULADOS COMPLEJOS

Consideremos una cadena cinemática cerrada formada por seis barras; sabemos que tendrá tantos grados de libertad de movimiento como barras o vértices tiene:

$$g = v \quad g: \text{grados de libertad}$$

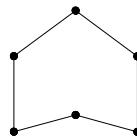


Figura 5-a

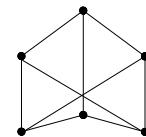


Figura 5-b

Para transformarlo en un reticulado rígido debemos dejarle sólo tres grados de libertad; o sea que debemos agregar, vinculando sus vértices, tantas barras como grados de libertad posea la cadena, menos tres. En nuestro caso agregamos tres barras (figura 5.b), comportándose como una chapa rígida.

Este reticulado se denomina COMPLEJO y tiene la misma condición de rigidez de los anteriores:

$$b = 2 \cdot v - 3$$

4. CONDICIONES DE ISOSTATICIDAD

Para fijar la armadura en su plano es necesario colocar tres vínculos eficientes.

En la armadura de la figura 6.a dibujamos el diagrama de cuerpo libre (figura 6.b), separando cada uno de los nudos del resto de la estructura y eliminando los vínculos. De este modo pondremos en evidencia los esfuerzos en las barras y las reacciones de apoyo.

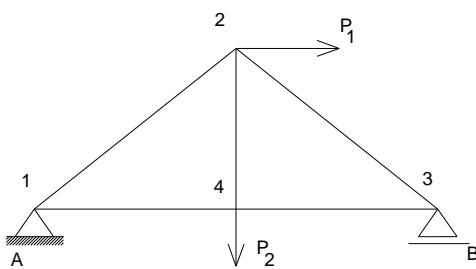


Figura 6-a

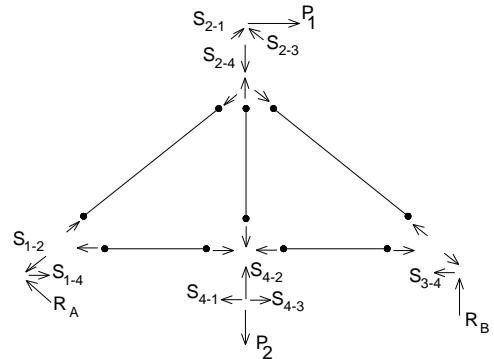


Figura 6-b

Como toda la armadura está en equilibrio, cada nudo debe estar en equilibrio. En cada nudo estamos en presencia de un sistema plano de fuerzas concurrentes (fuerzas exteriores activas y reactivas y esfuerzos en la dirección de las barras) cuya condición de equilibrio es:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0\end{aligned}$$

Como tenemos " v " nudos se obtendrán: $E = 2 \cdot v$ ecuaciones estáticas de equilibrio. Por otra parte las incógnitas del problema son los esfuerzos en cada una de las barras y las tres componentes de las reacciones externas, por lo tanto serán:

$$\begin{aligned}I &= b + 3 = 2 \cdot v - 3 + 3 \\ I &= 2 \cdot v\end{aligned}$$

Es decir que tenemos tantas incógnitas como ecuaciones brinda la estática. Se trata de un sistema isostático.

Observamos en la figura 6.b. que cuando se considera el esfuerzo "S" en una barra, deben distinguirse las dos fuerzas que transmiten los nudos a las barras y las iguales y contrarias que aquellas transmiten a los nudos. Evidentemente en el estudio del equilibrio del nudo interesan las fuerzas que cada barra transmite al nudo.

TEMA 4.B DETERMINACION DE ESFUERZOS INTERNOS

1. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE ESFUERZOS EN LAS BARRAS

1.1. MÉTODO DE LOS NUDOS

Para estudiar un reticulado se determinan en primer lugar las reacciones externas. Se calculan después los esfuerzos en las barras, comenzando por un nudo en el que concurren sólo dos barras, porque si existiesen tres fuerzas desconocidas el problema sería indeterminado.

Esto puede efectuarse analíticamente utilizando las dos ecuaciones, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$, que corresponden al nudo, y despejando de ellas el esfuerzo en las dos barras.

Suele ser cómodo considerar las fuerzas de las barras alejándose del nudo, o sea de tracción; si el resultado es positivo el sentido supuesto es correcto, y si es negativo significa que la barra trabaja a compresión. Se pasa luego a otro nudo que posea sólo dos esfuerzos desconocidos, utilizando los resultados del nudo anterior como datos y con el sentido que corresponda al nuevo nudo que estoy considerando. Se prosigue el cálculo completando la totalidad de los nudos.

Evidentemente, para resolver los diversos nudos pueden utilizarse ecuaciones de momento respecto a puntos seleccionados adecuadamente con la finalidad de que el momento de alguna de las dos incógnitas respecto de él, se anule. Estas ecuaciones sustituyen a $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

EJEMPLO

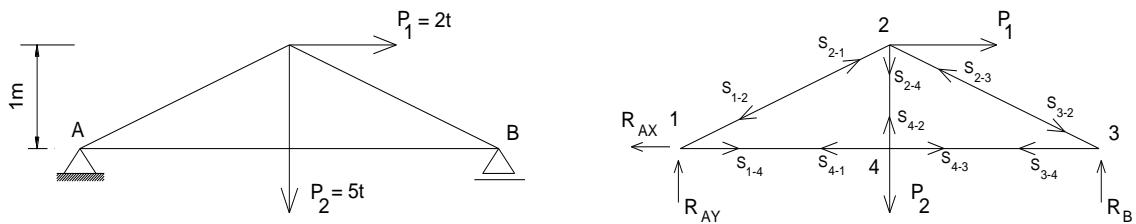


Figura 7

a. Reacciones externas

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \quad ; \quad P_1 \cdot 1,0m + P_2 \cdot 2,5m - R_B \cdot 5,0m = 0 \\ R_B &= \frac{2t \cdot 1,0m + 5t \cdot 2,5m}{5,0m} = 2,9t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \quad ; \quad -R_{Ax} + P_1 = 0 \\ R_{Ax} &= 2,0t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \quad ; \quad R_{Ay} - P_2 + R_B = 0 \\ R_{Ay} &= 5,0 - 2,9 = 2,1t\end{aligned}$$

b. Esfuerzos en las barras

Nudo 1

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \quad ; \quad -R_{Ax} + S_{1-2} \cdot \cos(21^\circ, 8) + S_{1-4} = 0 \\ \sum F_y &= 0 \quad ; \quad R_{Ay} + S_{1-2} \cdot \sin(21^\circ, 8) = 0\end{aligned}$$

De la segunda ecuación despejamos S_{1-2} :

$$S_{1-2} = \frac{-R_{Ay}}{\sin(21^\circ, 8)} = \frac{-2,1t}{0,371} = -5,65t \text{ (Compresión)}$$

Despejando de la primera S_{1-4} y colocando el sentido correcto de S_{1-2} :

$$S_{1-4} = R_{Ax} + S_{1-2} \cdot \cos(21^\circ, 8) = 2,0t + 5,65t \cdot 0,928 = 7,25t \text{ (Tracción)}$$

Nudo 2

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \quad ; \quad P_1 + S_{2-1} \cdot \cos(21^\circ, 8) + S_{2-3} \cdot \cos(21^\circ, 8) = 0 \\ \sum F_y &= 0 \quad ; \quad S_{2-1} \cdot \sin(21^\circ, 8) - S_{2-3} \cdot \sin(21^\circ, 8) - S_{2-4} = 0\end{aligned}$$

En la primera ecuación:

$$S_{2-3} = \frac{-S_{2-1} \cdot \cos(21^\circ, 8) - P_1}{\cos(21^\circ, 8)} = \frac{-5,65t \cdot 0,928 - 2,0t}{0,928} = -7,81t \text{ (Compresión)}$$

Reemplazando en la segundo ecuación con el sentido correcto de S_{2-3} :

$$S_{2-4} = S_{2-1} \cdot \sin(21^\circ, 8) + S_{2-3} \cdot \sin(21^\circ, 8) = 5,65t \cdot 0,371 + 7,81t \cdot 0,371 = 5,0t \text{ (Tracción)}$$

Nudo 4

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -S_{4-1} + S_{4-3} = 0 \quad \therefore \quad S_{4-3} = 7,25t \text{ (Tracción)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad S_{4-2} - P_2 = 0 \quad \therefore \quad S_{4-2} = 5,0t \text{ (Tracción)}$$

Nudo 3

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad ; \quad & -S_{3-4} + S_{3-2} \cdot \cos(21^\circ,8) = 0 \quad (\text{Verifica}) \\ & -7,25t + 7,81t \cdot 0,928 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad ; \quad & -S_{3-2} \cdot \sin(21^\circ,8) + R_B = 0 \quad (\text{Verifica}) \\ & -7,81t \cdot 0,371 + 2,9t = 0 \end{aligned}$$

1.2. MÉTODO DE LAS SECCIONES

Pueden determinarse los esfuerzos en las barras poniéndolos en evidencia al practicar un corte en la estructura que no interese a más de tres barras. Conocidas todas las fuerzas exteriores activas y reactivas, se corta la estructura según una sección que la divide en dos partes (figura 9.a).

Una cualquiera de las dos partes, la izquierda por ejemplo, está en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas exteriores y de los esfuerzos que la parte de la derecha le transmite a lo largo de las barras cortadas (figura 9.b).

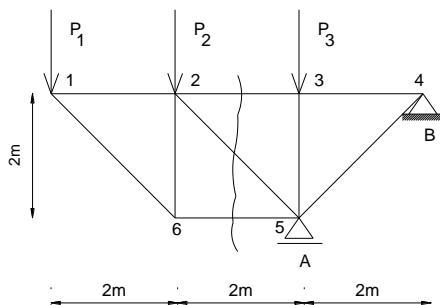


Figura 9-a

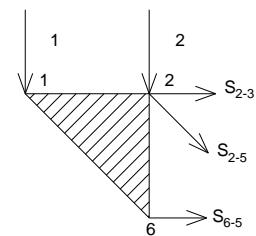


Figura 9-b

Por consiguiente, los esfuerzos en estas barras deben equilibrar a las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección.

Es un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes, por lo tanto su condición de equilibrio viene dada por tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por esta razón no puede haber más de tres incógnitas, es decir, la sección de corte no puede interesar a más de tres barras.

1.2.1. MÉTODO DE RITTER

Para facilitar el cálculo, planteamos ecuaciones de momentos con una sola incógnita, eligiendo para ello como centro de momentos puntos donde concurren dos barras.

Se asigna a los esfuerzos en las barras el sentido de tracción, de forma tal que si el resultado numérico es positivo, la barra trabaja a tracción, y a compresión si es negativo.

EJEMPLO

Resolver el reticulado de la figura 9.a, siendo:

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1,0t$$

a. Reacciones externas

$$\sum M_B = 0 \quad ; \quad -P_1 \cdot 6,0m - P_2 \cdot 4,0m - P_3 \cdot 2,0m + R_A \cdot 2,0m = 0$$

$$R_A = \frac{1t \cdot 6,0m + 1t \cdot 4,0m + 1t \cdot 2,0m}{2,0m} = 6,0t$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad -P_1 - P_2 - P_3 + R_B = 0$$

$$R_B = -1t - 1t - 1t + 6t = 3,0t$$

b. Esfuerzos en las barras de la sección de corte

$$\sum M_5 = 0 \quad ; \quad -P_1 \cdot 4,0m - P_2 \cdot 2,0m + S_{2-3} \cdot 2,0m = 0$$

$$S_{2-3} = \frac{1t \cdot 4,0m + 1t \cdot 2,0m}{2,0m} = 3,0t \quad (\text{Tracción})$$

$$\sum M_2 = 0 \quad ; \quad -P_1 \cdot 2,0m - S_{6-5} \cdot 2,0m = 0$$

$$S_{6-5} = \frac{-1t \cdot 2,0m}{2,0m} = -1,0t \quad (\text{Compresión})$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad -P_1 - P_2 - S_{2-5} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$S_{2-5} = \frac{-1t - 1t}{0,707} = -2,83t \quad (\text{Compresión})$$

UNIDAD 5: CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES

TEMA: 5.A BARICENTROS DE ÁREAS

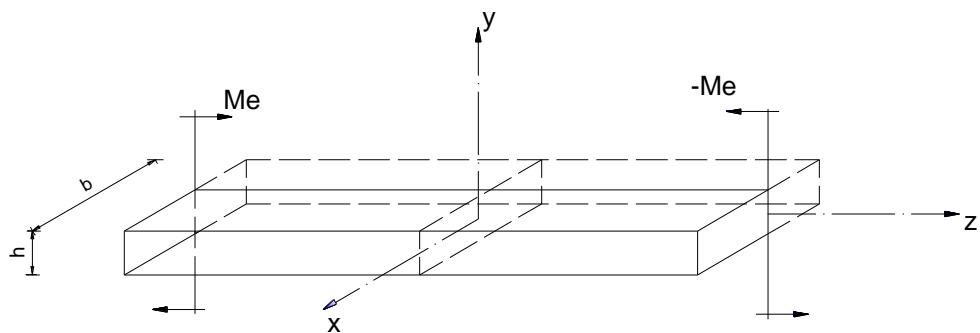
TEMA: 5.B MOMENTOS DE INERCIA

1. MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA

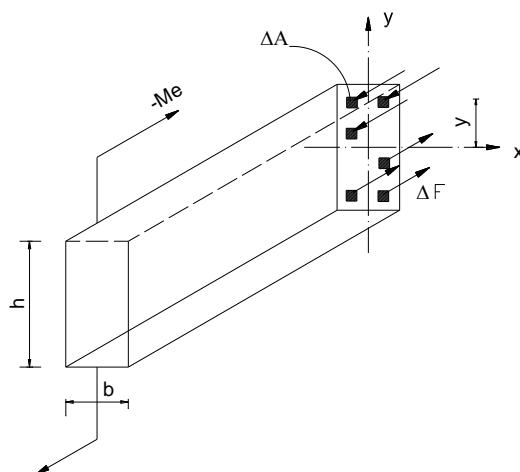
Considerando una pieza prismática, de eje recto y sección transversal cualquiera, sometido a la acción de dos pares iguales y opuestos, actuantes en un plano que también contiene al eje de la pieza.

Bajo dicha solicitación, diremos que la pieza está sometida a **FLEXIÓN PURA**.

Designaremos como eje de la pieza al lugar geométrico de los baricentros de la sección transversal.



Si se efectúa un corte en la pieza anterior mediante un plano normal al eje de la misma, y se representa gráficamente, la parte situada a la izquierda del corte, se tendrá:



Para mantener el presente tramo en equilibrio, se le aplica en la cara de corte las acciones que en cada elemento de área (ΔA) ejercía la parte derecha de la pieza.

Estas acciones designadas **FUERZAS INTERNAS**, constituyen un sistema de fuerzas paralelas, normales a la sección, distribuidas en toda su área y con sentido de penetración en la zona superior, y de alejamiento en la zona inferior.

Su intensidad resulta ser proporcional al área (ΔA) sobre la que actúa y a la distancia del elemento considerado a un cierto eje, llamado **EJE NEUTRO**, que en el caso que nos ocupa, pasa por el baricentro de la sección.

entonces:

$$\Delta F = k \cdot \Delta A \cdot y$$

Reduciendo el sistema de fuerzas paralelas:

$$R = \int_A dF = \int_A k \cdot y \cdot dA = k \cdot \int_A y \cdot dA = k \cdot S_x = 0$$

Recordemos que el momento estático (S_x) respecto del eje neutro es nulo.

Se observa que la resultante es proporcional al momento estático de la sección transversal de la pieza, respecto al eje neutro, que por ser baricéntrico, será nulo. Por lo tanto, la resultante de las fuerzas internas que actúan en la sección transversal de una pieza prismática solicitada a flexión pura es NULA.

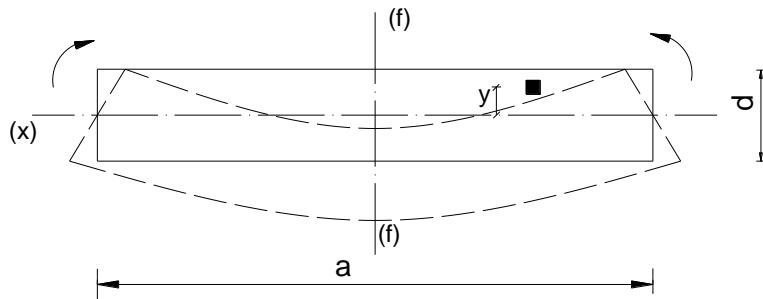
Si se toma momento de las fuerzas internas, respecto al eje neutro:

$$M_x = \int_A dF \cdot y = \int_A k \cdot y \cdot y \cdot dA = k \cdot \int_A y^2 \cdot dA$$

Lo anterior nos dice que: "*el momento de las fuerzas internas respecto al eje neutro es proporcional a una magnitud que caracteriza a la sección transversal, y que se designa MOMENTO DE INERCIA DEL ÁREA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL RESPECTO AL EJE X*". La designaremos como I_x :

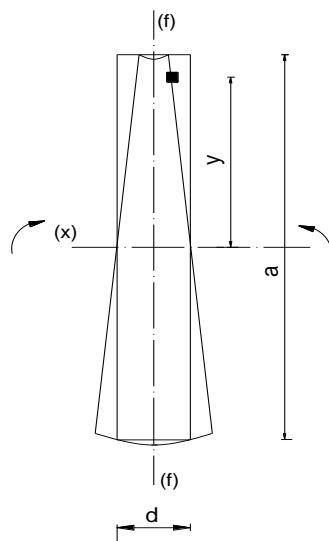
$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

Para poner en evidencia el sentido físico de esta magnitud, se supondrá que la pieza prismática anterior sea una regla de sección transversal rectangular, siendo $a >> d$.



Admitiendo primero que el plano que contiene los pares extremos (M_e) tienen por traza la recta (f-f) y es perpendicular al lado mayor del rectángulo: se observa que si aplicamos manualmente cuplas en los extremos de la regla, ésta se deforma considerablemente.

Si en cambio el plano que contiene a los pares es perpendicular al lado menor, la deformación que se produce es notablemente menor.



En ambos casos el área de la sección es la misma, lo que ha variado apreciablemente es el momento de inercia (I_x), ya que en el segundo caso es mucho mayor que en el primero, por estar los elementos de área localizados a mayor distancia del eje (x).

Por lo tanto, se define: “*Momento de Inercia respecto a una sección de un eje (x), una característica geométrica de la sección, determinada por la expresión matemática*”:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

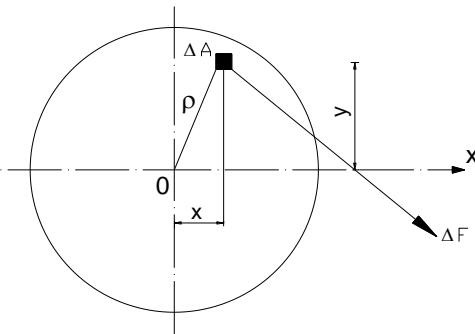
Físicamente, representa una magnitud proporcional a la rigidez, que una determinada configuración del área de la sección transversal de una pieza prismática, confiere a la misma cuando es solicitada a flexión, con (x) como eje neutro.

2. MOMENTO POLAR DE INERCIA

Admitiendo una pieza prismática rectilínea, representada en la figura que sigue, por su eje \overline{AB} , se la comete a dos pares iguales y opuestos contenidos en planos normales al eje de la pieza, se dice que la misma está solicitada a TORSIÓN PURA.



Cortando la pieza con un plano normal a su eje y admitiendo que su sección transversal sea circular.



Las fuerzas internas que se generan en ella, están contenidas en su plano formando un sistema de fuerzas distribuidas en toda el área de la sección, normales a la recta que une al elemento diferencial considerado, con el punto (0). La fuerza que actúa en un elemento (ΔA) de área, es proporcional a la distancia del elemento al baricentro (0) de la sección, y al área del elemento.

$$\Delta F = k \cdot \rho \cdot (\Delta A)$$

El momento del sistema de fuerzas internas, respecto a (0) vale:

$$\boxed{M_0^{(i)} = \int_A \rho \cdot dF = \int_A \rho^2 \cdot k \cdot dA = k \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA = k \cdot I_0}$$

$$M_0^{(i)} = k \cdot I_0$$

La ultima expresión nos dice que: el momento de las fuerzas internas respecto al baricentro de la sección es proporcional a una longitud, llamada **MOMENTO POLAR DE INERCIA**, respecto a (0), que se designa como I_0 .

En consecuencia y con un razonamiento análogo a lo expuesto para los momentos axiales de inercia se puede definir al **MOMENTO POLAR DE INERCIA DEL ÁREA (A)**, RESPECTO A UN PUNTO o POLO (0), como una característica geométrica de la sección de área (A), determinada por la expresión matemática:

$$\boxed{I_o = \int_A \rho^2 \cdot dA}$$

Físicamente representa una magnitud proporcional a la rigidez que una determinada configuración del área de la sección transversal de una pieza prismática, confiere a la misma, cuando es solicitada a **TORSIÓN**, respecto a su eje.

Además de la figura anterior:

$$I_o = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA$$

es decir:

$$\boxed{I_o = I_x + I_y}$$

3. RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

Si se considera una determinada área (A), la cual tiene un Momento de Inercia (I_x) con respecto al eje (x) (figura 1), e imaginemos que concentraremos dicha área en una pequeña franja paralela al eje (x) (figura 2).

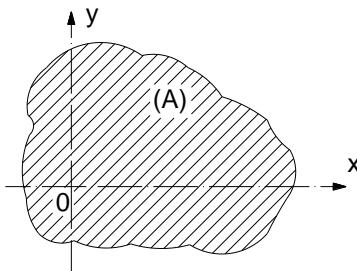


Fig. (1)

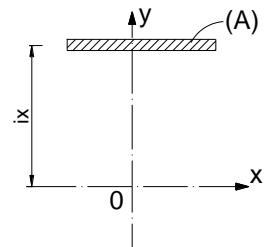


Fig. (2)

El área (A), así concentrada, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje (x), para ello la franja deberá colocarse a una distancia (i_x) del eje (x), determinada por la relación siguiente:

$$I_x = i_x^2 \cdot A$$

Despejando la distancia

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad \Rightarrow \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

La distancia (i_x) se la conoce como *RADIO DE GIRO* o *RADIO DE INERCIA DEL ÁREA RESPECTO AL EJE (x)*. Conocido el radio de giro de una sección, es posible calcular el momento de inercia. Análogamente se podría definir el radio de giro (i_y) e (i_o), escribiendo:

$$\begin{aligned} I_y &= i_y^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad \Rightarrow \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \\ I_o &= i_o^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad i_o^2 = \frac{I_o}{A} \quad \Rightarrow \quad i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} \end{aligned}$$

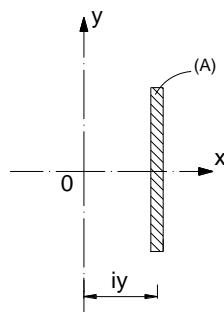


Fig. (3)

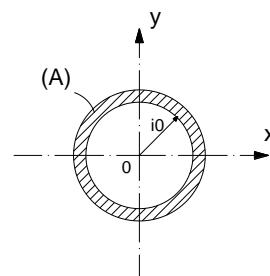


Fig. (4)

Recordando la expresión $I_o = I_x + I_y$ y colocando los momentos de inercia en función de los radios de giro, y del área de la sección:

$$i_o^2 \cdot A = i_x^2 \cdot A + i_y^2 \cdot A$$

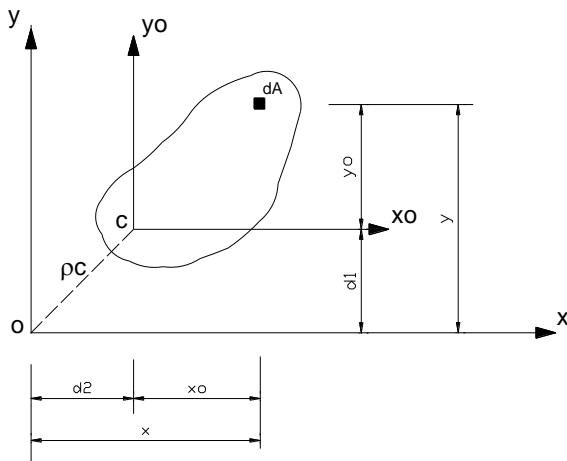
Es decir:

$$\boxed{i_o^2 = i_x^2 + i_y^2}$$

4. TEOREMA DE STEINNER O DE LOS EJES PARALELOS

Si se considera una sección de área (A) cualquiera, y sea (c) su baricentro. Con origen en (c) pasan dos ejes (x_0) e (y_0) ortogonales entre sí, y con origen en otro punto (O) pasan los ejes (x) e (y), paralelos a los anteriores y situados a una distancia (d_1) y (d_2) de los mismos, tal como se indica en la figura que sigue.

El objeto es establecer expresiones que permitan calcular los momentos de segundo orden, respecto al par de ejes (x) e (y), en función de los momentos de segundo orden, respecto a (x_0) e (y_0), y viceversa.



Por definición

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\text{Pero } y = y_0 + d_1 \quad \therefore \quad I_x = \int_A (y_0 + d_1)^2 \cdot dA$$

Desarrollando y operando:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y_0^2 \cdot dA + \int_A d_1^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot y_0 \cdot d_1 \cdot dA \\ &= \int_A y_0^2 \cdot dA + d_1^2 \cdot \int_A dA + 2 \cdot d_1 \cdot \int_A y_0 \cdot dA \end{aligned}$$

Pero en la expresión última se tiene:

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= \int_A y_0^2 \cdot dA \quad ; \quad \int_A dA = A \\ \int_A y_0 \cdot dA &= 0 = S_{x_0} \quad \text{Momento Estático Respecto al Eje Baricéntrico} \end{aligned}$$

En consecuencia la expresión queda:

$$I_x = I_{x_0} + d_1^2 \cdot A \quad (1)$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia respecto de un eje (x) cualquiera es igual a la suma del momento de inercia respecto a un eje (x_0) baricéntrico y paralelo al dado, más la suma del producto del área por el cuadrado de la distancia entre los ejes.

Análogamente se obtiene; respecto a otro eje:

$$I_y = I_{y_0} + d_2^2 \cdot A \quad (2)$$

El momento de inercia centrífugo se define como:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A dA \cdot x \cdot y = \int_A dA \cdot (x_0 + d_2) \cdot (y_0 + d_1) \\ &= \int_A x_0 \cdot y_0 \cdot dA + \underbrace{\int_A x_0 \cdot d_2 \cdot dA}_{=0} + \underbrace{\int_A d_2 \cdot y_0 \cdot dA}_{=0} + \int_A d_2 \cdot d_1 \cdot dA \\ &\quad \text{Momentos estáticos con respecto a ejes baricéntricos} \end{aligned}$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + d_1 \cdot d_2 \cdot A \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que ρ_c es la distancia de (c) a (0) el momento de inercia polar lo definimos como:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_x + I_y = I_{x_0} + d_1^2 \cdot A + I_{y_0} + d_2^2 \cdot A = I_{x_0} + I_{y_0} + (d_1^2 + d_2^2) \cdot A \\ I_0 &= I_c + \rho_c^2 \cdot A \quad (4) \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se puede despejar los momentos de segundo orden respecto a ejes baricéntricos en función de los momentos respecto a ejes paralelos.

Si se divide las expresiones (1), (2) y (4) por (A) se tendrá las siguientes relaciones entre los radios de giro:

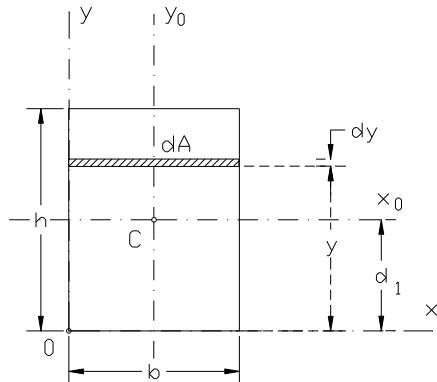
$$\frac{I_x}{A} = \frac{I_{x_0}}{A} + d_1^2 \cdot \frac{A}{A} \quad \Rightarrow \quad i_x^2 = i_{x_0}^2 + d_1^2$$

$$\frac{I_y}{A} = \frac{I_{y_0}}{A} + d_2^2 \cdot \frac{A}{A} \quad \Rightarrow \quad i_y^2 = i_{y_0}^2 + d_2^2$$

$$\frac{I_o}{A} = \frac{I_c}{A} + \rho_c^2 \cdot \frac{A}{A} \quad \Rightarrow \quad i_o^2 = i_c^2 + \rho_c^2$$

5. EJEMPLOS DE DETERMINACIÓN DE MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

5.1. RECTÁNGULO



Considerando un elemento de área (A) y espesor infinitésimo, el momento de inercia respecto al eje (x), será:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

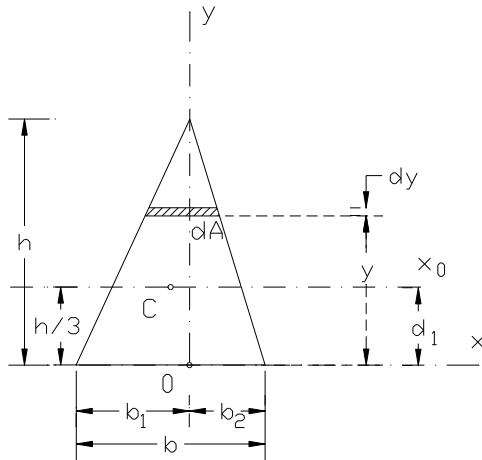
Aplicando el momento de inercia respecto a ejes paralelos:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_0} + d_1^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad I_{x_0} = I_x - d_1^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h \\ I_{x_0} &= \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12} \\ I_x &= \frac{b \cdot h^3}{12} \end{aligned}$$

Aplicando la definición de radio de giro:

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

5.2. TRIÁNGULO



por relación de triángulos:

$$\frac{by}{(h-y)} = \frac{b}{h} \quad \Rightarrow \quad by = \frac{b}{h} \cdot (h-y)$$

entonces:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h by \cdot dy \cdot y^2$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \frac{by}{h} \cdot (h-y) \cdot dy$$

$$I_x = by \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy - \frac{by}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{by \cdot h^3}{3} - \frac{by \cdot h^4}{h \cdot 4} = \frac{by \cdot h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{by \cdot h^3}{12}$$

$$I_{x_0} = I_x - d^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

radio de giro

$$i_{x_0}^2 = \frac{I_{x_0}}{A} = \frac{b \cdot h^3}{36} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{h^2}{18}$$

$$i_{x_0} = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

Con un procedimiento análogo es posible determinar el momento se segundo orden respecto al eje (y).

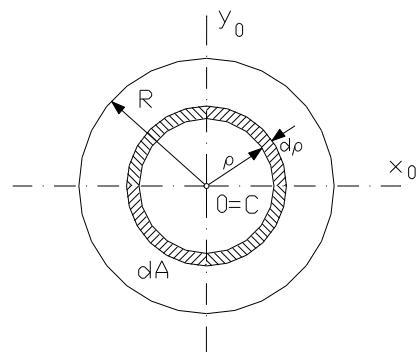
5.3. CÍRCULO

$$I_0 = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$I_0 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R \rho^3 \cdot d\rho = \pi \frac{R^4}{2}$$

$$I_0 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

$$I_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$



$$I_0 = I_{x_0} + I_{y_0} = 2 \cdot I_{x_0} = 2 \cdot I_{y_0}$$

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_0}{2} = \pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{D^4}{64}$$

$$I_{x_0} = \pi \frac{D^4}{64}$$

radio de giro

$$i_0^2 = \frac{I_0}{A} = \pi \frac{R^4}{2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R^2} = \frac{R^2}{2}$$

$$i_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

o en función de los diámetros

$$i_0^2 = \pi \frac{D^4}{32} \cdot \frac{1}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{D^2}{8}$$

$$i_0 = \frac{D}{\sqrt{8}}$$

entonces

$$i_{x_0}^2 = \frac{I_{x_0}}{A} = \frac{\frac{\pi \cdot R^4}{4}}{\pi \cdot R^2} = \frac{R^2}{4} \quad = \quad \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{D^2}{16}$$

$$i_{x_0} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}$$

6. ÁREAS COMPUESTAS

El momento de inercia de una figura compuesta, es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes integrantes:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + \dots$$

Lo anterior se deduce directamente de las propiedades de la integral definida:

$$\int_A y^2 \cdot dA = \int_{A_1} y^2 \cdot dA + \int_{A_2} y^2 \cdot dA + \int_{A_3} y^2 \cdot dA + \dots$$

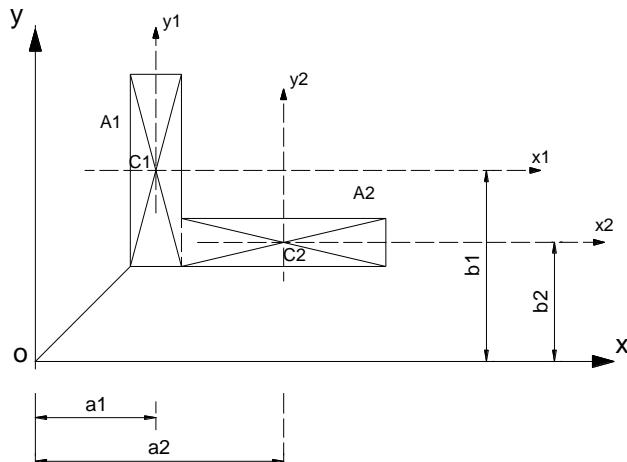
donde $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$

En consecuencia para obtener el momento de inercia de una figura compuesta, es necesario descomponerla en una serie de figuras simples, calcular sus momentos de inercia y luego sumarlos.

