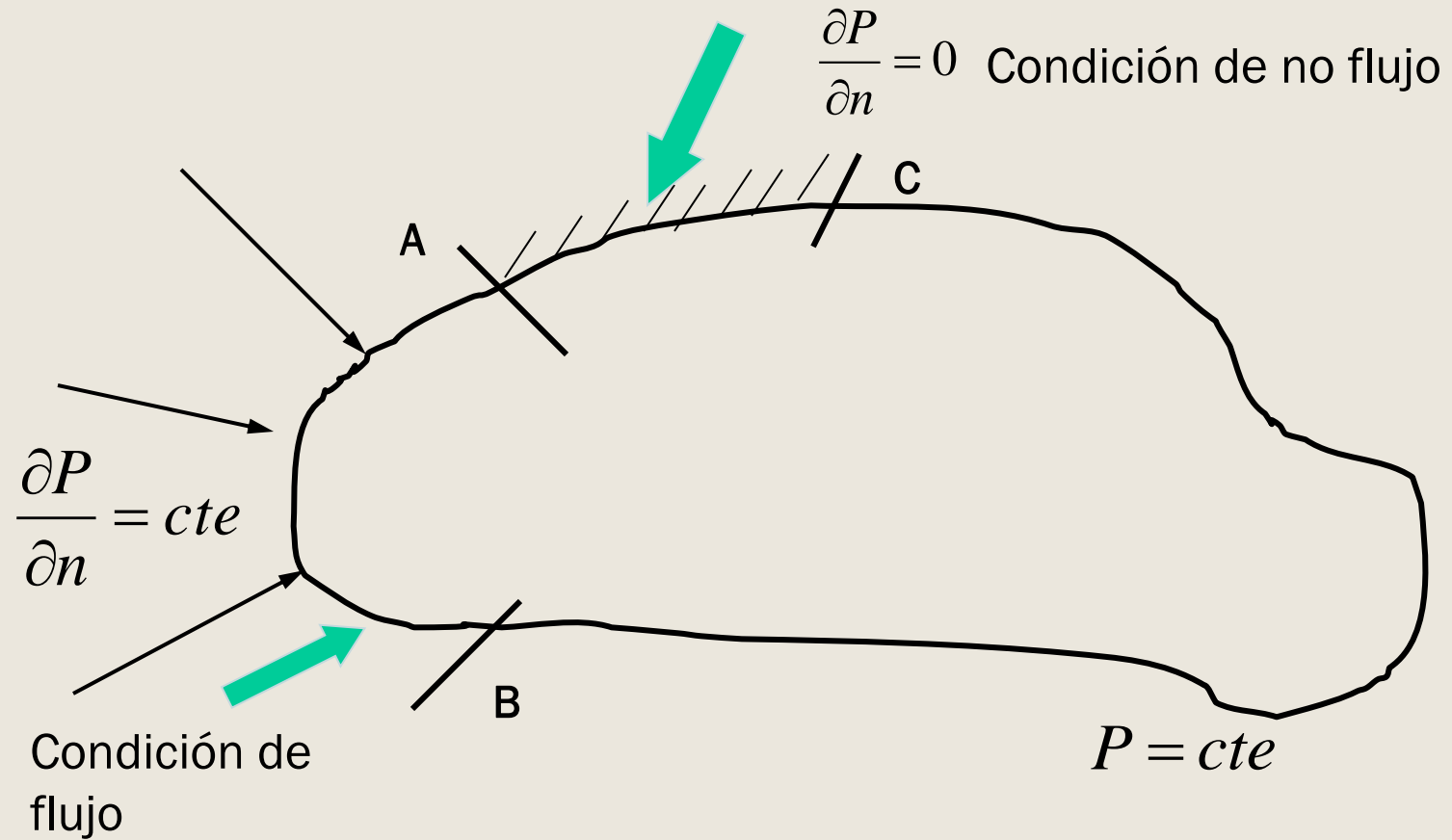


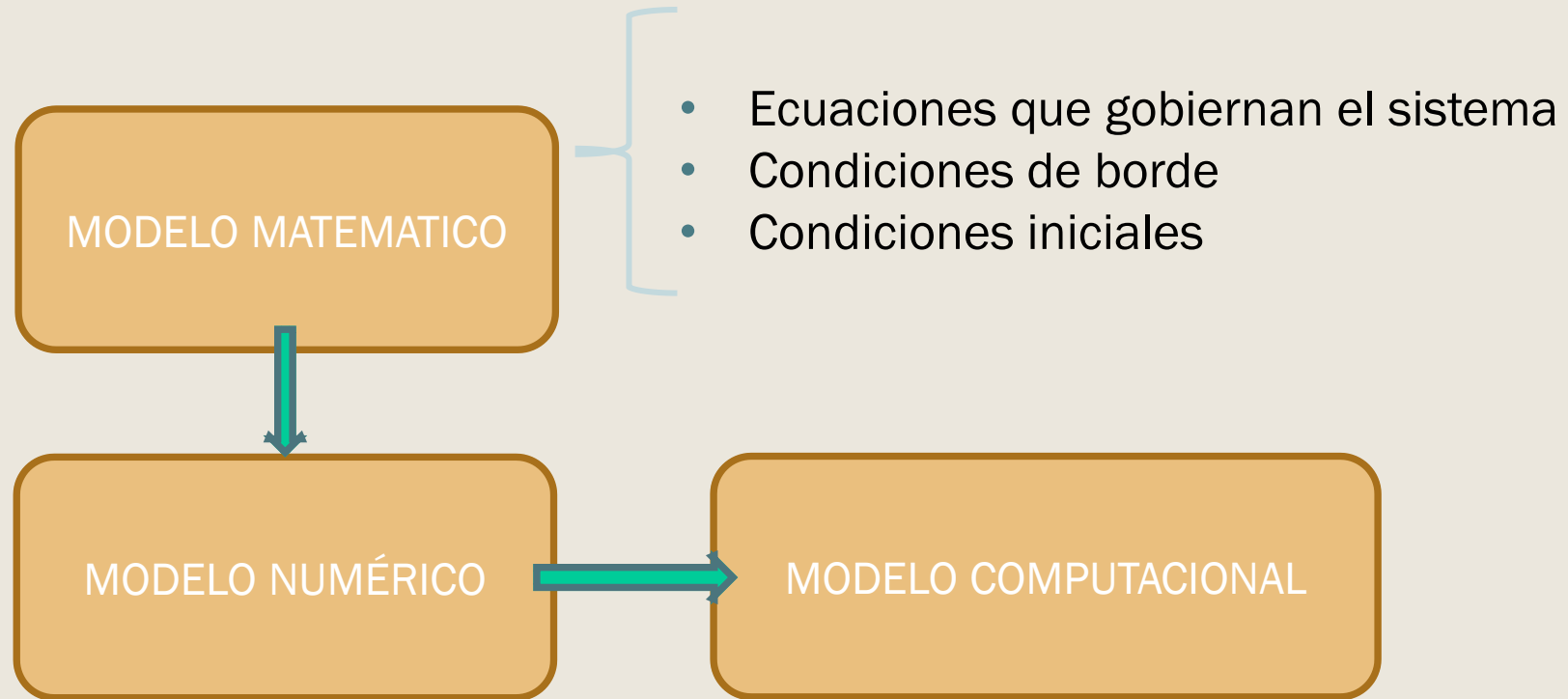
# **Modelo matemático**

## **Ecuaciones de flujo en medios porosos**

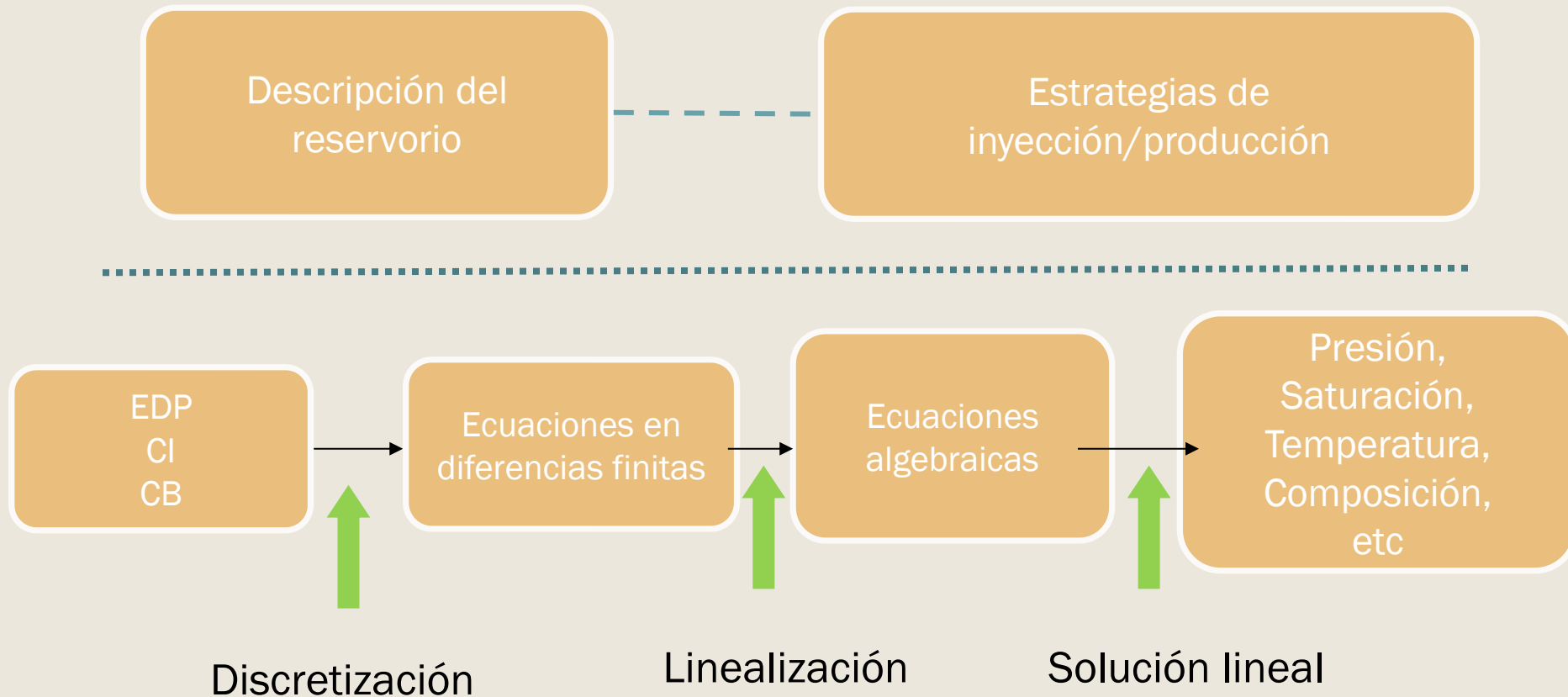
