UNIDAD 3
Integrales múltiples e integrales sobre curvas.

Matemática para Computación

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Recorrido

Recorrido

1. Integrales dobles
   - Revisión integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Recorrido

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a,b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a,b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

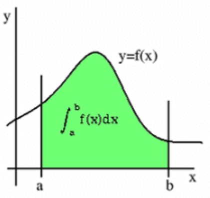
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a,b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

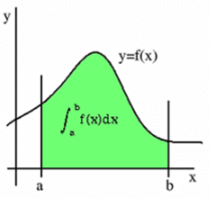
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k^*)\Delta x_k$$

Recorrido

Volúmenes de sólidos sobre regiones rectangulares.

Sea R un rectángulo con los lados paralelos a los ejes, que se expresa como $[a, b] \times [c, d]$.

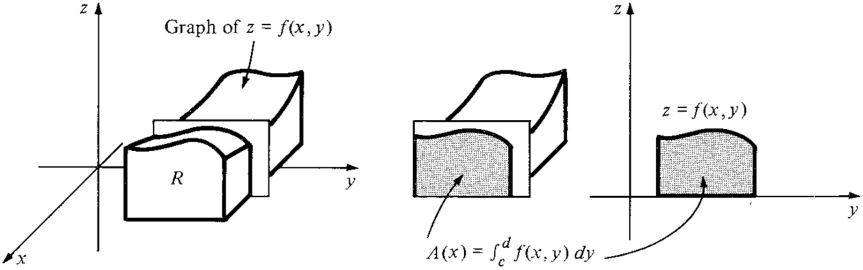
Definición

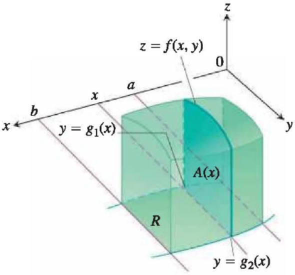
El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función continua no negativa f se llama integral doble de f sobre R y se anota

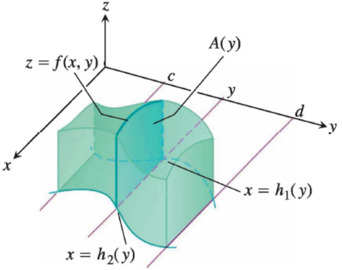
$$\iint\limits_R (f(x, y)\, dA \text{ o } \iint\limits_R (f(x, y)\, dx\, dy.$$

Dar ejemplos (prismas, semiesfera).

Principio de Cavalieri e integrales iteradas



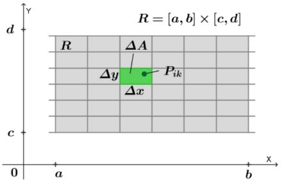


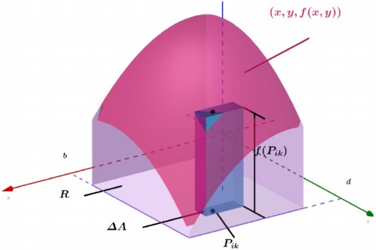


$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b A(x)\, dx$$

Definición de integral doble sobre rectángulos





Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A$.

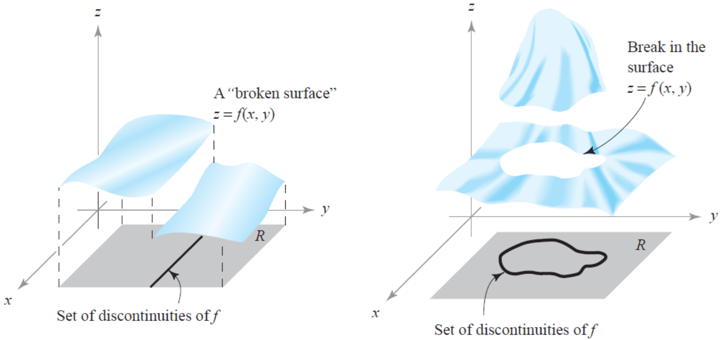
Si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe para cualquier elección de P_{ik}, se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x, y)dA, \quad \iint_R f(x, y)dx\,dy \quad \text{o} \quad \iint_R f\,dx\,dy.$$