Este teorema resulta válido para el cálculo de productos de inercia.

Por ejemplo:

Sea una sección en forma de L que descomponemos en dos rectángulos (1) y (2) de baricentros (c_1) y (c_2). Sean además (A_1) y (A_2) sus respectivas áreas.



Con la definición anterior se tendrá:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)}$$

$$\text{donde } I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1 \quad ; \quad I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + b_2^2 \cdot A_2$$

entonces:

$$I_x = (I_{x_1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1) + (I_{x_2}^{(2)} + b_2^2 \cdot A_2)$$

Con un procedimiento análogo es posible calcular los valores de I_y e I_{xy} .

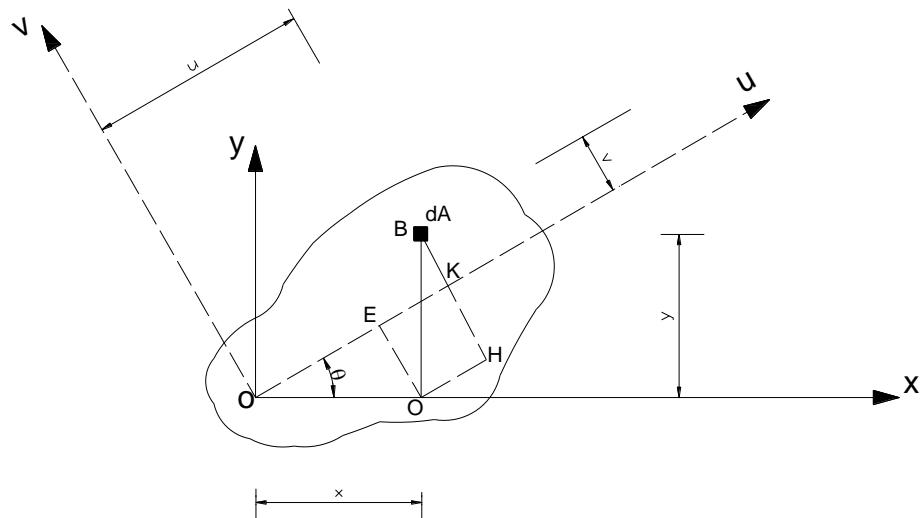
Nota: el radio de giro de un área compuesta NO es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes.

Los momentos de segundo orden y radios de giro de perfiles laminados (doble T, U, Z, etc.) figuran en tablas de perfiles de los fabricantes o manuales especializados.

TEMA: 5.C MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

7. MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN RESPECTO A EJES DEL MISMO ORIGEN

Se propone encontrar la relación entre los momentos de segundo orden respecto a los ejes (x) e (y), por una parte, y los momentos de segundo orden respecto a los ejes (u) y (v), del mismo origen y ortogonales entre sí. El par de ejes (u) y (v) pueden rotar alrededor de (0), y su posición se determina por el ángulo (θ) que forma (u) con (x). Se tomará el sentido antihorario como positivo para medir los ángulos.



En el entorno del punto (B), se considera un elemento de área (dA). La relación entre sus coordenadas respecto a uno u otro par de ejes.

$$\begin{aligned} u &= \overline{OK} = \overline{OE} + \overline{EK} & v &= \overline{BK} = \overline{BH} + \overline{HK} \\ u &= x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) & v &= y \cdot \cos(\theta) - x \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

Los momentos de segundo orden respecto a los ejes (u) y (v) son:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 \cdot dA = \int_A [y \cdot \cos(\theta) - x \cdot \sin(\theta)]^2 \cdot dA \\ I_u &= \cos^2(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA + \sin^2(\theta) \cdot \int_A x^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA \end{aligned}$$

pero $\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$

$I_u = I_x \cdot \cos^2(\theta) + I_y \cdot \sin^2(\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\theta)$

(1)

análogamente se obtiene:

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA$$

$$I_u = \cos^2(\theta) \cdot \int_A x^2 \cdot dA + \sin^2(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA + 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$\boxed{I_v = I_x \cdot \sin^2(\theta) + I_y \cdot \cos^2(\theta) + I_{xy} \cdot \sin(2\theta)} \quad (2)$$

para el momento de inercia centrífugo se tendrá:

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int_A u \cdot v \cdot dA = \left[\int_A x \cdot \cos(\theta) \cdot dA + \int_A y \cdot \sin(\theta) \cdot dA \right] \cdot \left[\int_A y \cdot \cos(\theta) \cdot dA - \int_A x \cdot \sin(\theta) \cdot dA \right] \\ I_{uv} &= \cos^2(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA - \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A x^2 \cdot dA + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA - \sin^2(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA \\ I_{uv} &= \cos^2(\theta) \cdot I_{xy} - \sin^2(\theta) \cdot I_{xy} - \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_y + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_x \end{aligned}$$

agrupando convenientemente y sacando factor común:

$$I_{uv} = I_{xy} \cdot \underbrace{[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]}_{\cos(2\theta)} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \cdot I_y + \frac{\sin(2\theta)}{2} \cdot I_x$$

Recordando:

$$\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

$$\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\boxed{I_{uv} = I_{xy} \cdot \cos(2\theta) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2\theta)} \quad (3)$$

Si ahora se suma miembro a miembro las expresiones (1) y (2):

$$\begin{aligned} I_u + I_v &= I_x \cdot [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + I_y \cdot [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] = I_x + I_y \\ I_u + I_v &= I_x + I_y = cte = I_0 \end{aligned}$$

“Esto demostraría que la suma de los momentos de inercia respecto a ejes perpendiculares arbitrarios, no se altera al girar dichos ejes, es decir, al variar (θ).”

Por ejemplo, si en la expresión (1), se hace ($\theta = 45^\circ$), se tiene:

$$I_{(45^\circ)} = I_x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 + I_y \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 - I_{xy} = \frac{I_x + I_y}{2} - I_{xy}$$

$$I_{xy} = -I_{(45^\circ)} + \frac{I_x + I_y}{2}$$

Expresión que nos permite calcular el momento centrífugo respecto a dos ejes ortogonales, en función de tres momentos de inercia.

8. EJES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

Rotando los ejes (u) y (v), alrededor de (0), es posible variar el ángulo (θ). Como consecuencia de ello varían los momentos de segundo orden: I_u , I_v e I_{uv} .

Las magnitudes I_u e I_v , varían entre un máximo y un mínimo, ambos positivos; en cambio I_{uv} podrá ser negativo, e incluso cero.

Para encontrar el valor del ángulo (θ) que corresponda a los valores extremos de I_u e I_v , es necesario encontrar la derivada primera de I_u o de I_v respecto a (θ) e igualarla a cero. Se llamará (θ_0) al valor del ángulo que cumpla con esa condición.

Entonces derivando la expresión (1) del tema anterior:

$$\frac{dI_u}{d\theta} = 2 \cdot I_x \cdot \cos\theta \cdot [-\operatorname{sen}(\theta)] + 2 \cdot I_y \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta)$$

$$\left. \frac{dI_u}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -(I_x - I_y) \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \theta_0) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta_0) = 0$$

de donde:

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \theta_0) = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} \cdot (I_x - I_y)}$$

(4)

Este expresión determina la posición de dos ejes normales entre si. Respecto a uno de ellos el momento axial de inercia es máximo, y respecto al otro será mínimo.

Estos ejes se denominan **EJES PRINCIPALES DE INERCIA**. Los momentos de inercia respecto a dichos ejes se llaman **MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA**.

Las expresiones de los momentos principales de inercia se obtienen introduciendo en las ecuaciones (1) y (2) del tema anterior el valor de (θ_0), dado por la ecuación (4).

Por razones de extensión y objetivos de la presente materia, no se vuelcan en este apunte dichos pasos matemáticos, dándose solamente la expresión final:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

(5)

Además, si en la expresión (3) del tema anterior, que nos da el valor de I_{uv} , se hace $\theta = \theta_0$, se encontrará que el *MOMENTO CENTRÍFUGO PARA LOS EJES PRINCIPALES ES NULO*.

Se denomina ejes principales de inercia a los que poseen las siguientes propiedades:

- Los momentos de inercia respecto a ellos, tienen valores extremos, respecto a uno de ellos es máximo y respecto al otro es mínimo.
- Son perpendiculares entre sí.
- El momento centrífugo respecto a los ejes principales es nulo, o sea son *ejes conjugados de inercia*.

Los ejes principales que pasan por el baricentro de la sección se denominan ejes principales centrales de inercia.

En muchos casos resulta fácil determinar la posición de los ejes principales centrales. Si la figura tiene un eje de simetría, dicho eje es uno de los ejes principales centrales, el otro pasa por el baricentro y es perpendicular al primero.

Por último, de la expresión:

$$\tan(2\cdot\theta_o) = -\frac{2\cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Se satisface para dos valores angulares: $(2\theta_0)$ y $(2\theta_0 + \pi)$, cada uno de los cuales define un eje que forma con el eje (x) los ángulos:

$$2 \cdot \frac{\theta_o}{2} = \theta_o \quad \text{y} \quad \frac{2 \cdot \theta_o + \pi}{2} = \theta_o + \frac{\pi}{2}$$

Lo que demuestra que los dos ejes son normales entre sí.

9. CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

La determinación de los momentos principales de inercia puede obtenerse utilizando métodos gráficos en lugar del procedimiento analítico descrito en los puntos anteriores.

Se expondrán dos de las construcciones habitualmente utilizadas; la de MOHR y la de LAND.

Admitiendo una sección cualquiera (figura 1), de la cual conocemos sus momentos de segundo orden: I_x , I_y , I_{xy} , respecto a un par de ejes ortogonales (x) e (y). Sea además, con igual origen, otro par de ejes (u) y (v), ortogonales, de posición definida por el ángulo (θ) que forma (u) con (x).

El objeto es determinar los ejes y momentos principales mediante la construcción gráfica de MOHR.

Anteriormente se vio: $I_u = I_x \cdot \cos^2(\theta) + I_y \cdot \sin^2(\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta)$

reemplazando $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\cdot\theta)}{2}$; $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\cdot\theta)}{2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{I_x}{2} + \frac{I_x \cdot \cos(2\cdot\theta)}{2} + \frac{I_y}{2} - \frac{I_y \cdot \cos(2\cdot\theta)}{2} - I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) \\ I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2\cdot\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) \\ I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2\cdot\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) \quad (A) \end{aligned}$$

recordando que

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2\cdot\theta) + I_{xy} \cdot \cos(2\cdot\theta) \quad (B)$$

elevando el cuadrado y sumando miembro a miembro (A) y (B):

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 - I_{xy}^2$$

llamando $X_c = \frac{I_x + I_y}{2}$; $R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 - I_{xy}^2}$

resulta

$$(I_u - X_c)^2 + I_{uv}^2 = R^2 \quad R = \text{radio}$$

Que resulta la ecuación de una circunferencia de radio R y centro en el punto "c" de coordenadas x_c e $y_c = 0$. Esta circunferencia se denomina *CIRCUNFERENCIA DE MOHR*.

Las ecuaciones (A) y (B) son ecuaciones paramétricas de una circunferencia, esto significa que si se lleva las funciones I_u e I_{uv} sobre un par de ejes ortogonales, a cada valor que se asigne al parámetro " θ ", corresponderá un punto "M".

Si se hace variar θ en todo su campo, de 0° a 360° , las infinitas posiciones de "M" corresponderán a los puntos de una circunferencia, cuya ecuación se ha puesto en evidencia con el desarrollo efectuado anteriormente.

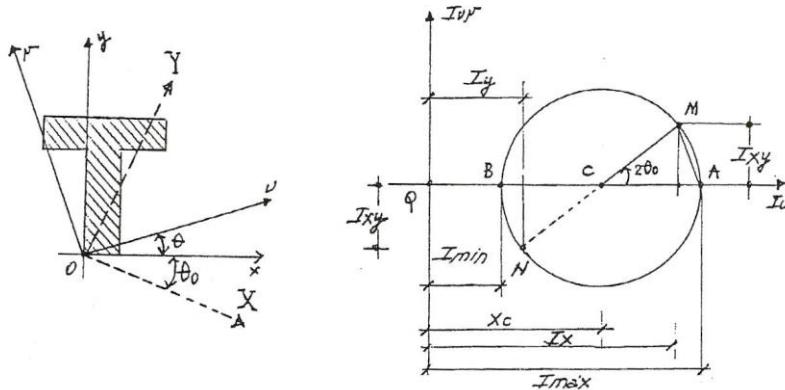


Fig. (1)

Con centro en c y radio R , se traza la circunferencia referida a un sistema de ejes I_u e I_{uv} , con origen en Q .

Se sabe que las coordenadas de cada punto de esta circunferencia representan los momentos I_u e I_{uv} , para cada uno de los infinitos ejes pasantes por "0".

Haciendo en las ecuaciones (A) y (B), $\theta = 0^\circ$, para representar se tendrá:

$$\text{eje (x)} \rightarrow \text{para } \theta = 0^\circ, \text{ punto representativo } M \begin{cases} I_u = I_x \\ I_{uv} = I_{xy} \end{cases}$$

$$\text{eje (y)} \rightarrow \text{para } \theta = 0^\circ, \text{ punto representativo } N \begin{cases} I_u = I_y \\ I_{uv} = I_{xy} \end{cases}$$

Se observa que los puntos M y N se localizan en extremos opuestos de un diámetro, con una diferencia angular al centro de 180° , o sea dos veces el ángulo formado entre (x) e (y).

De fácil correlación con sus respectivos ejes son los puntos (A) y (B), ya que para ellos $I_u = I_{\max}$ para (A) e $I_u = I_{\min}$ para (B), y para ambos puntos $I_{uv} = 0$. Por lo tanto (A) y (B) representan los momentos de segundo orden correspondiente a los ejes principales de inercia, pasantes por el punto 0.

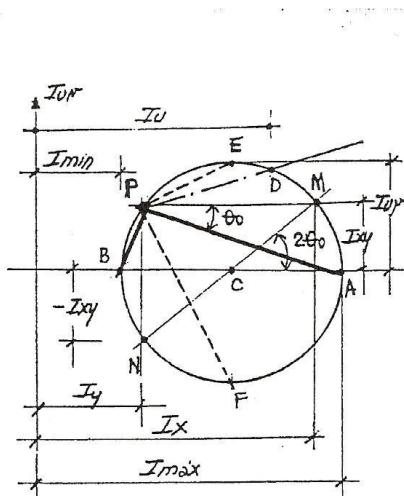
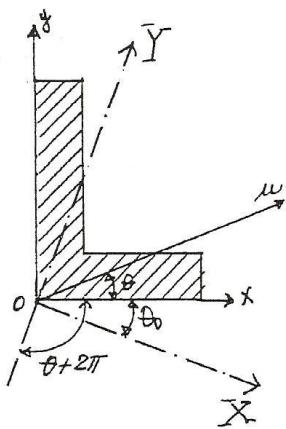
Resumiendo:

-Dada una sección, se calcula I_x , I_y , I_{xy} .

-Se adopta un sistema de ejes ortogonales, llevándose en abscisa los momentos de inercia, y en ordenadas los centrífugos, previo de haber adoptado una escala de momentos de segundo orden $\left(\frac{\beta \text{ cm}^4}{x \text{ cm}}\right)$.

-Se ubica y representa el punto $M(I_x; I_{xy})$ y el $N(I_x; -I_{xy})$. Se los une con una recta, donde corta al eje de abscisa se tiene el centro c . Con radio \overline{cM} se traza la circunferencia de Mohr.

-Los puntos (A) y (B) donde la circunferencia intercepta al eje de abscisas, determinan los momentos principales de inercia. Para determinar los ejes principales se puede recurrir al procedimiento que a continuación se describe:



Por el punto (M), se traza una paralela al eje (x), dicha recta intercepta a la circunferencia en el punto (P) llamado POLO DEL CÍRCULO DE MOHR. El mismo punto se obtiene si se traza por (N) una paralela al eje (y).

“El polo goza de la propiedad de que cualquier recta que pasa por él (por ejemplo \overline{PM} , \overline{PN}) intercepta a la circunferencia en un punto (M;N), cuyas coordenadas expresan los momentos de segundo orden de un eje pasante por (0) y paralelos a dichas rectas “(x;y)”.

Determinado (P), se lo une con (A) y con (B) siendo sus paralelas trazadas por (0) los ejes principales (X) e (Y).

Por lo tanto, por ejemplo si dado el eje “u” se quiere conocer los momentos de segundo orden respecto a él, sólo se deberá trazar por (P) una paralela a “u”. Dicha recta cortará a la circunferencia en el punto (D), la abscisa y la ordenada de (D), nos da: I_u e I_{uv} .

Por último si se quisiera conocer los valores extremos de los momentos centrífugos y sus respectivos ejes; el diámetro paralelo al eje I_{uv} intercepta a la circunferencia en “E” y “F” cuyas coordenadas darían los valores buscados.

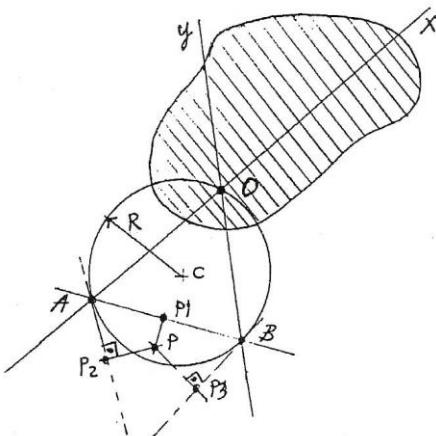
Si se une “E” y “F” con (P) y se trazan paralelas a \overline{PE} y \overline{PF} se obtiene los ejes para los cuales los momentos centrífugos son máximos y mínimos.

Nota Aclaratoria:

Al representarse en el sistema de ejes $I_u - I_{uv}$, las coordenadas de los puntos M y N para trazar la circunferencia debe tomarse: “para M el momento de inercia respecto a (x) y el centrífugo respecto al (x) e (y) con su signo; para (N) el momento de inercia respecto a (y) y el centrífugo respecto a (x) e (y) con signo cambiado.

10. CÍRCULO DE LAND

Sea una sección plana, en la cual se admiten dos ejes cualesquiera, "x" e "y", de origen en (0), situados en el plano de la sección. Para mayor generalidad se supone que dichos ejes no son ortogonales entre sí.



Con centro en un punto arbitrario (*c*) y radio $\overline{CO} = R$, se traza una circunferencia, con la única condición de pasar por (0), denominada *CIRCUNFERENCIA DE LAND PARA EL PUNTO* (0) de la sección.

Si se prolongan los ejes (x) e (y), hasta interceptar en la circunferencia en (A) y (B), se traza luego la cuerda \overline{AB} y las tangentes en (A) y (B) a la circunferencia.

Es posible demostrar que existe un punto tal como el (P), llamado **PUNTO PRINCIPAL DE INERCIA**, que se caracteriza porque determina segmentos tales que:

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \overline{PP_1} \quad \frac{I_0}{2 \cdot R} \\ I_x &= \overline{PP_2} \quad \frac{I_0}{2 \cdot R} \\ I_y &= \overline{PP_3} \quad \frac{I_0}{2 \cdot R} \end{aligned} \right\} (1)$$

donde:

$\frac{I_0}{2 \cdot R}$: escala del dibujo

I_x , I_y , I_{xy} : momentos de segundo orden de la sección respecto a los ejes (x) e (y)

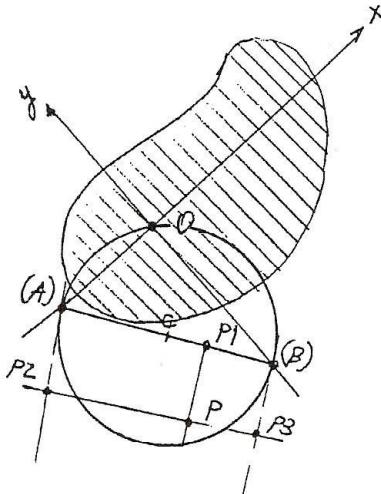
I_0 : momento polar de inercia respecto a (0)

R : radio de la circunferencia

P_1 , P_2 , P_3 : puntos de intercepción de las perpendiculares trazadas por (P) a la cuerda \overline{AB} y a las tangentes (A) y (B), respectivamente

De lo expuesto se concluye que trazada la circunferencia y supuesto conocido el punto principal de inercia, las expresiones (1), permiten determinar las magnitudes de los momentos de segundo orden respecto a cualquier par de ejes pasante por (0).

Si ahora se supone que los ejes son ortogonales, la cuerda \overline{AB} , se transforma en diámetro, y las tangentes en (A) y (B) son normales al diámetro, por lo que ahora las expresiones se pueden escribir como:



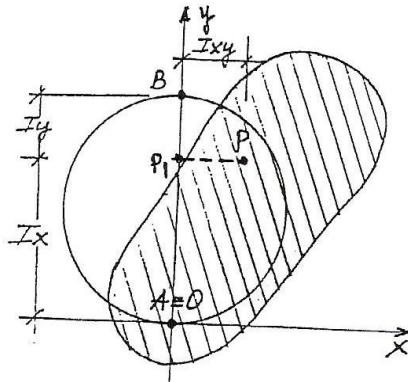
$$I_{xy} = \overline{PP}_1 \cdot \frac{I_0}{2 \cdot R}$$

$$I_x = \overline{PP}_2 \cdot \frac{I_0}{2 \cdot R} = \overline{P_1 A} \cdot \frac{I_0}{2 \cdot R}$$

$$I_y = \overline{PP}_3 \cdot \frac{I_0}{2 \cdot R} = \overline{P_1 B} \cdot \frac{I_0}{2 \cdot R}$$

Es decir que cuando los ejes son normales entre sí, los momentos axiales se pueden medir desde (P_1), intercepción de la normal trazado por el punto principal al diámetro determinado por las intercepciones de cada uno de los ejes con la circunferencia, hasta las intersecciones (A) y (B).

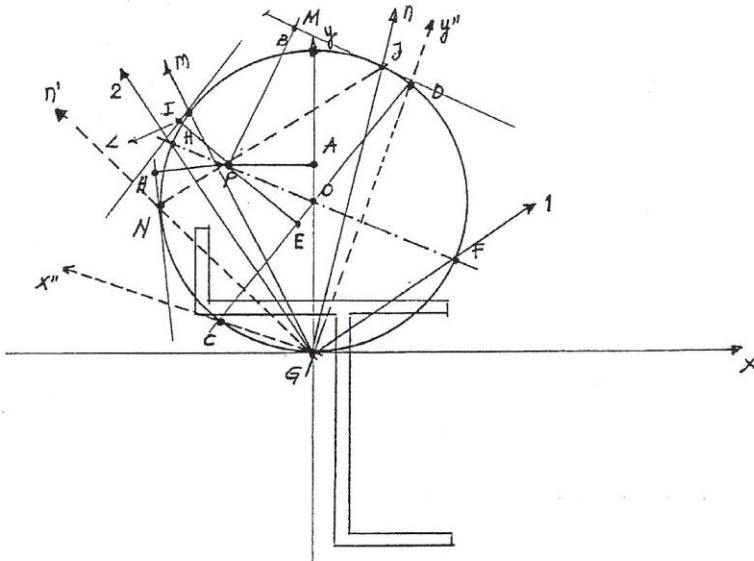
Si en particular se traza la circunferencia tangente en (0) a uno de los ejes, se tendrá que $A=0$, y por lo tanto el segmento $\overline{P_1 A}$ nos da el momento de inercia respecto al eje al cual la circunferencia es tangente; $\overline{P_1 B}$ el momento de inercia respecto al otro eje y $\overline{PP_1}$ el centrífugo respecto a los dos ejes.



Este último procedimiento nos permite determinar la posición del punto principal de inercia, cuando se conocen los momentos de segundo orden respecto a un par de ejes ortogonales.

10.1. TRAZADO DEL CÍRCULO DE LAND

- a) Se dispone de una sección cualquiera a escala adecuada de longitudes, con la posición de baricentro y ejes (x) e (y) conocidos.



Se elige una escala de momentos de inercia y a partir del centro de gravedad (G), se traza sobre el eje (y), primero $I_x = \overline{GA}$ y a continuación $I_y = \overline{AB}$.

La distancia \overline{GB} representa el DIÁMETRO DE LAND, y su punto medio (O), el centro respectivo, que se utiliza para el traslado del círculo. A partir de (A) y perpendicularmente al eje (y), se traza $I_{xy} = \overline{AP}$ (positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda). Al punto (P) se lo había denominado *PUNTO PRINCIPAL DE INERCIA*.

Nota:

La construcción también se puede hacer sobre el eje (x). A partir de (G) se traza I_y , y a continuación I_x . El diámetro del círculo será $I_y + I_x$. El punto (P) se obtiene trazando I_{xy} a partir del extremo de I_y , midiendo perpendicularmente al eje (x), positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

- b) Momentos de inercia respecto a un par de ejes ortogonales cualesquiera:

Sean los ejes "x" e "y", que cortan al círculo en los puntos (C) y (D), definimos el diámetro \overline{CD} . La distancia de (P) al diámetro representa el momento centrífugo $I_{x'y'} = \overline{PE}$. El signo será positivo si los puntos (G) y (P) están separados por el diámetro \overline{CD} y negativo si (G) y (P) están del mismo lado del diámetro. Los momentos de inercia quedan representados por:

$$I_{x^*} = \overline{CE} ; \quad I_{y^*} = \overline{ED}$$

c) Ejes y momentos principales de inercia:

Los ejes principales son aquellos cuyo momento centrífugo es nulo, es decir distancia nula del punto (P) al respectivo diámetro. Por lo tanto, dicho diámetro deberá pasar por el centro del círculo (O), y por el punto (P), definiendo los puntos (F) y (H).

De este modo los ejes (1) y (2), que pasan respectivamente por \overline{GF} y \overline{GH} , serán los principales de inercia con:

$$I_1 = I_{\max} = \overline{PF}$$

$$I_2 = I_{\min} = \overline{PH}$$

$$I_{12} = 0 \text{ (distancia nula del polo al diámetro)}$$

d) Momento respecto a ejes oblicuos:

Sean los ejes (m) y (n), que cortan al círculo en los puntos (I) y (J), definiendo su respectiva cuerda de LAND \overline{IJ} .

La distancia del polo o punto (P) a la cuerda representa el momento centrífugo $I_{mn} = \overline{PK}$, negativo por estar (P) y (G) del mismo lado de la cuerda. Las distancias del punto (P) a las tangentes que pasan por (I) y (J), representan los momentos de inercia.

$$I_m = \overline{PL}$$

$$I_n = \overline{PM}$$

e) Ejes conjugados:

"Son aquellos cuyo momentos centrífugos son nulos". Por lo tanto la cuerda de LAND respectiva deberá pasar por el punto (P). Sea por ejemplo el eje "n", la cuerda de LAND para el eje conjugado deberá pasar por (J) y (P), definiéndose la cuerda \overline{JN} . El eje (n'), que pasa por \overline{GN} , es el conjugado de (n), con los momentos:

$$I_n = \overline{PM}$$

$$I_{n'} = \overline{PH}$$

$$I_{nn'} = 0 \text{ distancia nula del polo a la cuerda}$$

TEMA 6: ESFUERZOS DE TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

1. INTRODUCCIÓN

La RESISTENCIA DE LOS MATERIALES estudia los efectos producidos por las fuerzas que solicitan a una estructura o máquina y determina las condiciones de resistencia, rigidez y estabilidad, que deben satisfacer las diversas partes de éstas, para que puedan soportar tales fuerzas.

La **RESISTENCIA** es la capacidad de una estructura, de sus partes y elementos de soportar una carga determinada sin deteriorarse.

La **RIGIDEZ** es la propiedad de una estructura o de sus elementos de oponerse a las cargas exteriores en lo que se refiere a las deformaciones (cambios de forma y dimensiones). Las deformaciones no deben exceder de ciertos valores fijados con las exigencias para la estructura.

La **ESTABILIDAD** es la capacidad de una estructura o de sus elementos de conservar una forma inicial determinada de equilibrio elástico.

Para que las estructuras o máquinas cumplan con las condiciones de resistencia, rigidez y estabilidad, es necesario dar a sus elementos una forma racional y determinar las dimensiones correspondientes.

La Resistencia de Materiales resuelve los problemas señalados apoyándose teóricamente en la Mecánica y en las Matemáticas, y experimentalmente en la Física y en el Estudio y Ensayo de Materiales. De todos modos no agota todos los problemas de la mecánica del cuerpo sólido deformado, temas que son tratados con mayor rigorismo por la Teoría de la Elasticidad. No obstante, el papel principal en la solución de los problemas de resistencia para construcciones civiles e industriales, máquinas y mecanismos, pertenece a las Resistencia de los Materiales.

2. HIPÓTESIS PRINCIPALES

Para desarrollar la teoría de la Resistencia de Materiales se aceptan una serie de hipótesis simplificativas:

2.1. SOBRE LA COMPOSICIÓN Y PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

2.1.1. HOMOGENEIDAD

Se supone que todos los materiales a estudiar son rigurosamente homogéneos, es decir que todas las moléculas son iguales. A pesar que en algunos casos esto no ocurra, por ejemplo una viga de hormigón armado que está constituida por cemento, áridos, hierro, aire; sin embargo desde el punto de vista de nuestro estudio para el cálculo, puede considerarse constituida por un material homogéneo.

2.1.2. ISOTROPÍA

Se supone que las propiedades del material son iguales en todas las direcciones. En algunos casos resulta inaceptable esta suposición, por ejemplo en la madera, cuyas propiedades son esencialmente diferentes según se considere sentido paralelo o perpendicular a las fibras.

2.1.3. CONTINUIDAD

Se supone que el material llena totalmente el volumen que ocupa. Puede ocurrir que tenga inclusiones de aire, impurezas, etc. El material que se estudia es continuo de un extremo al otro de la estructura.

2.2. SOBRE EL CARÁCTER DE LAS DEFORMACIONES

2.2.1. PEQUEÑEZ DE LAS DEFORMACIONES

Se supone que las deformaciones son pequeñas en comparación con las dimensiones del cuerpo deformado.

2.2.2. ELASTICIDAD PREFECTA DEL MATERIAL

Se suponen todos los cuerpos absolutamente elásticos. Prácticamente los cuerpos reales pueden considerarse elásticos, solamente hasta ciertos valores de cargas.

2.2.3. DEPENDENCIA LINEAL ENTRE CARGAS Y DEFORMACIONES

Se supone que para la mayoría de los materiales es válida la Ley de Hooke que establece la dependencia proporcional directa entre cargas y deformaciones.

Como consecuencia de las hipótesis sobre la pequeñez de las deformaciones y la dependencia lineal entre cargas y deformaciones, durante la solución de la mayoría de los problemas de Resistencia de los Materiales es aplicable el principio de superposición (independencia de las acciones y superposición de los efectos).

2.2.4. SECCIONES PLANAS

Se supone que las secciones planas antes de la deformación, permanecen planas después de la deformación. Es decir que las secciones planas perpendiculares al eje de la pieza se mantienen planas y perpendiculares al eje deformado (Navier-Bernoulli). Estas hipótesis permiten resolver el gran número de problemas sobre el cálculo de resistencia, rigidez y estabilidad. Los resultados obtenidos concuerdan en general con los datos experimentales.

3. ESFUERZOS INTERNOS

Las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo cualquiera tienden a producir la deformación del mismo, originando en su seno fuerzas interiores o fuerzas de interacción entre las partículas vecinas que tienden a conservar al cuerpo en su integración, contrarrestando todo lo que pueda cambiar la disposición inicial de las partículas.

A fin de poner en evidencia las fuerzas interiores que surgen en el cuerpo sometido a acción de fuerzas exteriores, se hace uso del método de las secciones. Para ello consideramos un cuerpo cargado con un sistema de fuerzas en equilibrio y practicamos un corte con un plano π quedando dividido en dos partes (Figura 1.a).

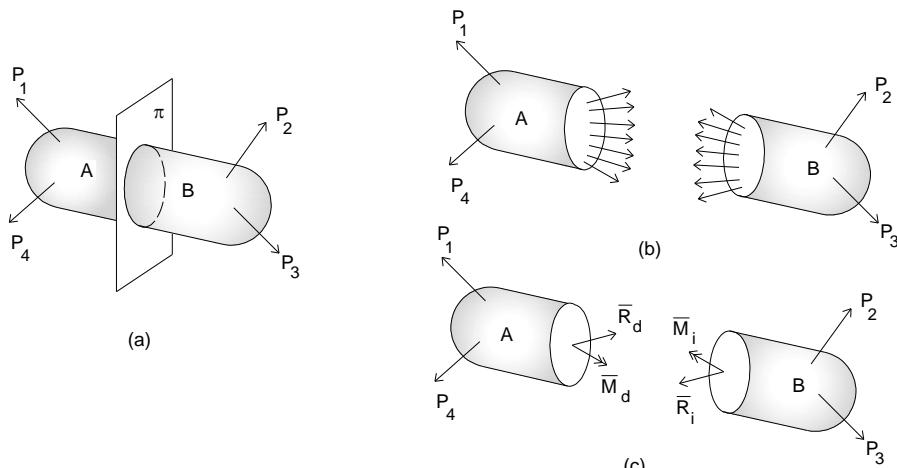


Figura 1

Para que cada una de estas partes se mantenga en equilibrio bajo la acción de las cargas exteriores aplicadas, es necesario sustituir la acción de la parte cortada por un sistema de fuerzas interiores distribuidas en toda la sección. Estas fuerzas no son sino las fuerzas de interacción entre las partes A y B del cuerpo.