## ■ Modelo matemático



## ■ Modelo matemático



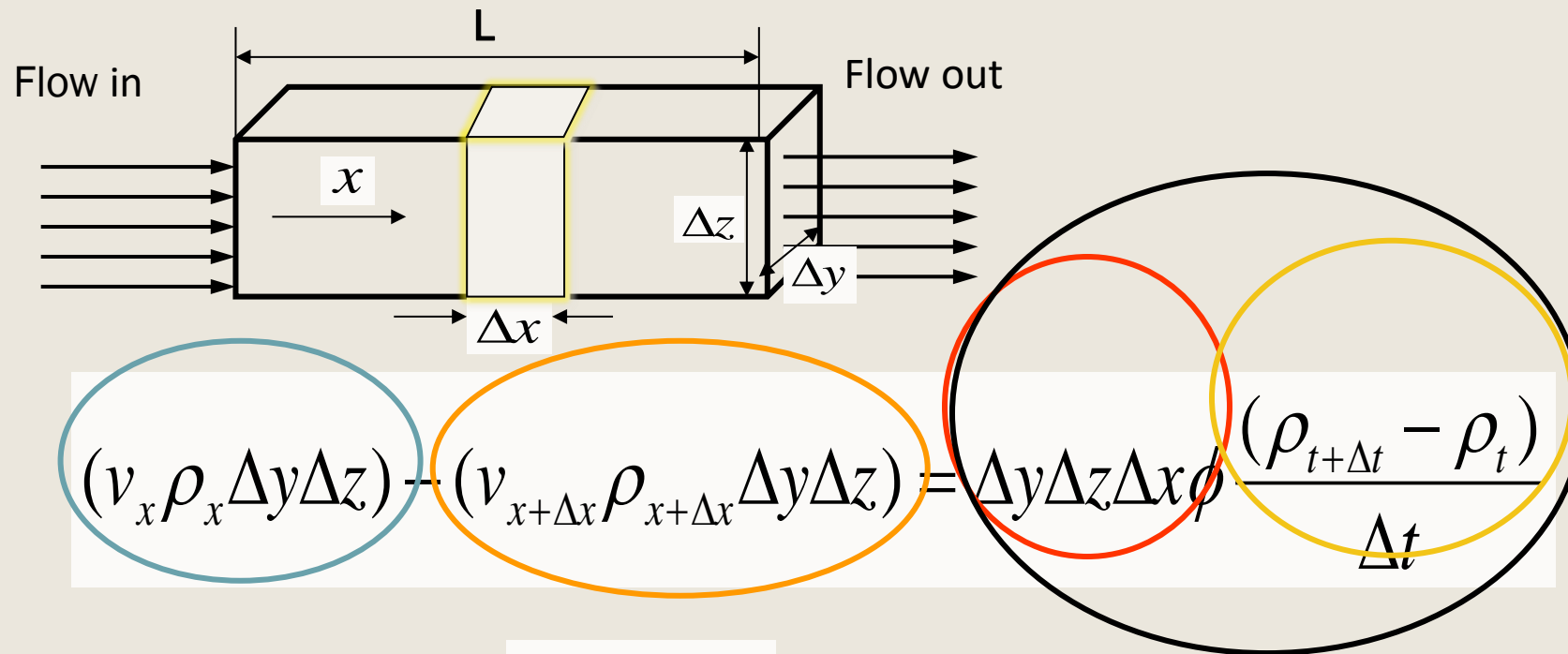
## ■ Modelo matemático



- **Ecuaciones diferenciales de flujo en medios porosos**
  - Ley de conservación de masa.
  - Ley de conservación del momento.
  - Ley de conservación de la energía.
  - Ley de Darcy.
  - Ecuaciones de estado.