Propiedad

Teorema (Condición suficiente para la integrabilidad)

1. *Si f es continua en un rectángulo R cerrado, es integrable en R.*
2. *Si f es acotada sobre un rectángulo R y el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R.*



Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles)

Si f y g son funciones integrables sobre el rectángulo R, y c es una constante, entonces:

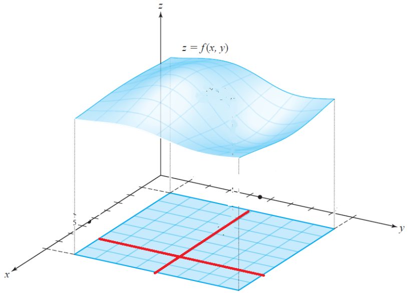
1. $$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA.$$
2. $$\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA.$$
3. *Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$,*
$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA.$$
4. $$\left|\iint_R f(x,y)dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles, Cont.)

5. *Si* R_1, R_2,...,R_m *son rectángulos con interiores disjuntos dos a dos,* f *es acotada e integrable sobre cada* R_i *y* $Q = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ *es un rectángulo, entonces* f *es integrable en* Q *y*

$$\iint_Q f(x,y)dA = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f(x,y)dA.$$



Recorrido

Teorema de Fubini

Teorema (Teorema de Fubini)

Si f es continua en la región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\, dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

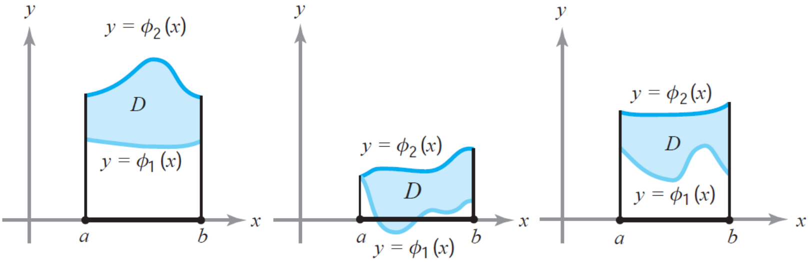
Recorrido

Regiones y-simples

Dadas $\phi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$, el conjunto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\}$$

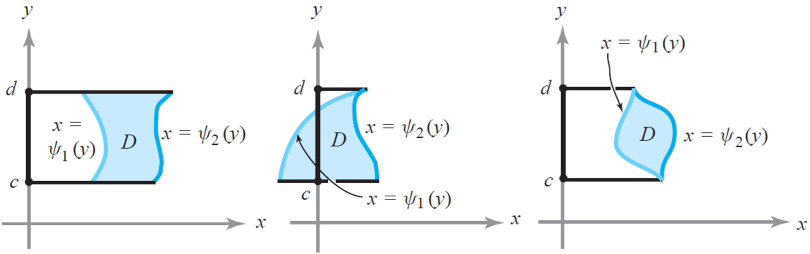
se llama y-simple. La frontera de D está formada por segmentos verticales y las gráficas de funciones continuas de x definidas en $[a,b]$.



Dadas $\psi_1 : [c,d] \to \mathbb{R}$ y $\psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c,d]$, el conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

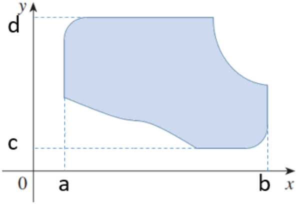
se llama x-simple. La frontera de D está formada por segmentos horizontales y las gráficas de funciones continuas de y definidas en $[c,d]$.

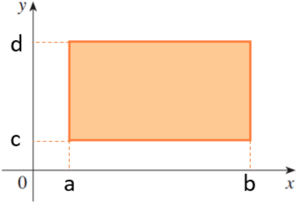


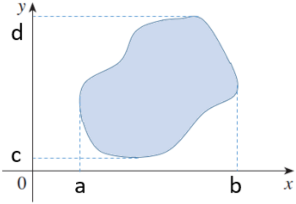
Regiones simples o elementales

Son aquellas regiones que son y-simples y x-simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.

Son aquellas regiones que son y-simples y x-simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.