Por el Principio de Acción y Reacción (3^{ra} Ley de Newton) las fuerzas interiores que actúan en la sección por el lado de la parte A, son iguales en magnitud pero de sentidos contrarios a las fuerzas interiores que actúan en la sección por el lado de la parte B (Figura 1.b).

Si reducimos el sistema de fuerzas distribuidas a un punto (el baricentro de la sección) obtendremos en cada lado de la sección un sistema de fuerza-par ($\bar{R} - \bar{M}$) (Figura 1.c). Donde $\bar{R}_i - \bar{M}_i$ es el sistema resultante de las fuerzas de la izquierda (las que actúan en la parte A) que equilibran la acción de las fuerzas de la derecha (las que actúan en la parte B) y viceversa con $\bar{R}_d - \bar{M}_d$, resultante de las fuerzas de la derecha y equilibrante de las fuerzas de la izquierda.

Al proyectar la resultante de las fuerzas (\bar{R}) y el momento resultante (\bar{M}) sobre el eje "z" de la barra y los ejes principales centrales de la sección "z" e "y", obtendremos sobre cada lado de la sección seis componentes de la resultante de las fuerzas interiores (Figura 2): tres fuerzas ($N; Q_z; Q_y$) y tres momentos ($M_z; M_x; M_y$). Estos valores se denominan esfuerzos internos en la sección de la barra.

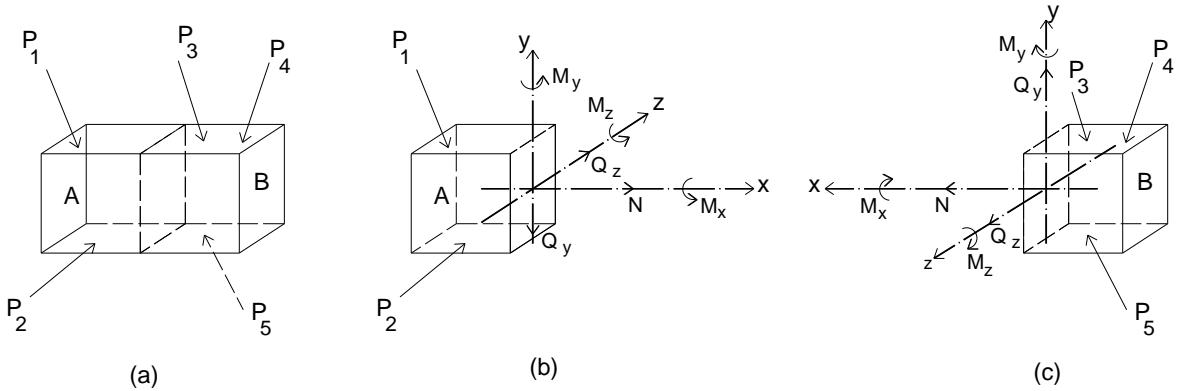


Figura 2

Los podemos definir de la siguiente manera:

3.1. ESFUERZO NORMAL (N)

Es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas interiores normales a la sección; y se la calcula numéricamente como la suma algebraica de las proyecciones normales a la sección, de todas las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección considerada, o a la derecha cambiadas de signo.

3.2. ESFUERZO DE CORTE (Q)

Es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas interiores tangentes a la sección; y se la calcula numéricamente como la suma algebraica de las proyecciones tangentes a la sección, de todas las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección considerada, o a la derecha cambiadas de signo. Q_z y Q_y son las proyecciones de Q sobre los ejes z e y respectivamente.

3.3. MOMENTO FLECTOR (M_F)

Es igual numéricamente a la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección considerada, o a la derecha cambiadas de signo, respecto a los ejes z (M_z) e y (M_y).

3.3. MOMENTO TORSOR (M_T)

Es igual numéricamente a la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección considerada, o a la derecha cambiadas de signo, respecto al eje x (M_x).

4. TENSIONES

Se llama tensión al esfuerzo interno referido a la unidad de área en el entorno del punto dado de la sección examinada.

Consideremos un elemento infinitamente pequeño de área dA (Figura 3.a) de coordenadas "z" e "y". A causa de la pequeñez del elemento puede considerarse que los esfuerzos internos están distribuidos en él uniformemente, y su resultante $d\bar{R}$ está aplicada en su baricentro. Al reducir estos esfuerzos al baricentro del elemento, $d\bar{R}$ será el vector suma de fuerzas y el vector suma de momentos, evidentemente será igual a cero.

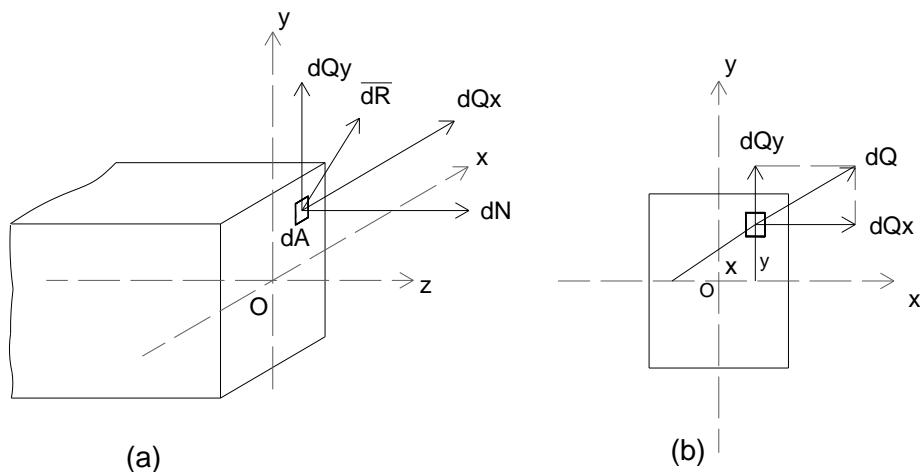


Figura 3

Las fuerzas elementales dN, dQ_x, dQ_y , serán las proyecciones de $d\bar{R}$ sobre los ejes z, x, y. Dividiendo estos valores por el área "dA" obtendremos las expresiones para los esfuerzos internos por unidad de área, llamados tensiones en el punto de coordenadas x, y de la sección transversal de la barra.

$$\sigma = \frac{dN}{dA} \quad (\text{Tensión Normal})$$

$$\tau_x = \frac{dQ_x}{dA} \quad ; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA} \quad (\text{Tensiones Tangenciales})$$

La tensión total en el punto

$$P = \frac{dR}{dA} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}$$

y la relación entre tensiones y componentes de las fuerzas interiores

$$N = \int \sigma \cdot dA \quad ; \quad Q_x = \int \tau_x \cdot dA \quad ; \quad Q_y = \int \tau_y \cdot dA$$

$$M_y = \int x \cdot \sigma \cdot dA \quad ; \quad M_z = M_t = \int (y \cdot \tau_x - x \cdot \tau_y) \cdot dA$$

5. DEFORMACIONES

Los cuerpos reales pueden deformarse, es decir cambiar su forma y dimensiones. Las deformaciones de los cuerpos suceden a causa de su carga con fuerzas exteriores o cambio de temperatura. Durante la deformación del cuerpo, sus puntos, lo mismo que líneas o secciones trazadas mentalmente, se desplazan en el plano o en el espacio respecto a su posición inicial.

Al cargar un cuerpo sólido, surgen dentro de él fuerzas interiores de interacción entre las partículas que se oponen a las fuerzas exteriores y tienden a volver las partículas del cuerpo a la posición que han ocupado antes de la deformación.

Se distinguen deformaciones **ELÁSTICAS**, que desaparecen después de haberse anulado la acción de las fuerzas, y deformaciones **PLÁSTICAS** o permanentes que no desaparecen al quitar las cargas.

En la Resistencia de los Materiales se estudian las deformaciones provocadas por: tracción y compresión, corte, flexión y torsión.

La tracción o la compresión surgen cuando en una barra se aplican fuerzas según su eje de sentidos contrarios, produciendo alargamientos o acortamientos Δl respectivamente (Fig. 4).

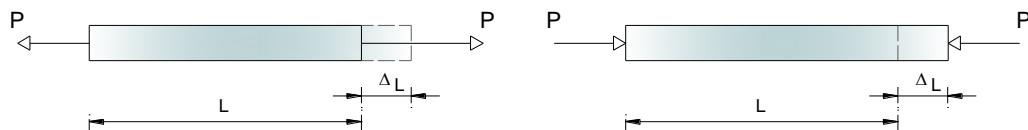


Figura 4

La relación entre el alargamiento (acortamiento) absoluto Δl con la longitud inicial “l”, se llama **ALARGAMIENTO (ACORTAMIENTO) UNITARIO**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

El corte se origina cuando las fuerzas exteriores tienden a desplazar dos secciones planas paralelas de la barra, una respecto a otra, siendo la distancia entre ellas constante (Figura 5).

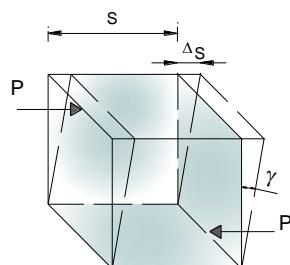


Figura 5

La magnitud del desplazamiento absoluto Δs respecto a la distancia entre los dos planos deslizados s (la tangente del ángulo γ) se denomina CORRIMIENTO UNITARIO o DEFORMACIÓN POR CORTE. Como el ángulo γ es pequeño se puede considerar que:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{s}$$

La flexión consiste en la desviación del eje de una barra recta o en el cambio de curvatura de una barra curva. En las barras rectas los desplazamientos de los puntos dirigidos perpendicularmente a la posición inicial del eje se denominan FLECHAS (y). Durante la flexión sucede también el giro de las secciones de la barra alrededor de los ejes situados en los planos de las secciones. Designamos con θ los ángulos de GIRO de las secciones respecto a sus posiciones iniciales (Figura 6).

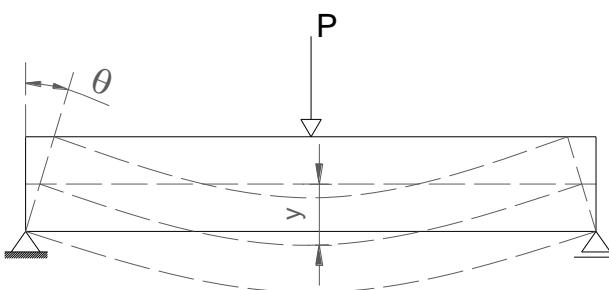


Figura 6

La torsión surge cuando sobre una barra actúan fuerzas exteriores que forman un momento con respecto a su eje (Figura 7). La deformación por torsión va acompañada por el giro de las secciones transversales de la barra, una respecto a otra, alrededor de su eje.

El ángulo de giro de una sección de la barra con respecto a otra situada a una distancia l se llama ángulo de TORSIÓN en la longitud l . La razón entre el ángulo de torsión φ y la longitud l se denomina ángulo de torsión unitario:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}$$

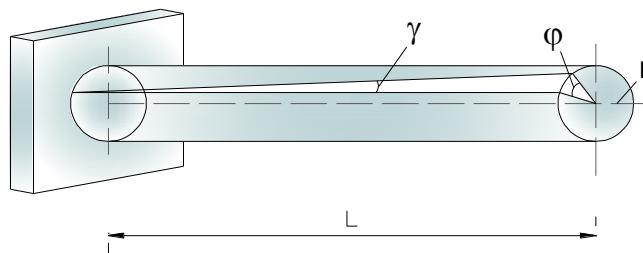


Figura 7

La relación entre el corrimiento γ y el ángulo de torsión unitario podemos expresarla:

$$\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{r \cdot \varphi}{l} = r \cdot \theta$$

6. TRACCIÓN – COMPRESIÓN

En el estado tensional de tracción o compresión axial, de las seis componentes de los esfuerzos internos, solamente el Esfuerzo Normal N es distinto de cero.

La barra prismática AB de sección A, está sometida a tracción axial por la acción de la carga vertical P aplicada en B y actuando según el eje de la barra (Figura 8a). La acción de P sobre la barra tiende a alargarla y producir la rotura. A esta rotura se oponen las fuerzas interiores de resultante N distribuidas de modo continuo en la sección n-n (Figura 8.b).

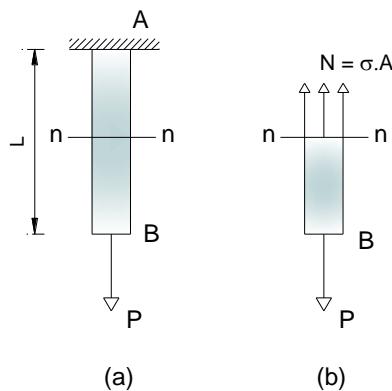


Figura 8

Consideramos a la barra como constituida por un conjunto de fibras longitudinales, cada una de las cuales soporta su parte de carga correspondiente:

$$N = \sigma \cdot A = P$$

La tensión normal vale $\sigma = \frac{P}{A}$ positiva durante la tracción y negativa cuando hay compresión.

En el caso de la carga P aplicada en un punto de la sección originará en ese lugar una concentración de esfuerzos (Figura 9). No obstante se ha podido experimentar que las fibras de los esfuerzos se distribuyen uniformemente en toda la sección a una distancia que varía entre una y dos veces el ancho de la barra (Principio de Saint-Venant) (Figura 9).

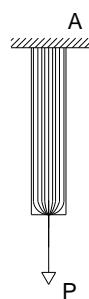


Figura 9

7. RELACIONES ENTRE TENSIÓN Y DEFORMACIÓN

Habíamos señalado que la resistencia de un material no es el único criterio a utilizar para diseñar estructuras. Frecuentemente la rigidez (oposición a las deformaciones) suele tener la misma o mayor importancia. En menor grado otras propiedades como la dureza, tenacidad y la ductilidad también influyen en la elección del material. Estas propiedades se determinan mediante ensayos.

Nos interesa estudiar el ensayo a tracción que es principal tipo de ensayo de las propiedades mecánicas de los materiales.

Consideremos una probeta de acero sujetada entre las mordazas de una máquina de ensayo de tracción y observemos simultáneamente la carga y el alargamiento. Los resultados se grafican: en ordenadas las cargas y en abscisas los correspondientes alargamientos.

En la Figura 10a se observa que no aparecen representadas las fuerzas y los alargamientos totales, sino las fuerzas por unidad de superficie (Tensión) y los alargamiento unitarios (Deformación), para facilitar la comparación de las propiedades de diversas muestras.

Diagrama de tensión-deformación

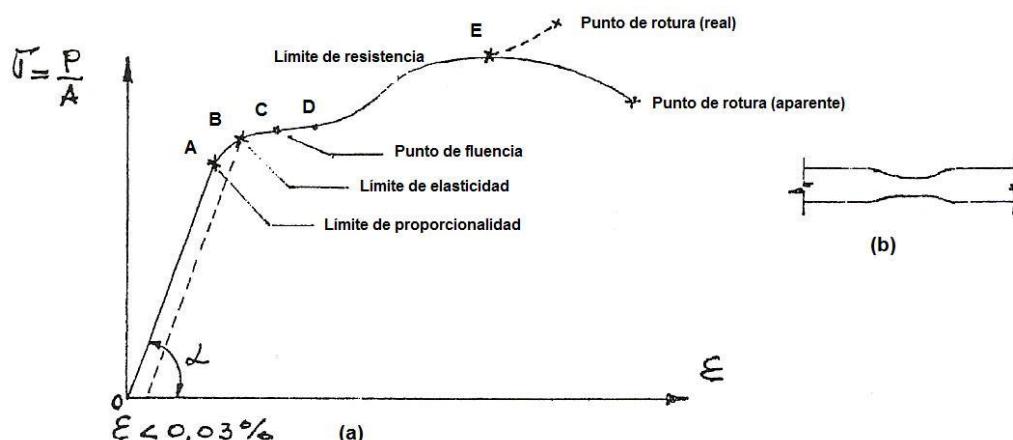


Fig. 10

De 0 hasta A (límite de proporcionalidad) el diagrama es rectilíneo, hay proporcionalidad entre tensión y deformación. Toda la teoría a desarrollar respecto al comportamiento de los cuerpos elásticos está basada en esta proporcionalidad.

El límite de elasticidad (o límite elástico), punto B del gráfico, es la tensión más allá de la cual el material no recupera totalmente su forma original al ser descargado, sino que queda con una deformación permanente (para esta punto $\varepsilon < 0,03\%$).

El punto C corresponde a la tensión de fluencia, con la cual la probeta se deforma sin crecer la tensión (el material comienza a "fluir"), formando en el diagrama el escalón de fluencia CD. A continuación el material vuelve a obtener la propiedad de aumentar la resistencia hasta llegar a E (límite de resistencia) donde se obtiene la tensión máxima, después de la cual empieza la reducción local de la probeta en forma de cuello (estricción) (Figura10b), como resultado de la cual ocurre la caída de la tensión referida a la sección inicial (punto de rotura aparente). Si la carga en el momento de la rotura se divide por la sección medida después de producida, se obtiene el valor real de la tensión en el punto de rotura (punto de rotura real). No obstante ser mayor que el límite de resistencia, se sigue tomando este último como tensión máxima del material.

Para los materiales cuyo diagrama de tensión-deformación no tiene un escalón de fluencia bien definido, se determina el límite de fluencia como la tensión para la cual la deformación permanente es el $0,2\%$ (Figura 11).

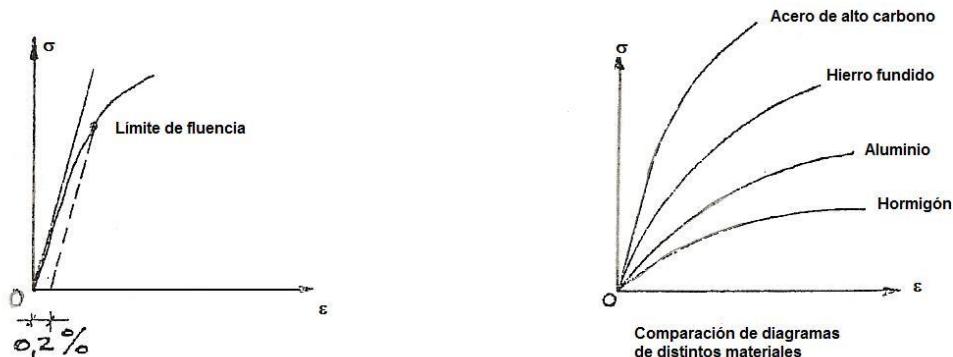


Fig. 11

8. LEY DE HOOKE

Observando el diagrama de la Figura10a en el tramo rectilíneo OA, la pendiente de la recta σ/ε se llama Módulo de Elasticidad Longitudinal o Módulo de Young y expresa la Ley de Hooke:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \therefore \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

Es decir que las tensiones son proporcionales a las deformaciones. E tiene la dimensión de tensión.

Aunque daría la impresión de que se trata de una medida de las propiedades elásticas del material, es una medida de su rigidez.

Como $\sigma = \frac{N}{A}$ será $\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A}$ y la deformación total de la barra de longitud l :

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

El denominador $E \cdot A$ será la rigidez de la sección transversal de la barra durante la tracción (compresión), y $\frac{E \cdot A}{l}$ rigidez de la barra durante la tracción (compresión).

9. TENSIONES ADMISIBLES

Determinadas las propiedades del material por medio de ensayos hay que establecer las tensiones admisibles, que son las máximas a las que puede ser sometido.

La tensión admisible (σ_{adm}) debe ser inferior al límite de proporcionalidad para que pueda aplicarse en todo momento la relación lineal entre tensión y deformación. Como resulta difícil determinar exactamente el límite de proporcionalidad, se acostumbra a tomar como base para fijar σ_{adm} el límite de fluencia o en su defecto el límite de resistencia, dividiéndolos por un número "S" llamado COEFICIENTE DE SEGURIDAD, que depende del material y del tipo de carga a que está solicitada la estructura:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{S}$$

10. TRABAJO INTERNO DE DEFORMACIÓN

Consideremos el caso de una barra prismática a tracción simple. Suponiendo un comportamiento elástico el diagrama carga-deformación será una recta OA.

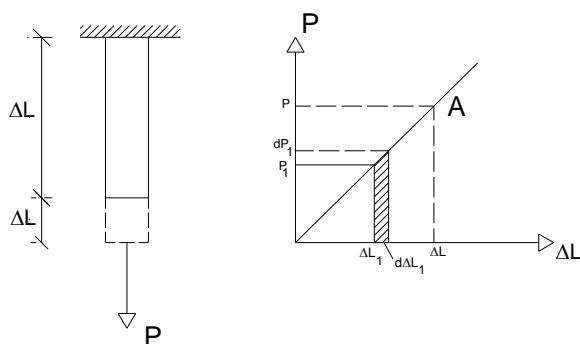


Figura 12

Para cualquier carga P_1 el alargamiento será Δl_1 . Si incrementamos P_1 en dP_1 el alargamiento aumenta en $d\Delta l_1$ y la carga P_1 realiza un trabajo positivo $P_1 \cdot d\Delta l_1$ (área rayada). Este trabajo es almacenado en la barra en forma de energía potencial o de deformación.

Si suprimimos el incremento de dP_1 el extremo inferior de la barra se eleva en $d\Delta l_1$ y la energía almacenada $P_1 \cdot d\Delta l_1$ es transformada en el trabajo de elevar la carga P_1 (externa) en la

altura $d\Delta l_1$. Podemos considerar a la barra como un resorte, en que la energía es almacenada o liberada, según que la carga P , sea aumentada o disminuida. Esta propiedad de absorber y liberar energía con las variaciones de carga es importante para el tipo de carga variable con el tiempo o carga dinámica en las estructuras o máquinas.

La energía total almacenada en la barra bajo una carga de tracción P es igual a la suma de las fajas elementales $P_1 \cdot d\Delta l_1$ situadas entre O y B (Figura 12) y está representada por el área OAB .

La energía de deformación $U = \frac{P \cdot \Delta l}{2}$; por tanto si $\Delta l = \frac{P}{E \cdot A}$ será:

$$U = \frac{P^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad \text{ó} \quad U = \frac{\Delta l^2 \cdot E \cdot A}{2 \cdot l}$$

Lo expuesto para tracción se aplica de igual modo para compresión.

10.1. Tubos de Pared Delgada

Un depósito cilíndrico que soporta una presión uniforme en su superficie interna se dice que es de pared delgada cuando el espesor de su pared es pequeño en relación con su diámetro interior ($\approx \frac{1}{10}$). En este caso puede suponerse, sin error grave, que las deformaciones de todas las fibras circunferenciales en la dirección de las tangentes a las circunferencias transversales, son iguales en todo el espesor de la pared.

Las cargas producirán un esfuerzo circunferencial y deformaciones uniformes en el anillo. El problema puede ser tratado como tracción o compresión simples.

Consideramos una sección cualquiera que corta diametralmente al cilindro de radio r de la Figura 15a sometido a presión interior P . En la Figura 15.b se representa el diagrama de cuerpo libre de una de las mitades del cilindro.

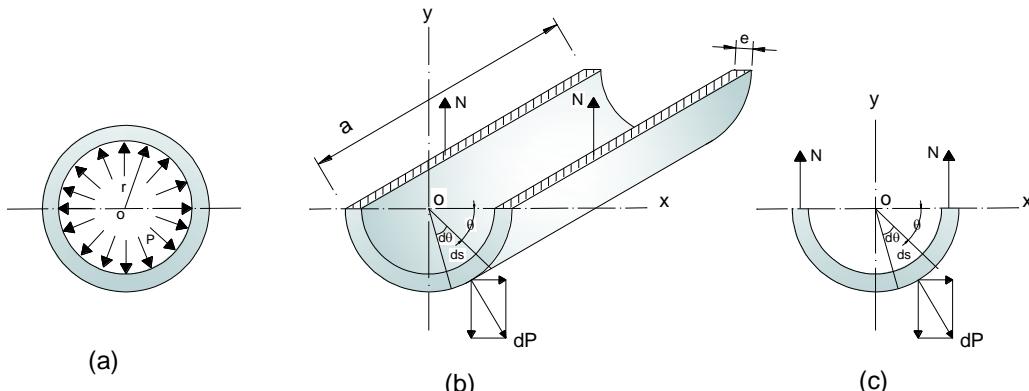


Figura 15

La fuerza elemental que actúa normalmente en un elemento ds de la pared es:

$$dP = p \cdot dA = p \cdot a \cdot r \cdot d\theta$$

Descomponiendo dP en dos direcciones ($x; y$) y planteando las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum x = 0 \quad ; \quad \int dP \cdot \cos\theta = 0 \quad (\text{las componentes horizontales se anulan entre sí})$$

$$\sum y = 0 \quad ; \quad 2 \cdot N - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dP \cdot \sin\theta = 0 \quad ; \quad 2 \cdot N - 2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dP \cdot \sin\theta = 0$$

reemplazando:

$$2 \cdot N - 2 \cdot \int_0^{\pi/2} p \cdot a \cdot r \cdot \sin\theta \cdot d\theta = 0$$

resulta:

$$N = p \cdot a \cdot r \quad \text{como } r = \frac{D}{2}; \quad N = \frac{p \cdot a \cdot D}{2}$$

y la tensión circunferencial,

$$\boxed{\sigma_c = \frac{N}{a \cdot e} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot e}}$$

Si consideramos ahora el diagrama de cuerpo libre de una parte del cilindro separada del resto por una sección transversal (Figura 16)

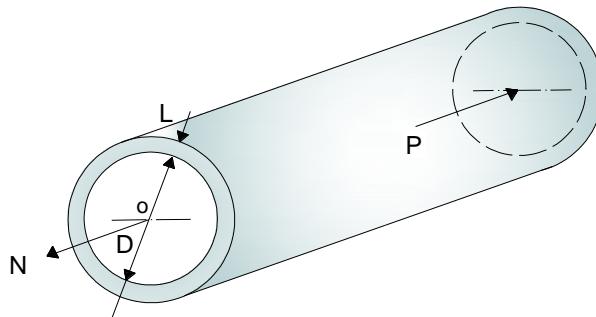


Figura 16

Se observa que la fuerza P que actúa sobre el fondo o tapa debe ser equilibrada por N resultante de las fuerzas que actúan en la pared del cilindro, normalmente al plano de la sección transversal de corte.

Planteando la ecuación de equilibrio:

$$P - N = 0 \quad ; \quad P = \frac{\pi \cdot D^2}{4} p \quad \text{y} \quad N = \pi \cdot D \cdot e \cdot \sigma_l$$

entonces:

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot p = \pi \cdot D \cdot e \cdot \sigma_l \quad \text{y} \quad \boxed{\sigma_l = \frac{p \cdot D}{4 \cdot e}} \quad (\text{tensión longitudinal})$$

Comparando σ_c y σ_l se observa que la tensión circunferencial tiene un valor doble de la tensión longitudinal. Si la presión en un depósito cilíndrico se eleva hasta alcanzar el valor de rotura, la falla del material se producirá a lo largo de una sección longitudinal.

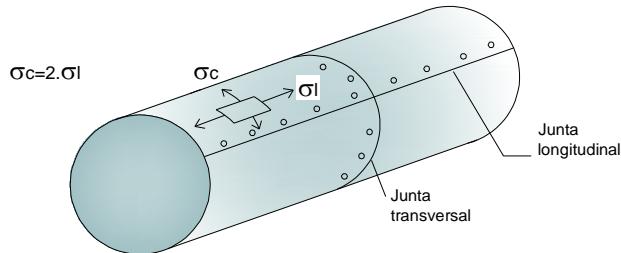


Figura 17

11. TENSIONES DEBIDAS A LA TEMPERATURA

Los cambios de temperatura provocan en los cuerpos, dilataciones ó contracciones produciendo deformaciones lineales de valor:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$$

α : coeficiente de dilatación térmica

L: longitud

Δt : variación de temperatura

Si se impide la deformación se originarán tensiones de tracción o compresión, según sea el caso.

Por Hooke:
$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l$$

y la tensión será:
$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta t$$

TEMA 7: ANÁLISIS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

1. VARIACIÓN DE LAS TENSIONES EN SECCIONES INCLINADAS

En el caso de fuerza axial actuando en una barra, la tensión sobre una sección m-n es uniforme y vale:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Consideremos el estado de tensión sobre una sección oblicua p-q. Aislamos la porción izquierda de la barra y equilibraremos la parte faltante con el esfuerzo interior S.

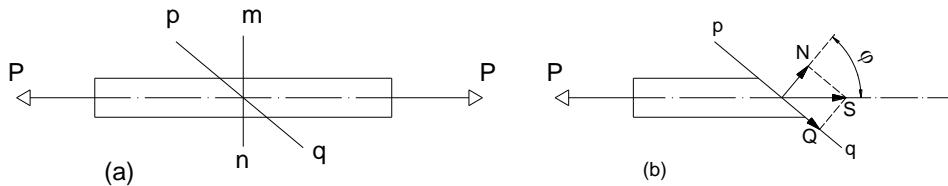


Figura 1

$$N = P \cdot \cos\varphi \quad ; \quad Q = P \cdot \sin\varphi$$

El área de la sección p-q es: $A' = \frac{A}{\cos\varphi}$

entonces:

$$\sigma_N = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A} \cdot \cos^2\varphi \quad ; \quad \tau = \frac{Q}{A'} = \frac{P}{A} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

como $\sigma_x = \frac{P}{A}$ y $2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \sin(2\varphi)$

resulta: $\sigma_N = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi$ y $\tau = \frac{\sigma_x \cdot \sin(2\varphi)}{2}$

si $\varphi = 0^\circ$ $\sigma_N = \sigma_x$ y $\tau = 0$ (máxima tensión normal)

si $\varphi = 90^\circ$ $\sigma_N = 0$ y $\tau = 0$

si $\varphi = 45^\circ$ $\tau = \sigma_x/2$ (máxima tensión tangencial)

Estas observaciones nos llevan a considerar más detenidamente la carga de una barra a tracción o compresión simple.

Si la barra está constituida por un material que sea más débil al corte que la compresión puede ser que se produzca la falla debido al deslizamiento relativo entre las secciones de la barra en un plano inclinado a 45° , en el que la tensión tangencial es máxima, en lugar de rotura por una sección normal en la que la tensión es máxima.

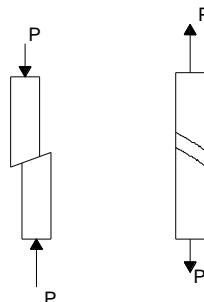


Figura 2

Durante el ensayo a tracción para un valor determinado de la tensión aparecen en las caras laterales líneas de falla incluyente, inclinadas a 45° con respecto al eje. Indican que el material falla por corte, aunque la barra está cargada a tracción simple. Este deslizamiento relativo a 45° hace que el material se alargue axialmente y después que se suprime la carga no recobra su longitud inicial.

Este es el punto de fluencia.

2. VARIACIÓN DE TENSIONES EN UN PUNTO.

La acción de las fuerzas exteriores que tratan de cambiar la disposición de las partículas del cuerpo o provocar su desplazamiento, la equilibran las tensiones que surgen en dicho punto. Por cada punto interior del cuerpo pasan infinitos planos y a cada plano hay ligada un par de tensiones (normal y tangencial).

Generalmente estas tensiones serán diferentes en las distintas direcciones, solamente en algunos casos particulares de carga pueden ser iguales. Interesa por lo tanto conocer la magnitud y dirección que tienen las tensiones máximas en cada punto del cuerpo para compararlos con las tensiones admisibles del material.

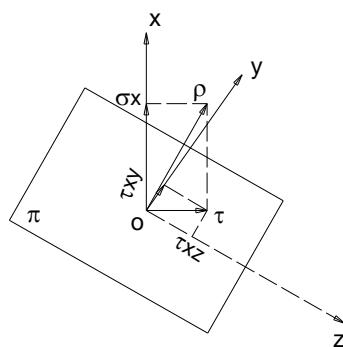


Figura 3

Notación de las componentes de σ

σ_x : tensión normal en la dirección x

τ : tensión tangencial ligada al plano π

τ_{xy} : 1º subíndice: corresponde al de la tensión normal ligada al plano π

2º subíndice: corresponde a la dirección que tiene en el plano.

Consideremos el cubo elemental en el entorno del punto y colocamos las tensiones ligadas a cada cara.

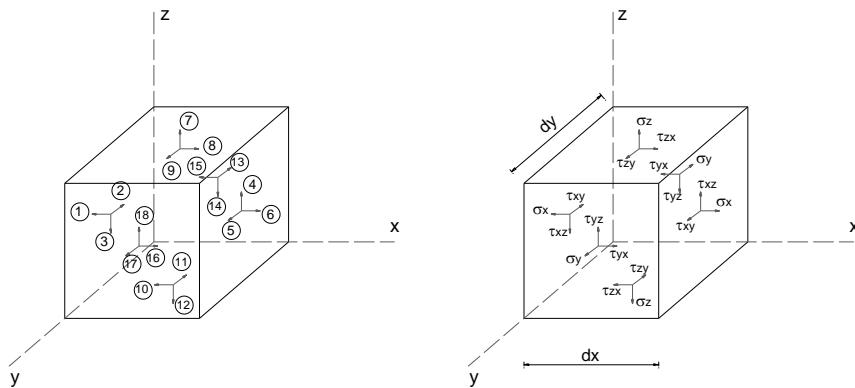


Figura 4

(1)	σ_x	(7)	$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$	(13)	σ_y
(2)	τ_{xy}	(8)	$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$	(14)	τ_{yz}
(3)	τ_{xz}	(9)	$\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$	(15)	τ_{yx}
(4)	$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$	(10)	$\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$	(16)	$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$
(5)	$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$	(11)	τ_{zx}	(17)	$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$
(6)	$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$	(12)	σ_z	(18)	$\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$

En las caras no visibles del cubo actúan las tensiones normales y tangenciales correspondientes. En las visibles actúan tensiones incrementadas en un diferencial por la continuidad molecular. Con las fuerzas másicas el sistema estará en equilibrio.