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

Caudal másico que entra – caudal másico que sale =  
caudal de acumulación másico



Dividiendo por

$$\Delta y \Delta z \Delta x$$

- Ecuaciones básicas de flujo monofásico.  
(Modelo Black oil)

$$\frac{(v_x \rho_x \Delta y \Delta z)}{\Delta y \Delta z \Delta x} - \frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z)}{\Delta y \Delta z \Delta x} = \frac{\Delta y \Delta z \Delta x \phi}{\Delta y \Delta z \Delta x} \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

$$-\frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x}) - (v_x \rho_x)}{\Delta x} = \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

- Tomando el límite para

$$\Delta x \text{ y } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x}) - (v_x \rho_x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

Ecuación de continuidad en un sistema lineal



$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

- Para un sistema tridimensional

$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} = -\phi \frac{\partial\rho}{\partial t}$$



# ■ Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

- Recordando la ley de Darcy

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Ecuaciones básicas de flujo monofásico.  
(Modelo Black oil)

$$\frac{\partial \left[ -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right]}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de estado

$$\rightarrow \rho = f(P)$$

$$\rho = \rho_0 e^{c(P-P_0)}$$

Fluido poco compresible

$$c = -\frac{1}{V} \left[ \frac{dV}{dP} \right]_T$$

- Ecuaciones básicas de flujo monofásico.  
(Modelo Black oil)

$$\frac{\partial \left[ -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right]}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$-\left[ \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$-\left[ \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho + \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial P} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]^2 \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Dividiendo ambos miembros por  $\rho$  y diferenciando la ecuación de la compresibilidad

- Ecuaciones básicas de flujo monofásico.  
(Modelo Black oil)

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$



- Ecuación de difusividad

# ■ Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

- En coordenadas radiales

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

En tres dimensiones

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

# ■ Ecuaciones básicas de flujo multifásico

- Para el petróleo
  - Ecuación de continuidad
  - Ecuación de estado
  - Ley de Darcy

## ■ Ecuaciones básicas de flujo multifásico

Caudal másico que entra – caudal másico  
que sale = caudal de acumulación másico

$$\left( -A \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x - \left( -A \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = V \left[ \frac{\left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n}{\Delta t} \right]$$

- Ecuaciones básicas de flujo multifásico
  - Para el gas
    - Libre
    - Disuelto en el petróleo
    - Disuelto en el agua



# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico

- Gas que entra  $\left( -A \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x$
- Gas que sale

$$\left( -A \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

# ■ Ecuaciones básicas de flujo multifásico

Acumulación másica de gas

$$V \left[ \frac{\phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right)^{n+1} - \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right)^n}{\Delta t} \right]$$

✓ Al aplicar el balance y pasando al límite

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right)$$

- En coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right)$$

## ■ Ecuaciones básicas de flujo multifásico

- Para el agua

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

- Para coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

- Ecuación general de flujo multifásico

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_o + S_w + S_g) = 0$$

$$Pc_{ow} = P_o - P_w$$

$$Pc_{og} = P_g - P_o$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 \approx 0$$

- Ecuación general de flujo multifásico

$$Ax \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_o \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + Ax \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_g \frac{\partial P_{cg}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cw}}{\partial x} \right) +$$

$$Ax \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_g \frac{(\rho_g gh)}{\partial x} + \lambda_o \frac{(\rho_o gh)}{\partial x} + \lambda_w \frac{(\rho_w gh)}{\partial x} \right) = \beta_1 \frac{\partial P_o}{\partial t} + \beta_2$$

