UNIDAD 2
Derivadas de orden superior, máximos y mínimos

Matemática para Computación

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Definiciones y notación

Definición (Funciones de clase C^1 y C^2)

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 o diferenciable con continuidad, si **todas** sus derivadas parciales existen y son continuas.
f es de clase C^2 o dos veces diferenciable con continuidad, si las derivadas parciales de f tienen derivadas parciales continuas.
f es de clase C^3 o tres veces diferenciable con continuidad, si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas.

Definiciones y notación

Definición (Funciones de clase C^1 y C^2)

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 o diferenciable con continuidad, si **todas** sus derivadas parciales existen y son continuas.
f es de clase C^2 o dos veces diferenciable con continuidad, si las derivadas parciales de f tienen derivadas parciales continuas.
f es de clase C^3 o tres veces diferenciable con continuidad, si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas.

Notación para las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = f_{zy}, \text{ etc.}$$

Derivadas parciales iteradas; derivadas parciales cruzadas o mixtas.

Ejemplo

Halle las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = xe^y + yx^2$.

Ejemplo

Halle las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = xe^y + yx^2$.

$$f_x(x, y) = e^y + 2xy; \qquad f_y(x, y) xe^y + x^2,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y;\ f_{xy}(x, y) = e^y + 2x,\ f_{yx}(x, y) = e^y + 2x,\ f_{yy}(x, y) = xe^y.$$

Ejemplo

Halle las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = xe^y + yx^2$.

$$f_x(x, y) = e^y + 2xy; \qquad f_y(x, y)xe^y + x^2,$$

$f_{xx}(x, y) = 2y;\ f_{xy}(x, y) = e^y + 2x,\ f_{yx}(x, y) = e^y + 2x,\ f_{yy}(x, y) = xe^y.$

Halle las derivadas parciales de segundo orden de
$f(x, y, z) = e^{xy} + z\cos(x)$.

Ejemplo

Halle las derivadas parciales de segundo orden de $f(x,y) = xe^y + yx^2$.

$$f_x(x,y) = e^y + 2xy; \qquad f_y(x,y)xe^y + x^2,$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y;\ f_{xy}(x,y) = e^y + 2x,\ f_{yx}(x,y) = e^y + 2x,\ f_{yy}(x,y) = xe^y.$$

Halle las derivadas parciales de segundo orden de
$f(x,y,z) = e^{xy} + z\cos(x)$.

$$f_x(x,y,z) = ye^{xy} - z\operatorname{sen}(x); \qquad f_y(x,y,z)xe^{xy}, \quad f_z(x,y,z) = \cos(x),$$

$$f_{zx}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(x);\ f_{xz}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(x),\ \text{etc.}$$

Teorema (Igualdad de las derivadas cruzadas, Teorema de Clairaut)

Si $f(x,y)$ *es de clase* C^2*, entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Sin demostración.

Teorema (Igualdad de las derivadas cruzadas, Teorema de Clairaut)

Si $f(x, y)$ es de clase C^2, entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Sin demostración.

Ejemplo: $f(x, y) = x^4 y^3 - x^8 + y^4$.

$$f_x = 4x^3 y^3 - 8x^7, \; f_y = 3x^4 y^2 + 4y^3$$

$$f_{xx} = 12x^2 y^3 - 56x^6, \; f_{xy} = 12x^3 y^2 = f_{yx}, \; f_{yy} = 6x^4 y + 12y^2$$

$$f_{xxy} = 36x^2 y^2 = f_{xyx} = f_{yxx}$$

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Series de Taylor, como en AMI

Definición

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a un punto a. Entonces la serie de Taylor generada por f y centrada en a es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in I$$

y escribimos $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in I.$

Las sumas parciales de la serie de Taylor de una función f, centrada en a, se llaman polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Teorema de convergencia de series de Taylor para una función real de una variable real

Teorema

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo $I = (c, d)$ y $a \in (c, d)$, entonces para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de grado n y el término

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

es el residuo de orden n.

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en una región D.

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en una región D.

Dados $\quad (a,b) \in \operatorname{int} D \quad$ y $\quad h,k$ tales que $(a+h,b+k) \in D$,

definimos $\quad \mathbf{r}(t) = (a+th, b+tk),\ 0 \leq t \leq 1,$

que une $\quad (a,b) \quad$ y $\quad (a+h,b+k)$.

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en una región D.
Dados $(a,b) \in \operatorname{int} D$ y h, k tales que $(a+h, b+k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a+th, b+tk)$, $0 \leq t \leq 1$,

que une (a,b) y $(a+h, b+k)$. Entonces:

$$f(a+h, b+k) = f(\mathbf{r}(1)); \qquad f(a,b) = f(\mathbf{r}(0)).$$

Definimos la función compuesta w por

$$w(t) := f(\mathbf{r}(t)); \qquad \text{así:} \quad f(a+h, b+k) = w(1); \qquad f(a,b) = w(0).$$

Recordando la **fórmula de Taylor para w alrededor de 0**:

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

para algún c entre 0 y t.

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas unaa región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas unaa región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) =$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas unaa región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + ...?$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$w'(t) =$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$
$$w'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t)$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned} w(0) &= f(a,b) \\ w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned} w(0) &= f(a,b) \\ w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\ w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &=
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 +
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \; c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk \\
&\qquad + f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \ c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

$$\begin{aligned}
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk \\
&\quad + f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2 \\
w''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \; c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$\begin{aligned}
w(t) &= f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)}) \\
w(0) &= f(a,b) \\
w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
w'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
w''(t) &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk \\
&\quad + f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2 \\
w''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f\Big|_{(a,b)}
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a,b)} + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

Fórmula de Taylor de primer orden, para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b)+(hf_x+kf_y)\Big|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

para cierto c entre 0 y 1.