Cuando el cubo tiende a la dimensión punto, las 18 tensiones pasan a ser 9. Los incrementos desaparecen porque tienden a cero dx , dy , dz . Pero en realidad las tensiones en total son 6 debido a que se cumple el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales.

Para su verificación, como el sistema está en equilibrio, planteamos la ecuación de sumatoria de momentos con respecto a un eje paralelo al "y" pero que pasa por el baricentro geométrico del cubo elemental:

$$-2 \cdot (\tau_{xz} \cdot dy \cdot dz) \cdot \frac{dx}{2} + 2(\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy) \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

Los momentos de las otras fuerzas son nulos porque cortan o son paralelas al eje "y".

De esta expresión deducimos que: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ lo mismo si tomamos momentos con respecto a los ejes "x", "z" será:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} ; \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Es decir: una tensión cortante que actúa en la cara de un elemento va acompañado siempre de otra numéricamente igual en una cara perpendicular a la primera.

Con lo que comprobamos que el estudio de las tensiones en un punto se reduce a conocer solamente seis.

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z ; \tau_{xy} ; \tau_{yz} ; \tau_{zx}$$

Este es el estado tensional triple o espacial.

2.1. RÉGIMEN ELÁSTICO PLANO

La mayoría de las estructuras puede reducirse a un estado tensional plano o bidimensional, es decir uno de los planos está libre de tensiones. Es el caso anteriormente analizado de tubos de pared delgada solicitados con presión interior que origina tensiones circunferenciales y longitudinales. Se desprecia la tensión radial que alcanza escasamente un valor del 1% de las anteriores.

Como decíamos las tensiones en el punto varían de acuerdo a la posición angular de elemento. Para expresar analíticamente estas variaciones cortemos el elemento inicial mediante un plano a traza T y apliquemos a cualquiera de las partes las condiciones de equilibrio estático (Fig.5) según los ejes N y T.

Las fuerzas que participan de la condición de equilibrio resultan del producto del área por la tensión

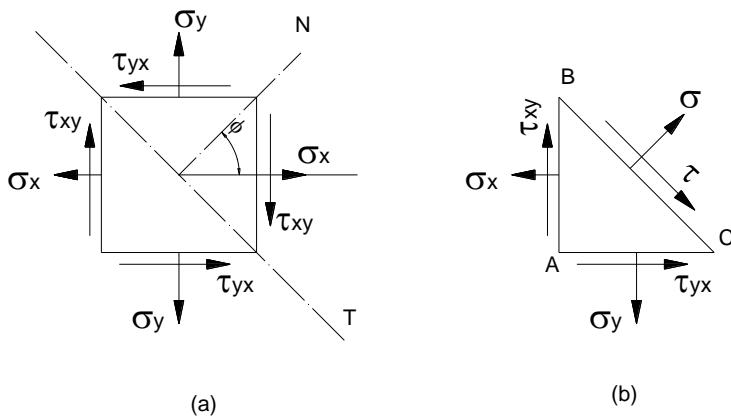


Figura 5

Consideremos que la longitud de BC = 1

$$AB = \cos\theta \quad y \quad AC = \sin\theta$$

de este modo el equilibrio de fuerza viene dado por:

$$\sum N = 0 ; \quad \sigma = (\sigma_x \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta + (\sigma_y \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta - (\tau_{xy} \cdot \cos\theta) \cdot \sin\theta - (\tau_{yx} \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta$$

$$\sum T = 0 ; \quad \tau = (\sigma_x \cdot \cos\theta) \cdot \sin\theta - (\sigma_y \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta + (\tau_{xy} \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta - (\tau_{yx} \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta$$

Como $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad ; \quad 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \sin 2\theta$$

Reemplazando en las anteriores queda:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\tau = \left(\frac{\sigma_x - \tau_y}{2} \right) \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \quad (2)$$

Expresiones que nos permiten calcular las tensiones σ y τ ligadas a un plano girado un ángulo θ conociendo las tensiones σ_x , σ_y , τ_{xy} . Al variar el ángulo θ variarán también las tensiones correspondientes, pasando por valores máximo y mínimo.

Para ubicar estos planos hallamos la derivada primera de las expresiones anteriores respecto de θ y las igualamos a cero.

Para los planos en que aparecen las tensiones normales máxima y mínima será:

$$\tan 2\theta = \frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3)$$

y para la tensión tangencial:

$$\tan 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} \quad (4)$$

Estas ecuaciones dan dos valores de 2θ que difieren 180° por lo que los planos de tensión normal máxima y mínima son perpendiculares entre sí. Lo mismo ocurre con los planos de tensión tangencial máxima.

$$\text{si hacemos: } \tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

$$\text{resulta: } \tan 2\theta = \frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

que nos dice: las tensiones normales máximas y mínima se desarrollan en los planos de tensión tangente al nulo.

La relación de (4) es recíproca y de signo contrario de (3), lo que indica que los valores de 2θ definidos por ambas difieren 90° , es decir, que los planos de tensión tangencial máxima están separados 45° respecto de los planos principales (correspondientes a tensiones normales máximas y mínimas).

Sustituyendo los valores de 2θ de (3) y (4) en (1) y (2) obtenemos las expresiones de las tensiones principales:

$$\sigma_{\max}^m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5)$$

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6)$$

Podemos observar la similitud de las deducciones obtenidas con las que se vieron para determinar momentos de inercia con respecto a ejes perpendiculares y de un mismo origen. La correspondencia surge entre momento de inercia ($I_x - I_y$) con tensión normal ($\sigma_x - \sigma_y$) y momento centrífugo (I_{xy}) con tensión tangencial (τ_{xy}).

Recordando que a un plano en el espacio se lo puede orientar conociendo la dirección de su normal, concluimos en que las direcciones de los ejes con respecto a los que se toman momentos de inercia, coinciden con las direcciones de las normales de los planos a los cuales van ligadas las tensiones.

2.1.1. CIRCULO DE MOHR

La determinación de las tensiones puede obtenerse utilizando un método gráfico en lugar del proceso analítico descrito anteriormente.

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, lo que significa que si llevamos las funciones σ y τ sobre un par de ejes rectangulares, a cada valor que asignemos al parámetro θ corresponde un punto M.

Si hacemos variar θ de 0° a 360° , las infinitas posiciones de M corresponderán a los puntos de una circunferencia cuya ecuación se pone en evidencia con el siguiente desarrollo:

$$\text{de la (1)} \quad \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\text{de la (2)} \quad \tau = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

elevando al cuadrado, sumando y simplificando:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

si llamamos

$$x_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

y sustituimos en la anterior:

$$\boxed{(\sigma - x_c)^2 + \tau^2 = R^2}$$

que constituye la ecuación de una circunferencia de radio R y centro en un punto “c” de coordenadas x_c e $y_c = 0$

Esta circunferencia se denomina *CÍRCULO DE MOHR*.

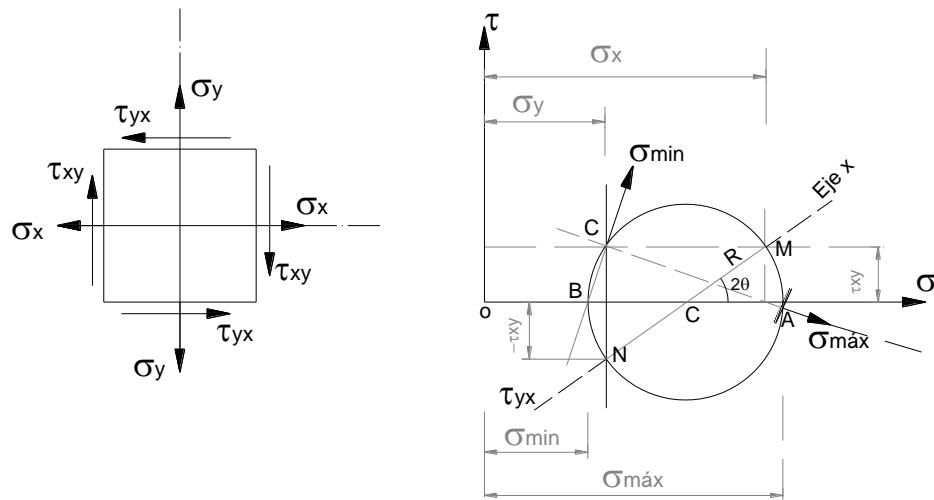


Figura 6

Con centro C y radio R trazamos la circunferencia referida a un sistema de ejes σ - τ con origen en 0. Sabemos que las coordenadas de cada punto de esta circunferencia representan las tensiones σ y τ trazadas a cada uno de los infinitos planos que pasan por el punto.

Ubiquemos en primer término sobre la circunferencia de Mohr el punto correspondiente al plano identificado por su normal (eje x) origen de los ángulos θ . Para ello en las ecuaciones (1) y (2) hacemos:

$$\theta = 0^\circ \text{ (dirección x)} \quad M \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_x \\ \tau = \tau_{xy} \end{array} \right.$$

$$\theta = 90^\circ \text{ (dirección y)} \quad N \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_y \\ \tau = -\tau_{xy} \end{array} \right.$$

Observamos que M y N se ubican en extremos opuestos de un diámetro con una diferencia angular al centro de 180° es decir, dos veces el ángulo formado entre x e y.

De fácil correlación con sus respectivas direcciones son los puntos A y B ya que para ellos ($\sigma = \sigma_{MÁX}$) y ($\sigma = \sigma_{MIN}$), respectivamente. Para ambos $\tau = 0$.

Evidentemente A y B representan las tensiones correspondientes a los planos principales (tensiones principales).

Ubicados M y A el ángulo al centro entre ellos vale 2θ . Dado que la representación de los ángulos en el círculo es el doble de los de la molécula, para encontrar la dirección de la tensión normal máxima, giramos un ángulo θ en el sentido de M.

Lo expuesto nos da los fundamentos de la construcción gráfica que se utiliza de la siguiente manera (Fig.7):

- Sobre un sistema de ejes coordenados $\sigma - \tau$ se ubican los puntos de coordenadas $(\sigma_x; \tau_{xy})$ y $(\sigma_y; -\tau_{xy})$ estos puntos representan las tensiones normales y tangenciales que actúan sobre las caras X e Y de un elemento. Se considera positiva la tensión normal de tracción y negativa de compresión. La tensión tangencial es positiva si el momento respecto del centro del elemento es en sentido horario.
- Uniendo M con N donde corta al eje de abscisas tenemos el centro C. Con radio CM se traza la circunferencia Mohr.
- Los puntos A Y B donde la circunferencia intercepta al eje de abscisas determinan las tensiones normales principales.
- Para determinar las direcciones de las tensiones normales principales ubicaremos punto P del círculo de Mohr. El polo goza de la propiedad de cualquier recta que pase por él (PM, PN por ejemplo) intercepta a la circunferencia en un punto (M, N) cuyas coordenadas expresan las tensiones normales y tangenciales de una dirección paralela a dichas rectas (X, Y).
- Determinado P, se lo une con A y B siendo sus paralelas trazadas por el punto del elemento las direcciones de las tensiones normales principales. Los planos principales serán perpendiculares a estas direcciones.
- Inversamente, si dada la dirección (u) queremos conocer las tensiones según ella, trazamos por P una paralela ha u que corta a la circunferencia en D: la abscisa y ordenada de D nos dan σ_u y τ_{uv} .

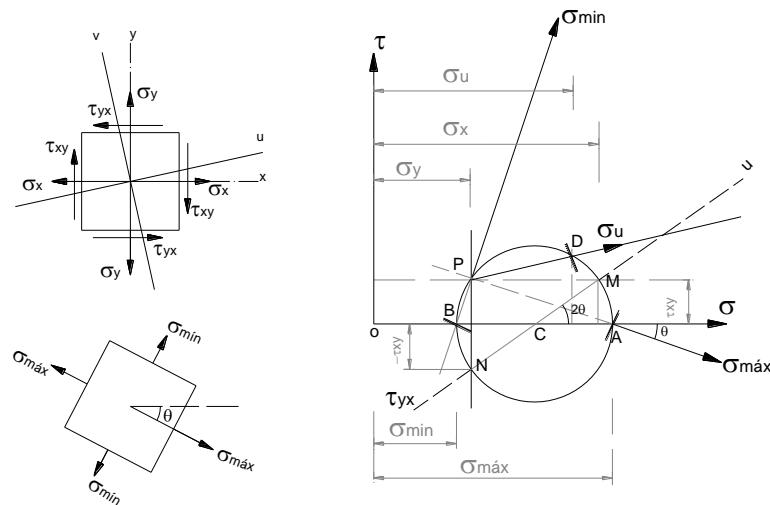


Figura 7

3. DEFORMACIÓN TRASVERSAL- COEFICIENTE DE POISSON.

Cuando aplicamos a una barra una fuerza de tracción P (Fig.8) además de ocurrir un alargamiento longitudinal, se produce una contracción trasversal, de tal manera que si el diámetro era “ d ” ahora será $d-\Delta d$. Esta deformación transversal es independiente de la forma de la sección.

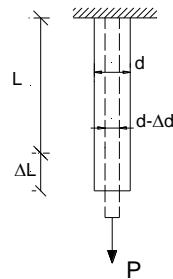


Figura 8

la deformación longitudinal unitaria será: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

la deformación trasversal unitaria será: $\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d}$

Todos los materiales no se comportan del mismo modo para las mismas cargas aunque guarden las mismas proporciones.

Entre las deformaciones unitarias trasversal y longitudinal existe, durante la tracción o compresión simple dentro de los límites de aplicabilidad de la ley de Hooke, una relación constante para el mismo material, cuyo valor absoluto se llama Coeficiente de Poisson:

$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

Para los materiales isótropos μ varía entre 0 y 0,5 (cerca de 0 para el corcho y 0,5 para el caucho, para el acero $\mu \approx 0,3$).

Teniendo en cuenta que ε y ε_t tienen signos contrarios, podemos expresar:

$$\varepsilon_t = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}$$

4. TENSIÓN CORTANTE PURA.

El caso del estado plano tensional cuando, para las cuatro caras del elemento separado, actúan solamente tensiones tangenciales, se llama de corte puro. Para su estudio consideremos el caso de tensión biaxial en que $\sigma_x = -\sigma_y$ como se indica en la figura 9a. Construimos el círculo de tensiones (figura 9b) en el que observamos que: $\sigma_x = -\sigma_y = \tau$.

La tensión cortante máxima se obtiene en los planos a 45° y las tensiones normales en los mismos son nulas.

Esto significa que el elemento cuadrado orientado con una inclinación de 45° respecto a las direcciones de las tensiones principales está sometido solamente a tensiones cortantes o tangenciales.

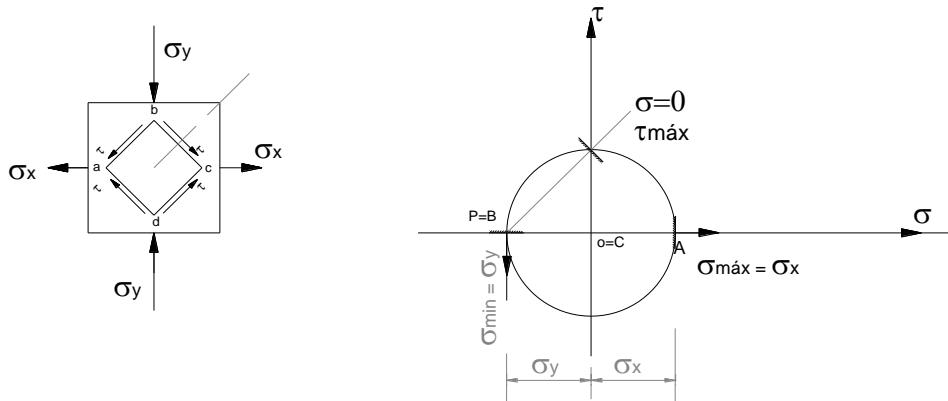


Figura 9

El elemento abcd que tenía la forma de cuadrado de lado "s" se convierte, bajo la acción de las tensiones tangenciales, en el rombo a'b'c'd'. La deformación de corte puro consiste en el cambio de los ángulos rectos. Representando para más evidencia, el elemento que se encuentra en las condiciones de corte puro sujetado en una de las caras (Fig.10).

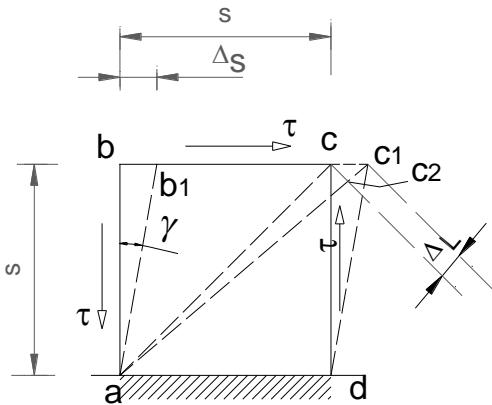


Figura 10

$$\text{hallamos que: } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{s}$$

$$\text{como } \gamma \text{ es pequeño: } \operatorname{tg} \gamma \cong \gamma = \frac{\Delta s}{s}$$

La analogía entre la deformación de corte y de tracción es completa, salvo que Δs se produce perpendicularmente a la longitud "s", con lo que la relación $\Delta s/s$ representa un ángulo.

Dentro del límite elástico podemos aceptar que la deformación de corte γ es proporcional a la tensión cortante τ : $\tau = G\gamma$, siendo G el coeficiente de proporcionalidad llamado Módulo de Elasticidad Trasversal. Esta expresión representa la ley de Hooke para el corte.

De la figura 10 se observa que el alargamiento Δl de la diagonal $ac = l = s\sqrt{2}$ es igual a:

$$\Delta l = cc_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \cong cc_1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}}$$

y el alargamiento unitario de la diagonal:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{2 \cdot s} = \frac{\gamma}{2} \quad \text{ó bien} \quad \varepsilon = \frac{\tau}{2 \cdot G} \quad (1)$$

Cuando un cuerpo está sometido a tensión biaxial, en dos direcciones perpendiculares, el alargamiento en una de las direcciones depende no solamente de la tensión en esa dirección, sino también de la tensión existente en la dirección perpendicular. En nuestro caso: $\sigma_x = -\sigma_y = \tau$

$$\text{en la dirección x: } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\text{en la dirección y: } \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} + \mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

entonces: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \mu)$ (2)

igualando los segundos miembros de (1) y (2) podemos expresar que:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

El estado de tensión cortante pura se produce también en la torsión de un tubo circular. Debido a la pequeña rotación de un extremo del tubo respecto al otro, las generatrices trazadas sobre la superficie cilíndrica se inclinan respecto al eje del cilindro y un elemento abcd formado por dos generatrices y dos secciones rectas adyacentes experimenta una distorsión análoga a la estudiada (Fig.11)

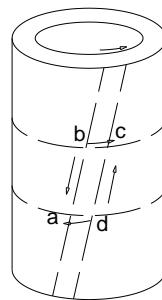


Figura 11

Con un ensayo de torsión nos resulta más fácil la determinación de μ que hacerlo con uno de tracción, dado que por su pequeñez necesitaríamos aparatos de gran precisión. Con el ensayo de torsión podemos determinar τ, γ del elemento abcd. Luego calculamos $G = \tau/\gamma$

Conocido "E" por un ensayo de tracción, calculamos μ a partir de $G = E/2(1+\mu)$ donde despejando obtenemos:

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

5. ESFUERZO CORTANTE.

En el estado tensional de corte, de las seis componentes de los esfuerzos internos, solamente un esfuerzo de corte Q_y (ó Q_x) difiere de cero, siendo los demás iguales a cero.

La deformación de una planchuela, al cortarla con tijeras para hierros (Fig.12-a-b) pone en evidencia la acción del esfuerzo de corte.

Prácticamente es difícil obtener deformación por corte en forma pura, casi siempre viene acompañada por otras deformaciones, siendo en la mayoría de los casos la flexión.

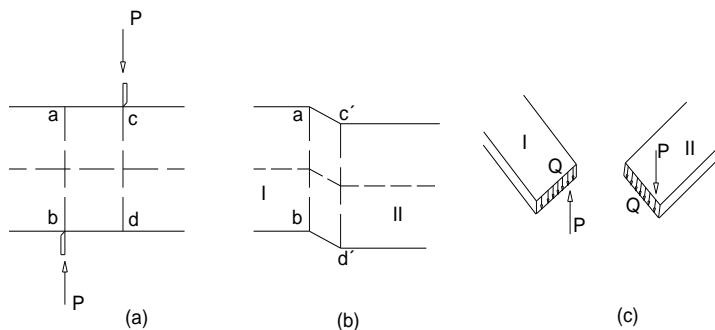


Figura 12

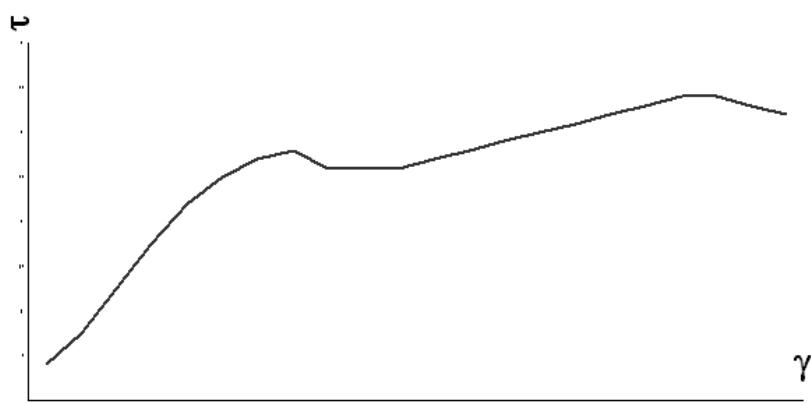
La fuerza cortante en el tramo ac será: $Q = P$ siendo $Q = \int_A \tau \cdot dA$. Tomando las tensiones tangenciales distribuidas uniformemente en el área A de la sección recta será:

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

La suposición sobre la uniformidad de distribución en la sección de las tensiones tangenciales es bastante convencional, porque éstas, en virtud de la ley de reciprocidad (tema 2), son iguales a cero cerca de las caras superior e inferior.

Sin embargo, esta suposición se utiliza ampliamente en la práctica, en el cálculo de los pernos, roblones, chavetas y uniones soldadas.

Sometiendo un material a tensión tangencial pura, puede establecerse la relación existente entre tensión tangencial (τ) y corrimiento unitario (γ) (Fig.19)



El diagrama es análogo al del ensayo a tracción. Podemos identificar al punto A como el límite de proporcionalidad y en el punto C el de fluencia.

Los ensayos muestran que para un material como el acero St 37 la tensión de fluencia por corte τ_F vale de 0,55 á 0,60 de la tensión de fluencia por tracción σ_F .

Puesto que en el punto de fluencia se presenta un corrimiento considerable, sin incremento de la tensión tangencial admisible considerando un coeficiente de seguridad (en general ≈ 3)

$$\tau_{ADM} = \frac{\tau_F}{S}$$

Tomando este coeficiente del mismo orden que en el caso de tracción, se tiene:

$$\tau_{ADM} = 0,55 \text{ a } 0,60 \text{ } \sigma_{ADM}$$

TEMA 8: FLEXIÓN SIMPLE RECTA - OBLICUA – DOBLE

1. FLEXIÓN SIMPLE RECTA

Decimos que una barra trabaja a flexión simple recta cuando:

- tiene eje longitudinal recto y es de sección constante.
- el plano en el que actúan las cargas (plano de solicitud) contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la barra y las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal.

Las fórmulas del cálculo para determinar las tensiones normales durante la flexión se deducen a partir del estudio de la flexión pura.

1.1. Flexión Pura

La flexión pura es un caso particular de la flexión que se presenta cuando de las seis componentes de los esfuerzos internos, solamente M_x es distinto de cero.

Es el caso de la viga simplemente apoyada cargada transversalmente como indica la (Fig. 1).

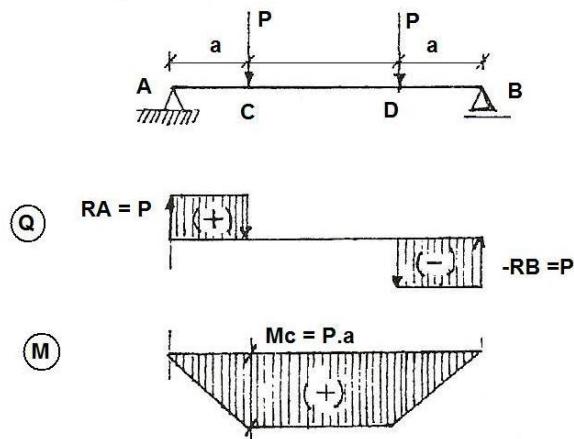


Fig. 1

Se observa que en el tramo CD el esfuerzo de corte es nulo y el momento flector constante.

Para investigar el estado de tensiones observemos las deformaciones que se producen en el interior del material.

Partimos de que la viga es de material homogéneo y se cumple la ley de Hooke. El módulo de elasticidad es igual a tracción como a compresión.

Como M es constante en el tramo CD es razonable admitir que la deformación por flexión será también uniforme y tomará forma de arco circular.

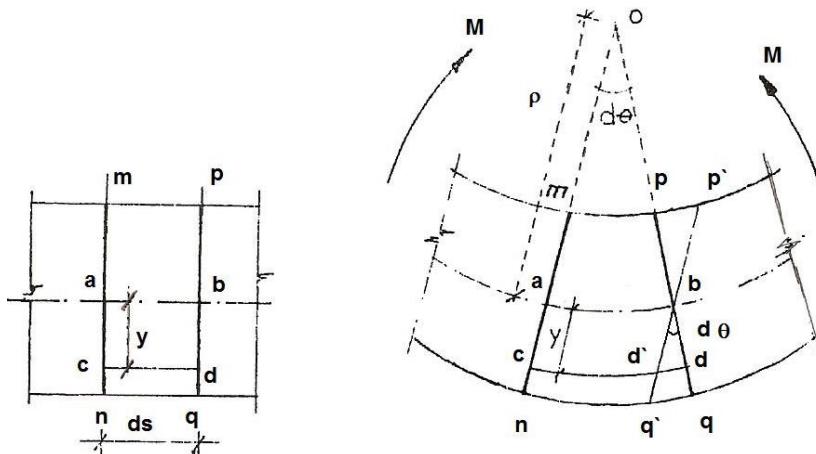


Fig. 2

En la posición deformada cada sección trasversal, originalmente plana, permanece plana y perpendicular al eje longitudinal de la viga (Hipótesis de Navier - Bernoulli). Las fibras inferiores se extienden y las superiores se acortan.

Entre ambas hay una superficie cuya longitud permanece invariable (superficie neutra), con radio de curvatura ρ que determina en su intersección con el plano de la sección un eje llamado EJE NEUTRO.

$$d\theta = \frac{ds}{\rho}$$

Si trazamos $p'q'$ paralela a $m n$ el segmento "cd" de la fibra ubicada a una distancia "y" del eje neutro se alarga un valor $d'd = y d\theta$, el alargamiento unitario:

$$\varepsilon = \frac{y \cdot d\theta}{ds} = \frac{y}{\rho}$$

como $\sigma = \varepsilon E$ resulta: $\sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y$ (1)

La tensión normal varía linealmente con la distancia al eje neutro.

Las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección en estudio están equilibradas por los esfuerzos internos (Fig. 3). Se origina un par resistente igual a M .

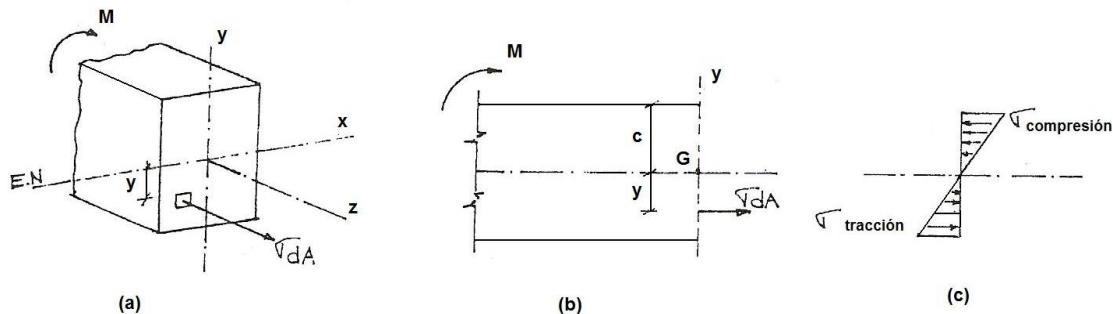


Fig. 3

$$M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

reemplazando el valor de (1)

$$M = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_n$$

I_n = momento de inercia del área de la sección respecto al eje neutro.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_n} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{M}{I_n} \cdot y}$$

Expresión que nos permite calcular la tensión en cualquier punto (Fig. 3c)
Por ser flexión pura ya habíamos dicho que:

$$N = 0 \quad \Rightarrow N = \int_A \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0$$

tiene que ser: $\int_A y \cdot dA = 0$ como esta integral es el momento estático del área respecto al eje neutro, por ser nula deducimos que este eje es baricéntrico.

La curvatura de la viga es: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_n}$

Al producto ($E \cdot I_n$) lo llamamos rigidez a la flexión.

Para obtener la tensión máxima se sustituye "y" por "c" distancia al borde más alejado del eje neutro.

$$\boxed{\sigma_{MÁX} = \frac{M}{I_n} \cdot c = \frac{M}{I_n/c} = \frac{M}{W}}$$

W: modulo resistente a flexión

2. FLEXIÓN SIMPLE OBLICUA

Hasta ahora hemos considerado que el eje de solicitación (intersección del plano de solicitación con la sección normal de la viga) coincide con uno de los ejes principales de la sección.

Si el eje de solicitación no coincidiera con un eje principal, pasando no obstante por el baricentro de la sección, nos encontramos con el caso de flexión simple oblicua (Fig.4)

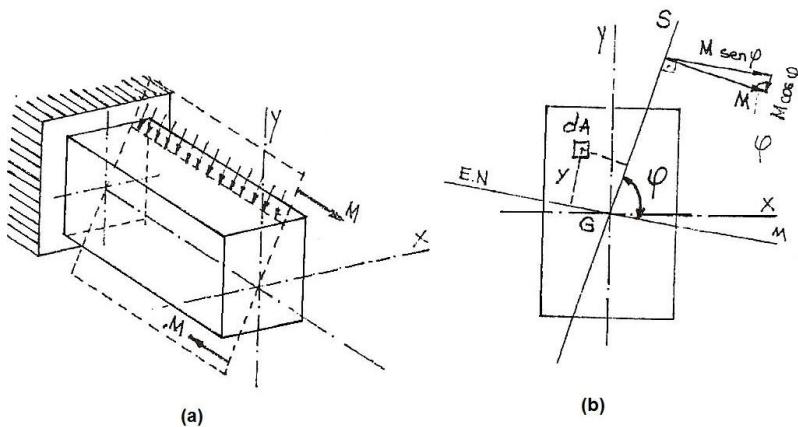


Fig. 4

Al curvarse la viga existen fibras longitudinales que conservan su longitud. Estas constituyen la superficie neutra que corta a cada sección determinando el eje neutro (n) que resulta oblicuo respecto al eje de solicitación (s) formando el ángulo ϕ (Fig.4b).

Toda sección gira alrededor del eje n conservándose plana. El alargamiento ϵ de una fibra longitudinal genérica es opcional a y (distancia al eje n).

Descomponemos a M en dos direcciones (paralela y normal al eje n) y planteamos las ecuaciones de equilibrio:

$$M \cdot \operatorname{sen} \phi = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_n$$

I_n : momento de inercia de toda la sección respecto a n

como:
$$\frac{M \cdot \operatorname{sen} \phi}{I_n} = \frac{E}{\rho}$$

resulta:

$$\sigma = \frac{M \cdot \operatorname{sen} \varphi}{I_n} \cdot y$$

Expresión que da el valor de la tensión en un punto en función de su distancia al eje neutro.
Si planteamos la ecuación de equilibrio tomando momentos con respecto al eje de solicitación s:

$$M \cdot \cos 90^\circ = 0 = \int_A x \cdot \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot x \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_{ns}$$

I_{ns} : momento centrífugo respecto a los ejes n y s, como en este caso su valor es nulo (dado que $E/\rho \neq 0$) resultan ser ejes conjugados de inercia

2.1. Flexión Doble

Comúnmente la flexión simple oblicua se reduce a dos flexiones rectas descomponiendo las cargas que actúan en componentes que se encuentran en los planos principales de la sección.

Podemos calcular los momentos flectores según las direcciones principales:

$$M_x = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

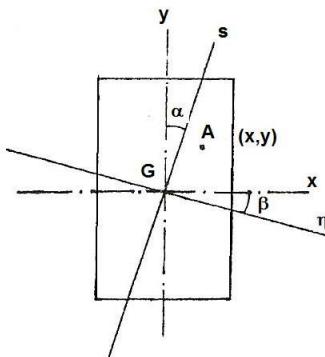


Fig. 5

Un punto genérico A (x, y) de la sección estará solicitado por una tensión σ_x originada por M_x y otra σ_y producida por M_y . En ambos casos se trata de flexión recta.