Propiedades PVT

Producción

# **Modelo numérico**

## **Ecuaciones de flujo en medios porosos**

# ■ Discretización en espacio y tiempo

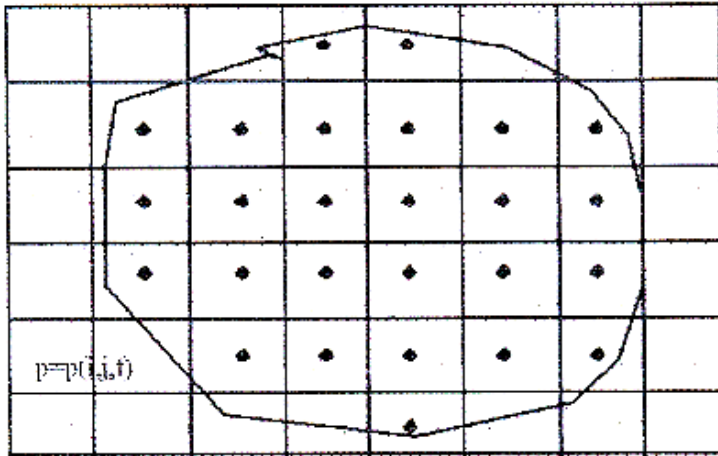


Fig. 1: Sistema discreto

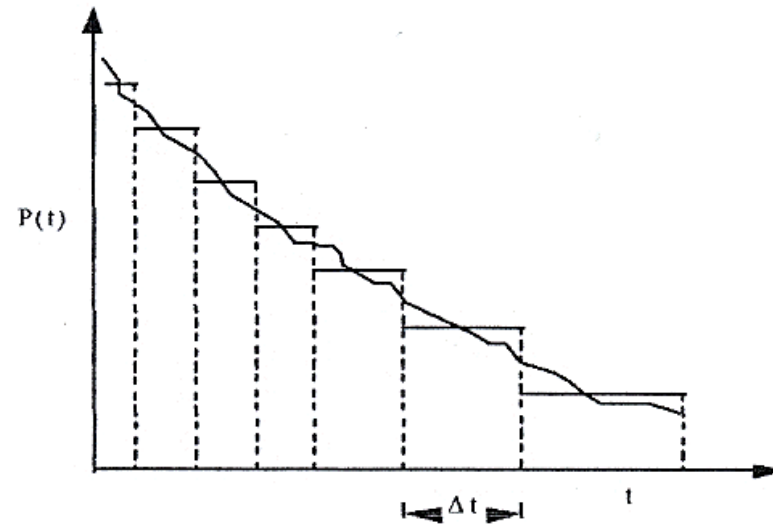


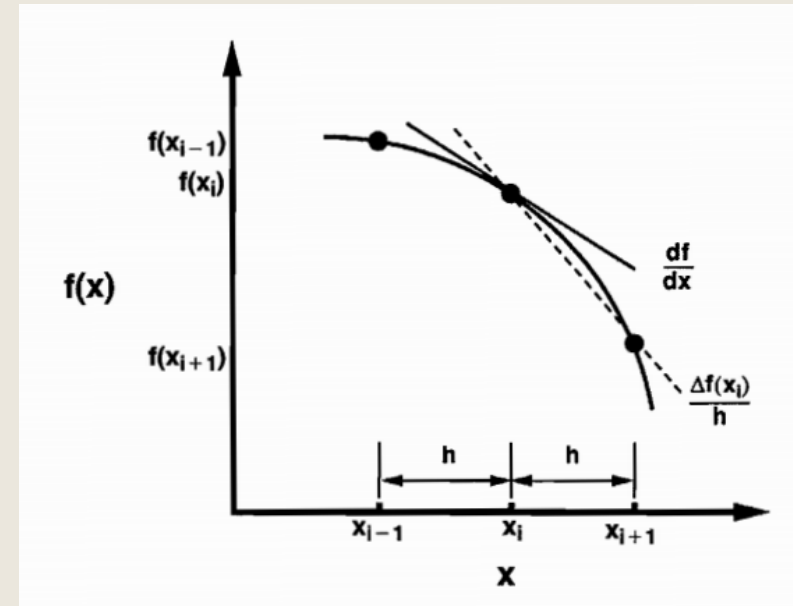
Fig. 2: Discretización en el tiempo

## ■ Cociente de diferencias de primer orden

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} + r(\Delta x)$$



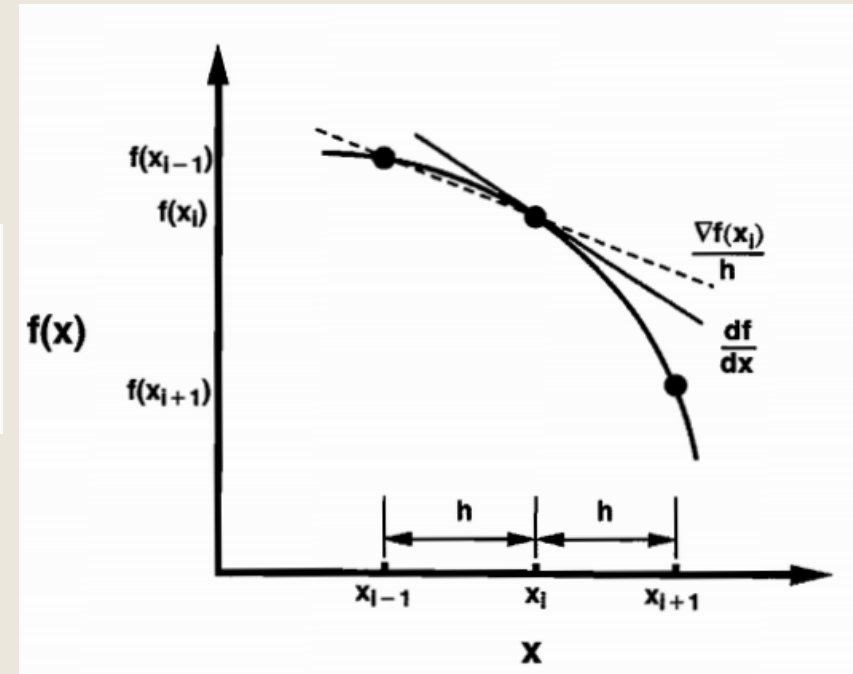


## ■ Cociente de diferencias de primer orden

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x) - P(x - \Delta x)}{\Delta x} + r(\Delta x)$$

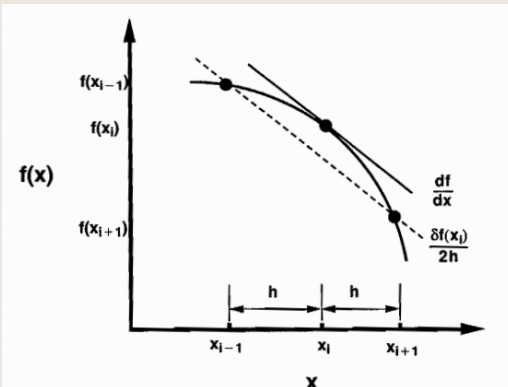


# ■ Diferencias centrales

- Restando

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x)}{2\Delta x} + r(\Delta x^2)$$