Observación: la linealización de f en (a, b) coincide con la fórmula de Taylor de primer orden sin el término de error.

Teorema (Fórmula de Taylor de primer orden)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in U$. *Entonces,*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to 0$ *cuando* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ *en* $\mathbb{R}^n$.

Acá

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j,$$

donde $\mathbf{c}_{ij}$ es un punto del segmento que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

Sea $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$. Buscamos las Fórmulas de Taylor de segundo orden y de primer orden centradas en $(a, b) = (0, 0)$; estudiamos el error que se comete por usar el polinomio de Taylor en lugar de f.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(a,b)}$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\,\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

$$f(h, k) = f(0, 0) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(0,0)}$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\,\Big|_{(ch,ck)}$$

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

$$f(h,k) = f(0,0) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(0,0)}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\Big|_{(ch,ck)}$$

$$\begin{array}{llll}
f_x(x,y)=e^x\,\mathrm{sen}(y) & f_{xx}(x,y)=e^x\,\mathrm{sen}(y) & f_{xxx}(x,y)=e^x\,\mathrm{sen}(y) & \\
 & f_{xy}(x,y)=e^x\cos(y) & f_{xxy}(x,y)=e^x\cos(y) & \\
f_y(x,y)=e^x\cos(y) & f_{yy}(x,y)=-e^x\,\mathrm{sen}(y) & f_{yyx}(x,y)=-e^x\,\mathrm{sen}(y) & f_{yyy}(x,y)=-e^x\cos(y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
f_x(0,0)=0 & f_{xx}(0,0)=0 & f_{xxx}(ch,ck)=e^{ch}\,\mathrm{sen}(ck) & \\
 & f_{xy}(0,0)=1 & f_{xxy}(ch,ck)=e^{ch}\cos(ck) & \\
f_y(0,0)=1 & f_{yy}(0,0)=0 & f_{yyx}(ch,ck)=-e^{ch}\,\mathrm{sen}(ck) & f_{yyy}(ch,ck)=-e^{ch}\cos(ck)
\end{array}$$

$$f(h,k) = 0 + (0+k) + \frac{1}{2}(0+2hk+0)$$
$$+\frac{1}{6}\left(h^3e^{ch}\,\mathrm{sen}(ck) + 3h^2ke^{ch}\cos(ck) - 3hk^2e^{ch}\,\mathrm{sen}(ck) - k^3e^{ch}\cos(ck)\right)$$

Teorema (Fórmula de Taylor de segundo orden)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de tercer orden (en $\mathbf{x}_0 \in U$). Entonces,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$, y la segunda suma es sobre todo i y j entre 1 y n (de manera que hay n^2 términos).

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}(h_1, \cdots, h_n) \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1} & \cdots & f_{x_nx_1} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_nx_2} \\ \vdots & & & \\ f_{x_1x_n} & f_{x_2x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde las derivadas se evalúan en $\mathbf{x}_0$.

Teorema (Fórmula de Taylor de segundo orden)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *con derivadas parciales continuas de tercer orden (en* $\mathbf{x}_0 \in U$*). Entonces,*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ *cuando* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ *en* $\mathbb{R}^n$*, y la segunda suma es sobre todo* i *y* j *entre 1 y* n *(de manera que hay* n^2 *términos).*

Acá

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto del segmento que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Otra notación, orden n

Definition 5.7 (Multivariate Taylor Series)**.** We consider a function

$$f : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R} \tag{5.149}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^D, \tag{5.150}$$

that is smooth at $\boldsymbol{x}_0$. When we define the difference vector $\boldsymbol{\delta} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, the *multivariate Taylor series* of f at $(\boldsymbol{x}_0)$ is defined as

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)}{k!} \boldsymbol{\delta}^k, \tag{5.151}$$

where $D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ is the k-th (total) derivative of f with respect to $\boldsymbol{x}$, evaluated at $\boldsymbol{x}_0$.

Definition 5.8 (Taylor Polynomial)**.** The *Taylor polynomial* of degree n of f at $\boldsymbol{x}_0$ contains the first $n+1$ components of the series in (5.151) and is defined as

$$T_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)}{k!} \boldsymbol{\delta}^k. \tag{5.152}$$

Recorrido

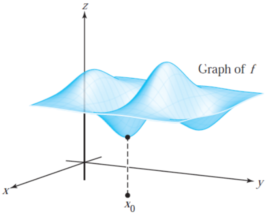
1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

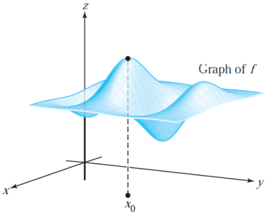
Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Definición (Puntos de extremo)

Dada $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice que $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de mínimo local de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que para todos los puntos $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. Análogamente $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de máximo local de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que para todos los puntos $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$. El punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local o relativo si es punto de mínimo local o punto de máximo local. Un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f si, o bien f no es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, o bien $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Si un punto crítico no es punto de extremo local, se dice que es un punto de silla.





Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Criterio de la derivada primera

Teorema

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto, la función* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $\mathbf{x}_0$ *es un punto de extremo local, entonces* $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$*, es decir,* $\mathbf{x}_0$ *es un punto crítico de* f*.*

Criterio de la derivada primera

Teorema

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\mathbf{x}_0$ es un punto de extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f.