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

Aplicando el principio de superposición de los efectos, el punto genérico A (x, y) estará solicitado por la tensión normal σ , suma algebraica (compresión o tracción) de M_x y M_y .

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

2.1.1- Posición de Eje Neutro

El eje neutro está formado por los puntos de la sección en los cuales la tensión total es nula, es decir:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = 0$$

Ecuación lineal en x e y que representa una recta que pasa por el baricentro (G). Reemplazando M_x , M_y

$$M \left(\frac{\cos\alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{I_y} \cdot x \right) = 0$$

o sea: $y = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot x$ (ecuación del eje neutro)

Su posición respecto del semieje positivo de las x está determinada por el ángulo β :

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Esta expresión nos indica que si el eje de solicitud gira un ángulo α a partir de un eje principal de la sección, el eje neutro girará a partir del otro eje principal, en el mismo sentido y alrededor del baricentro de la sección, un ángulo β (Fig 5). Conociendo α y las dimensiones del área podemos determinar la posición del eje neutro.

Como los ejes neutros (n) y de solicitud (s) son conjugados de inercia, podemos determinar gráficamente la posición del primero utilizando el Círculo de Land.

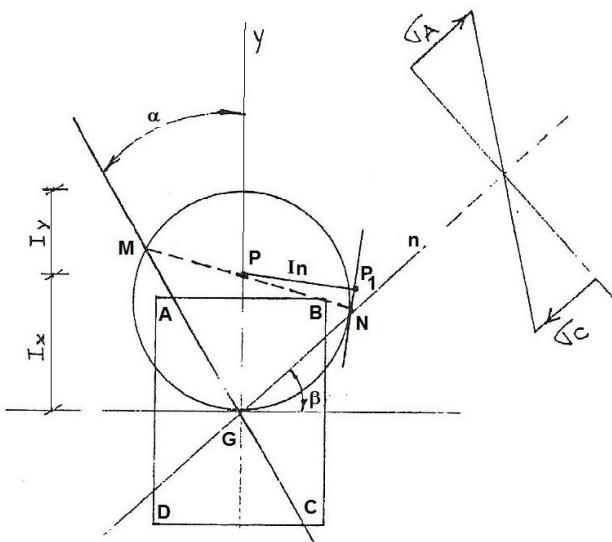


Fig. 6

Consideremos la sección rectangular de la figura 6 el eje de solicitación forma un ángulo α con el eje y (eje principal de inercia). Calculados I_x , I_y (para este caso momentos principales de inercia) construimos el Círculo de Land con diámetro $I_x + I_y$ tangente al eje x. Ubicamos el punto principal P en este caso sobre el eje y porque $I_{xy} = 0$

El eje s corta la circunferencia en M, uniendo M con P (dado que tiene que ser $I_{ns} = 0$) cortaremos con esta cuerda a la circunferencia en N. Uniendo G con N obtenemos la dirección del eje neutro que forma un ángulo β con el eje x.

TEMA 9: CORTE EN LA FLEXIÓN

9. A: TENSIONES DE CORTE EN ESTADO DE SERVICIO:

1. TENSIÓN DE CORTE EN LA FLEXIÓN

En el caso general de la flexión en cada sección de la barra además del momento flector M , actúa también el esfuerzo de corte Q , de manera que no solo surgen tensiones normales σ , sino también tensiones tangenciales τ .

El esfuerzo de corte Q tiende a romper una barra en dos partes haciendo deslizar una paralelamente a la otra según el plano que contiene a Q (Fig.1).

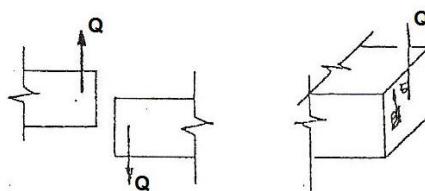


Fig. 1

El esfuerzo de corte referido a la unidad de área da origen a la tensión de corte τ que actúa en el plano de la sección.

El esfuerzo de corte se presenta en diversas circunstancias:

- En chapas unidas por remaches (Fig.2) la acción de dos fuerzas P ejercidas en sentido opuesto tienden a cortar el elemento de unión según la sección AB.

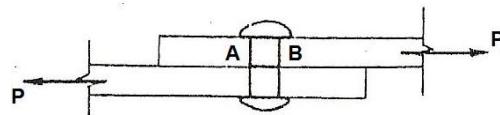


Fig. 2

- En el caso de dos vigas colocadas una encima de la otra sin ningún vínculo entre ellas, estando la inferior simplemente apoyada en sus extremos (Fig. 3.a).

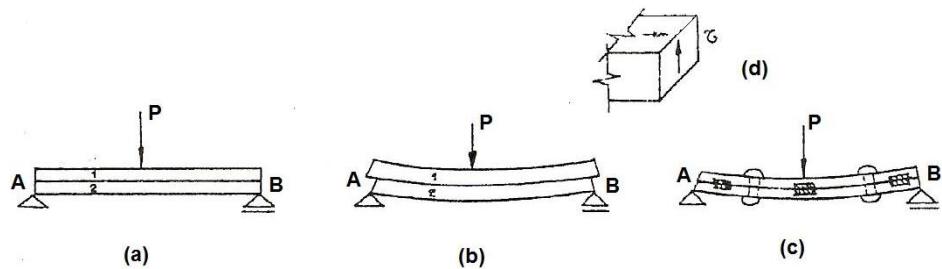


Fig. 3

Solicitadas a la acción de la carga P cada una de las vigas se deforma produciéndose un acortamiento en la fibra superior y un alargamiento en la fibra inferior (Fig. 3.b). En el plano de separación AB las vigas 1 y 2 resbalan una respecto de la otra. Este deslizamiento mutuo, aunque puede impedirse, siempre se manifiesta por una tensión.

Si se unen las dos vigas por medio de tacos y pernos (Fig. 3.c), el conjunto se hace solidario y se deformará como una viga única.

La solidaridad entre las vigas 1 y 2 se opone al deslizamiento mutuo surgiendo las tensiones tangenciales longitudinales τ_l (llamadas tensiones de resbalamiento). Estas se producen no solo en la superficie de separación AB , sino también en el interior de cada viga componente, es decir en todas las fibras (Fig. 3.d).

2. DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES DE CORTE (Teorema de Jourawsky)

Consideremos la viga simplemente apoyada de ancho b con una carga concentrada P (Fig. 4.a) y dibujemos el diagrama de cuerpo libre del elemento de longitud dx (Fig. 4.b).

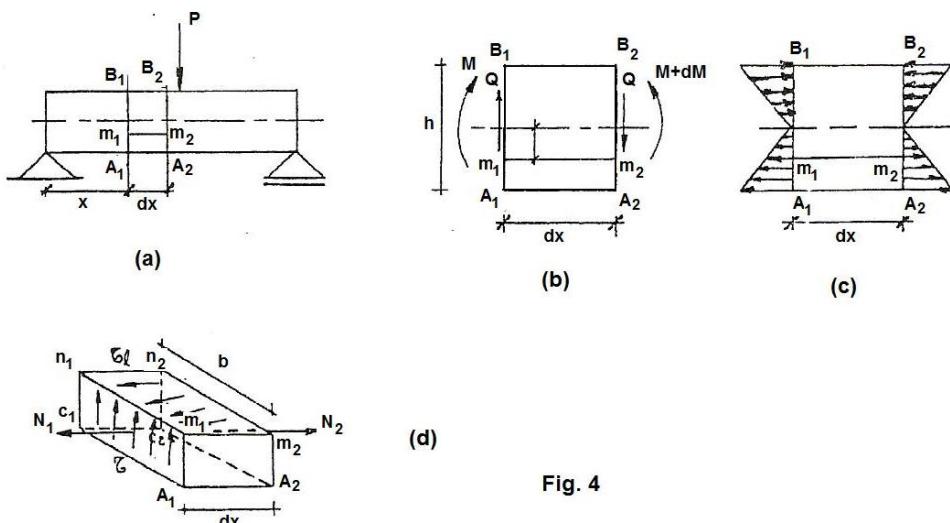


Fig. 4

Sobre la cara $A_1m_1n_1C_1$ actúan las tensiones normales $\sigma_1 = \frac{M}{I_n} \cdot y$, y las tensiones tangenciales τ , que pueden considerarse uniformemente distribuidas a lo ancho de la viga, debido a que el mismo es pequeño (hipótesis de Jourawsky) (Fig. 4.c y 4.d).

Sobre la cara $A_2n_2m_2C_2$ actúan $\sigma_2 = \frac{M + dM}{I_n} \cdot y$, y las tangenciales τ .

Sobre la cara $m_1n_1n_2m_2$ actúan tensiones tangenciales τ_l solamente, que por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales son iguales a las que actúan sobre las caras verticales: $\tau = \tau_l$.

El esfuerzo normal N_1 que actúa en la cara de la izquierda de ancho b y altura $(h/2-y)$ vale:

$$N_1 = \int_{As} \sigma_1 \cdot dA$$

As: área correspondiente a la parte de la sección que se encuentra por debajo de fibra considerada.

En la cara de la derecha: $N_2 = \int_{As} \sigma_2 \cdot dA$.

El esfuerzo tangencial que actúa en la cara $m_1n_1n_2m_2$ vale: $\tau \cdot b \cdot dx$.

Planteando la ecuación de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, obtenemos: $-N_1 + N_2 - \tau \cdot b \cdot dx = 0$ reemplazando:

$$-\int_{As} \sigma_1 \cdot dA + \int_{As} \sigma_2 \cdot dA - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$-\frac{M}{I_n} \cdot \int_{As} y \cdot dA + \frac{M}{I_n} \int_{As} y \cdot dA + \frac{dM}{I_n} \int_{As} y \cdot dA - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

Siendo: $S_n = \int_y^{h/2} y \cdot dA$, el momento estático respecto del eje neutro del área que la fibra considerada deja al exterior del eje neutro (en este caso por debajo), nos queda:

$$\frac{dM}{I_n} \cdot S_n = \tau \cdot b \cdot dx, \quad \text{y recordando que } Q = \frac{dM}{d_x}, \text{ entonces:}$$

$$\boxed{\tau = \frac{Q \cdot S_n}{I_n \cdot b}}$$

Expresión de Jourawsky ó Collignon.

Esta expresión es válida para flexión recta y secciones rectangulares. Sin embargo se la utiliza con ciertas correcciones para perfiles redondos, doble T, perfiles L.

3. LEY DE VARIACIÓN

El valor de las tensiones tangenciales varía en la altura de la viga de acuerdo a la forma de la sección. Cuando en la sección considerada el esfuerzo de corte Q y el momento de inercia I_n son constantes, la variación de las tensiones tangenciales depende de la ley de variación del momento estático del área separada S_n .

3.1 SECCIÓN RECTANGULAR

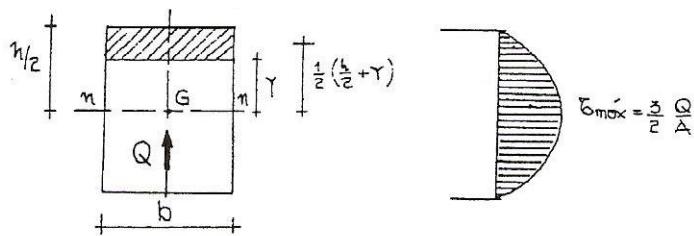


Fig. 5

El momento estático del área separada (rayada en la Fig. 5.a), vale:

$$S_n = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

es decir, el S_v varía en la altura de la sección según una ley parabólica y las tensiones tangenciales seguirán la misma ley:

$$\tau = -\frac{Q \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2 \cdot I_n \cdot b} \quad \text{como } I_n = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\tau = \frac{6 \cdot Q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

para $y = h/2$; $t = 0$ (Fig. 5.b)
 para $y = 0$; $t = 3Q/2A$ tensión tangencial máxima
 para $y = -h/2$; $t = 0$

La tensión tangencial máxima es 1,5 veces mayor que si se supusieran distribuidas uniformemente en la sección.

3.2 SECCIÓN DOBLE T

Para estudiar la distribución de las tensiones tangenciales en la sección T a lo largo del alma, se hacen las mismas hipótesis que para la sección rectangular. Es decir que las tensiones tangenciales son paralelas al esfuerzo de corte Q y se distribuyen uniformemente sobre el ancho b_1 del alma (Fig. 6).

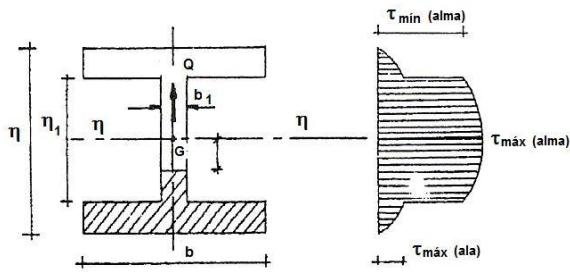


Fig. 6

Podemos emplear para el cálculo de las tensiones tangenciales τ en una fibra ubicada a la distancia "y" la expresión:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_n}{I_n \cdot b}$$

El momento estático del área separada (rayada en la figura), será:

$$S_n = b \cdot \left(\frac{h - h_1}{2} \right) \cdot \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h - h_1}{4} \right) + b_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y \right)$$

$$S_n = b \cdot \left(\frac{h - h_1}{2} \right) \cdot \left(\frac{h + h_1}{4} \right) + b_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{h_1}{4} + \frac{y}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right)$$

Entonces:

$$\tau = \frac{Q}{I_n \cdot b_1} \cdot \left[\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

Es decir que τ varía a lo largo de la altura según una ley parabólica. Los valores máximos y mínimos de τ en el alma se obtienen haciendo:

$$y = 0 \quad ; \quad \tau_{MÁX} = \frac{Q}{8 \cdot I_n \cdot b_1} \cdot (b \cdot h^2 - b \cdot h_1^2 + b_1 \cdot h_1^2)$$

$$y = h_1/2 \quad ; \quad \tau_{MÍN} = \frac{Q}{8 \cdot I_n \cdot b_1} \cdot (b \cdot h^2 - b \cdot h_1^2)$$

Cuando b_1 es muy pequeño comparado con b , no hay gran diferencia entre $\tau_{MÁX}$ y $\tau_{MÍN}$ y la distribución de las tensiones tangenciales a lo largo de la sección recta del alma es prácticamente uniforme.

El valor de τ representa una discontinuidad al pasar del alma a las alas, debido a la variación brusca de b_1 a b .

Al considerarse la distribución de tensiones tangenciales en las alas no puede aceptarse la hipótesis de distribución uniforme a lo largo del ancho de la sección. En realidad los valores de τ dados por la expresión de Jourawsky sólo son válidos para los puntos del alma, mientras que en las alas la tensión tiene una variación más complicada.

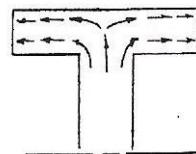


Fig. 7

Las τ verticales sólo existen en un breve tramo alrededor de la unión con el alma, debiendo anularse no sólo en la cara externa de las alas como en cualquier sección, sino en la cara interna.

Por lo tanto, en las alas, se tiene casi exclusivamente τ horizontal, es decir tensiones tangenciales casi paralelas a las caras, (Fig. 7).

De aquí se deduce que prácticamente solo el alma reacciona al esfuerzo de corte Q . Podemos expresar con bastante aproximación que:

$$\tau_{MÁX} = \frac{Q}{h_1 \cdot b_1}$$

Con resultados por defecto con respecto a los exactos de un 2%. Llegamos a la conclusión de que en las secciones doble T el esfuerzo de corte es soportado casi enteramente por el alma, y dada una pequeña contribución del alma al momento de inercia de toda la sección, el momento flector es soportado casi exclusivamente por las alas.

4. EXPRESIÓN SIMPLIFICADA DE $\tau_{MÁX}$

Para el cálculo práctico de τ en los puntos del eje neutro, donde toma el valor máximo, se usa con frecuencia una expresión más simple que la de Jourawsky, especialmente útil para el estudio de las vigas de hormigón armado.

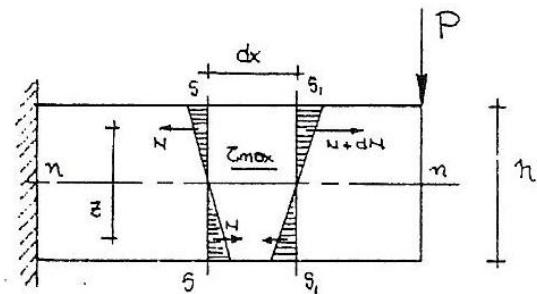


Fig. 8

N es la resultante de las tensiones de tracción y compresión de la sección s-s de ancho b y N+dN el valor análogo para la sección s₁-s₁ separada un “dx” de s-s.

Planteando la ecuación de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ del sólido por sobre el eje neutro, obtenemos:

$$\tau_{MAX} \cdot b \cdot dx + N - (N + dN) = 0 \quad ; \quad \tau_{MAX} \cdot b = \frac{dN}{dx}$$

Como “z” es el brazo del momento interno de las tracciones y compresiones, se tiene:

$$N = \frac{M}{z} \quad \text{y} \quad \frac{dN}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{z}$$

reemplazando:

$$\tau_{MAX} = \frac{Q}{b \cdot z}$$

9. B: TENSIONES DE CORTE ÚLTIMAS:

1. OBJETIVOS

- Evaluar en forma analítica las tensiones de corte en la flexión.
- Describir los hechos físicos que gobiernan el problema.
- Evaluar la capacidad última al corte, de secciones de acero.
- Diseñar y verificar las tensiones de corte en la flexión mediante un ejemplo práctico de aplicación.

2. INTRODUCCIÓN

Uno de los esfuerzos internos más importantes y característicos en las estructuras y de las partes de las mismas es el MOMENTO FLECTOR, junto a otros dependiendo de la forma de la estructura.

Toda solicitud de momento es acompañada por ESFUERZOS DE CORTE (fig. 1, 2 y 3). Existen otros casos donde además se presenta este esfuerzo, por ejemplo el caso de unir elementos estructurales (chapas, perfiles, etc.).

Al objeto de evidenciar las tensiones de corte en la flexión, se considera un caso muy elemental. Una viga simplemente apoyada (fig. 4-a).

Debido a la flexión de la viga, aparecen esfuerzos cortantes debido al cambio de longitud de sus fibras longitudinales. En la zona de momento positivo, las fibras inferiores se alargan y las superiores se acortan, en tanto en que algún lugar intermedio habrá un plano neutro en que las fibras no cambian de longitud. Debido a esas deformaciones variables, una fibra particular tiende a deslizarse sobre las fibras situadas arriba y debajo de ellas.

Si una viga de madera se construyese encimando tablones, y no se conectasen estos entre sí, la viga toma la forma que se indica en la fig. 4-b. en el plano de contacto entre los dos tablones, los mismos resbalan uno con respecto al otro.

Si se unen los dos tablones por medio de tacos de madera, el conjunto se hace solidario, deformándose como una única viga. La solidaridad de ambas vigas se opone al deslizamiento mutuo surgiendo las TENSIONES TANGENCIALES LONGITUDINALES (τ_1), también conocidas como TENSIONES DE RESBALAMIENTO.

La presentación del problema puede resultar engañosa, al mostrar por separado los dos esfuerzos cortantes (el horizontal y el vertical), en realidad el esfuerzo cortante y el rasante son simultáneos, no pudiendo separarse. Más aún no puede ocurrir uno sin el otro.

3. VARIACIÓN DE LAS TENSIONES DE CORTE A LO LARGO DE LA ALTURA DE LA SECCIÓN:

El valor de las tensiones tangenciales varía con la altura de la viga de acuerdo a la forma de la sección.

En relación a la expresión (1), para una sección determinada, el valor del esfuerzo de corte (V) y el momento del inercia (I_y), son constantes, resulta que la variación de las tensiones tangenciales dependen de la ley de variación del momento estático (S_y), solamente para el caso de secciones con ancho constante y del momento estático y del ancho "b", para secciones con anchos variables.

En la (fig. 6), se aprecia como varían las tensiones tangenciales en secciones de uso habitual en la ingeniería.

En el caso de secciones de acero laminado (T, doble T, U, cajón, etc.) para evaluar la distribución de tensiones tangenciales a lo largo del alma, se realizan las mismas hipótesis que para secciones rectangulares, es decir que las tensiones de corte son paralelas al esfuerzo de corte "V" y se distribuyen uniformemente sobre el ancho del alma del perfil.

Vemos en los casos de la (fig. 6), que los valores de las tensiones tangenciales presentan una discontinuidad al pasar del alma al ala, debido precisamente a la variación de los anchos de las alas en relación a los del alma.

Al considerar la distribución de tensiones tangenciales en las alas, no puede aceptarse la hipótesis de distribución uniforme a lo largo del ancho del ala. Los valores determinados en la expresión (1), sólo son válidos para los puntos del alma, en el ala las tensiones tienen una distribución más complicada.

Las tensiones verticales sólo existen en un breve tramo, alrededor de la unión con el alma. Por lo tanto, en las alas, se tiene casi exclusivamente tensiones tangenciales horizontales, es decir tensiones tangenciales casi paralelas a las caras de las alas.

De esta consideración se deduce que prácticamente sólo el alma toma los mayores esfuerzos de corte, por lo tanto con suficiente aproximación se podría estimar que:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{h \cdot t_w} \quad (2)$$

Donde: h : altura del alma del perfil

t_w : espesor del alma o suma de los espesores del alma.

4. ESTADOS ÚLTIMOS POR ACCIÓN DE LOS ESFUERZOS DE CORTE:

Los reglamentos de última generación, utilizan el criterio de verificación de la capacidad del elemento estructural en función de la demanda de las solicitudes. En particular, para

estructuras metálicas y de madera, las normas aplican el criterio marcado por el método LRFD. En particular para estructuras de acero el procedimiento es el siguiente:

$$R_c = \phi_v \cdot V_n$$

$$\phi_v = 0,90$$

V_n : resistencia nominal al corte, la cual depende de la esbeltez del alma y de la tensión crítica (τ_{cr}).

La verificación de corte queda satisfecha cuando se verifica que:

$$\phi_v \cdot V_n > V_u$$

V_u : esfuerzo de corte que demanda a la sección.

4.1. Tensiones tangenciales críticas:

La resistencia nominal de corte (V_n), depende de la tensión crítica (τ_{cr}), correspondiente al estado último considerado.

Debido a las tensiones tangenciales en el alma del perfil este puede plastificarse (esto corresponde a un estado límite de plastificación del alma) o bien puede pandear antes de alcanzar la tensión de fluencia de corte (esto corresponde a controlar el estado límite de pandeo local del alma).

Uno u otro fenómeno ocurrirán según sea la relación de esbeltez del alma (h/t_w). En función de la esbeltez y de un coeficiente que es función de la tensión crítica y de la fluencia, se distinguen 3 posibilidades (fig. 7).

- a) Zona Plástica: se alcanza la plastificación del alma.
- b) Zona Inelástica: el alma pandea sin alcanzar la fluencia. La tensión crítica de pandeo, supera la de proporcionalidad y el módulo "E" no es constante.
- c) Zona Elástica: el alma pandea y la sección crítica se encuentra por debajo de la de proporcionalidad, por lo que se encuentra en régimen elástico.

El otro parámetro del cual dependen las zonas, es:

$$C_v = \frac{\tau_{cr}}{\tau_y} \quad \tau_y = 0,60 \cdot F_y \quad (\text{según la teoría de Von Mises})$$

4.2. Zona Elástica:

Se recuerda que en esta zona el módulo "E" es constante. La tensión tangencial crítica de pandeo puede valorarse con la siguiente expresión (expresión sin rigidizadores de alma), dada por el reglamento.

$$\tau_{ki} = \frac{907500}{(h/tw)^2} \text{ (MPa)}$$

En zona elástica el coeficiente (C_v), sin rigidizadores de alma puede valorarse con la expresión, dada por reglamento.

$$C_v = \frac{\tau_{ki}}{\tau_y} = \frac{1512500}{(h/tw)^2 \cdot F_y}$$

4.3. Zona Inelástica:

Se aplica la "teoría de Basler" para placas sometidas a tensiones tangenciales, definiendo la tensión crítica como:

$$\tau_{cr} = \sqrt{\tau_p \cdot \tau_{ki}}$$

Donde: $\tau_p = 0,80 \cdot \tau_y$ (tensión de proporcionalidad)

$$\tau_y = 0,60 \cdot F_y$$

Reemplazando:

$$\tau_{cr} = \frac{295}{(h/tw)} \cdot \sqrt{K_v} \cdot \sqrt{F_y}$$

Donde:

K_v : coeficiente de abolladura, que para el caso de almas no rigidizadas su valor es cinco.

En zona inelástica el coeficiente (C_v), sin rigidizadores de alma puede valorarse con expresión, dada por el reglamento:

$$C_v = \frac{1100}{(h/tw)} \cdot \frac{1}{\sqrt{F_y}}$$

4.4. Zona Plástica:

Se alcanza la tensión de fluencia, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\tau_{cr} &= \tau_y = 0,60 \cdot F_y \\ C_v &= 1\end{aligned}$$

Luego teniendo el valor de la tensión crítica tangencial es posible valorar la resistencia nominal al corte:

$$V_n = \tau_{cr} \cdot A_w$$

Donde:

τ_{cr} : tensión crítica tangencial

A_w : área del alma

d : altura total de la sección transversal

t_w : espesor del alma

O bien:

$$A_w = \sum (h \cdot tw) \quad \text{área del alma en secciones compuestas}$$

h : altura del alma

t_w : espesor del alma

Por último se valora lo ya expuesto:

$$R_c = \phi_v \cdot V_n \quad ; \quad \phi_v = 0,90$$

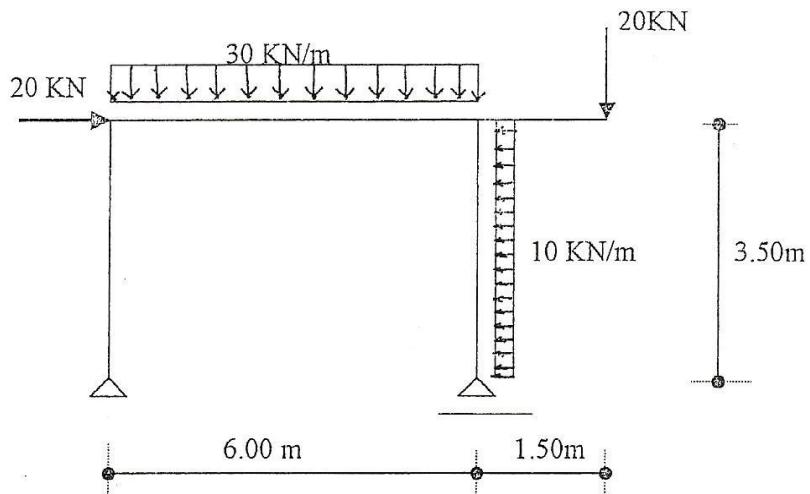
La verificación de corte queda satisfecha cuando se verifica que:

$$\phi_v \cdot V_n > V_u$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

Se debe verificar la capacidad al corte de una viga metálica, la cual forma parte de una estructura aporticada, separada entre sí 4,00m. La estructura debe permitir el desarrollo de un sistema de producción en serie y el dintel del pórtico da forma a un entrepiso cuyo destino será depósito de materiales destinado a la producción de la industria.

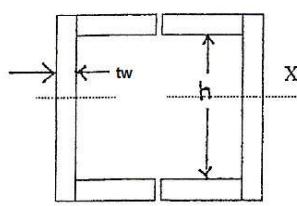
La producción exige una luz libre de 4m y una altura de 2,50m. en función de ello el diseño del pórtico está conformado por las dimensiones siguientes:



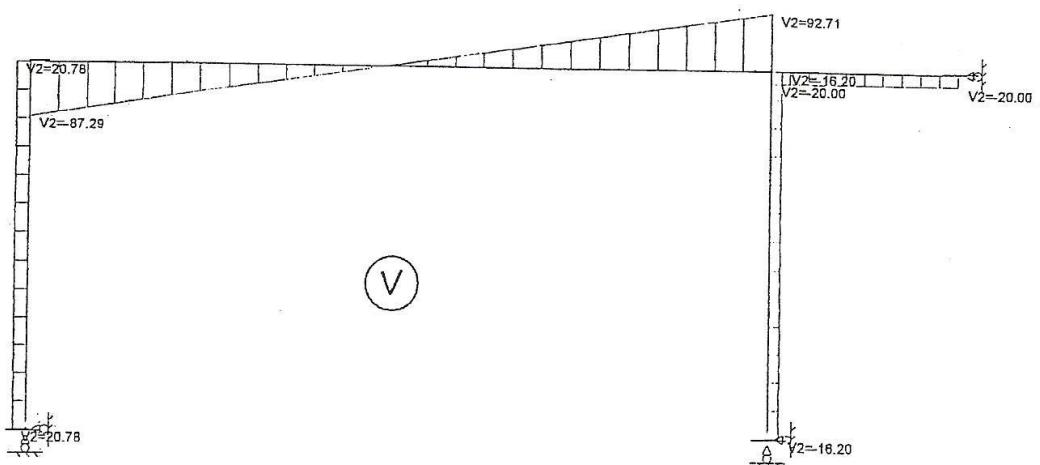
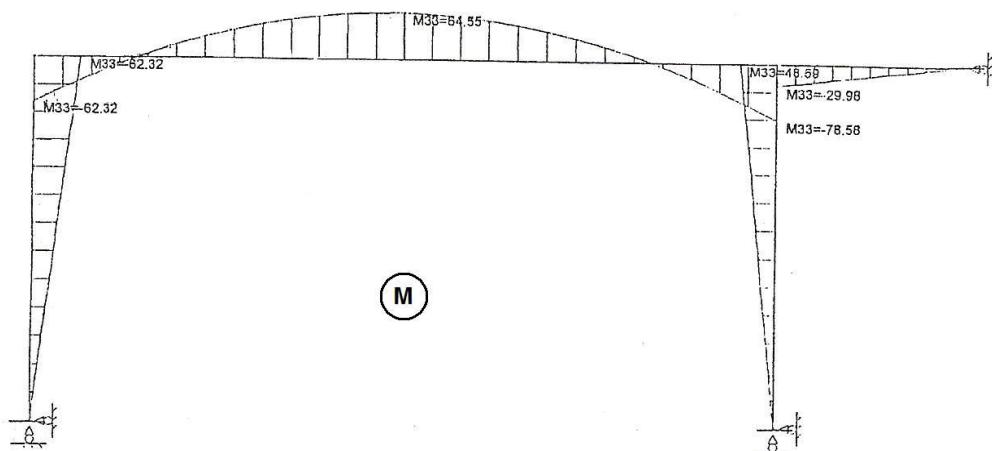
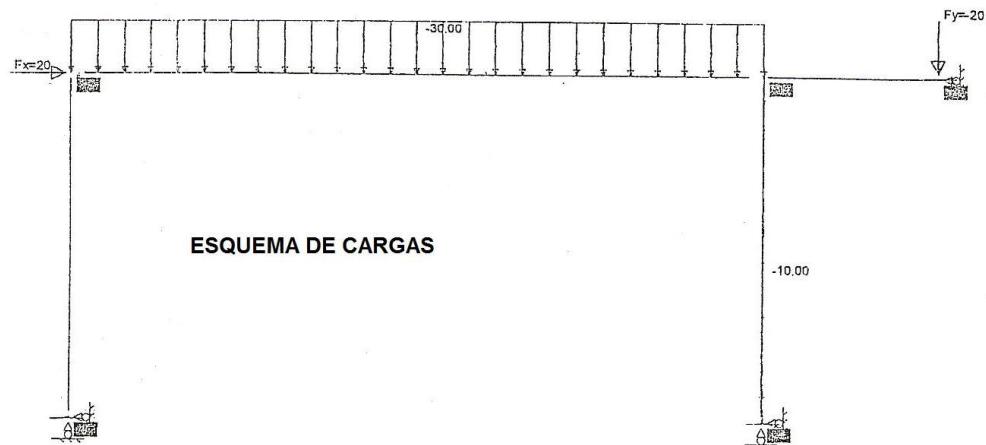
Otros datos del problema:

$$\begin{aligned} V_{\max} &= 92,71 \text{kN} = 9,27 \text{t} \\ M_{\max} &= 64,55 \text{kNm} = 6,45 \text{tm} \\ \text{Acero F24 (Fy} &= 240 \text{MPa} = 2,40 \text{t/cm}^2) \end{aligned}$$

Por condiciones de deformabilidad y de tensiones normales debidas a flexión se ha considerado como dintel del pórtico, dos perfiles "U" Nº200, cuyas características geométricas son las siguientes:



Altura Total del Perfil:	200 mm
Ancho de cada Perfil:	75 mm
Espesor del alma:	8.5 mm
Espesor del ala:	11.5 mm
Sección :	32.20 cm ²
Momento Inercia:	3822 cm ⁴
Momento Estático:	228 cm ³



1) Tensiones Tangenciales

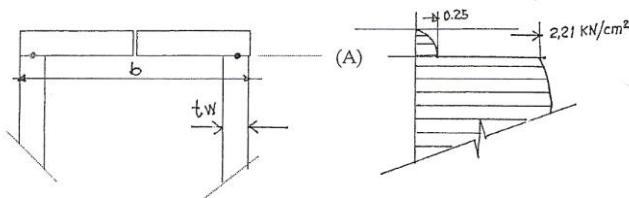
Utilizando la expresión (1) que es la completa:

$$\tau = \frac{V \cdot S_y}{I_n \cdot b} = \frac{92,71 \text{kN} \cdot 228 \text{cm}^3}{3822 \text{cm}^4 \cdot 0,85 \text{cm} \cdot 2} = 3,25 \text{kN/cm}^2 = 325 \text{kg/cm}^2$$

Si pensamos que las tensiones tangenciales máximas son tomadas por el alma del perfil, se puede utilizar la ecuación (2):

$$\tau_{\max} = \frac{V}{h \cdot t_w} = \frac{92,71 \text{kN}}{17,7 \text{cm} \cdot 0,85 \text{cm} \cdot 2} = 3,08 \text{kN/cm}^2 = 308 \text{kg/cm}^2$$

Tensiones cortantes en la zona de transición entre el ala y el alma del perfil:



a) Fibras ubicadas infinitamente por encima de la (A), pertenecientes al ala del perfil:

$$b = 7,5 \text{cm} \cdot 2 = 15 \text{cm}$$

$$S_y = (7,5 \text{cm} \cdot 1,1 \text{cm} \cdot 2) \cdot 9,42 \text{cm} = 155,43 \text{cm}^3$$

$$\tau = \frac{V \cdot S_y}{I_n \cdot b} = \frac{92,71 \text{kN} \cdot 155,43 \text{cm}^3}{3822 \text{cm}^4 \cdot 15 \text{cm}} = 0,25 \text{kN/cm}^2 = 25 \text{kg/cm}^2$$

b) Fibras ubicadas infinitamente por debajo de la (A), pertenecientes al ala del perfil:

$$b = 0,85 \text{cm} \cdot 2 = 1,7 \text{cm}$$

$$S_y = (7,5 \text{cm} \cdot 1,1 \text{cm} \cdot 2) \cdot 9,42 \text{cm} = 155,43 \text{cm}^3$$

$$\tau = \frac{V \cdot S_y}{I_n \cdot b} = \frac{92,71 \text{kN} \cdot 155,43 \text{cm}^3}{3822 \text{cm}^4 \cdot 1,7 \text{cm}} = 2,21 \text{kN/cm}^2 = 221 \text{kg/cm}^2$$

2) Verificación del estado último

Se calcula la esbeltez del ala del perfil:

$$\frac{h}{t_w} = \frac{17,7 \text{cm}}{0,85 \text{cm}} = 20,82$$

Se calcula la esbeltez que limita el campo plástico del campo inelástico:

$$\lambda_p = \frac{1100}{\sqrt{F_y}} = \frac{1100}{\sqrt{240}} = 71$$

Entonces: **20,82 < 71**

Por lo tanto la viga al corte trabaja en zona plástica, lo que implica que el estado límite a verificar es "falla por plastificación del alma".