La integral sobre una región elemental

Definición

Si D es una región elemental, R es un rectángulo tal que $D \subset R$ y f es una función continua (y por lo tanto acotada) $f : D \to \mathbb{R}$, entonces se define la función $f^* : R \to \mathbb{R}$ por

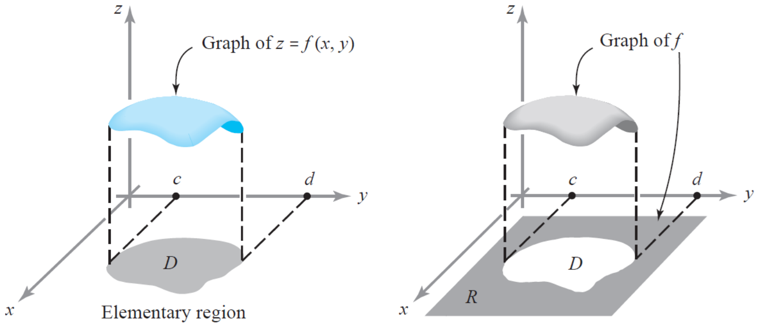
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D,\ (x,y) \in R. \end{cases}$$

Entonces, podemos definir

$$\iint_D f(x,y)\, dA := \iint_R f^*(x,y)\, dA.$$

Observación: f^* es acotada (ya que f lo es) y es continua excepto posiblemente en ∂D. Como ∂D está formada por gráficas de funciones continuas, f^* es integrable sobre R.

Integral doble sobre regiones elementales



$$\iint_D f(x,y)\,dA := \iint_R f^*(x,y)\,dA$$
$$= \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f^*(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema

- *Si D es una región y-simple, entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

- *Si D es una región x-simple, entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Caso especial: área de D

Si $f(x,y)=1$ para todo $(x,y)\in D$, $\iint_D f(x,y)\,dA$ es el área de D (vol. sólido altura 1). Además

$$\iint_D 1\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1\,dy\,dx = \int_a^b \left(\phi_2(x)-\phi_1(x)\right)\,dx,$$

que coincide con la fórmula vista en AMI.

Recorrido

Desigualdad del valor medio

Si f es acotada en D, existen m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y)\, dA \leq M \cdot A(D).$$

Desigualdad del valor medio

Si f es acotada en D, existen m y M tales que $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq M \cdot A(D).$$

Ejemplo: probar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\, dx\, dy \leq 1.$$

Ejemplo

Probar que: $$\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$$

Ejemplo

Probar que: $$\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1$, $1 \leq 1+(xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \dfrac{1}{1+(xy)^4} \geq \dfrac{1}{2}$.
- $\operatorname{sen} x \geq 0$; luego $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \geq \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$.
- $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1\,dx\,dy = 1.$

Ejemplo

$$\text{Probar que:}\quad \frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1$, $1 \leq 1+(xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \dfrac{1}{1+(xy)^4} \geq \dfrac{1}{2}$.
- $\operatorname{sen} x \geq 0$; luego $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \;\geq\; \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$.
- $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1\,dx\,dy = 1.$

Como

$$\iint_{[0,1]^2} \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) = \tfrac{1}{2}\,(1-\cos 1),$$

se concluye que

$$\frac{1}{2}(1-\cos 1) \;\leq\; \iint_{[0,1]^2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$$

Igualdad del valor medio

Teorema (Teorema del valor medio par integrales dobles)

Si $f : D \to \mathbb{R}$ *es continua y* D *es elemental, entonces para algún punto* $(x_0, y_0) \in D$ *se cumple*

$$\iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0)\, A(D),$$

donde $A(D)$ *es el área de* D.