Demostración.

Supongamos que f alcanza un extremo en $\mathbf{x}_0$. Entonces dado $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, la función compuesta $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) = (f \circ \mathbf{c})(t)$, con $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$, tiene un extremo local en $t = 0$. Por ser g una función real de una variable real, sabemos que $g'(0) = 0$. Por otra parte, por la regla de la cadena, $g'(0) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{h}$. Luego,

$$\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{h},$$

y la única manera de que esto sea cierto es que $\nabla f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{0}$. □

Ejemplo

Hallar los extremos y puntos de silla de la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Ejemplo

Hallar los extremos y puntos de silla de la función dada por

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

$$\begin{cases} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases}$$

Punto crítico: $(0,0)$; $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego $(0,0)$ es un punto de mínimo relativo de f. Como es el único punto crítico, no hay puntos de máximo ni de silla.

Ejemplo

Hallar los extremos y puntos de silla de la función dada por

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Ejemplo

Hallar los extremos y puntos de silla de la función dada por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

Ejemplo

Hallar los extremos y puntos de silla de la función dada por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar los extremos y puntos de silla de la función dada por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Definición (Forma cuadrática)

Una forma cuadrática es una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(h_1, \cdots, h_n) = [h_1, \cdots, h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j ,$$

donde $[a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$.

Formas cuadráticas

Definición (Forma cuadrática)

Una forma cuadrática es una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(h_1, \cdots, h_n) = [h_1, \cdots, h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j,$$

donde $[a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$.

Definición

Una forma cuadrática $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida positiva si $g(\mathbf{h}) \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{0}) = 0$ sólo si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Similarmente, g es definida negativa si $g(\mathbf{h}) \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{0}) = 0$ sólo si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Definición (Hessiana)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas de segundo orden continuas para $i, j = 1, \cdots, n$ en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$. La hessiana de f en $\mathbf{x}_0$ es la forma cuadrática definida por

$$
\begin{aligned}
Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j \\
&= \frac{1}{2}(h_1, \cdots, h_n) \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Fórmula de Taylor

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}),$$

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}),$$

Criterio de la derivada segunda

Teorema (Criterio de la derivada segunda)

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ *es un punto crítico de* f *y la forma cuadrática hessiana* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *es definida positiva, entonces* $\mathbf{x}_0$ *es un punto de mínimo relativo de* f*. Análogamente, si* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *es definida negativa, entonces* $\mathbf{x}_0$ *es un punto de máximo relativo de* f*.*

El teorema también es válido si f es sólo C^2.
No lo demostramos.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Ejemplo

Hallar los extremos de
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, punto crítico $(0,0)$,

Ejemplo

Hallar los extremos de
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, punto crítico $(0,0)$, $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= (h_1, h_2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2h_1 \\ 2h_2 \end{pmatrix} \\ &= 2h_1^2 + 2h_2^2 \geq 0; \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar los extremos de
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, punto crítico $(0,0)$, $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= (h_1, h_2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2h_1 \\ 2h_2 \end{pmatrix} \\ &= 2h_1^2 + 2h_2^2 \geq 0; \end{aligned}$$

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = 0 \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

Es decir: $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva y f presenta un mínimo local en $(0,0)$.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{array} \right.$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

$Hf(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 6x & 6y \\ 6y & 6y \end{array}\right]$.

Para cada punto crítico $\mathbf{x}$ hay que ver si la forma cuadrática $Hf(\mathbf{x})$ es definida positiva o negativa.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 & = 0 \end{array} \right.$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6y \end{bmatrix}$.

Para cada punto crítico $\mathbf{x}$ hay que ver si la forma cuadrática $Hf(\mathbf{x})$ es definida positiva o negativa.

$Hf(2,1)(\mathbf{h}) = (h_1, h_2) \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 12h_1 + 6h_2 \\ 6h_1 + 6h_2 \end{pmatrix} =$

$12h_1^2 + 6h_1h_2 + 6h_1h_2 + 6h_2^2 \geq 0?$

En general, no es sencillo...

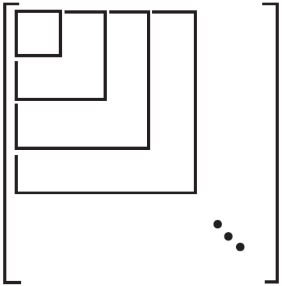
Propiedad

Sea $H(\mathbf{h}) = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ una forma cuadrática, entonces $H(\mathbf{h})$ es definida positiva sii $a > 0$ y $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} > 0$. Análogamente, $H(\mathbf{h})$ es definida negativa sii $a < 0$ y $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} > 0$.

Propiedad

Propiedad

Una forma cuadrática asociada a una matriz $B_{n\times n}$, simétrica, es definida positiva sii los determinantes de las n submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal principal son todos mayores que cero. Es definida negativa si los signos son negativo, positivo, alternando (en este orden). Si los determinantes son todos distintos de 0, pero la matriz no es definida positiva ni negativa, el punto crítico será un punto de silla.



Criterio de la derivada segunda

Teorema (Criterio de la derivada segunda para funciones de dos variables)

Sea f de clase C^3 en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Un punto (x_0, y_0) es un punto de mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
2. $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
3. $D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$.