En consecuencia la tensión crítica resulta:

$$\tau_{cr} = \tau_y = 0,60 \cdot F_y = 0,60 \cdot 240 MPa = 144 MPa = 1440 kg/cm^2$$

Por lo tanto el coeficiente que relaciona la tensión crítica sobre la tensión de fluencia resulta:

$$C_v = \frac{\tau_{cr}}{\tau_T} = 1$$

Por lo tanto la resistencia nominal:

$$V_n = \tau_{cr} \cdot A_w = 144 MPa \cdot (17,7 cm \cdot 0,85 cm \cdot 2) / 10 = 433 kN$$

Resistencia de diseño al corte:

$$R_c = \phi_v \cdot V_n = 0,90 \cdot 433 kN = 389,7 kN$$

Entonces: **389,7 kN >> Vu = 92,71 kN => verifica**

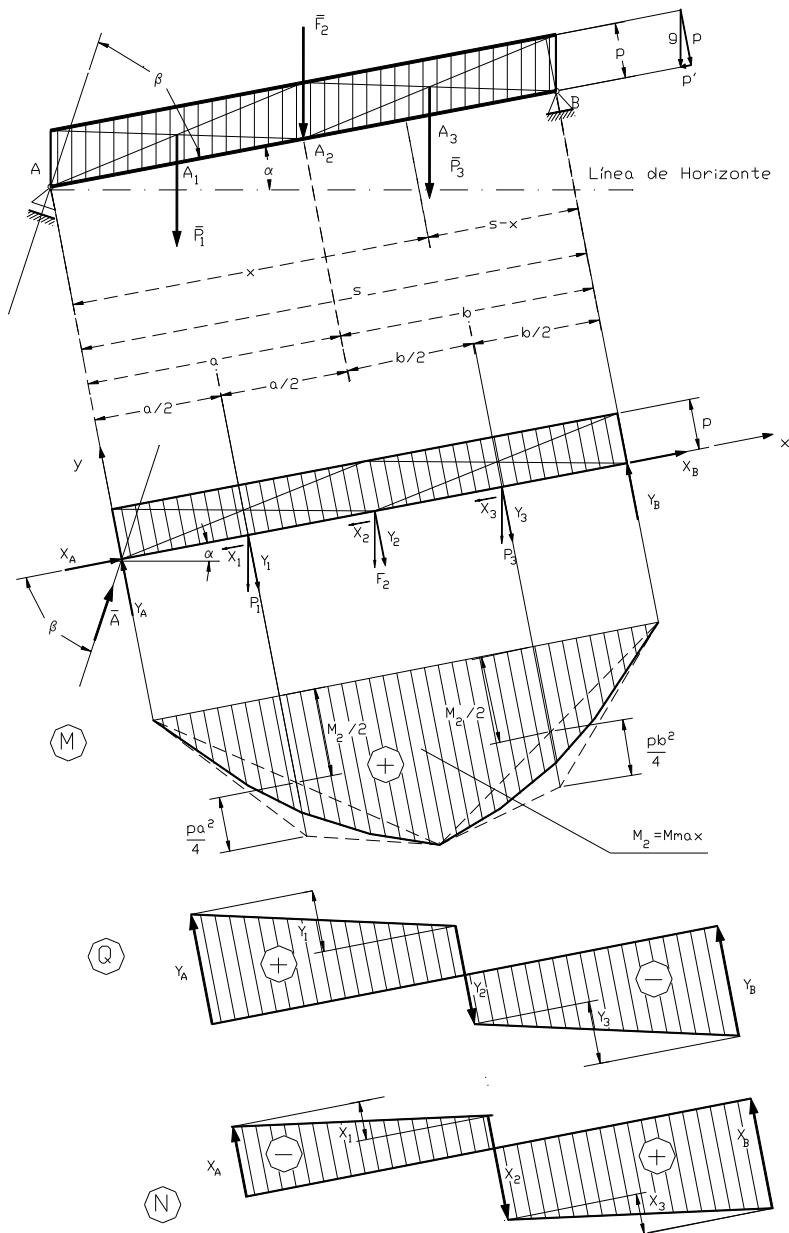


Fig. 1 viga isostáticamente sustentada

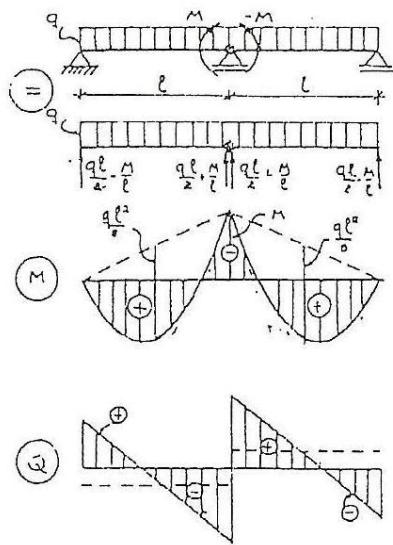


Fig. 2 vigas continuas de varios tramos

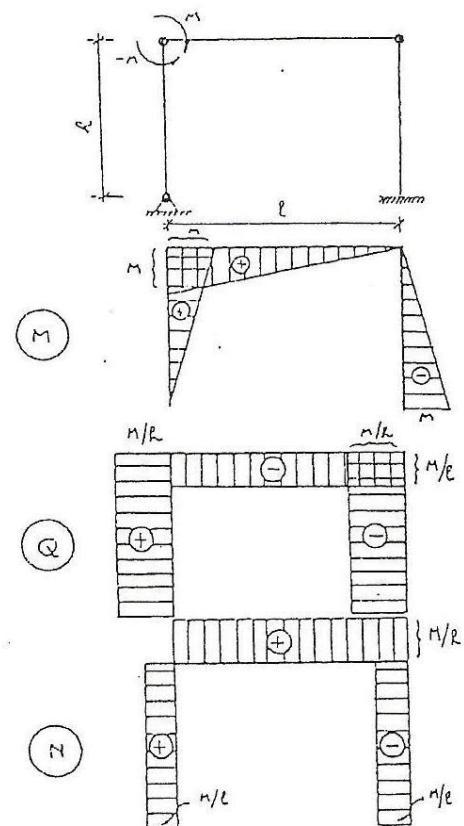
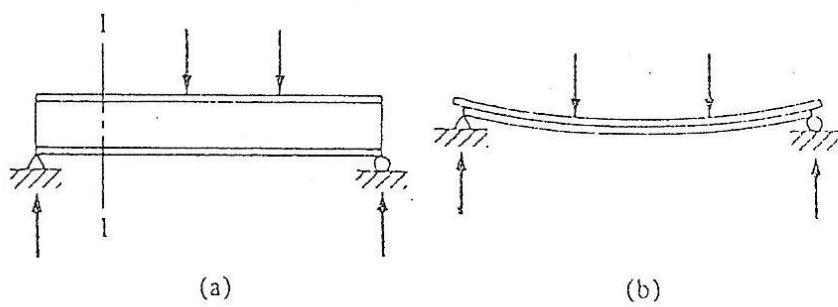
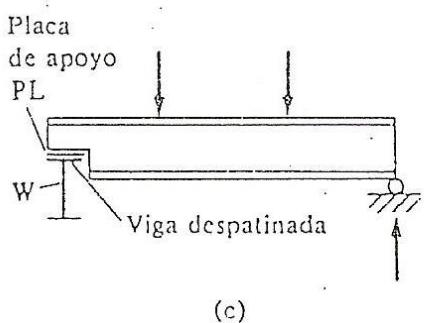


Fig. 3 estructuras aporticadas



(a)

(b)



(c)

Fig. 4
viga isostáticamente sustentada

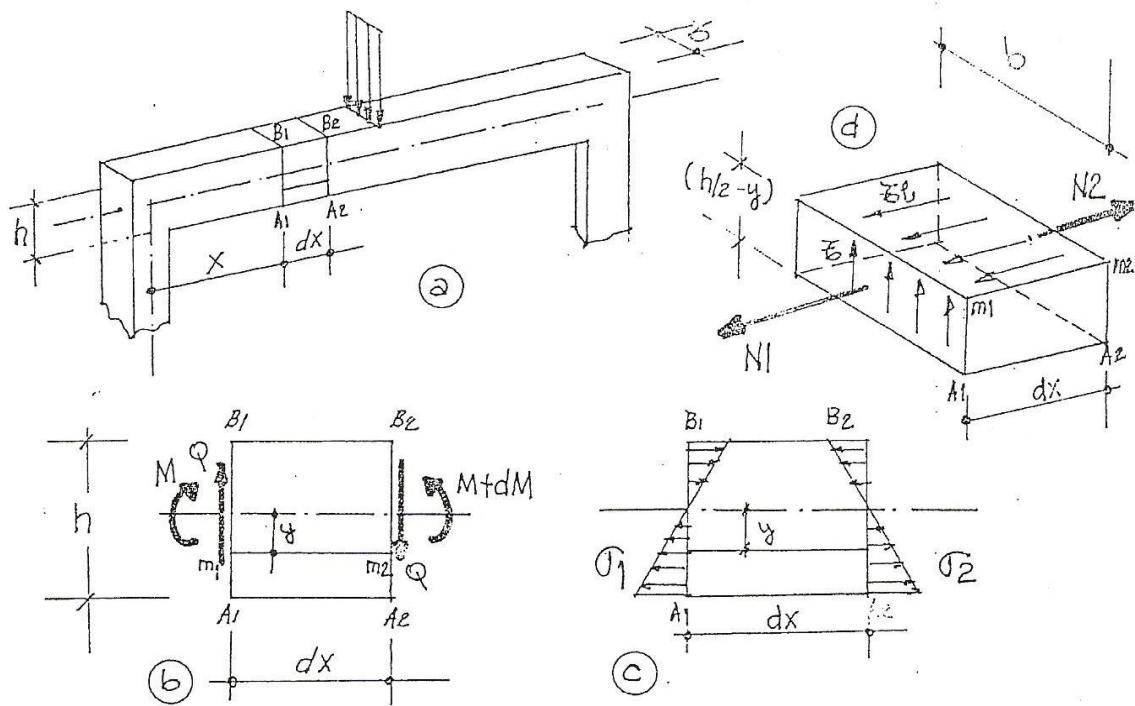
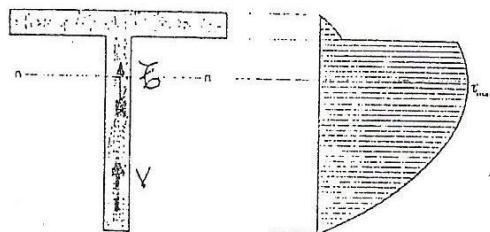
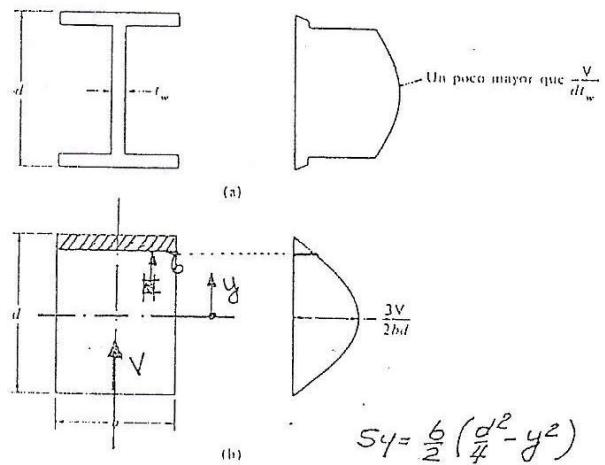


Fig. 5
tensiones de corte en la flexión



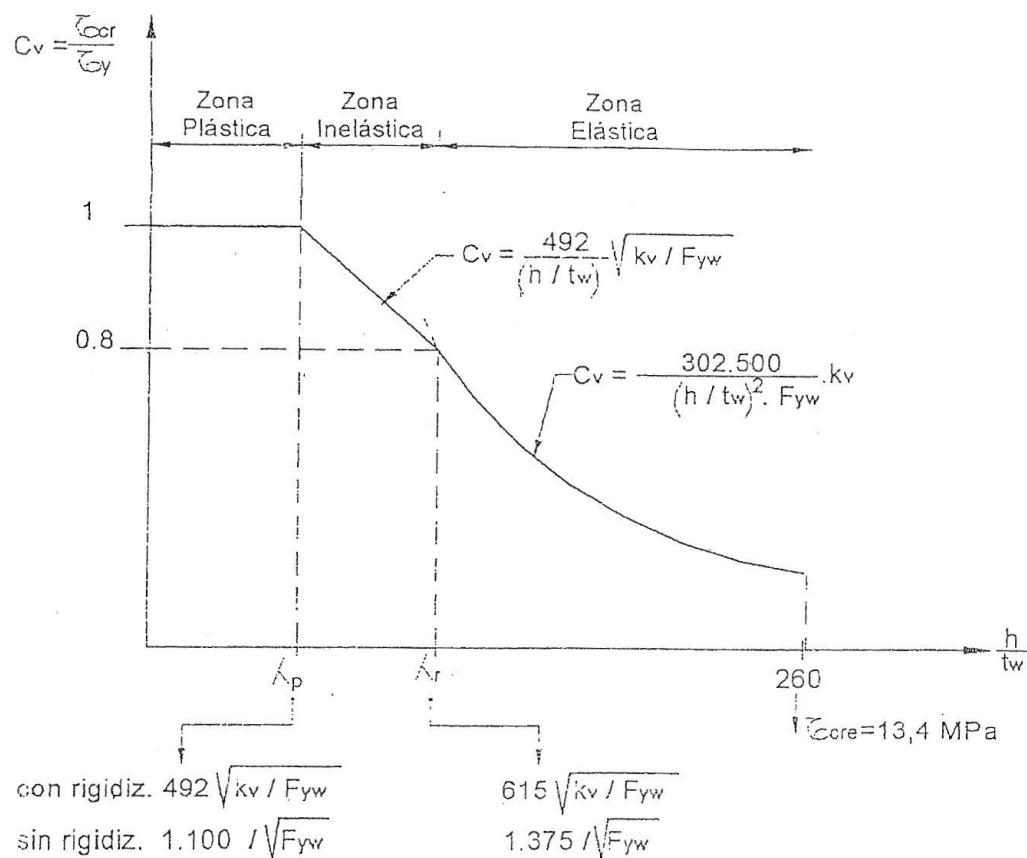
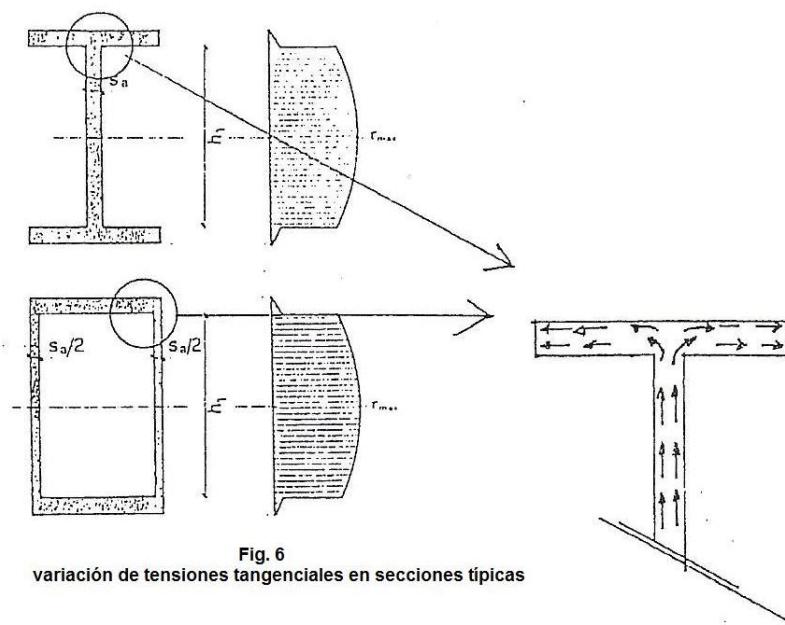


Fig. 7
zonas para verificar la capacidad nominal al corte

UNIDAD 10: DEFORMACIONES EN LA FLEXIÓN

INTRODUCCIÓN

Los elementos estructurales deben cumplir con condiciones de estabilidad, resistencia y rigidez. La condición de ESTABILIDAD involucra que la estructura debe conservar una forma inicial determinada de equilibrio elástico, bajo la acción de todas las fuerzas exteriores (activas y reactivas).

La condición de RESISTENCIA indica que las tensiones máximas no deben superar las tensiones límites del material, con un adecuado margen de seguridad.

$$(\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}; \tau_{\max} \leq \tau_{adm})$$

La condición de RIGIDEZ, que da la capacidad de la estructura o de sus elementos de a cambiar su forma ante la acción de cargas exteriores (cambio de forma y dimensiones).

En síntesis, no solo las tensiones máximas deben ser menores que las admisibles, sino que además las deformaciones deben estar por debajo de los valores fijados de acuerdo con las exigencias para la estructura. En algunos casos los reglamentos y en otros el destino de la pieza estructural fijan los valores máximos de deformaciones.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA LÍNEA ELÁSTICA

MARCO TEÓRICO

Se denomina elástica de deformación, línea elástica o simplemente elástica, a la curva que forma el eje de la viga después de producida la deformación.

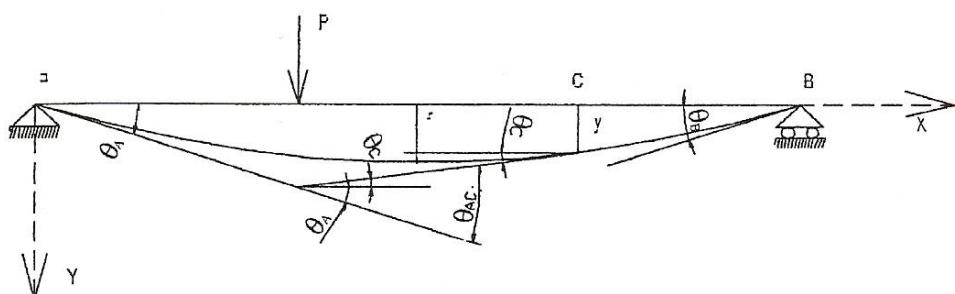


Fig 1

Referida la elástica a un sistema de ejes coordenados X, Y, donde el eje X coincide con el eje de la viga antes de producirse la deformación; las ordenadas Y representan las flechas (ascensos y descensos) de los baricentros de las diferentes secciones transversales por efecto de las cargas actuantes. Designamos con f la flecha máxima.

Se llama rotación absoluta de una sección transversal al ángulo que forma la sección, luego de producida la deformación, respecto a su posición original. Dicho ángulo es igual al que forma la tangente a la elástica (en el punto correspondiente) con la horizontal.

Se conoce como rotación relativa entre dos secciones, el ángulo que una vez producida la deformación forman dos secciones entre sí, o bien el formado por las respectivas tangentes a la elástica. La rotación relativa entre dos secciones es igual a la diferencia entre sus giros

absolutos. Tomamos como convención de signos para las rotaciones positivas, sentido horario, esto es:

$$\theta_{A-C} = \theta_c - \theta_A = -\theta_c - (\theta_A) = -(\theta_c + \theta_A)$$

En el estudio de la flexión pura de una barra prismática vimos que la curvatura de la viga es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (\text{eq. 1})$$

en la flexión pura $M = \text{cte}$ es decir que el eje de la viga se curva según un arco circular (elástica circular).

En el caso de vigas flexadas por cargas actuando en un plano de simetría, M varía a lo largo de la longitud de la viga. Para este tipo de cargas se admite que la expresión anterior es válida en cada sección transversal. Es decir que la curvatura $1/\rho$ varía a lo largo de la viga proporcionalmente a M .

Para expresar la ecuación de la línea elástica consideremos un tramo de viga curvada. Trazando los ejes X e Y por un punto O cualquiera de la línea elástica, de modo que X coincida con el eje originalmente recto de la viga, positiva a la derecha y hacia abajo.

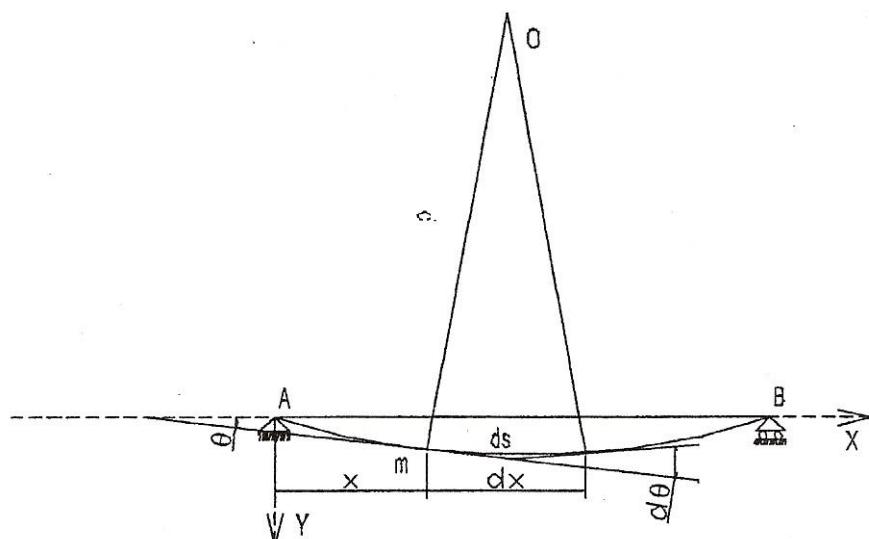


Fig 2

Dos secciones planas y adyacentes, separadas una longitud dx sobre una viga inicialmente recta, giran un ángulo $d\theta$ una respecto a la otra. El arco de longitud ds medido a lo largo de la elástica entre las dos secciones es igual a $ds = \rho d\theta$ siendo ρ el radio de curvatura de la elástica en ese punto, será entonces:

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (\text{eq. 2})$$

Con referencia al signo, debe observarse que el momento flector se toma positivo cuando produce tracción en la fibra inferior, o cuando hace que su centro de curvatura esté por encima de ella.

En este caso el ángulo θ disminuye a medida que el punto m se mueva sobre la elástica de A a B.

Por lo tanto, a todo incremento positivo ds corresponde uno negativo $d\theta$, teniendo en cuenta este ultimo aspecto, se modifica la eq. 2, de forma tal que resulta:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds} \quad (\text{eq. 3})$$

En la mayoría de los casos prácticos, las flechas son pequeñas en comparación con la longitud total de la barra, por lo que no se comete error apreciable suponer que:

$$ds \approx dx \quad \text{y} \quad \theta \approx \operatorname{tg}(\theta) = \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 3 resulta:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{eq. 4})$$

Luego recordamos la expresión indicada en la ecuación 1, la **ecuación diferencial de la elástica** resulta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I} \quad (\text{eq. 5})$$

MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

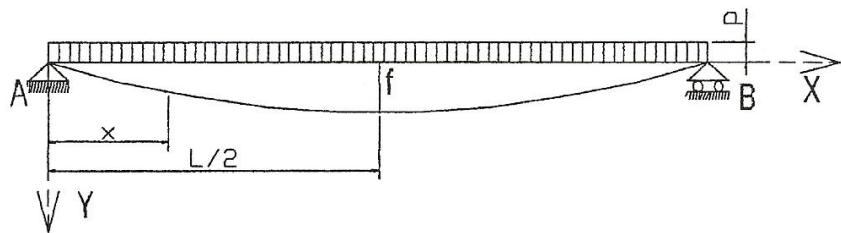
En este método, el momento flector M se expresa en función de "x" y luego se hace una doble integración de la ecuación diferencial de la línea elástica para obtener la flecha "y".

Cada integración introduce una constante de integración, cuyos valores se determinan a partir de las condiciones de contorno o de borde del problema, es decir en función del tipo de vínculo del miembro estructural.

Con la primera integración se obtiene el valor de la rotación θ .

Con el siguiente ejemplo de aplicación se aclararán los conceptos.

Ejemplo: viga simplemente apoyada con carga distribuida uniformemente.



En la sección X el momento flector vale:

$$M(x) = \frac{p \cdot L}{2} \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} \quad (\text{eq.6})$$

Reemplazando en la ecuación diferencial de la elástica (eq. 5):

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p \cdot L}{2} \cdot x + \frac{p \cdot x^2}{2} \quad (\text{eq.7})$$

Integrando la ecuación anterior:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{p}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 \quad (\text{eq.8})$$

Volviendo a integrar la ecuación anterior:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{p \cdot L}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{p}{6} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (\text{eq.9})$$

De las condiciones de contorno se verifica que para:

$$x = L/2 \quad ; \quad \theta = \frac{dy}{dx} = 0 \quad ;$$

entonces de la eq. 8 se deduce que:

$$C_1 = \frac{p \cdot L^3}{24}$$

La constante C₂ se puede deducir de la ecuación 9, sabiendo que para:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

Entonces reemplazando los valores de C₁ Y C₂ en la ecuación 9.

$$y = \frac{p \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} (L^3 - 2 \cdot L \cdot x^2 + x^3)$$

La flecha máxima se obtiene para x = L/2;

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{p \cdot L^4}{E \cdot I}$$

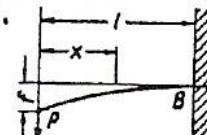
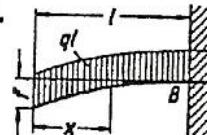
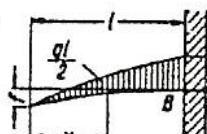
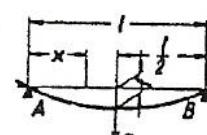
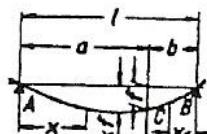
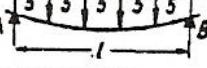
El signo positivo muestra que la flecha es del mismo sentido que el eje Y positivo.

La máxima rotación se dará para $x = 0$.

$$\theta_A = \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

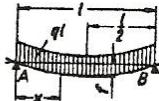
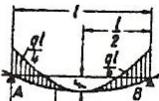
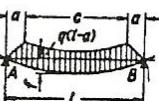
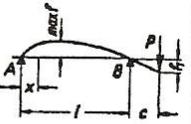
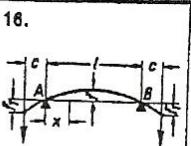
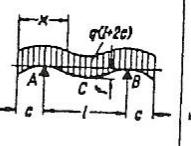
ESTÁTICA

Vigas en voladizo, vigas apoyadas en dos puntos

Solicitud	Reacciones en los apoyos	Momentos de flexión	Flecha
1. 	$B = P$	$M_x = -Px$ $\min M = -Pl$	$f = \frac{Pb^3}{3EI}$
2. 	$B = ql$	$M_x = -\frac{qx^2}{2}$ $\min M = -\frac{q l^3}{2}$	$f = \frac{q l^4}{8EI}$
3. 	$B = \frac{ql}{2}$	$M_x = -\frac{qx^3}{6l}$ $\min M = -\frac{q l^4}{8}$	$f = \frac{q l^4}{30EI}$
4. 	$A = B = \frac{P}{2}$	$M_x = \frac{Px}{2}$ $\max M = \frac{Pl}{4}$	$f = \frac{Pl^3}{48EI}$ (pág. 71)
5. 	$A = \frac{Pb}{l}$ $B = \frac{Pa}{l}$	Para $AC: M_x = \frac{Pbx}{l}$ Para $BC: M_{x_1} = \frac{Pax_1}{l}$ $\max M = \frac{Pab}{l}$	$f = \frac{P}{3EI} \cdot \frac{a^3 b^3}{l}$ max f en $x = a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{b}{a}}$
6. 	$A = B = P$	$\max M = \frac{Pl}{3}$	$f = \frac{23P^3}{648EI}$ (pág. 71)
7. 	$A = B = \frac{3P}{2}$	$\max M = \frac{Pl}{2}$	$f = \frac{19P^3}{384EI}$
8. 	$A = B = 2P$	$\max M = \frac{3Pl}{5}$	$f = \frac{63P^3}{1000EI}$

Observación. La sección peligrosa se halla situada en B , en los casos 1, 2 y 3; en los casos 4 y 7, en el centro de la viga; y en el caso 5, debajo de P . En el caso 8 y 8 son peligrosas todas las secciones situadas entre las dos cargas concentradas. Respecto a los valores de E , véase página 71.

9. Cuando existen cinco o más cargas alejadas de igual valor y uniformemente repartidas, se pueden sustituir por el valor equivalente de carga repartida $q = \frac{q_1 e^4}{l}$ (caso de carga 10).

Solicitud	Reacciones en los apoyos	Momentos de flexión	Flechas
10.		$A = B = \frac{q l}{2}$ $M_x = \frac{q x}{2} (l - x)$ $\max M = \frac{q l^3}{8}$	$f = \frac{5 q^4}{384 EI}$ (pág. 71) para techos de madera con q , en kg/m^2 $f = \frac{q_1 e^4}{7,68 I}$ (e = distancia entre vigas, en m)
11.		$A = \frac{1}{6} q l$ $B = \frac{1}{3} q l$ $M_x = \frac{q l x}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\max M = \frac{1}{9\sqrt{3}} q l^3 = 0,064 q l^3$	$\max f = 0,00652 \frac{q l^4}{EI}$ en $x = 0,5193 l$
12.		$A = B = \frac{q l}{4}$ $M_x = \frac{q l x}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2}\right)$ $\max M = \frac{q l^3}{24}$	$f = \frac{3 q^4}{640 EI}$
13.		$A = B = \frac{q l}{4}$ $M_x = \frac{q l x}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\max M = \frac{q l^3}{12}$	$f = \frac{q l^4}{120 EI}$
14.		$A = B = \frac{q(l-a)}{2}$ $\max M = \frac{q}{24} (3l^3 - 4a^2)$	$f \approx \frac{q(3l^4 + 4a^2l^2)}{208 EI}$
15.		$A = -\frac{Pc}{l}$ $B = \frac{P(l+c)}{l}$ $M_x = Ax = -\frac{Pcx}{l}$ $M_B = -Pc$	$\max f = -\frac{P l^2}{9EI} \frac{c}{\sqrt{3}}$ para $x = 0,5775 l$ $f_1 = \frac{P}{3EI} (l+c)c^2$
Observación. La sección peligrosa se halla en el centro de la viga en los casos 10, 12 y 13 y 14, y en el caso 11, en $x = 0,5775 l$, en el caso 15 en B . En el caso 9 es aplicable lo dicho para los casos 6 y 7.			
16.		$A = B = P$ $M_A = M_B = -Pc$	$f = \frac{P l^2 c}{8EI}$ $f_1 = \frac{P c^2}{3EI} \left(c + \frac{3l}{2}\right)$
Se aplican las mismas fórmulas en caso de que los apoyos se hallen en los extremos de la viga y los puntos de aplicación de las cargas concentradas sean los A y B . Entonces la flecha total, en el centro de la viga, valdrá $f + f_1 = \frac{P c}{24 EI} [3(l+2c)^2 - 4c^2]$			
17.		$M_x = \frac{q(l+2c)x}{2} \left(1 - \frac{c}{x} - \frac{x}{l+2c}\right)$ para $x \geq c$ tendremos que $M_x = -\frac{qx^2}{2}$ $M_A = M_B = -\frac{qc^2}{2}$ $M_C = \frac{q l^2}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{c^2}{l^2}\right)$ Para $c = 0,3536 l$ tendremos que $M_A = M_C = \pm \frac{q l^3}{16}$	$f = \frac{q l^4}{16 EI}$ $\left[\frac{5}{24} - \frac{c^4}{l^4}\right]$

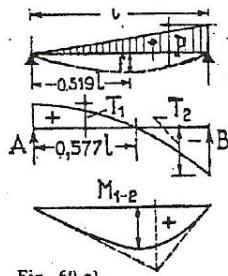
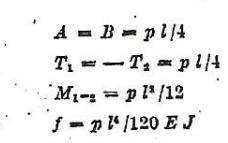


Fig. 60 a).

$$\begin{aligned} A &= p l / 6 = T_1 \\ B &= p l / 3 = -T_2 \\ M_{1-2} &= +0,06415 p l^4 \\ T_x &= A \left(1 - \frac{3 x^2}{l^2} \right) \\ M_x &= A x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \\ f &= 0,00652 p l^4 / E J \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= B = p l / 4 \\ T_1 &= -T_2 = p l / 4 \\ M_{1-2} &= p l^4 / 12 \\ f &= p l^4 / 120 E J \end{aligned}$$

Fig. 60 b).