## ■ Cociente de diferencias de segundo orden

- Sumando

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P'' = \frac{P(x + \Delta x) - 2P(x) + P(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + r(\Delta x^2)$$

- Ejemplo

$$\frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx}$$

$i$	$x_i$	(deg)	$\operatorname{sen}$	cos
1	0	0	0	
2	$\pi / 12$	15	0.2588	
3	$\pi / 6$	30	0.5000	
4	$\pi / 4$	45	0.7071	0.7071
5	$\pi / 3$	60	0.8660	
6	$5\pi / 12$	75	0.9654	
7	$\pi / 2$	90	1.0000	

## ■ Ejemplo

- Diferencia hacia adelante

$$\left. \frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.8660 - 0.7071}{\pi / 3 - \pi / 4} = 0.6070 \quad \varepsilon = 14.2\%$$

- Diferencia hacia atrás

$$\left. \frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.7071 - 0.5000}{\pi / 4 - \pi / 6} = 0.7911 \quad \varepsilon = 11.9\%$$

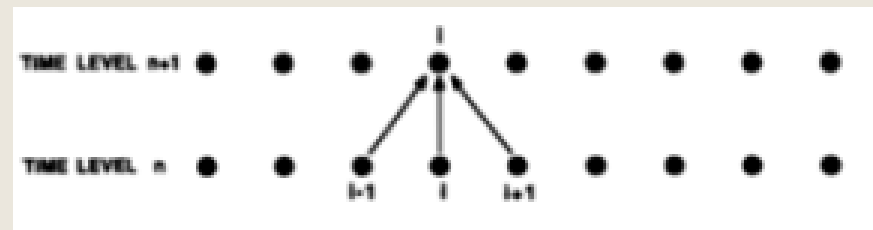
- Diferencia central

$$\left. \frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.8660 - 0.5000}{\pi / 3 - \pi / 6} = 0.6990 \quad \varepsilon = 1.15\%$$

## ■ Soluciones explícitas e implícitas

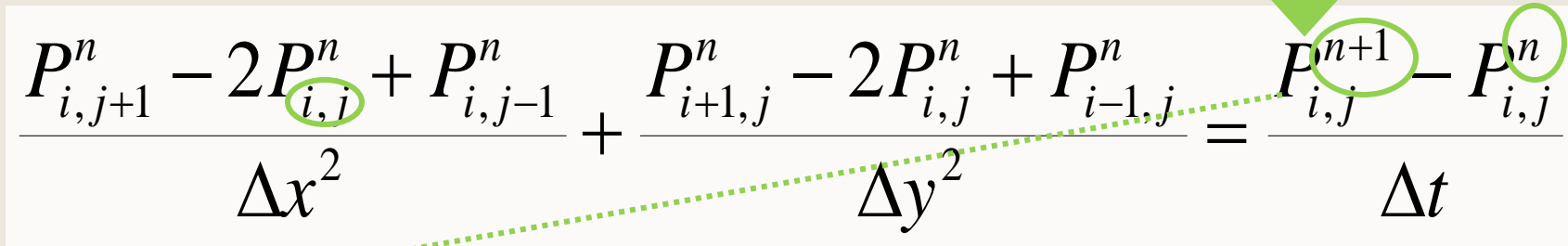
$$t_1 \longrightarrow t_2$$

- Esquema explícito: los nuevos valores pueden calcularse “individualmente” para cada  $x$ .
- Esquema implícito: Se calculan simultáneamente todos los valores de  $x$ .



- Método explícito

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$


$$\frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} = \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[ \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right]$$

- Método explícito

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[ \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right]$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \alpha [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] + \beta [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n]$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$



- Método implícito

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}$$

- Método implícito

$$P_{i-1}^{n+1} - \left( 2 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1} = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} P_i^n$$