El determinante D se llama discriminante de la forma cuadrática hessiana.
Si la condición (2) se cambia por < 0, entonces se trata de un máximo local (estricto).
Si se tiene $D < 0$, el punto es de silla.
Si se tiene $D = 0$, el punto crítico se llama degenerado y debe estudiarse con otros métodos.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Puntos críticos: $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

$Hf(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 6x & 6y \\ 6y & 6y \end{array}\right].$

$Hf(0,\pm\sqrt{5}) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 6(\pm\sqrt{5}) \\ 6(\pm\sqrt{5}) & 6(\pm\sqrt{5}) \end{array}\right];\ f_{xx}(0,\pm\sqrt{5}) = 0;\ D = -6^2 5 < 0$

y así, $(0,\pm\sqrt{5})$ son puntos de silla de f.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6y \end{bmatrix}$.

$Hf(0, \pm\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 0 & 6(\pm\sqrt{5}) \\ 6(\pm\sqrt{5}) & 6(\pm\sqrt{5}) \end{bmatrix}$; $f_{xx}(0, \pm\sqrt{5}) = 0$; $D = -6^2 5 < 0$ y así, $(0, \pm\sqrt{5})$ son puntos de silla de f.

$Hf(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$; $f_{xx}(2,1) = 12$; $D = 12 \cdot 6 - 36 > 0$ y así, $(2,1)$ es un punto de mínimo de f.

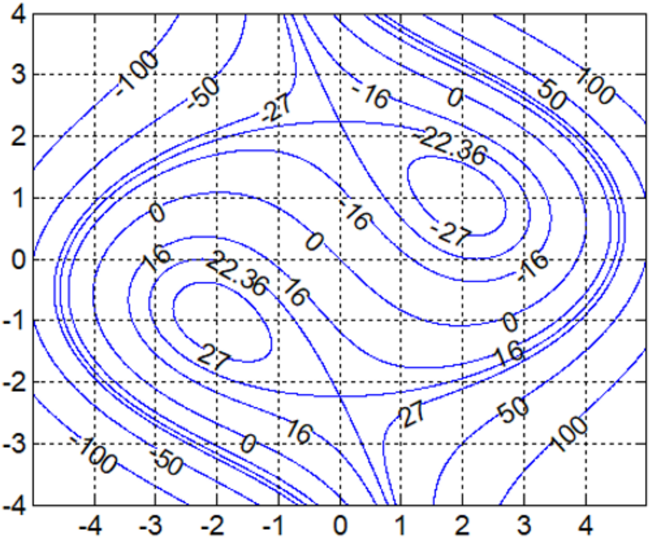
Ejemplo

Hallar los extremos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Puntos críticos: $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.
$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6y \end{bmatrix}$.
$Hf(0,\pm\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 0 & 6(\pm\sqrt{5}) \\ 6(\pm\sqrt{5}) & 6(\pm\sqrt{5}) \end{bmatrix}$; $f_{xx}(0,\pm\sqrt{5}) = 0$; $D = -6^2 5 < 0$
y así, $(0,\pm\sqrt{5})$ son puntos de silla de f.
$Hf(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$; $f_{xx}(2,1) = 12$; $D = 12 \cdot 6 - 36 > 0$ y así, $(2,1)$
es un punto de mínimo de f.
$Hf(-2,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$; $f_{xx}(-2,-1) = -12$; $D = 12 \cdot 6 - 36 > 0$
y así, $(-2,-1)$ es un punto de máximo de f.

Ejemplo



-100
-50
-27
-16
0
50
100
-22.36
-16
-27
0
16
-16
16
22.36
16
0
27
0
16
27
50
100
-100
-50
0
16

Ejemplo: tres variables

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

Ejemplo: tres variables

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, 2y + x, 2z); \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 2y + x &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases}$$

Ejemplo: tres variables

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+y, 2y+x, 2z); \; \left\{ \begin{array}{cl} 2x+y & = 0 \\ 2y+x & = 0 \\ 2z & = 0 \end{array} \right.$$

Punto crítico: $P(0,0,0)$;

$$Hf(x,y,z) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Ejemplo: tres variables

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, 2y + x, 2z); \begin{cases} 2x + y & = 0 \\ 2y + x & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases}$$

Punto crítico: $P(0, 0, 0)$;

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = Hf(0, 0, 0)$$

Ejemplo: tres variables

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, 2y + x, 2z); \begin{cases} 2x + y & = 0 \\ 2y + x & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases}$$

Punto crítico: $P(0, 0, 0)$;

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = Hf(0, 0, 0)$$

$$D_1 = 2;\ D_2 = 3;\ D_3 = 8 - 2$$

Ejemplo: tres variables

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+y, 2y+x, 2z); \begin{cases} 2x+y & = 0 \\ 2y+x & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases}$$

Punto crítico: $P(0,0,0)$;

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = Hf(0,0,0)$$

$$D_1 = 2;\ D_2 = 3;\ D_3 = 8-2$$

Luego f tiene un punto de mínimo en $(0,0,0)$.

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Conceptos involucrados

Definición

Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto A de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se dice que un punto $x_0 \in A$ es un *punto de máximo absoluto* (o de *mínimo absoluto*) de f si $f(x) \leq f(x_0)$ [o $f(x) \geq f(x_0)$] para todo $x \in A$.

Conceptos involucrados

Definición

Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto A de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se dice que un punto $x_0 \in A$ es un *punto de máximo absoluto* (o de *mínimo absoluto*) de f si $f(x) \leq f(x_0)$ [o $f(x) \geq f(x_0)$] para todo $x \in A$.

Definición

Se dice que un conjunto $D \in \mathbb{R}^n$ es *acotado* si existe un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Un conjunto es *cerrado* si contiene todos los puntos de su frontera.