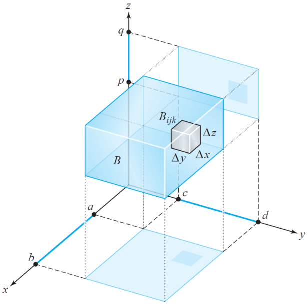
Recorrido

Definición

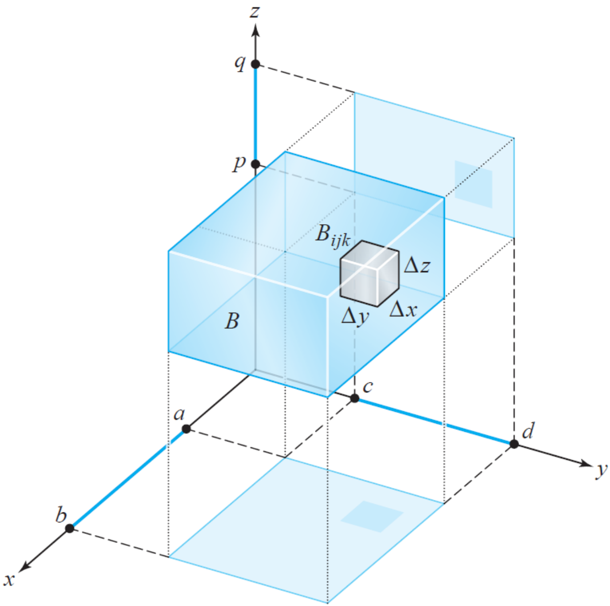
Sean $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un paralelepípedo (una caja o rectángulo generalizado) y f, una función definida en B. Dividimos los tres lados de B en n partes iguales y sumamos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto de B_{ijk}, el ijk-ésimo paralelepípedo en la partición de B y ΔV es el volumen de B_{ijk}.



Definición



Definición

Sea $f(x, y, z)$ acotada, definida en B. Si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

existe y es independiente de la elección de $\mathbf{c}_{ijk}$, decimos que f es integrable y llamamos a S **integral triple** de f en B y se anota

$$\iiint_B f\, dV, \quad \iiint_B f(x, y, z)\, dV, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Propiedades

Las funciones continuas definidas en un paralelepípedo B (box) son integrables, igual que las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (como $z = g(x, y)$). Las demás propiedades que valen para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. En particular, vale el Teorema de Fubini:

Propiedades

Las funciones continuas definidas en un paralelepípedo B (box) son integrables, igual que las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (como $z = g(x, y)$). Las demás propiedades que valen para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. En particular, vale el Teorema de Fubini:

Teorema (Teorema de Fubini: Reducción a integrales iteradas.)

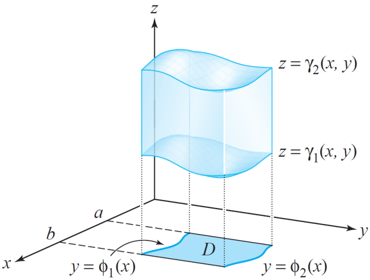
Sea $f(x, y, z)$ una función integrable en la caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Cualquier integral iterada, si existe, es igual a la integral triple; esto es,

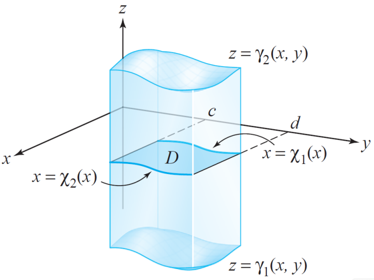
$$\begin{aligned}\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \cdots\end{aligned}$$

En total, hay seis órdenes de integración posibles.

Regiones elementales

Una región elemental en $\mathbb{R}^3$ es aquella en la que una de las variables está entre dos funciones de las otras dos variables, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (esto es, x-simple o y-simple) en el plano.





Integrales triples sobre regiones elementales

Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y. Entonces, o bien

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx,$$

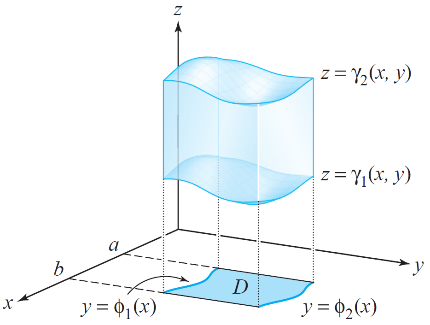
o bien

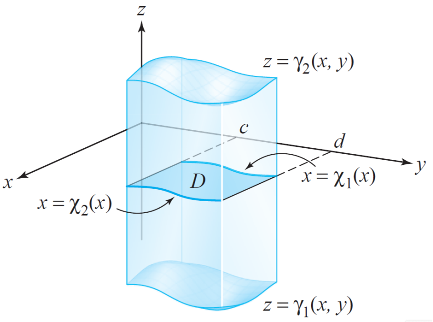
$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$

Si $f = 1$, obtenemos la integral $\iiint_W dx\,dy\,dz$, que es el *volumen* de la región W.