$$a_i P_{i-1} + b_i P_i + c_i P_{i+1} = d_i$$

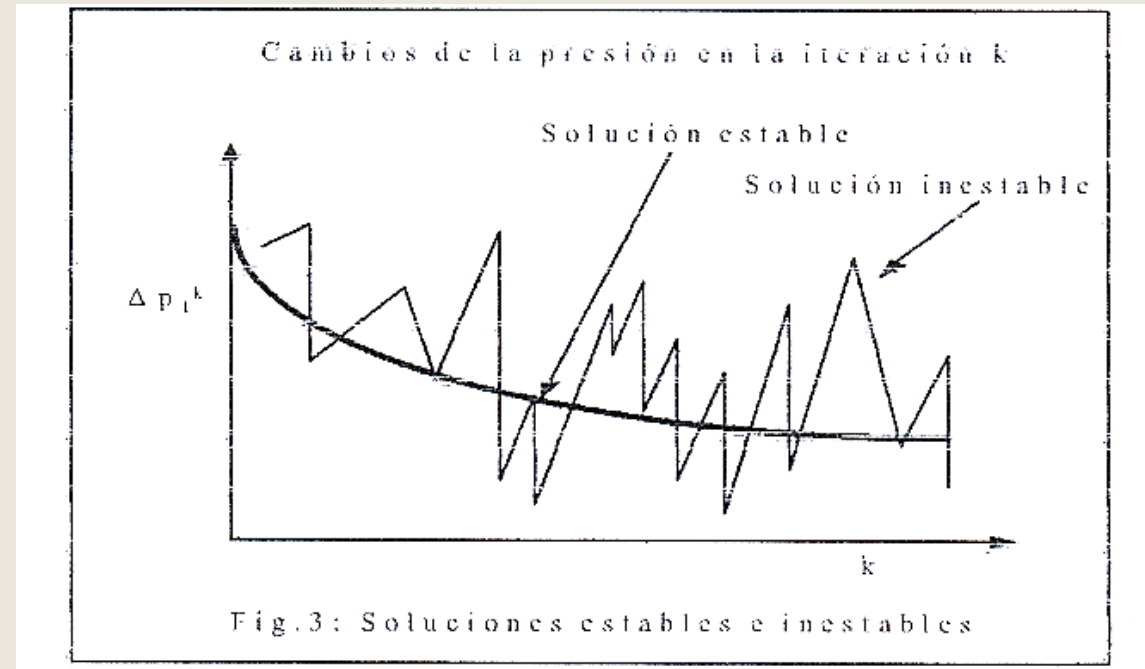
# Método implícito

$$\begin{array}{rcccccccl} 1 & a_1 P_0 & -b_1 P_1 & +c_1 P_2 & & & = d_1 \\ 2 & & a_2 P_1 & -b_2 P_2 & +c_2 P_3 & & = d_2 \\ 3 & & & a_3 P_2 & -b_3 P_3 & +c_3 P_4 & = d_3 \\ \dots\dots\dots & & & & & & \\ N & & & a_N P_{N-1} & -b_N P_N & +c_N P_{N+1} & = d_N \end{array}$$

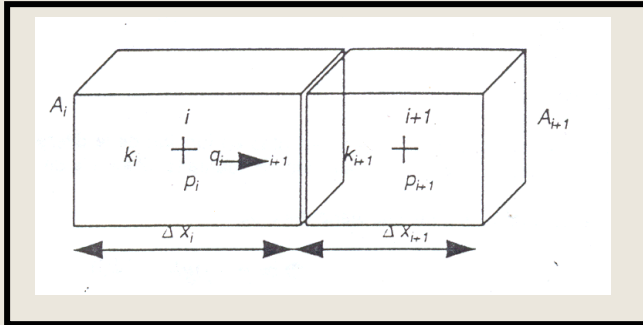
## ■ Estabilidad

$$\mu_{\max} = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \leq 1 \Rightarrow \text{sol. estable}$$

$$\mu_{\max} = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \geq 1 \Rightarrow \text{sol. inestable}$$



## ■ Flujo entre dos bloques contiguos



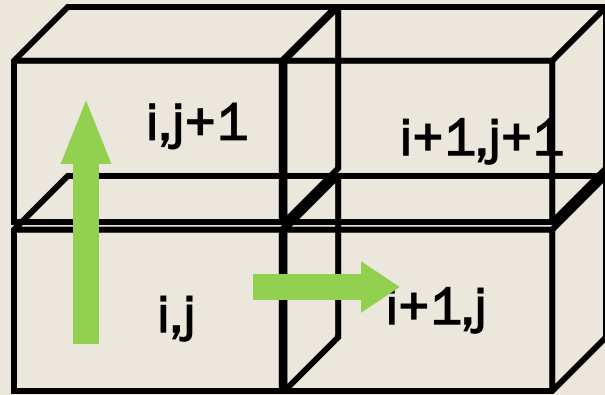
$$q_i \rightarrow_{i+1} = \frac{A_i k_i}{\mu_i} \frac{(p_i - p_{i+1/2})}{\Delta x_i / 2}$$

$$q_i \rightarrow_{i+1} = \frac{A_{i+1} k_{i+1}}{\mu_{i+1}} \frac{(p_{i+1/2} - p_{i+1})}{\Delta x_{i+1} / 2}$$

$$q_i \rightarrow_{i+1} = T_{i+1/2} (p_i - p_{i+1})$$

$$T_{i+1/2} = \frac{2A_i A_{i+1} k_i k_{i+1}}{A_i k_i \Delta x_{i+1} + A_{i+1} k_{i+1} \Delta x_i} \cdot \frac{1}{\mu}$$