Observación:

Un conjunto está acotado si está estrictamente contenido en alguna bola (que puede ser grande).

Teorema

Teorema (Teorema de existencia de máximos y mínimos globales)

Sea D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existen puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ de D donde f alcanza sus valores máximo y mínimo.

Extremos absolutos en regiones cerradas y acotadas

Estrategia para hallar los puntos de máximo y mínimo absolutos en una región con frontera.

Sea f una función continua de dos variables definida en una región D en $\mathbb{R}^2$ cerrada y acotada, que está limitada por una curva cerrada suave. Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

i) Localizar todos los puntos críticos de f en D.

ii) Hallar los puntos críticos de f considerada como una función definida sólo en ∂D.

iii) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.

iv) Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

Si D es una región limitada por una familia de curvas suaves (como lo es un cuadrado), se sigue un procedimiento análogo, pero incluyendo en el paso iii) los puntos donde se unen las curvas (en el caso del cuadrado, las esquinas).

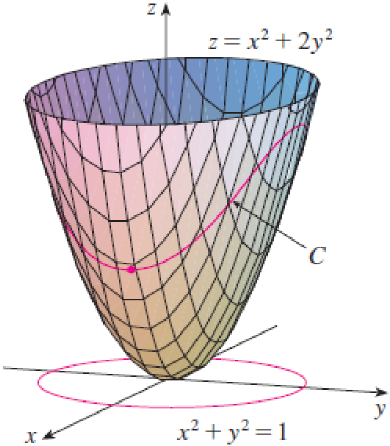
Recorrido

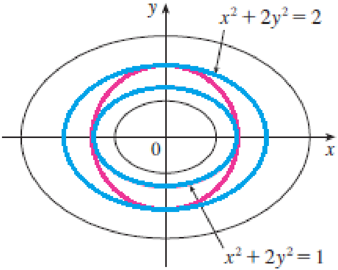
1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Extremos condicionados: restricción en el dominio

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \qquad\qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.





Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

El método de los multiplicadores de Lagrange

Teorema (El método de los multiplicadores de Lagrange)

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones* C^1 *con valores reales. Sean* $\mathbf{x}_0 \in U$ *y* $g(\mathbf{x}_0) = c$*, y sea* S *el conjunto de nivel de* g *con valor* c*. Supongamos que* $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$*. Si* $f|_S$*, que denota* f *restringida a* S*, alcanza en* $\mathbf{x}_0$ *un extremo local en* S*, entonces existe un número real* λ *tal que*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

Un punto $\mathbf{x}_0$ donde se cumple la (1) se dice que es un *punto crítico* de $f|_S$. Demostramos un caso especial: $n = 3$, aunque vale para n arbitraria.

El método de los multiplicadores de Lagrange

Demostración.

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria en S y $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\mathbf{c}'(0)$ es un vector tangente a S en $\mathbf{x}_0$;

$$\frac{d}{dt}\, g(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{dt}\, c = 0,$$

y por otra parte, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\, g\big(\mathbf{c}(t)\big)\Big|_{t=0} = \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0),$$

de manera que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(0)$ es ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$.

El método de los multiplicadores de Lagrange

(Continuación).

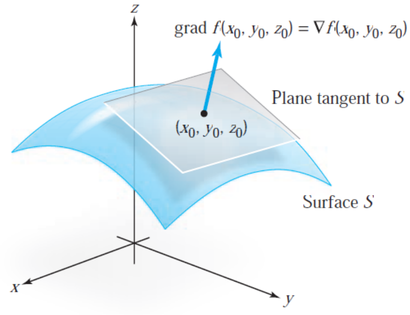
Por otra parte, si $f|_S$ tiene un extremo en $\mathbf{x}_0$, entonces $f\big(\mathbf{c}(t)\big)$ tiene un extremo en $t = 0$. Luego $\left.\dfrac{d}{dt}f\big(\mathbf{c}(t)\big)\right|_{t=0} = 0$. Por la regla de la cadena,

$$0 = \left.\frac{d}{dt}f\big(\mathbf{c}(t)\big)\right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{c}'(0).$$

Así, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a la tangente a cualquier curva en S y por tanto es perpendicular al espacio tangente a S en $\mathbf{x}_0$. Como el espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ son paralelos. Dado que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, se deduce que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es un múltiplo de $\nabla g(\mathbf{x}_0)$. $\square$

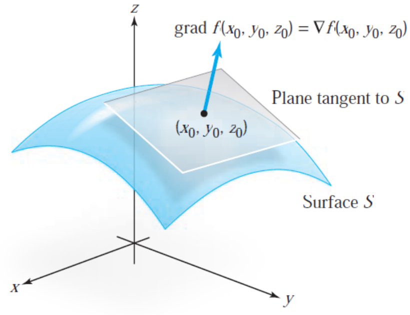
Gráficamente

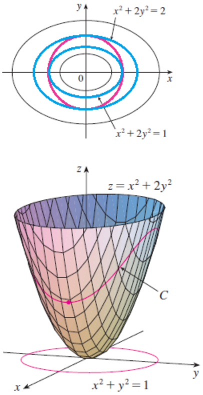
Si al restringir f a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S en $\mathbf{x}_0$.



Gráficamente

Si al restringir f a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S en $\mathbf{x}_0$.





Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

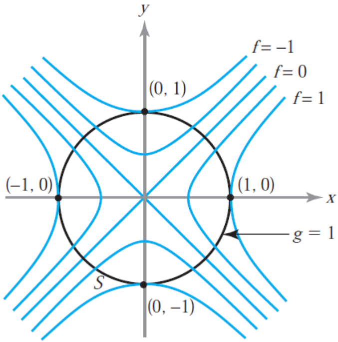
   Rta: 1 punto crítico: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
   $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ¿es máximo o mínimo?
   Es mínimo.

Ejercicio

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$, S es la circunferencia de radio uno, centrada en el origen.

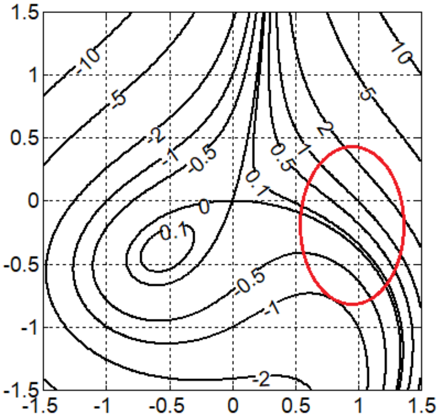
Ejercicio

3. $f(x,y) = x^2 - y^2$, S es la circunferencia de radio uno, centrada en el origen.



Ejercicio

4. Halle gráficamente los extremos absolutos de la función diferenciable f sujeta a la restricción dada por $g(x,y) =$ (curva roja).



5. Maximizar $f(x,y,z) = x + z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Interpretar geométricamente.
6. Hallar las dimensiones de la caja rectangular con superficie de $10m^2$ y máximo volumen.

- Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

7. $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}) - 1$.
8. $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

En el 7. se verifica que $\nabla g(P_0) = \mathbf{0}$, siendo P_0 punto crítico de este problema. En el 8., se observa que $g = 0$ es una curva de nivel de f y todos los puntos que cumplen $g = 0$ son puntos críticos para este problema.

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Multiplicadores de Lagrange con varias restricciones

Si una superficie S está definida por varias restricciones

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = c_2, \\ \qquad \vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) = c_k, \end{cases}$$

en las que $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_k(x_0)$ son linealmente independientes, se puede generalizar teorema de los multiplicadores de Lagrange: si f tiene un máximo o un mínimo sobre S en x_0, deben existir constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x_0).$$

Ejemplo: dos restricciones

Hallar los puntos de extremo de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeta a las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.
Restricciones:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \qquad g_2(x,y,z) = x + z - 1 = 0.$$

Planteo:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) & = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z), \\ g_1(x,y,z) & = 0, \\ g_2(x,y,z) & = 0, \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} 1 & = \lambda_1\, 2x + \lambda_2\, 1 \\ 1 & = \lambda_1\, 2y + \lambda_2\, 0 \\ 1 & = \lambda_1\, 0 + \lambda_2\, 1 \\ x^2 + y^2 - 2 & = 0, \\ x + z - 1 & = 0. \end{cases}$$

Ejemplo: dos restricciones

Hallar los puntos de extremo de $f(x,y,z) = x+y+z$ sujeta a las dos condiciones $x^2+y^2=2$ y $x+z=1$.
Restricciones:

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-2 = 0, \qquad g_2(x,y,z) = x+z-1 = 0.$$

Planteo:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) & = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z), \\ g_1(x,y,z) & = 0, \\ g_2(x,y,z) & = 0, \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} 1 & = \lambda_1\, 2x + \lambda_2\, 1 \\ 1 & = \lambda_1\, 2y + \lambda_2\, 0 \\ 1 & = \lambda_1\, 0 + \lambda_2\, 1 \\ x^2+y^2-2 & = 0, \\ x+z-1 & = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 & = \lambda_1\, 2x + \lambda_2 \\ 1 & = \lambda_1\, 2y \\ 1 & = \lambda_2 \\ x^2+y^2 & = 2, \\ x+z & = 1. \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 1 & = \lambda_1\, 2x + \lambda_2 \quad \Rightarrow \lambda_1\, 2x = 0 \\ 1 & = \lambda_1\, 2y \\ 1 & = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 & = 2, \\ x + z & = 1. \end{array}\right.$$

De (2), $\lambda_1 \neq 0$; de (1), $x = 0$; de (4), $y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$ y de (5), $z = 1$.

$$\begin{cases} 1 &= \lambda_1 \, 2x + \lambda_2 \quad \Rightarrow \lambda_1 \, 2x = 0 \\ 1 &= \lambda_1 \, 2y \\ 1 &= \lambda_2 \\ x^2 + y^2 &= 2, \\ x + z &= 1. \end{cases}$$

De (2), $\lambda_1 \neq 0$; de (1), $x = 0$; de (4), $y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$ y de (5), $z = 1$.
De (2), $\lambda_1 = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Posibles puntos de extremo:

$$(0, \sqrt{2}, 1) \quad \text{y} \quad (0, -\sqrt{2}, 1).$$

El conjunto de restricciones (¿qué forma tiene?) es cerrado y acotado, por lo que f alcanza allí un máximo y un mínimo absolutos.

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}, \text{ máximo}; \quad f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2}, \text{ mínimo}.$$

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Aplicación a Máximos y mínimos globales

Definición

Sea U una región abierta en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U. Decimos que ∂U es *suave* si ∂U es el conjunto de nivel de una función g de clase C^1 (también se le dice *suave*) cuyo gradiente nunca se anula (esto es, $\nabla g \neq \mathbf{0}$).

Aplicación a Máximos y mínimos globales

Definición

Sea U una región abierta en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U. Decimos que ∂U es *suave* si ∂U es el conjunto de nivel de una función g de clase C^1 (también se le dice *suave*) cuyo gradiente nunca se anula (esto es, $\nabla g \neq \mathbf{0}$).