Integrales triples sobre regiones elementales

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx; \qquad \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$



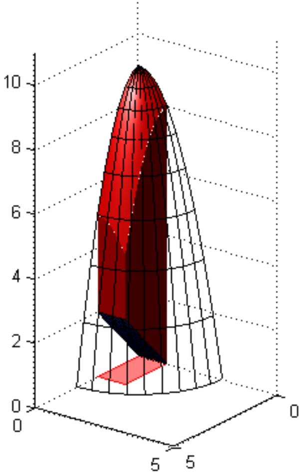


Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.

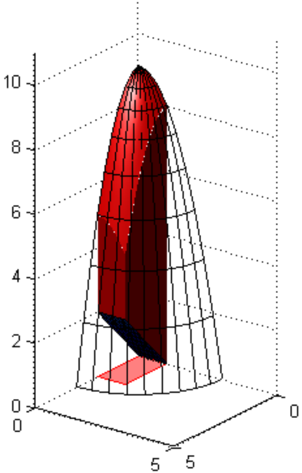
Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x,y,z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.

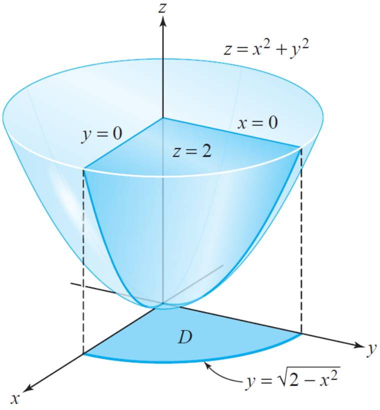


$$\int_0^2 \int_0^1 \int_x^{9-x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Ejercicio

Sea W la región limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=2$ y la superficie $z=x^2+y^2$, que está en el primer octante.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$.



$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Recorrido

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx =$$

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1; supóngase que T es inyectiva y que $D = T(D^*)$. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, se tiene

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

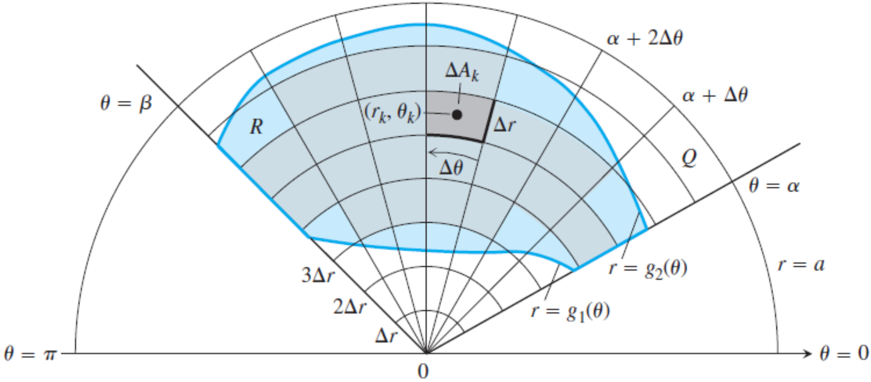
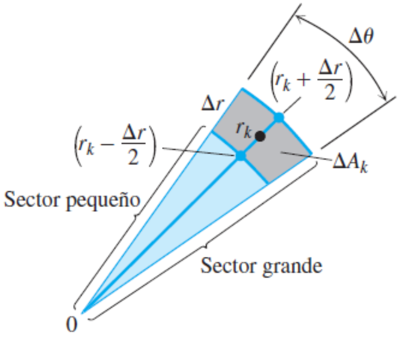


FIGURA 15.21 La región R: $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, está contenida en la región con forma de abanico Q: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

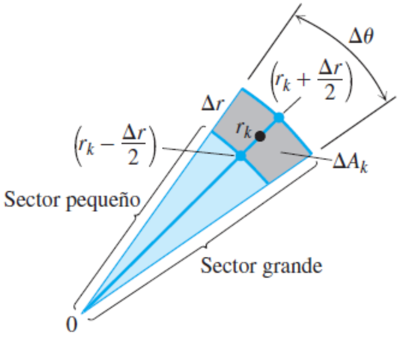
Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