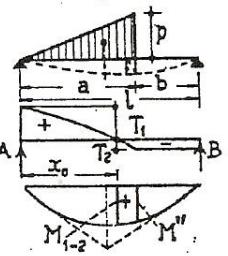
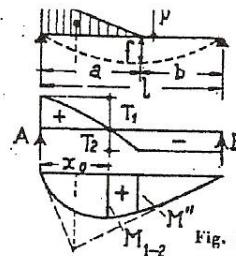


Fig. 61 a).

$$\begin{aligned} A &= p a (a + 3 b) / 6 l = T_1 \\ B &= p a^2 / 3 l = -T_2 \\ M_{1-2} &= p a^2 \beta^3 / 3 \\ \beta &= \sqrt{\frac{a + 3 b}{3 l}} ; \quad x_0 = a \beta \\ M' &= p a^2 b / 3 l \\ f &= p a^2 b (a + 5 b) / 45 l E J \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= p a (2 a + 3 b) / 6 l = \\ B &= p a^2 / 6 l = -T_2 \\ \beta &= a \sqrt{\frac{a}{3 l}} ; \quad x_0 = a - \\ M_{1-2} &= p a^2 (3 b + 2 \beta) / 18 \\ M' &= p a^2 b / 6 l \\ f &= \frac{p a^2 b (7 a + 20 \beta)}{360 l E J} \end{aligned}$$

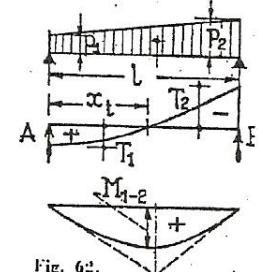
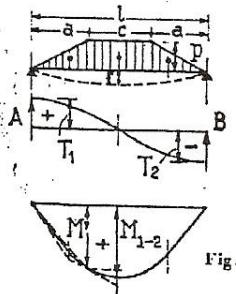


Fig. 61 b).

$$\begin{aligned} A &= (p_2 + 2 p_1) l / 6 \\ B &= (p_1 + 2 p_2) l / 6 \\ T_1 &= + ; \quad T_2 = -B \\ a &= p_2 / p_1 \\ \beta &= 0,577 \sqrt{1 + a + a^2} \\ x_t &= (\beta - 1) l / (a - 1) \\ M_{1-2} &= A x_t - \\ &- \frac{x_t^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{6 l} x_t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= B = p (a + c) / 2 = \\ &-T_1 = -T_2 \\ M' &= p a (3 l - 4 a) / 6 \\ M_{1-2} &= p (3 l^2 - 4 a^2) / 24 \\ f &= \frac{p (5 l^4 - 8 a^2 l^2 + 3,2 a^4)}{384 E J} \end{aligned}$$

Fig. 63.

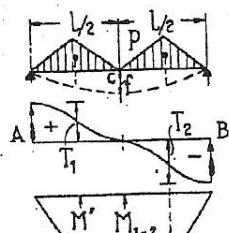


Fig. 64.

$$\begin{aligned} A &= B = p l / 4 \\ T_1 &= -T_2 = p l / 4 \\ M' &= 0,0521 p l^4 \\ M_{1-2} &= p l^4 / 10 \\ f_r &= 0,00084 p l^4 / E J \end{aligned}$$

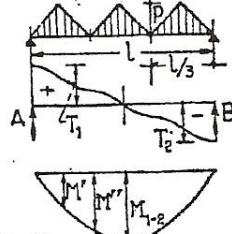


Fig. 65.

$$\begin{aligned} A &= B = p l / 4 \\ T_1 &= -T_2 = p l / 4 \\ M' &= p l^4 / 27 \\ M'' &= p l^4 / 18 \\ M_{1-2} &= 0,0648 p l^4 \end{aligned}$$

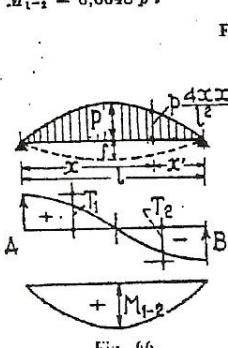


Fig. 66.

$$\begin{aligned} A &= p l / 3 = B = T_1 = -T_2 \\ M_{1-2} &= 0,1042 p l^4 \\ T_x &= \\ &= A \left(1 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) \\ M_x &= \\ &= A x \left(1 - \frac{2 x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) \\ f &= 0,01059 p l^4 / E J \end{aligned}$$

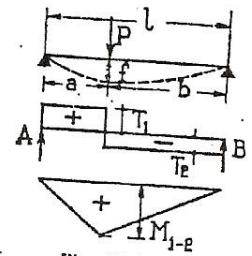
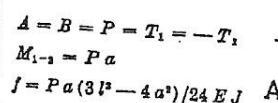


Fig. 67 a).

$$\begin{aligned} A &= P b / l ; \quad B = P a / l \\ T_1 &= A ; \quad T_2 = -B \\ M_{1-2} &= + P a b / l \\ f &= \frac{1}{3} \frac{P a^2 b^3}{E J l} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= B = P = T_1 = -T_2 \\ M_{1-2} &= P a \\ f &= P a (3 l^2 - 4 a^2) / 24 E J \end{aligned}$$

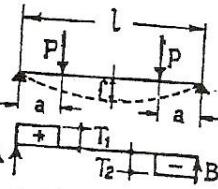
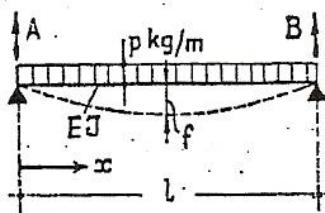


Fig. 67 b).

$$\begin{aligned} A &= -P b / l ; \quad B = P (b + l) / l \\ T_1 &= -P b / l ; \quad T_2 = +P \\ M_{1-2} &= -P b \\ f &= -P b l^4 / 15,59 E J \\ f_P &= P b^2 (l + b) / 3 E J \end{aligned}$$

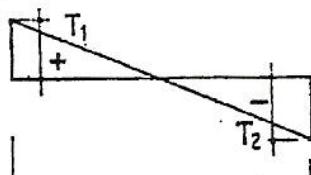
Fig. 67 c).

1. TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA AGLI ESTREMI.



$$A = B = p l / 2$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{E J}$$



$$T_1 = A = p l / 2$$

$$T_2 = -B = -p l / 2$$

$$T_x = p (l - 2x) / 2$$

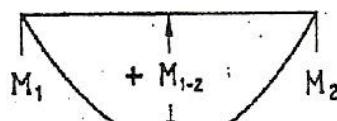
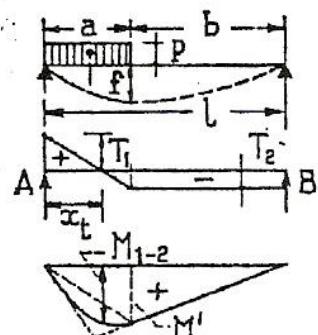


Fig. 58.



$$A = p a (a + 2b) / 2l$$

$$B = p a^2 / 2l$$

$$T_1 = +A; \quad T_2 = -B$$

$$x_t = A / p$$

$$M_{1-2} = +A^2 / 2p; \quad M' = Bb$$

$$f = p a^3 b (0.25a + b) / 6l E J$$

Fig. 59 a).

$$A = B = p a$$

$$T_1 = -T_2 = A$$

$$M = p a^2 / 2$$

$$f = p a^4 (3l^2 - 2a^2) / 48 E J$$

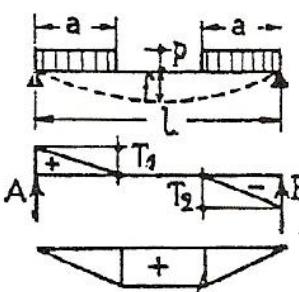
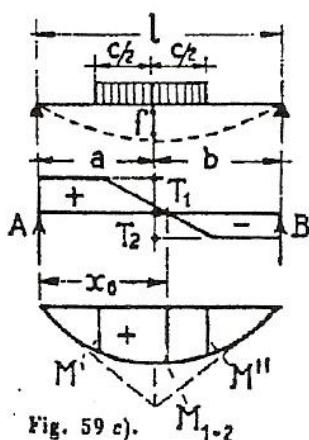


Fig. 59 b).



$$A = p b c / l; \quad B = p a c / l$$

$$T_1 = A; \quad T_2 = -B$$

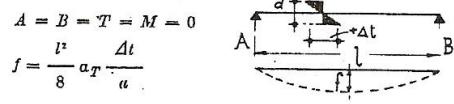
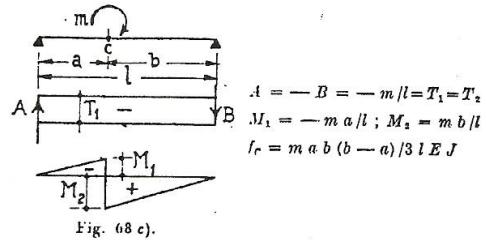
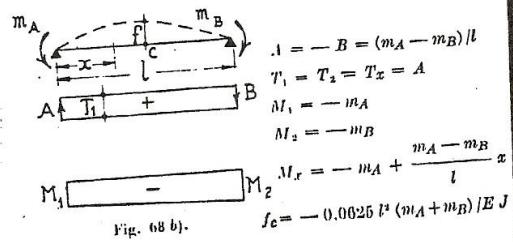
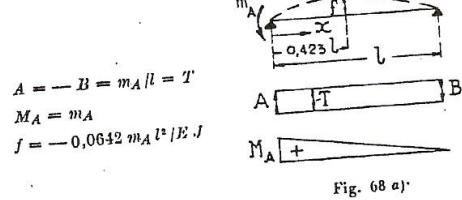
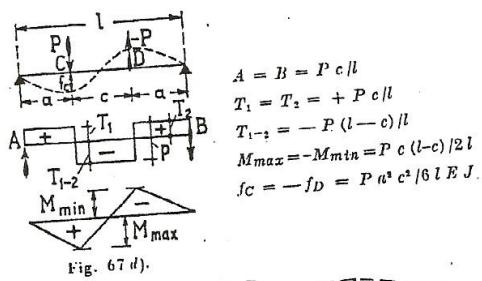
$$M_{1-2} = p a b c (2l - c) / 2l^2$$

$$x_t = a + \frac{c(l-a)}{2l}$$

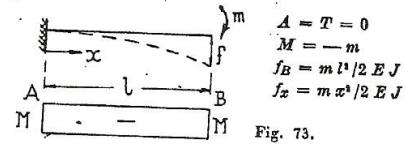
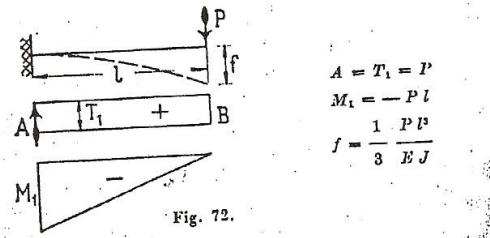
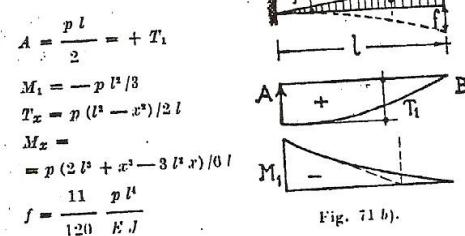
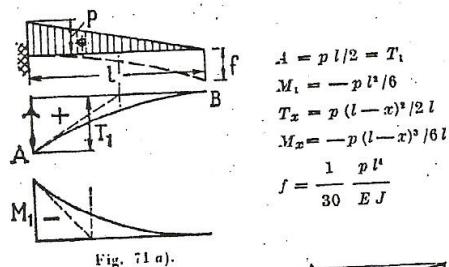
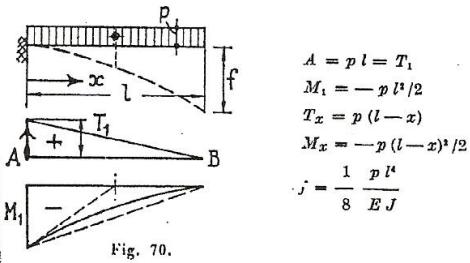
$$M' = p b c (2a - c) / 2l$$

$$M'' = p a c (2b - c) / 2l$$

$$f = \frac{p c}{384 l E J} \times \\ \times (l c^3 - 16 a b c^2 + 128 a^2 b^2)$$



2. MENSOLE



TEMA 11: INESTABILIDAD ELÁSTICA

11.A FENOMENO DE PANDEO 11.B MÉTODOS DE VERIFICACIÓN

1. PANDEO

El estudio del fenómeno de pandeo es de gran importancia en el diseño estructural, ya que puede ocurrir en piezas comprimidas que se produzca la destrucción de las mismas, aún con tensiones relativamente bajas. La falla no ocurre por un agotamiento de la resistencia del material, sino por una pérdida del equilibrio interno que se ha hecho inestable. El fenómeno de pandeo está ligado a un proceso de equilibrio inestable.

Este proceso por el cual el equilibrio se hace instable, se puede producir aún con tensiones de compresión simple menores que las admisibles para este estado.

1.1. CARGA ESTÁTICA

Consideremos una columna biarticulada sobre la que aplicamos una fuerza horizontal H en su punto medio, que origina una flecha f (figura 1.a).

Si agregamos dos fuerzas axiales P en los extremos de la columna (figura 1.b) y hacemos que H disminuya simultáneamente con el aumento de P de manera que la flecha f en el centro no varíe, el momento flector en el punto medio será:

$$M = \frac{H}{2} \frac{l}{2} + P \cdot f$$

Y en el límite, cuando H ha disminuido hasta anularse (figura 1.c), será:

$$M = P_k \cdot f$$

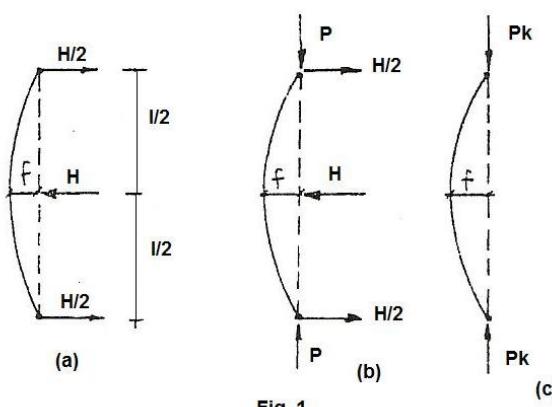


Fig. 1

Entonces P_k es la carga crítica necesaria para mantener la columna deformada sin empuje lateral alguno. Un pequeño incremento de P sobre este valor crítico, hará que aumente la

flecha f , lo que haría incrementar M , con el cual volverá a aumentar f y así sucesivamente hasta que la columna se rompe por pandeo.

Por el contrario, si P disminuye ligeramente por debajo de su valor crítico, disminuye la flecha, lo que a su vez hace disminuir M , vuelve a disminuir f , etc. y la columna termina por enderezarse por completo.

Así la carga crítica puede interpretarse como la carga axial máxima a la que puede someterse una columna permaneciendo recta, aunque en equilibrio inestable, de manera que un pequeño empuje lateral haga que se deforma y quede pandeada, como en la figura 1.c.

2. FÓRMULA DE EULER

Euler realizó un análisis teórico de la carga crítica para columnas esbeltas basado en la ecuación diferencial de la elástica:

$$E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

Si designamos $y = f$ tendremos que:

- Momento exterior de la columna
- Momento interior de la columna

$$P \cdot f = P \cdot y = M_e$$

$$E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2} = M_i$$

Al producirse $P = P_k$ será $M_e = -M_i$.

$$-E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2} = P_k \cdot y \quad \text{donde } P_k : \text{carga crítica}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P_k}{E \cdot I} y = -k^2 \cdot y \quad \text{haciendo } k^2 = \frac{P_k}{E \cdot I} \quad (1)$$

La solución general de esta ecuación diferencial es:

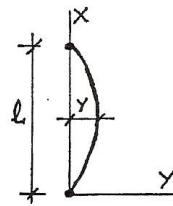
$$y = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) \quad \text{efectivamente}$$

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot A \cdot \cos(k \cdot x) - k \cdot B \cdot \sin(k \cdot x) \quad y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x) - k^2 \cdot B \cdot \cos(k \cdot x) = -k^2 [A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x)]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 \cdot y \quad \text{con lo que queda verificada la solución propuesta}$$

De las condiciones de vínculo, cuando $x = 0 ; y = 0$.



$$A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) = 0 \quad \text{siendo } \begin{cases} \sin(0) = 0 \\ \cos(0) = 1 \end{cases}, \text{ será } A \neq 0 \text{ y } B = 0$$

$$y = A \cdot \sin(kx)$$

Cuando $x = l$; $y = 0$; $y = A \cdot \sin(k \cdot x) = 0$; $A \neq 0$; $\sin(k \cdot l) = 0$; $k \cdot l = \pi$; $k = \frac{\pi}{l}$; $k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$; de (1)

$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P_k}{E \cdot I}$; entonces la carga crítica será:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}$$

En la que vemos que P_k depende de:

- a. Condiciones geométricas de la pieza ($I_{\min}; l$)
- b. Material estructural (supone $E = cte$)
- c. Condiciones de apoyo

La columna tiende a pandearse siempre en la dirección en la cual es más flexible. Como la resistencia a la flexión varía con el momento de inercia, el valor de I en la fórmula de Euler es siempre el menor momento de inercia de la sección recta. La tendencia al pandoe tiene lugar con respecto al eje principal de momento de inercia mínimo de la sección recta.

El valor deducido para P_k corresponde a una columna biarticulada (figura 2. II) en que la longitud de pandoe $l_k = l$.

Para distintos tipos de vínculos que pueden presentarse variará el valor de P_k .

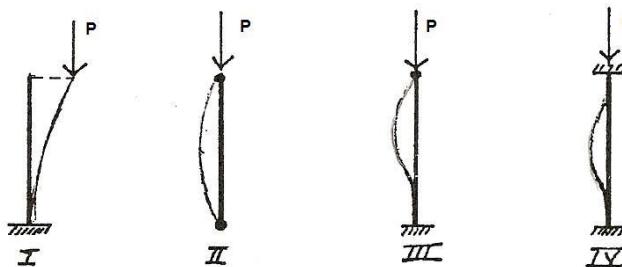


Fig. 2

La longitud de pandoe es la distancia existente entre dos puntos de inflexión consecutivos de la pieza deformada, por lo que para cada tipo de vínculo será, usualmente:

$$III: \quad l_k = 0,8 \cdot l$$

$$IV: \quad l_k = 0,8 \cdot l$$

2.1. COEFICIENTE DE SEGURIDAD

Para el cálculo hay que cubrirse con un coeficiente de seguridad, es decir que tenemos que tomar una carga admisible y no la crítica, para estar lejos de la posibilidad de que se produzca el fenómeno de pandeo.

Tendrá que ser:

$$I_{\min} \geq \frac{P_k \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} S \quad S : \text{coeficiente de seguridad}$$

Para que no se produzca pandeo, la rigidez de la pieza tiene que ser mayor que aquella que produce pandeo. Para que esto se cumpla tendrá que ser I_{\min} mayor que el I_{\min} que corresponda a la carga crítica de pandeo. Lo que se puede hacer es aumentar el I_{\min} para lo cual se usa el coeficiente de seguridad.

Este coeficiente de seguridad tiene distintos valores según el material de la columna. Para los metales se toma generalmente $S = 3,5$. Para la fundición $S = 8$. Para materiales quebradizos, como ser hormigón, mampostería y todas las maderas $S \approx 10$.

2.2. LÍMITE DE LA VALIDEZ DE LA FÓRMULA DE EULER

La fórmula de Euler, no es como podría pensarse, una formula exacta para todos los casos. Es una fórmula engañosa, que por haberse aplicado en casos que no rige, ha producido grandes desastres como el del puente Québec, que sufrió un colapso provocando muchas muertes entre los obreros.

La expresión $P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}$ nos dice que la estabilidad de la pieza depende solamente de su rigidez, o sea del mínimo momento de inercia. Puede ocurrir, sin embargo, que el momento de inercia sea suficientemente grande para que la pieza no se rompa por pandeo, pero que la sección sea tan pequeña que la pequeña que la pieza se rompa por compresión.

También puede ocurrir que la esbeltez de la pieza sea muy pequeña, es decir pieza muy corta, con lo que el denominador de la expresión anterior es muy pequeño y resulta una carga crítica muy grande. Si esto ocurre puede haber tensiones que sobrepasan a la tensión de rotura.

Además hemos considerado a $E = cte$ y efectivamente lo es dentro del campo elástico, pero cuando la tensión sobrepasa el límite de proporcionalidad de la Ley de Hooke, entonces la curva representativa del diagrama se va inclinando, como se ha visto y por lo tanto el valor de E comienza a variar, caso no tenido en cuenta en la expresión de P_k .

La expresión de Euler vale siempre y cuando el módulo de elasticidad E sea efectivamente constante. Para que esto se cumpla la tensión de compresión no debe pasar el límite de proporcionalidad, y en caso que ocurra ya no tiene validez la fórmula de Euler, porque habría que tener en cuenta la variación de E .

Si dividimos la expresión de P_k por el área de la sección recta obtenemos la tensión crítica de pandeo:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2 \cdot A}$$

Como $i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{A}$; será: $\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2 / i_{\min}^2}$

Llamamos esbeltez a la relación

$$\lambda = \frac{l}{i_{\min}}$$

quedando entonces $\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$

Para un material determinado $E = cte$, luego σ_k es función de λ^2 y su gráfica está representada por una hipérbola cúbica con su concavidad hacia arriba (figura4).

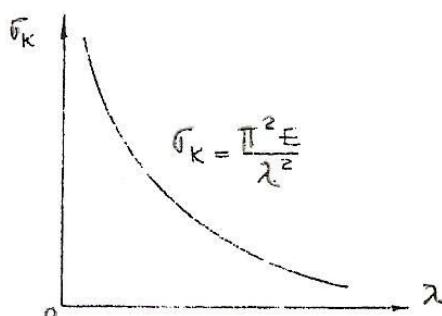


Fig. 4

3. GRÁFICA DE PANDEO PARA ACERO ST37

Será interesante conocer cual es el valor mínimo límite de λ para que σ_k no sobrepase el límite de proporcionalidad.

$$\lambda_{\min} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_A}}$$

σ_A : límite de proporcionalidad (para ST37 $\sigma_A = 2100 \frac{kg}{cm^2}$)

Tensión de rotura: $3700 \frac{kg}{cm^2}$

Tensión de fluencia: $2400 \frac{kg}{cm^2}$

$E = 2.100.000 \frac{kg}{cm^2}$

$$\lambda_{\min} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2.100.000}{2100}} \cong 100$$

Ajustando valores para $\lambda = 100$ correspondería $\sigma_A = 2073 \frac{kg}{cm^2}$.

Entonces si la esbeltez es mayor que 100 la tensión crítica es menor que $2073 \frac{kg}{cm^2}$ y estamos dentro del campo elástico (figura5). Para el ST37 la fórmula de Euler no es aplicable cuando $\lambda < 100$ por cuanto la tensión crítica sobrepasa la tensión de proporcionalidad (campo

anelástico). No es cierto que no se va a producir pandeo, simultáneamente tendremos pandeo, que va disminuyendo, junto con la compresión que domina. Cuando $\lambda > 100$ interviene solamente pandeo. Los reglamentos fijan un máximo de esbeltez.

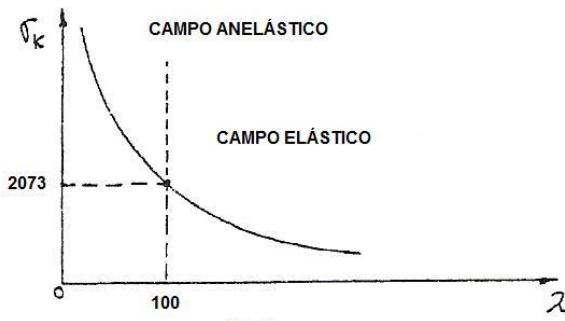


Fig. 5

Para otros materiales habrá que hacer las mismas consideraciones, pero cambiando las características propias de cada material: módulo de elasticidad E , tensión de proporcionalidad σ_A , etc.

4. FÓRMULA DE TETMAJER

Para piezas cortas ($\lambda < \lambda_{lim}$) se han propuesto varias fórmulas, resultado de prolíficas experiencias, que explican el comportamiento de los diversos materiales al pandeo. La más simple de las relaciones propuestas entre σ_k y λ es la fórmula de Tetmajer, que es lineal del tipo: $\sigma_k = a - b \cdot \lambda$.

Para el St. 37: $\sigma_k = 3.100 - 11.4 \cdot \lambda$

Para los materiales ferrosos se ha demostrado más conveniente una fórmula parabólica del tipo $\sigma_k = c - d \cdot \lambda^2$, propuesta por Johnson.

En esta expresión se toma corrientemente: $c = \sigma_c = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$ (tensión de fluencia) y el otro punto de la parábola de modo que corte a la hipérbola de Euler en el punto de abscisas λ_{lim} .

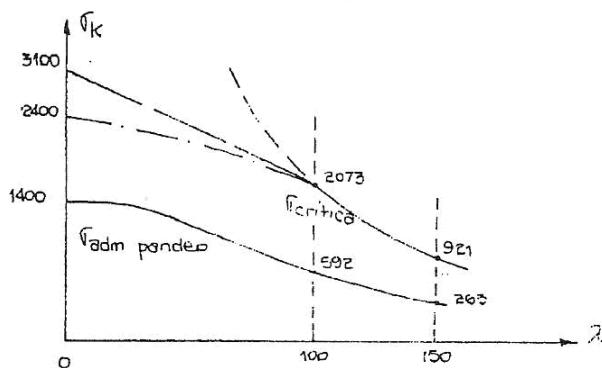


Fig. 6

Para obtener la curva representativa de las tensiones admisibles, dividimos a la tensión crítica por el coeficiente de seguridad. Para los aceros decimos que $s = 3.5$.

entonces: $\sigma_{ADM} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot 3,5}$ para $\lambda > 100$

$$\sigma_{ADM} = \frac{2073}{3,5} = 592 \text{Kg/cm}^2 \quad \text{para } \lambda = 100$$

$$\sigma_{ADM} = \frac{921}{3,5} = 263 \text{Kg/cm}^2 \quad \text{para } \lambda = 150$$

En el tramo de λ comprendido entre 0 y 100; para

$$\lambda = 0 \text{ (sin pandeo)} \quad \sigma_{ADM} = \frac{\sigma_A}{s} = \frac{2400}{1,71} = 1400 \text{Kg/cm}^2$$

y para $\lambda = 100$ tomamos $s = 3,5$; de este modo la parábola responde a la ecuación: $\sigma_{ADM} = 1400 - 0,0808 \cdot \lambda^2$.

5. MÉTODO ω

Para calcular una pieza comprimida se nos dan generalmente los siguientes datos: carga, longitud de la pieza, material constitutivo, condiciones de apoyo. No podemos dividir la carga por la sección para obtener la tensión, porque la sección debemos calcularla.

Podríamos tratar de encontrar cual es la tensión admisible por medio de la curva de tensiones admisibles (para St. 37 Fig. 6), pero no conocemos la esbeltez, porque no conocemos el i_{MIN} .

En la mayoría de los casos, el cálculo deja de ser directo y pasa a ser de verificación.

El procedimiento ω , aplicable a cualquier valor de λ , introduce el coeficiente de pandeo ω , definido por la relación entre la tensión admisible a la tracción (σ_{ADM}), y la tensión admisible de pandeo (σ_{pADM}).

$$\omega = \frac{\sigma_{ADM}}{\sigma_{pADM}}$$

Este coeficiente es función de λ y como $\sigma_{ADM} \geq \sigma_{pADM}$ resulta $\omega \geq 1$.

Para compresión se tendrá que la carga P dividida por la sección A debe ser igual o menor que la tensión admisible al pandeo.

$$\frac{P}{A} \leq \sigma_{pADM}$$

multiplicando ambos miembros por ω :

$$\frac{P \cdot \omega}{A} \leq \sigma_{p.adm} \cdot \omega = \sigma_{p.adm} \cdot \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{p.adm}}$$

entonces:
$$\boxed{\frac{P \cdot \omega}{A} \leq \sigma_{adm}}$$

Esta expresión permite verificar si una pieza comprimida se encuentra en condiciones satisfactorias frente a una posibilidad de pandeo. Definida una pieza por sus características geométricas: A , I_{min} , luz en posible calcular:

$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$, con este valor se calcula $\lambda = \frac{l}{i_{min}}$, que permitirá establecer, mediante tablas, el valor de ω correspondiente con el que verificamos que sea:

$$\frac{P \cdot \omega}{A} \leq \sigma_{ADM}$$

Se procede por tanteos sucesivos hasta llegar al cumplimiento de la expresión anterior.