Estrategia de los multiplicadores de Lagrange para encontrar máximos y mínimos absolutos en regiones con frontera.

Sea f diferenciable sobre una región cerrada y acotada $D = U \cup \partial U$, con U abierto en $\mathbb{R}^n$ y ∂U, suave. Para hallar los extremos absolutos de f en D:

(i) Encontrar todos los puntos críticos de f en U.

(ii) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar todos los puntos críticos de f restringida a ∂U.

(iii) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.

(iv) Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$.

- En el interior, $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$:

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2x = 0,\ 4y = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0.$$

  Punto crítico: $(0,0)$; $f(0,0) = 0$.

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$.

- En el interior, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2x = 0,\ 4y = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0.$$

  Punto crítico: $(0,0)$; $f(0,0) = 0$.

- En la frontera, $\partial U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejemplos (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$.

- En el interior, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2x = 0,\ 4y = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0.$$

  Punto crítico: $(0,0)$; $f(0,0) = 0$.

- En la frontera, $\partial U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$; $f(\pm 1, 0) = 1$, $f(0, \pm 1) = 2$.
$f(0,0) = 0$ es mínimo y $f(0,\pm 1) = 2$ es máximo.

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Crit. der. seg. extr. cond., caso $n = 2$

Definición (Matriz hessiana orlada)

Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función objetivo y $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la restricción, ambas suaves (al menos C^2). Se define la función auxiliar (Lagrangiano)

$$h = f - \lambda g$$

y la matriz *hessiana orlada*

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Crit. der. seg. extr. cond., caso $n = 2$

Teorema

Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suaves (al menos C^2). Sea $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$, y sea S la curva de nivel de g correspondiente al valor c. Supongamos que $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ y que existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0).$$

Formamos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante de la matriz hessiana orlada, $|\tilde{H}|$.
Entonces:

(i) *Si $|\tilde{H}| > 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de* **máximo** *local de $f|_S$.*

(ii) *Si $|\tilde{H}| < 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de* **mínimo** *local de $f|_S$.*

(iii) *Si $|\tilde{H}| = 0$, el criterio no es concluyente y $\mathbf{v}_0$ puede ser un punto de máximo, un punto de mínimo o ninguna de las dos cosas.*

Crit. der. seg. extr. cond., caso $n > 2$

Extremos de $f(x_1,\ldots,x_n)$ sujeta a $g(x_1,\ldots,x_n) = c$:
matriz hessiana orlada para la función auxiliar

$$h(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda\big(g(x_1,\ldots,x_n) - c\big)$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & -\dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Luego examinamos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3 en los puntos críticos de h.

Crit. der. seg. extr. cond., caso $n > 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots$$

Si todos son negativos, estamos en un punto de *mínimo local* de $f|_S$. Si alternan los signos (esto es, $> 0,\ < 0,\ > 0,\ < 0, \ldots$), entonces estamos en un punto de *máximo local*. Si todos son distintos de cero y no encajan en ninguno de estos patrones, entonces el punto no es ni de máximo ni de mínimo (se dice que es de tipo *silla de montar*).

Crit. der. seg. extr. cond., caso $n > 2$

Ejemplo

Hallar los extremos de $f(x, y, z) = xyz$ en la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, utilizando el criterio de la derivada segunda.
Buscamos puntos críticos de $f|_S$, haciendo $\nabla h = \mathbf{0}$ para $h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. se obtiene

$$\begin{cases} yz &= 2\lambda x, \\ xz &= 2\lambda y, \\ xy &= 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{cases}$$

Así, Si $\lambda = 0$, las soluciones son
$(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0)$, con valor de f igual a 0. Si $\lambda \neq 0$, entonces $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$, agrengando 6 puntos críticos, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$, con $f = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Son 14 puntos críticos de h en total.

Ejemplo (Cont.)

	x	y	z	λ	$f(x,y,z)$
$\pm A$	± 1	0	0	0	0
$\pm B$	0	± 1	0	0	0
$\pm C$	0	0	± 1	0	0
D	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
E	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
F	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
G	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
H	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
I	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
J	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
K	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$

Ejemplo (Cont.)

El subdeterminante de la hessiana orlada (usando x e y):

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & z \\ -2y & z & -2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 + 8xyz = 8\lambda(x^2 + y^2 + 2z^2).$$

$$\operatorname{sign}(|H_2|) = \operatorname{sign}\lambda = \operatorname{sign}(xyz),$$

Ejemplo (Cont.)

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} & -\dfrac{\partial g}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial z} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial z\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix}.$$

En los puntos críticos se obtiene que $|H_3| = +4$ en $\pm A$, $\pm B$, $\pm C$, y $|H_3| = -\dfrac{16}{3}$ en los otros ocho puntos.
Por tanto: - en E, F, G, K se tiene $|H_2| < 0$ y $|H_3| < 0 \Rightarrow$ *mínimo local*; - en D, H, I, J se tiene $|H_2| > 0$ y $|H_3| < 0 \Rightarrow$ *máximo local*; - en $\pm A, \pm B, \pm C$ el criterio indica *puntos de silla*.