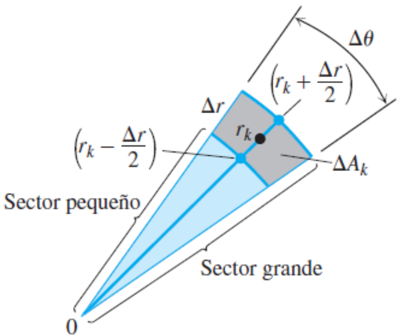
FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\begin{array}{c}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{array}\right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix} \text{área del sec-} \\ \text{tor más grande} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{área del sec-} \\ \text{tor más pequeña} \end{pmatrix}$$

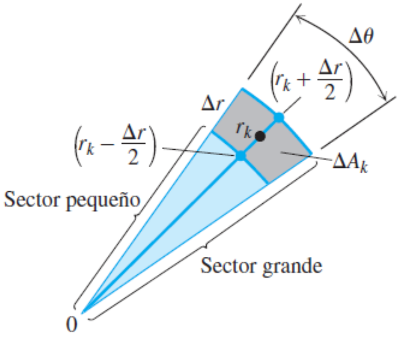
nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\, \Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r| = r.$$

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

Nota sobre el cambio en integrales triples

Las coordenadas cilíndricas aparecen cuando aplicamos coordenadas polares en el plano xy. Hay más casos pero nos limitaremos a este.

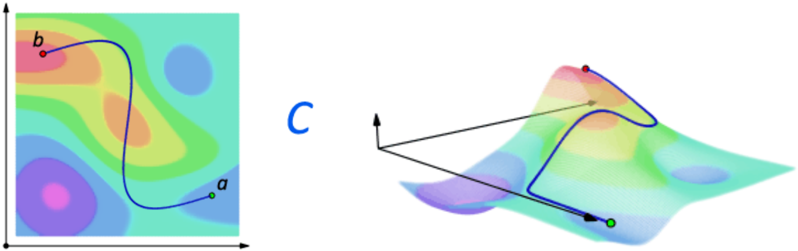
Nota sobre el cambio en integrales triples

Las coordenadas cilíndricas aparecen cuando aplicamos coordenadas polares en el plano xy. Hay más casos pero nos limitaremos a este. El jacobiano de la transformación es r, igual que antes.

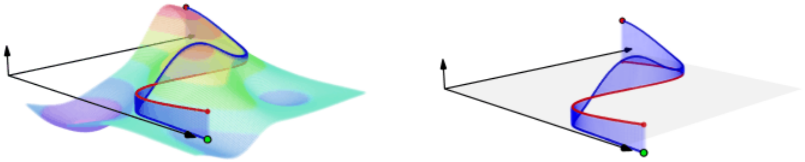
Recorrido

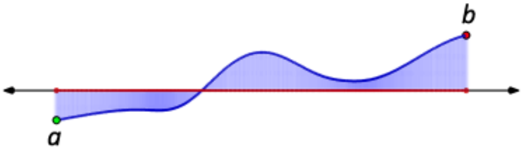
Recorrido

Interpretación



Interpretación

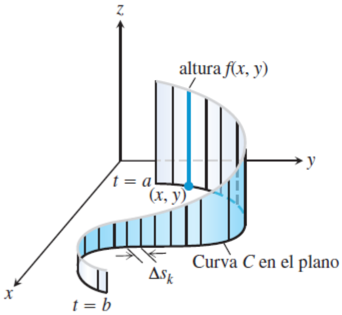


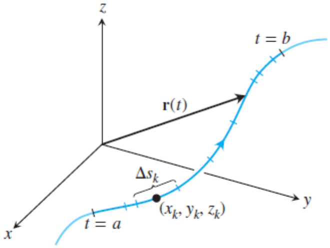


$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Integrales a lo largo de trayectorias





Integrales a lo largo de trayectorias

Definición (Integrales a lo largo de trayectorias en el plano)

La integral de $f(x,y)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y la función compuesta $t\mapsto f\big(x(t),y(t)\big)$ es continua en $[a,b]$. Definimos esta integral por

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\,\left\|\mathbf{c}'(t)\right\|\,dt.$$

A veces, $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ se denota por $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f(x,y)\,ds$ o $\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|dt$.
Si $\mathbf{c}$ es sólo C^1 a trozos o $f\circ\mathbf{c}$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ descomponiendo $[a,b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua, sumando las integrales sobre los segmentos.