6. MÉTODO DOMKE

Se basa en que para una determinada sección la relación entre el área y el cuadrado del radio de giro es un valor constante.

$$k = \frac{A}{i^2} = cte$$

Si llamamos:
 Ao: sección correspondiente a la pieza comprimida sin pandeo
 A: sección correspondiente a la pieza comprimida con pandeo

Deberá cumplirse que:

$$A_o = \frac{P}{\sigma_{ADM}} \quad A = \frac{P}{\sigma_{pADM}}$$

Multiplicando y dividiendo por σ_{adm} , la última expresión será:

$$A = \frac{P}{\sigma_{pADM}} \cdot \frac{\sigma_{ADM}}{\sigma_{ADM}} = \frac{P \cdot \omega}{\sigma_{ADM}} = \omega \cdot A_o$$

$$A = \omega \cdot A_o$$

como $A = i^2 \cdot k$ y $A_o = i_o^2 \cdot k$, entonces será: $i^2 \cdot k = \omega \cdot i_o^2 \cdot k$

$$i^2 = \omega \cdot i_o^2$$

Dividiendo ambos miembros por l^2 :

$$\frac{i^2}{l^2} = \omega \cdot \frac{i_o^2}{l^2} ; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \omega \cdot \frac{1}{\lambda_o^2}$$

$$\boxed{\lambda_o = \lambda \cdot \sqrt{\omega}} \quad \text{estos valores están tabulados.}$$

Ejemplo de aplicación:

Dimensionar una columna biarticulada (caso II de Euler) utilizando un PNI para los siguientes datos:

$$P = 45t$$

$$l_k = 3,50m$$

$$\text{acero St. 37} (\sigma_{adm} = 1,4t/cm^2)$$

$$A_o = \frac{P}{\sigma_{ADM}} = \frac{45t}{1,4} = 32,1cm^2$$

Según la tabla corresponde: PNI 20 con: $A_o = 33,5cm^2$, $i_y = i_{min} = 1,87cm$

$$\lambda_o = \frac{l_k}{i_{min}} = \frac{350}{1,87} = 187$$

De tabla para $\lambda_o = 187$ corresponde $\lambda = 120$ y $\omega = 2,60$

$$A_{nec} = \omega A_o = 2,60 \cdot 33,5cm^2 = 87,10cm^2$$

En la tabla obtenemos PNI 400 con: $A = 92,4cm^2$ y $i_y = i_{min} = 3,13cm$

$$\lambda_y = \frac{l_k}{i_{min}} = \frac{350}{3,13} = 125 \quad ; \quad \omega = 2,48$$

Entonces:

$$\sigma = \frac{2,48 \cdot 45}{92,4} = 1,21t/cm^2 < \sigma_{adm} = 1,4t/cm^2$$

ESTÁTICA Y RESISTENCIA DE LOS MATERIALES
Unidad 11: INESTABILIDAD ELÁSTICA

P A N D E O COEFICIENTES "W"
 Para secciones sometidas a pandeo de acero F24 (St 37)

λ_e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ_e
20	1.20 21.9	1.20 23	1.21 24.2	1.21 25.3	1.22 26.5	1.22 27.6	1.23 28.8	1.23 29.9	1.24 31.2	1.24 32.3	20
30	1.25 33.5	1.25 34.7	1.26 35.9	1.27 37.2	1.27 38.3	1.28 39.5	1.28 40.7	1.29 42	1.30 43.3	1.30 44.5	30
40	1.31 45.8	1.32 47.1	1.33 48.4	1.33 49.6	1.34 50.9	1.35 52.3	1.36 53.6	1.37 55	1.38 56.4	1.38 57.6	40
50	1.39 58.9	1.40 60.3	1.41 61.7	1.42 63.2	1.43 64.6	1.44 66	1.45 67.4	1.46 68.9	1.47 70.3	1.48 71.8	50
60	1.50 73.5	1.51 75	1.52 76.4	1.53 80	1.54 79.4	1.56 81.2	1.57 82.7	1.58 84.2	1.60 86	1.61 87.5	60
70	1.62 89	1.64 90.1	1.65 92.5	1.67 94.3	1.68 96	1.70 97.8	1.71 99.4	1.73 101.3	1.74 102.9	1.76 104.8	70
80	1.78 106.7	1.80 108.7	1.81 110.3	1.83 112.3	1.85 114.3	1.87 116.2	1.89 118.2	1.90 120	1.92 122	1.94 124	80
90	1.96 126	1.98 128	2.00 130	2.02 132.2	2.05 134.6	2.07 136.7	2.09 138.8	2.11 140.9	2.13 143	2.16 145.5	90
100	2.18 147.6	2.20 149.8	2.23 152.3	2.25 154.5	2.27 156.7	2.30 159.2	2.32 161.5	2.35 164	2.37 166.3	2.40 168.9	100
110	2.43 171.5	2.45 173.7	2.48 176.4	2.51 179	2.53 181.3	2.56 184	2.60 187	2.64 190.1	2.69 193.5	2.78 196.6	110
120	2.78 200	2.83 203.6	2.87 206.7	2.92 210.2	2.97 213.7	3.02 217.2	3.06 220.4	3.11 224	3.16 227.5	3.21 231.1	120
130	3.26 234.7	3.31 238.3	3.36 242	3.41 246	3.47 250	3.52 253	3.57 257	3.62 261	3.68 265	3.73 268	130
140	3.78 272	3.84 276	3.89 280	3.95 284	4.00 288	4.06 292	4.11 296	4.17 300	4.23 304	4.28 308	140
150	4.34 312	4.40 317	4.46 321	4.52 325	4.58 330	4.64 334	4.70 338	4.76 343	4.82 347	4.88 351	150
160	4.94 356	5.00 360	5.06 364	5.13 369	5.19 374	5.25 378	5.32 383	5.38 387	5.45 392	5.51 397	160
170	5.58 402	5.64 406	5.71 411	5.78 416	5.84 420	5.91 425	5.98 430	6.05 435	6.11 440	6.18 445	170
180	6.25 450	6.32 455	6.39 460	6.46 465	6.53 470	6.61 476	6.68 481	6.75 486	6.82 491	6.89 496	180
190	6.97 502	7.04 507	7.11 512	7.19 518	7.26 523	7.34 528	7.41 534	7.49 539	7.57 545	7.64 550	190
200	7.72 556	7.80 561	7.87 567	7.95 572	8.03 578	8.11 584	8.19 590	8.27 595	8.35 601	8.43 607	200
210	8.51 613	8.59 618	8.67 624	8.76 630	8.84 636	8.92 642	9.00 648	9.09 654	9.17 660	9.26 666	210
220	9.34 672	9.43 679	9.51 685	9.60 691	9.68 697	9.77 703	9.86 710	9.94 716	10.03 722	10.12 728	220
230	10.21 735	10.3 741	10.39 748	10.48 754	10.57 761	10.66 767	10.75 774	10.84 780	10.93 787	11.02 793	230
240	11.12 800	11.21 807	11.30 813	11.40 820	11.49 827	11.58 834	11.68 841	11.77 847	11.87 854	11.97 861	240
250	12.06 868										250

11.C. ESFUERZOS NORMALES COMBINADOS CON MOMENTOS

Flexión Compuesta – Núcleo Central – Materiales no resistentes a Tracción – Torsión Simple

1. Flexión Compuesta

En capítulos anteriores se han estudiado solicitudes axiales y de flexión. Cada una de ellas se consideró que actuaba aisladamente sobre la estructura. Ahora estudiaremos la combinación de estas solicitudes (axiales y de flexión) que es lo que llamamos flexión compuesta.

Este tipo de solicitud compuesta se presenta cuando una viga está sometida a una o varias fuerzas paralelas a su eje geométrico. Esto se produce frecuentemente en las columnas, cuando en su extremo superior actúa una carga excéntrica P (Fig. 1-a), o bien cuando este extremo está vinculado con otra estructura que le permite una carga concentrada P y un momento M (Fig. 1-b). La carga P puede ser de tracción (Fig. 1-c).

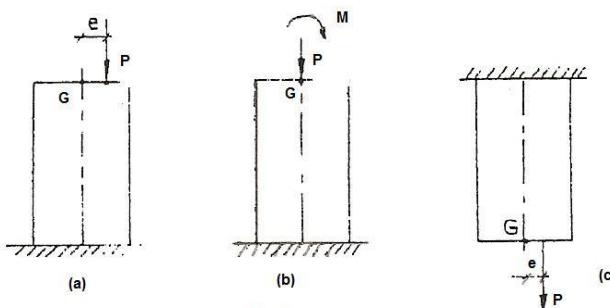


Fig.1

Los casos indicados en la fig. 1-a y fig. 1-b son equivalentes, ya que la carga excéntrica P puede trasladarse desde su punto de aplicación K al baricentro G de la sección, agregando un par $M = P \cdot e$. En ambos casos se tienen dos solicitudes:

$$N = \pm P \quad (\text{Esfuerzo Normal})$$

$$M = P \cdot e \quad (\text{Momento Flector})$$

El comportamiento de la columna se comprende fácilmente: el esfuerzo normal N la hace acortar (o alargar, si es de tracción), por consiguiente una sección genérica sufre una traslación de "ab" á "a₁b₁" (Fig. 2-a). El momento flector M hace girar la sección alrededor de un eje baricéntrico de traza n_o (Fig. 2-a) desde "a₁b₁" a "a₂b₂". Por lo tanto, el desplazamiento conjunto de la sección (que se mantiene plana) desde "ab" á "a₂b₂" es un giro alrededor de un eje de traza n (no baricéntrico), paralelo a n_o .

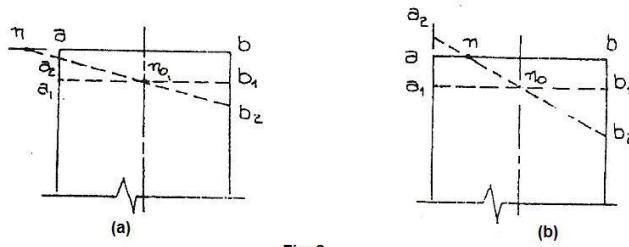


Fig. 2

Si la translación es considerable y la rotación pequeña, el eje n está alejado de n_o y puede ser exterior a la sección (Fig. 2-a), observando que todas las fibras longitudinales de la columna se acortan (o se alargan si N es tracción) y la tensión σ es de compresión (o de tracción) en todos los puntos de la sección.

En el caso opuesto (traslación pequeño y rotación considerable) el eje n está próximo a n_o y corta a la sección (Fig. 2-b). La divide en dos partes, en una de las fibras se acortan y en la otra se alargan, y en los puntos de n permanecen invariables ($\sigma=0$). Por lo tanto n tienen propiedad cinemática del eje neutro (eje de rotación de la sección) y la propiedad estática (lugar de puntos en los que $\sigma=0$).

Para el caso de la Fig. 2-a n tiene solamente la propiedad cinemática del eje neutro.

Por la conservación de las secciones planas y por la ley de Hooke, en un punto genérico, σ es proporcional a la distancia $y + y_n$ al eje neutro (Fig. 3).

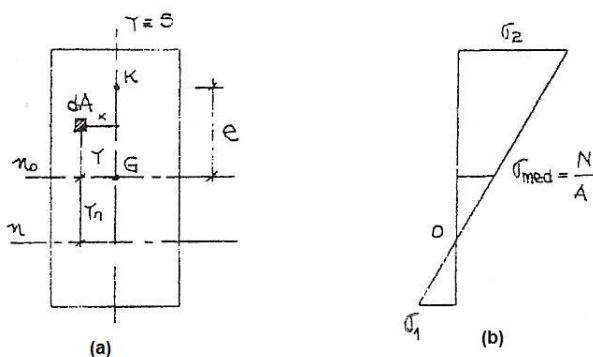


Fig. 3

A las mismas conclusiones se llega mediante consideraciones estáticas equivalentes a las consideraciones cinemáticas precedentes. La tensión producida por N puede representarse por el diagrama (aba₁b₁) y la que produce M , por el diagrama (a₁b₁a₂b₂), superponiendo los efectos, se tiene el diagrama lineal total (aba₂b₂) de las σ , anulándose σ en los puntos del eje neutro n , efectivo (Fig. 2-a) ó ficticio (Fig. 2-b).

El eje baricéntrico n_o paralelo al eje neutro n , se llama eje de flexión (es el eje que sería neutro si $N = 0$, es decir si solo actuase M).

2. Flexión Compuesta Recta

Analicemos el caso en que K está sobre uno de los ejes principales de inercia de la sección (Fig. 3-a).

La carga es perpendicular a la sección (paralela al eje de la pieza), el plano de solicitación contiene al eje y en su intersección con el plano de la sección determina el eje de solicitación S.

2.1 Círculo de las tensiones

En la posición deformada cada sección transversal, originalmente plana, permanece plana y perpendicular al eje de la viga (Hipótesis de Navier-Bernoulli). Las fibras inferiores se extienden y las superiores se acortan (Fig. 4).

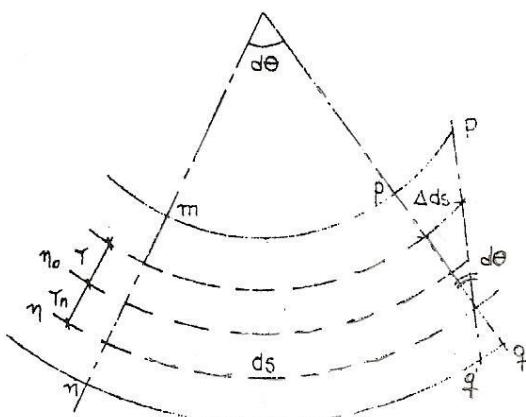


Fig. 4

Las dos secciones mn y pq están separadas un ds . Si trazamos $p'q'$ paralelas a mn podemos determinar Δds acortamiento de la fibra ubicada a la distancia $y + y_n$ del eje neutro. El acortamiento unitario será:

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s} \quad ; \quad \Delta s = \varepsilon \cdot s = \frac{\sigma}{E} \cdot s \quad ; \quad \text{además} \quad \Delta s = (y + y_n) \cdot d\theta$$

Entonces:

$$\sigma = E \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot (y + y_n)$$

Como y_n (distancia entre el eje neutro y el eje baricéntrico de flexión) y $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ (curvatura), son constantes para una sección determinada, podemos escribir $\sigma = U + Vy$, expresión que no dice que las tensiones en flexión compuesta tienen variación lineal.

Determinación de las constantes U y V

Planteando las ecuaciones de equilibrio:

a) la fuerza exterior aplicada igual a la resultante de las fibras interiores:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \int_A (U + Vy) \cdot dA = U \cdot \int_A dA + V \cdot \int_A y \cdot dA$$

$\int_A y \cdot dA = 0$ (momento estático del área de la sección respecto a un eje baricéntrico).

$$\therefore N = U \cdot \int_A dA = U \cdot A \quad \text{de donde} \quad U = \frac{N}{A}$$

b) el momento de las fuerzas exteriores igual al momento de las interiores respecto al eje n_o :

$$M = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y = \int_A (U + Vy) \cdot y \cdot dA = U \cdot \int_A y \cdot dA + V \cdot \int_A y^2 \cdot dA$$

$\int_A y^2 \cdot dA = In_o$ (momento de inercia del área de la sección respecto al eje n_o).

$$\therefore M = V \cdot In_o \quad \text{de donde} \quad V = \frac{M}{In_o}$$

Por lo tanto:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{In_o} \cdot y$$

El primer término, de valor constante, se debe exclusivamente al Esfuerzo Normal centrado; el segundo, variable linealmente, al Momento Flector.

Conviene examinar en que zonas de sección las σ parciales debidas a N y a M resultan del mismo sentido o de sentido opuestos. Son del mismo sentido en los puntos que se encuentran, respecto a n_o , del mismo lado que k, y de signo opuesto en los otros puntos. En los puntos comprendidos entre n_o y n predominan la tensión normal σ debida a N.

En los puntos del eje de flexión n_o , y en particular en el baricentro G, como $y = 0$ se tiene $\sigma_G = \frac{N}{A} = \sigma_{medio}$ cualquiera que sea el centro de presión k. Esto se debe al hecho de que M no produce tensiones en los puntos de n_o .

Por consiguiente, conociendo la posición del E.N. se tiene inmediatamente el diagrama de tensiones (Fig. 3-b) llevando la tensión $\sigma_{medio} = \frac{N}{A}$ a determinada escala a partir de G y uniendo su extremo con 0.

A la misma expresión de las tensiones tangenciales llegamos considerando que la tensión normal en un punto cualquiera, según el principio de superposición de los efectos, será igual a la suma algebraica de la tensión σ_N debida a la carga actuando en G, y de la tensión σ_F originada por el momento $M = P.I.$, que actúa en el plano de solicitación.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_F \quad \text{es decir} \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{n_o}} \cdot y$$

2.2 Determinación del eje neutro

Sustituyendo los valores $M = P \cdot l$; $I_{n_o} = A \cdot i_{n_o}^2$ y recordando que $N = P$, podemos expresar:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot l}{A \cdot i_{n_o}^2} \cdot y = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{l}{i_{n_o}^2} \cdot y\right)$$

Para los puntos ubicados en el eje neutro: $\sigma = 0$

$$\therefore \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{l}{i_{n_o}^2} \cdot y\right) = 0 \quad \text{como} \quad \frac{P}{A} \neq 0 \quad \text{será} \quad \left(1 + \frac{l}{i_{n_o}^2} \cdot y\right) = 0$$

De donde: $y = -\frac{i_{n_o}^2}{l}$ ecuación del eje neutro.

El signo negativo indica que el eje neutro está situado en la zona opuesta a la del centro de presión respecto al eje de flexión.

Tomando momento de todas las fuerzas respecto al eje de solicitación, resultará nulo el correspondiente a las fuerzas exteriores, quedando por lo tanto la expresión:

$$0 = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = \int_A (U + Vy) \cdot x \cdot dA = U \cdot \int_A x \cdot dA + V \cdot \int_A y \cdot x \cdot dA$$

Como: $\int_A x \cdot dA = 0$ (momento estático del área respecto a un eje baricéntrico)

$$\int_A x \cdot y \cdot dA = I_{n_{o-s}} \quad \text{resulta} \quad V \cdot I_{n_{o-s}} = 0$$

Por ser $V \neq 0$; será $I_{n_{o-s}} = 0$ si el momento centrífugo del área respecto a los ejes n_o y s resulta nulo, indica que los ejes son conjugados de inercia.

Gráficamente podemos determinar la posición del eje neutro con el círculo de Land.

Conocido el eje de solicitudón s, podemos determinar n_o , sabiendo que es conjugado del anterior, y la posición del eje neutro n , paralelo al n_o , de la siguiente manera (Fig. 5).

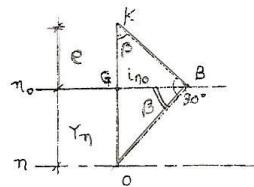


Fig. 5

Ubicamos k (centro de presión) y G (baricentro) quedando definido $e = K.G$, a partir de G y en dirección perpendicular llevamos $G.B = i_{no}$. Por B trazamos una perpendicular a KB hasta cortar en O al eje de solicitación. La distancia $G_O = y_n$ determina la posición del EN. Por semejanza de triángulos:

$$\frac{l}{i_{no}} = \frac{i_{no}}{y_n} \quad y_n = \frac{i_{no}^2}{l}$$

3. NÚCLEO CENTRAL

Se denomina contorno del núcleo central al lugar geométrico de los puntos de la sección que considerados como centro de presión K_i dan ejes neutros correspondientes, tangentes a la figura y que no la cortan. La superficie interna encerrada por el contorno definido se denomina Núcleo Central (Fig. 6).

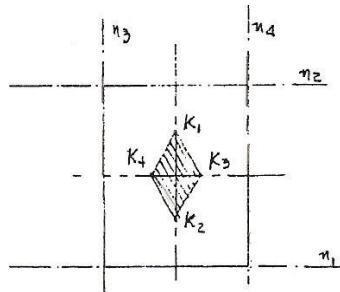


Fig. 6

3.1 Propiedades del Núcleo Central

- a) Si un centro de presión K_i está ubicado en el contorno del núcleo central, el diagrama de tensiones es triangular y la tensión normal mínima es cero. La sección trabaja a un solo signo (Fig. 7-a).
- b) Si un centro de presión está ubicado en el interior del núcleo central, la sección trabaja toda a un solo signo y el diagrama es trapecial (Fig. 7-b).
- c) Si el centro de presión está fuera del núcleo central, el diagrama es doble triangular. La sección trabaja a dos signos y el eje neutro corta a la sección (Fig. 7-c).
- d) Las relaciones entre K y n son de reciprocidad. Si a un centro de presión K le corresponde un eje neutro n , a un centro de presión K' ubicado sobre el eje n , le corresponderá un eje neutro n' pasante por K (Fig. 8-a).

- e) Si la sección tiene i lados e i vértices, el núcleo central tendrá i lados e i vértices (Fig. 8-b).

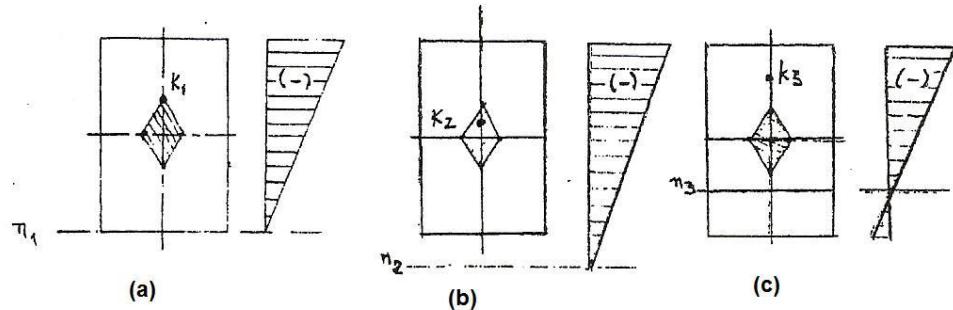


Fig. 7

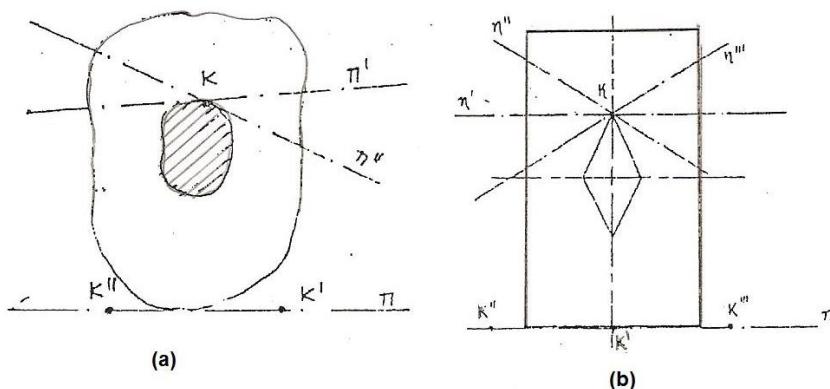


Fig. 8

3.2 Determinación del N.C. de un rectángulo

El centro de presión K_1 correspondiente al eje neutro n_1 que pasa por la base de la sección, estará ubicada a una distancia e_y del eje baricéntrico.

$$y_{n_1} = -\frac{i_x^2}{e_{y_1}} \quad \text{como} \quad ix - \frac{Ix}{A} = \frac{d^2}{12}$$

$$y_{n_1} = \frac{d}{2} \quad \therefore e_{y_1} = -\frac{i_x^2}{y_{n_1}} = \frac{d}{6}$$

De igual forma: $e_{y_2} = \frac{d}{6}$

Para K_3 y K_4 tenemos: $e_{x_3} = \frac{b}{6}$ $e_{x_4} = \frac{b}{6}$

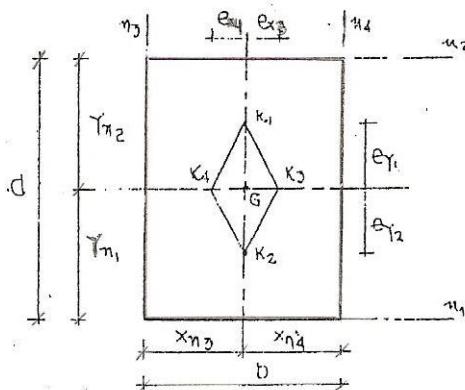


Fig. 9

UNIDAD 12: TORSIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Cuando en ambos extremos de una viga rectilínea actúan momentos iguales y contrarios, en planos normales al eje geométrico, o cuando un extremo se encuentra empotrado y el otro solicitado por una cupla la solicitación es de TORSIÓN SIMPLE.

Las vigas están solicitadas a torsión cuando sirven de apoyo a otras vigas transversales empotradas en ellas. En máquinas, los árboles motores, los ejes de transmisión, etc.

Raramente hay torsión simple, basta el peso propio de la columna para producir también esfuerzos normales y en el caso de vigas momento flector y esfuerzo de corte. Los resultados que se obtienen para torsión simple, son válidos también para cuando intervienen además estas otras solicitudes.

2. TORSIÓN EN BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR

Considerando una viga de eje recto y de sección circular constante, empotrada en A y libre en B donde es solicitada por un momento torsor M_t conocido (Fig. 1).

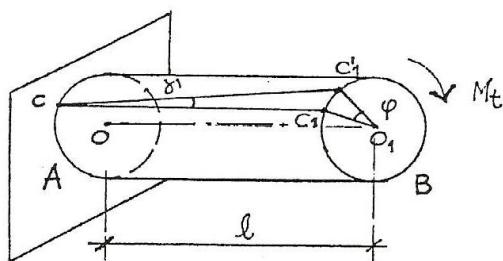


Fig. 1

En la posición inicial, sin la presencia de M_t , cualquier fibra longitudinal CC₁ es paralela al eje geométrico OO₁. cuando aplicamos M_t se observa que:

- El eje geométrico permanece plano.
- Las restantes fibras longitudinales se transforman en hélices cilíndricas de una ligera curvatura por suponerse muy pequeña la deformación (la fibra CC₁ para a ocupar la posición CC'1).
- Cualquier sección recta B permanece plana y perpendicular al eje geométrico. Solamente experimenta en conjunto, una rotación alrededor del centro O₁.

Un punto C₁ de una fibra longitudinal de la sección B sufre respecto a otro punto C de la misma fibra pero de la sección A, separada L de la sección B, un desplazamiento C₁C'1 perpendicular a la fibra (Fig. 2a).

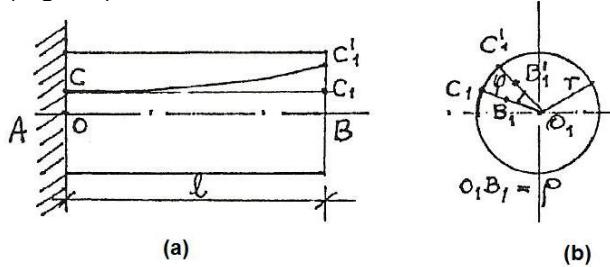


Fig. 2

$$\text{Por ser un ángulo tan pequeño: } \operatorname{tg} \gamma \equiv \gamma = \frac{C_1 C_{1'}}{L} \quad (1)$$

$$\text{En la fig. 2.b: } C_1 C_{1'} = r \cdot \varphi \quad (2)$$

γ : corrimiento

φ : ángulo de torsión

Al punto B_1 ubicado a una distancia radial ρ , le corresponde la posición $B_{1'}$, para el mismo ángulo de torsión. La deformación, o arco de corrimiento es: $B_1 B_{1'} = \rho \cdot \varphi$; reemplazando (2) en (1):

$$\gamma = \frac{r \cdot \varphi}{L} \quad (3)$$

Y para un punto cualquiera a la distancia ρ de O_1 :

$$\gamma = \frac{\rho \cdot \varphi}{L} \quad (4)$$

para $\rho = 1\text{cm}$ será:

$$\gamma = \frac{\varphi}{L}$$

Este ángulo, expresado en radianes para φ y en cm para L , dà en radianes/cm, el ángulo que ha girado una sección transversal del sólido respecto a otra sección paralela distante 1cm.

La deformación sufrida por el sólido muestra la existencia de fuerzas tangenciales, que referidas a la unidad de superficie de la sección, definen la TENSIÓN TANGENCIAL o de TORSIÓN τ_t , en el plano de la sección y dispuesta normalmente al radio, en cada punto de este radio.

Por analogía con la ley de Hooke, y de acuerdo a resultados experimentales, puede establecerse que las deformaciones γ son proporcionales a estas tensiones, o sea: $\tau_t = \gamma \cdot G$, siendo G el módulo de elasticidad transversal, expresado en Kg/cm^2 y equivalente aproximadamente a $2/5$ de E . Sustituyendo a γ por su valor en la (4) se tiene:

$$\tau_t = \frac{\varphi}{L} \cdot G \cdot \rho \quad (5)$$

Esta expresión muestra que las tensiones tangenciales de torsión son proporcionales a ρ , o sea a la distancia al centro de la sección; por consiguiente su máximo valor corresponde a las fibras exteriores del sólido, siendo nulo en el centro.

En la (Fig. 3) se ha representado por un triángulo rectángulo, cuyos catetos son τ_t y r . la zona rayada muestra la distribución de las tensiones internas en la sección.

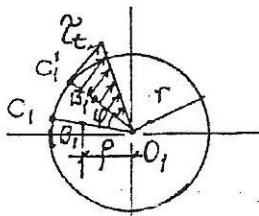


Fig. 3

2.1 ECUACIÓN DE RESISTENCIA DE LA TORSIÓN

Recordando una de las hipótesis fundamentales de la resistencia de los materiales: las fuerzas exteriores dan origen en puntos interiores a fuerzas internas.

En cada punto de la sección se originan fuerzas tangenciales:

$$Q_i = \tau_i \cdot \Delta\Omega$$

Planteando la ecuación de equilibrio tomando momentos respecto a O1 será:

$$M_i = \sum \tau_i \cdot \Delta\Omega \cdot \rho$$

Reemplazando a τ_i por su valor en (5).

$$M_i = \frac{\phi}{l} \cdot G \sum \Delta\Omega \cdot \rho^2 \quad \text{como} \quad I_o = \sum \Delta\Omega \cdot \rho^2 \quad \text{momento de inercia polar}$$

$$\text{Será: } M_i = \frac{\phi}{l} \cdot G \cdot I_o \quad (6)$$

Podemos expresar el ángulo unitario de torsión en función de valores conocidos:

$$\frac{\phi}{l} = \frac{Mt}{G \cdot I_o}$$

El producto $G \cdot I_o$ es el módulo de rigidez de torsión. Reemplazando en (5) el valor de $\frac{\phi}{l}$ nos queda:

$$\tau_i = \frac{Mt}{I_o} \cdot \rho \quad (7) \quad \text{ecuación análoga a la de flexión simple.}$$

La tensión es máxima en el contorno donde $\rho = r$ y vale:

$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{Io} \cdot r \quad (7)$$

Para la sección circular:

$$Io = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad \tau_{\max} = \frac{16 \cdot Mt}{\pi \cdot d^3} \quad (8)$$

Ejemplo:

1º) Una barra de acero de sección cilíndrica cuyo diámetro es de 6cm y su largo de 3m soporta un $Mt = 20000\text{kgcm}$. Determinar el valor de τ_{\max} y el ángulo de torsión φ adoptando $G = 840000\text{kg/cm}^2$

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot 20000}{\pi \cdot 6^3} = 472\text{kg/cm}^2$$

$$\varphi = \frac{Mt \cdot l}{G \cdot Io} = \frac{20000 \cdot 300}{840000 \cdot 127,2} = 0,056\text{rad} = 3^\circ,21$$

2.2 VERIFICACIÓN Y CÁLCULO DE ÁRBOLES CIRCULARES MACIZOS SOMETIDOS A TORSIÓN SIMPLE.

Los árboles deben transmitir el movimiento de rotación que reciben del motor o desde la polea del otro árbol. El momento de rotación es el producto $P \cdot r$, siendo P la fuerza tangencial en la periferia de la polea motora y r su radio.

El momento así producido engendra en el árbol conducido un esfuerzo de torsión, por lo tanto el momento torsor que soporta el árbol es prácticamente equivalente al momento de rotación.

En los árboles y las poleas, la tensión de la correa y los vínculos produce esfuerzos de flexión que pueden o no tomarse en cuenta.

El caso más simple es calcular los arboles de transmisión tomando en consideración solamente al momento torsor, es decir sometidos a torsión simple.

En las aplicaciones prácticas el diámetro del árbol debe calcularse conocida la potencia N en CV que debe transmitir. La potencia está dada por la fórmula:

$$N = \frac{P \cdot v}{75} \quad (9)$$

P: fuerza tangencial

v: velocidad periférica de la polea motora (1CV = 75kgm/seg)

por lo tanto: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{60}$ (10)

r: radio de la polea motora

n: numero de vueltas por minuto de la polea y del árbol sobre el cual está montada.

Reemplazando v en (9)

$$N = \frac{P \cdot r \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}{75 \cdot 60}$$

Como $Mt = P \cdot r$ será: $N = \frac{Mt \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}{75 \cdot 60}$ y expresando el momento torsor en kgcm:

$$\therefore N = \frac{Mt \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}{75 \cdot 60 \cdot 100} \quad (11)$$

$$Mt = \frac{N \cdot 60 \cdot 75 \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot n} \quad (11')$$

Reemplazando el valor de Mt en (8).

$$\tau_{\text{MÁX}} = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \frac{N \cdot 60 \cdot 75 \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot n}$$

Despejando $d = 71,45 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot \tau_{\text{MÁX}}}}$ [cm]

Ejemplo:

2º) Determinar el diámetro d del árbol de una máquina de 200CV, siendo n=120 rpm y $\tau_{\text{r}} = 210 \text{ kg/cm}^2$.

$$d = 71,45 \cdot \sqrt[3]{\frac{200}{120 \cdot 210}} = 14,2 \text{ cm}$$

3º) Determinar la potencia en CV transmitida por un árbol si d=15cm, n=120rpm, G=800.000kg/cm² y el ángulo de torsión medido entre dos secciones rectas distantes 7,5m es de 1/15 de radián.

De la (6):

$$Mt = \frac{Io \cdot \varphi \cdot G}{l} = \frac{\pi \cdot 15^4}{32} \cdot \frac{800000}{15 \cdot 7,5 \cdot 100}$$

La potencia transmitida según (11)

$$N = \frac{Mt \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}{75 \cdot 60 \cdot 100} = \frac{\pi \cdot 15^4 \cdot 800000 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 120}{32 \cdot 15 \cdot 7,5 \cdot 100 \cdot 60 \cdot 75 \cdot 100} = 591,6 \text{ CV}$$

2.3 SECCIÓN CIRCULAR HUECA.

En el análisis de la torsión de árboles macizos se ha visto solamente el material situado en la superficie exterior del eje está sometido a la tensión tangencial máxima. El material restante trabajará a una tensión menor, de aquí la conveniencia de usar árboles huecos, con lo que se consigue reducir el peso y lograr economía en el uso del material.

Para analizar la torsión en este caso, se plantean las mismas hipótesis que para los árboles macizos.

Para la sección anular, llamando:

d: diámetro exterior

d1: diámetro interior

$$\text{será: } Io = \frac{\pi}{32}(d^4 - d1^4)$$

$$\text{reemplazando en (7') siendo } r = \frac{d}{2}$$

$$\text{quedá: } \tau_{\text{MÁX}} = \frac{Mt \cdot d \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot (d^4 - d1^4)} = \frac{16 \cdot Mt \cdot d}{\pi \cdot (d^4 - d1^4)} \quad (12)$$

Ejemplo:

4º) Determinar $\tau_{\text{MÁX}}$ y φ en árbol hueco para los datos del Ej 1, siendo $d1 = \frac{d}{2} = 3\text{cm}$

$$\tau_{\text{MÁX}} = \frac{16 \cdot 20000 \cdot 6}{\pi \cdot (6^4 - 3^4)} = 503 \text{kg/cm}^2$$

$$\varphi = \frac{20000 \cdot 300}{840000 \cdot 119,2} = 0,06 \text{rad}$$

Observando que τ y φ comparados con el árbol macizo aumentan aproximadamente un 7%, mientras que la reducción en el peso del árbol será del 27,8%.

5º) Un eje hueco de acero con $d = 25\text{cm}$ y $d1 = 15\text{cm}$ gira a 1000rpm. ¿Qué potencia en CV transmite si $\tau_{\text{MÁX}} = 640 \text{kg/cm}^2$.

Reemplazando (11') en (12)

$$\tau_{\text{MÁX}} = \frac{N \cdot 60 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 16 \cdot 25}{2 \cdot \pi \cdot n \cdot \pi \cdot (d^4 - d1^4)}$$

$$\tau_{\text{MÁX}} = \frac{N \cdot 60 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 16 \cdot 25}{2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot \pi \cdot (25^4 - 15^4)} = 0,268N$$

$$\therefore N = \frac{\tau_{\text{MÁX}}}{0,268} = \frac{640}{0,268} = 2388CV$$