- Flujo entre dos bloques contiguos



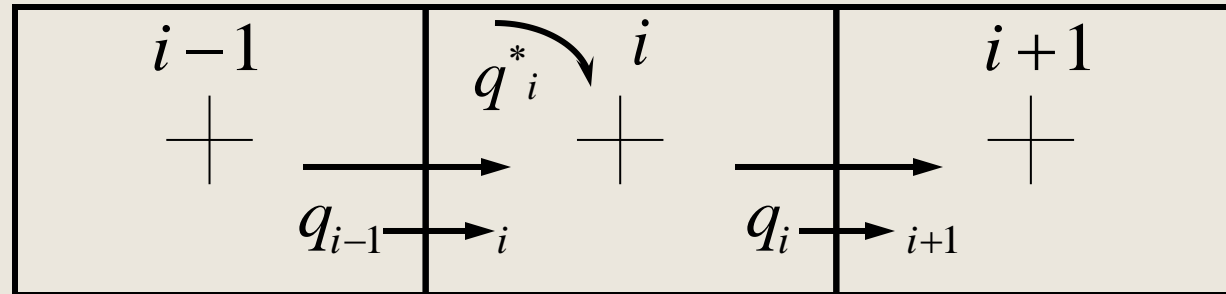
$$T_{i+1/2,j} = \frac{2A_{i,j}A_{i+1,j}k_{i,j}k_{i+1,j}}{A_{i,j}k_{i,j}\Delta x_{i+1,j} + A_{i+1,j}k_{i+1,j}\Delta x_{i,j}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$q_{i,j} \rightarrow_{i,j+1} = T_{i,j+1/2}(p_{i,j} - p_{i,j+1})$$

$$T_{i,j+1/2} = \frac{2A_{i,j}A_{i,j+1}k_{i,j}k_{i,j+1}}{A_{i,j}k_{i,j}\Delta x_{i,j+1} + A_{i,j+1}k_{i,j+1}\Delta x_{i,j}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

# ■ Ecuación de flujo para fluido incompresible unidimensional

Caudal másico que entra -caudal másico que sale= caudal de acumulación másico



Por ser un fluido incompresible no hay cambio neto de masa en el tiempo

➡ Caudal másico que entra -caudal másico que sale=0

- Ecuación de flujo para fluido incompresible unidimensional

$$\rho_{sc} q_{i \rightarrow i+1} - \rho_{sc} (q_{i-1 \rightarrow i} + q_i^*) = 0$$

$$\Phi = p - \rho g h$$

$$T_{i+1/2}(\Phi_i - \Phi_{i+1}) - T_{i-1/2}(\Phi_{i-1} - \Phi_i) - q_i^* = 0$$

$$T_{i+1/2}(\Phi_{i+1} - \Phi_i) - T_{i-1/2}(\Phi_i - \Phi_{i-1}) + q_i^* = 0$$



- Ecuación de flujo en medios porosos en sistema discreto

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_c k_x A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_c k_y A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left( \beta_c k_z A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \Delta z + \mu q_{sc} = 0$$

$$\left( \beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)$$

$$T_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) - T_{i-1/2}(p_i - p_{i-1}) + q^*_i = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{B_l^o \mu_l q_{lsc}}{\beta_c k_x V_b} = \frac{\phi \mu_l c_l}{\beta_c \alpha_c k_x} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $l = o, w$

$$T_{l_{xi-1/2}}^n p_{i-1}^{n+1} - \left[ \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_i + T_{l_{xi+1/2}}^n + T_{l_{xi-1/2}}^n \right] p_i^{n+1} + T_{l_{xi+1/2}}^n p_{i+1}^{n+1} = - \left[ q_{lsci} + \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_i p_i^n \right]$$

# Actividad 1 - SN

## Aula abierta

## Ejercicio 1

Considere el flujo 1D, monofásico, incompresible en el reservorio horizontal de la figura 1. Los bloque 1 y 5 están localizados en los bordes del reservorio y se mantienen a 3000 psia. Un pozo productor está situado en el centro de la celda 3 y produce a un caudal de 2000 STB/D. Como muestra la figura todos los bloques tienen dimensiones uniformes. La distribución de permeabilidades presenta simetría. La viscosidad del fluido es 1 cP. Calcule la distribución de presiones.

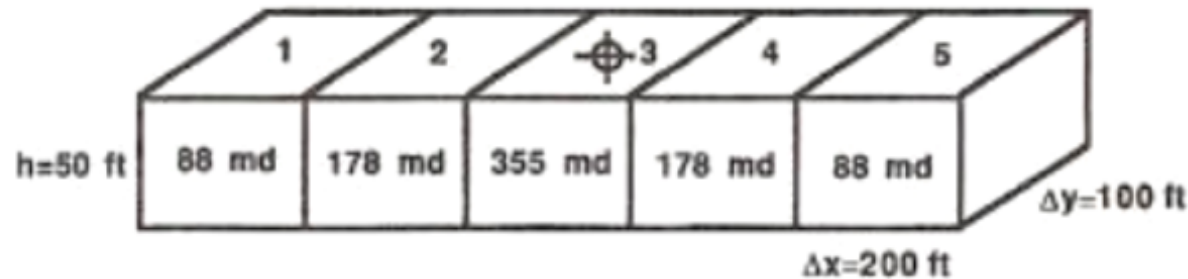


Figura 1



**FIN**