Integrales a lo largo de trayectorias

Definición (Integrales a lo largo de trayectorias en el espacio)

La integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \mapsto f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ es continua en $[a, b]$. Definimos esta integral por

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \left\|\mathbf{c}'(t)\right\| dt.$$

A veces, $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ se denota por $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$ o $\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.
Si $\mathbf{c}$ es sólo C^1 a trozos o $f \circ \mathbf{c}$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ descomponiendo $[a, b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t)) \left\|\mathbf{c}'(t)\right\|$ sea continua, sumando las integrales sobre los segmentos.

Propiedades

La integral de un campo escalar continuo a lo largo de una trayectoria C^1:

- es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto sea C^1.
- es independiente del sentido de recorrido de la curva.

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

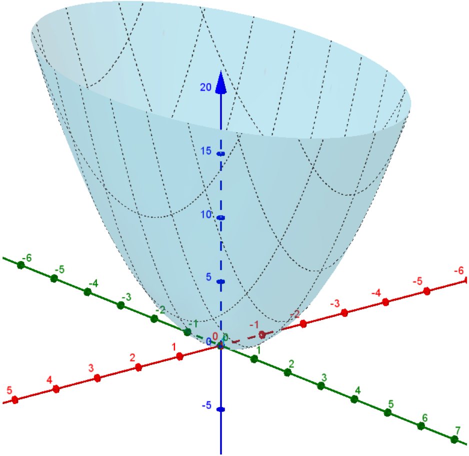
a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

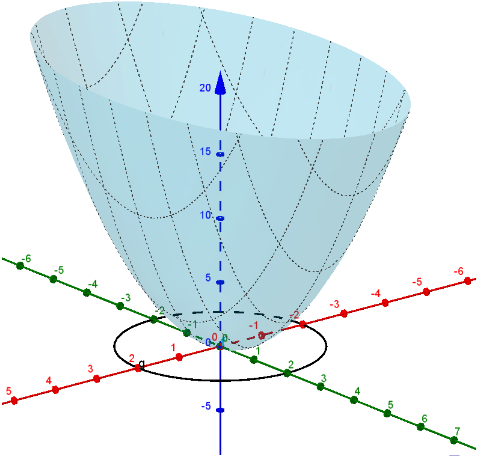
a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

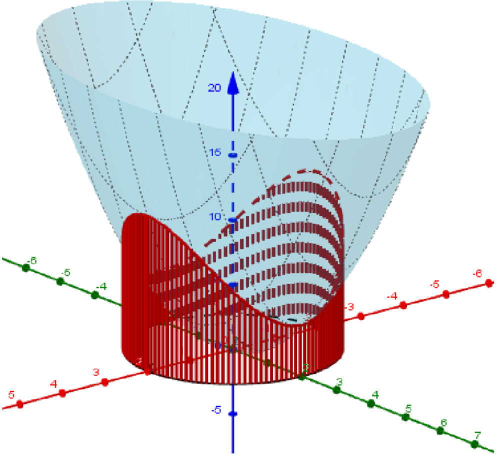


Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

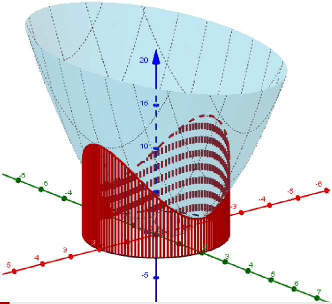
$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi'} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt =$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \le t \le 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi'} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} (3\cdot 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t))\, 2dt$$

$$= 24\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + 8\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(t)dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi.$$



Recorrido

Definición de la integral de línea

Definición (Integrales de línea)

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, por la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt.$$

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos: integramos el producto escalar de $\mathbf{F}$ con $\mathbf{c}'$ sobre el intervalo $[a,b]$.