Crit. der. seg. extr. cond., caso $n > 2$

Ejemplo (Cont.)

	x	y	z	λ	$f(x,y,z)$	$sg(\lvert\tilde{H}_2\rvert)$	$sg(\lvert\tilde{H}_3\rvert)$
$\pm A$	± 1	0	0	0	0	0	1
$\pm B$	0	± 1	0	0	0	0	1
$\pm C$	0	0	± 1	0	0	0	1
D	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$	1	-1
E	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$	-1	-1
F	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$	-1	-1
G	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$	-1	-1
H	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$	1	-1
I	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$	1	-1
J	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$	1	-1
K	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$	-1	-1

22. (r) Halle los extremos de f sujeta a las restricciones enunciadas:

a) $f(x, y) = xy$, sujeta a $x^2 + 2y^2 = 1$.

b) $f(x, y, z) = x - y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

c) $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeta a $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

Recorrido

1. Derivadas parciales iteradas
2. El Teorema de Taylor
3. Extremos de funciones con valores reales
   - Máximos y mínimos de funciones de n variables
   - Condición de la derivada primera para puntos de extremo local
   - Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local
   - Máximos y mínimos globales
4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange
   - El método de los multiplicadores de Lagrange
   - Varias restricciones
   - Máximos y mínimos globales
   - Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados
5. Método del descenso del gradiente

Idea

Dada $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y dado $\mathbf{x}_0 \in A$:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \gamma \nabla f(\mathbf{x}_0)^T$$

para cierto $\gamma > 0$ pequeño. En este caso,

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_0).$$

Fórmula de recurrencia

Semilla: $\mathbf{x}_0 \in A$.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla f(\mathbf{x}_n)^T$$

Ejemplo de MML

Consider a quadratic function in two dimensions

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1^2+x_1x_2-5x_1+10x_2^2-3x_2$$

with gradient

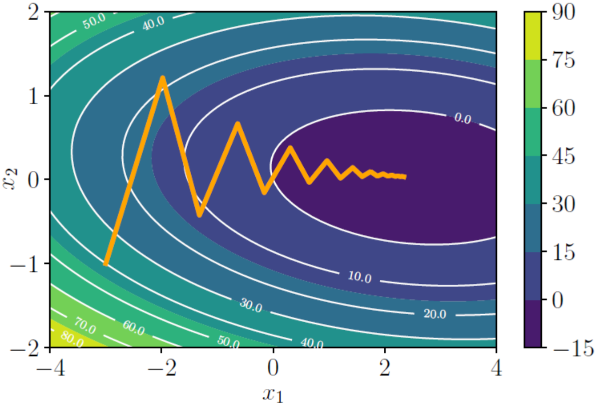
$$\nabla f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 3\end{bmatrix}^\top=(2x_1+x_2-5, x_1+20x_2-3)$$

Elegimos:

$$x_0=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix},\ \text{y}\ \gamma=0{,}085$$

$$x_1=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}-0{,}085\begin{bmatrix}-12\\-26\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1{,}98\\1{,}21\end{bmatrix};\quad x_2=\begin{bmatrix}-1{,}32\\-0{,}42\end{bmatrix},\cdots$$

$$\gamma = 0{,}085; \quad x_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad x_1 = \begin{bmatrix} -1{,}98 \\ 1{,}21 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1{,}32 \\ -0{,}42 \end{bmatrix}, \cdots$$



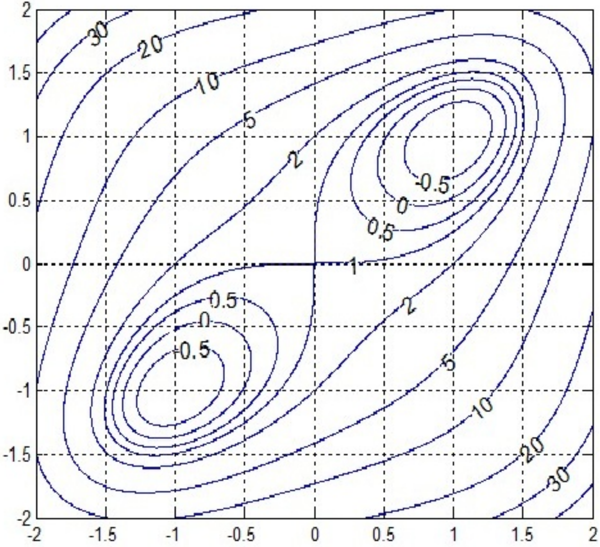
¿Cuándo se termina? (ver excel)

Remark. Gradient descent can be relatively slow close to the minimum: Its asymptotic rate of convergence is inferior to many other methods. Using the ball rolling down the hill analogy, when the surface is a long, thin valley, the problem is poorly conditioned (Trefethen and Bau III, 1997). For poorly conditioned convex problems, gradient descent increasingly "zigzags" as the gradients point nearly orthogonally to the shortest direction to a minimum point; see Figure 7.3. ◊

Remark. Gradient descent can be relatively slow close to the minimum: Its asymptotic rate of convergence is inferior to many other methods. Using the ball rolling down the hill analogy, when the surface is a long, thin valley, the problem is poorly conditioned (Trefethen and Bau III, 1997). For poorly conditioned convex problems, gradient descent increasingly "zigzags" as the gradients point nearly orthogonally to the shortest direction to a minimum point; see Figure 7.3. ◇

Adaptive gradient methods rescale the step-size at each iteration, depending on local properties of the function. There are two simple heuristics (Toussaint, 2012):

- When the function value increases after a gradient step, the step-size was too large. Undo the step and decrease the step-size.
- When the function value decreases the step could have been larger. Try to increase the step-size.



30
20
10
5
2
-0.5
0
0.5
1
2
5
10
20
30
0.5
0
-0.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2