Propiedades

La integral de línea de un campo vectorial continuo sobre de una trayectoria C^1:

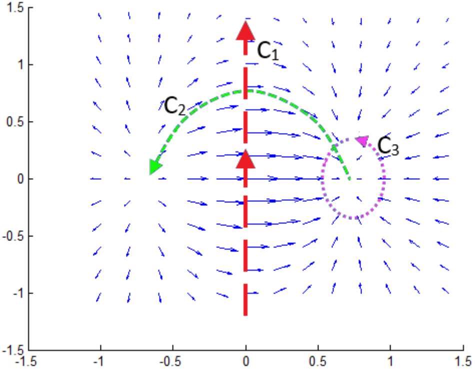
- es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto sea C^1:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- es dependiente del sentido de recorrido de la curva.

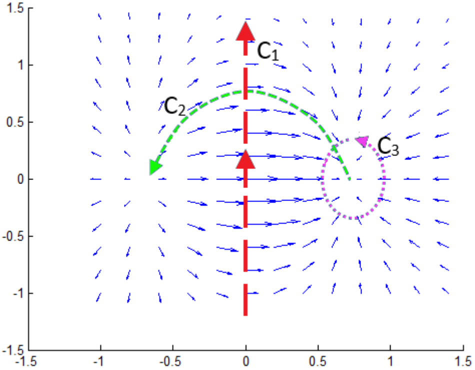
Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



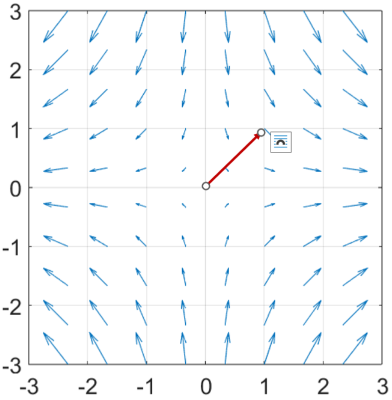
El valor de $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es 0; el valor de $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es negativo; el valor de $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es cercano a 0.

Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

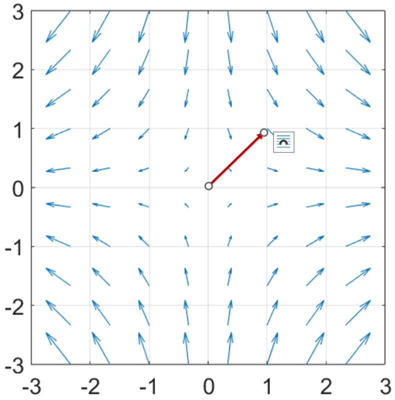
Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x,y) = (x,-y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t,t)$, $0 \leq t \leq 1$.



Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x,y) = (x,-y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t,t)$, $0 \leq t \leq 1$.



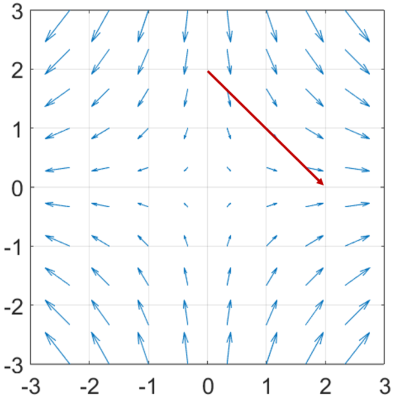
$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} (1,1) dt \\
&= \int_0^1 0\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, 2 - t)$, $0 \leq t \leq 2$.

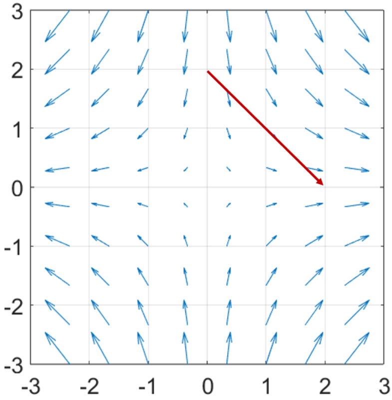
Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x,y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, 2-t)$, $0 \leq t \leq 2$.



Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, 2 - t)$, $0 \leq t \leq 2$.



$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} (1, -1) dt \\
&= \int_0^2 (t + 2 - t)\, dt \\
&= 2
\end{aligned}
$$