

UNIDAD 3

Integrales múltiples e integrales sobre curvas.

Matemática para Computación



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

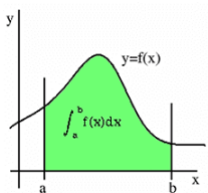
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

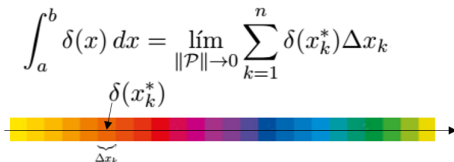
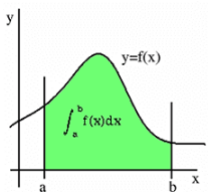
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Volúmenes de sólidos sobre regiones rectangulares.

Sea R un rectángulo con los lados paralelos a los ejes, que se expresa como $[a, b] \times [c, d]$.

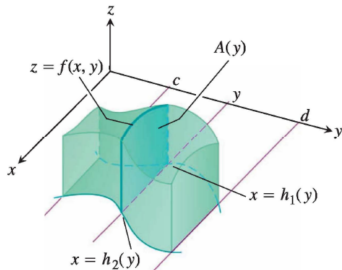
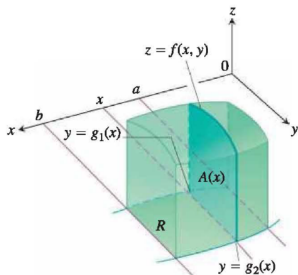
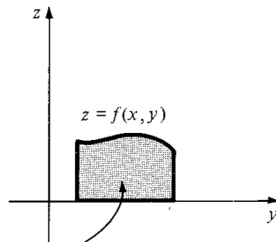
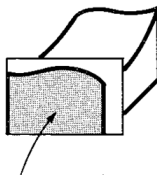
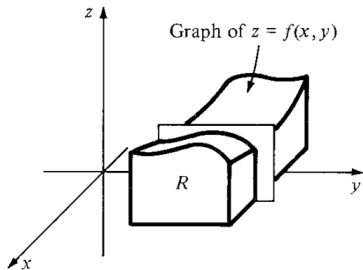
Definición

El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función continua no negativa f se llama integral doble de f sobre R y se anota

$$\iint_R (f(x, y) \, dA \text{ o } \iint_R (f(x, y) \, dx \, dy).$$

Dar ejemplos (prismas, semiesfera).

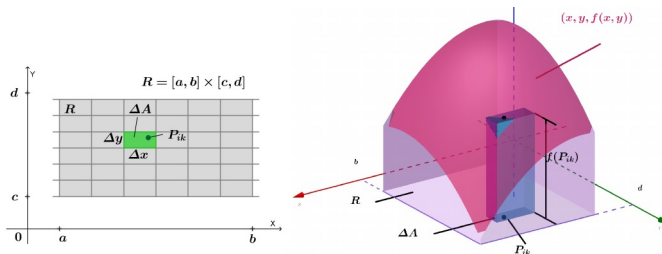
Principio de Cavalieri e integrales iteradas



$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

$$= \int_a^b A(x) dx$$

Definición de integral doble sobre rectángulos



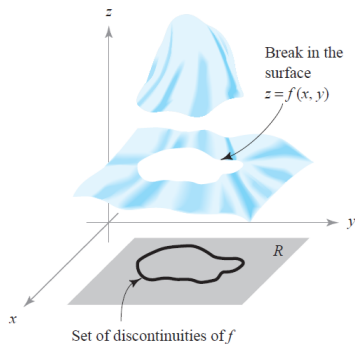
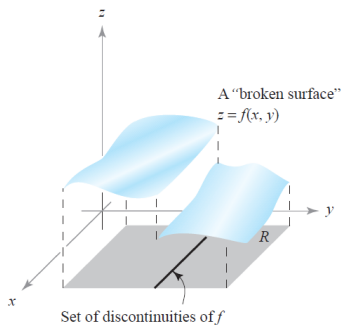
Sea f una función definida y **acotada** en un rectángulo R . Definimos una partición de R , formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ik})\Delta A$.

Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe para cualquier elección de P_{ik} , se dice que f es **integrable** sobre R . En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x, y) dA, \quad \iint_R f(x, y) dx dy \quad \circ \quad \iint_R f dx dy.$$

Teorema (Condición suficiente para la integrabilidad)

1. Si f es continua en un rectángulo R cerrado, es integrable en R .
2. Si f es acotada sobre un rectángulo R y el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R .



Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles)

Si f y g son funciones integrables sobre el rectángulo R , y c es una constante, entonces:

1.
$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

2.
$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

3. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$,

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

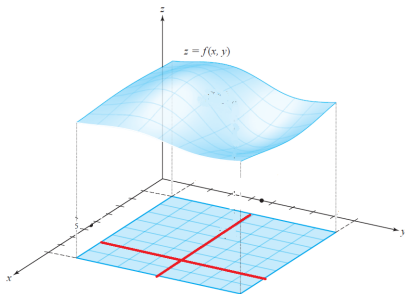
4.
$$\left| \iint_R f(x, y) dA \right| \leq \iint_R |f(x, y)| dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles, Cont.)

5. Si $R_1, R_2, \dots, R_m$ son rectángulos con interiores disjuntos dos a dos, f es acotada e integrable sobre cada R_i y $Q = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces f es integrable en Q y

$$\iint_Q f(x, y) dA = \sum_{i=1}^m \iint_{R_i} f(x, y) dA.$$



1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Teorema de Fubini

Teorema (Teorema de Fubini)

Si f es continua en la región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

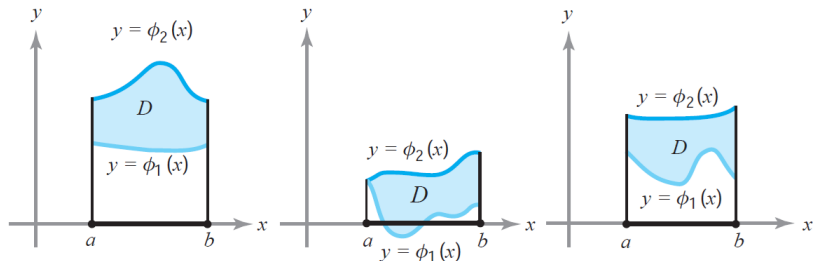
Integrales de línea de campos vectoriales

Regiones y -simples

Dadas $\phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$, el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

se llama y -simple. La frontera de D está formada por segmentos verticales y las gráficas de funciones continuas de x definidas en $[a, b]$.

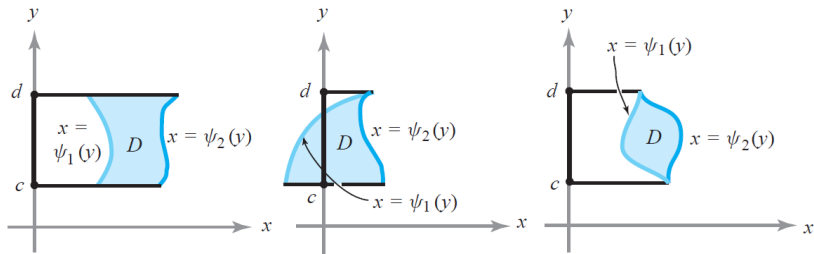


Regiones x -simples

Dadas $\psi_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$, el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

se llama x -simple. La frontera de D está formada por segmentos horizontales y las gráficas de funciones continuas de y definidas en $[c, d]$.

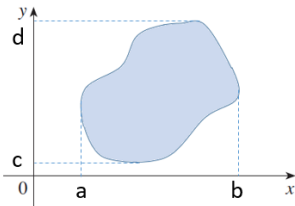
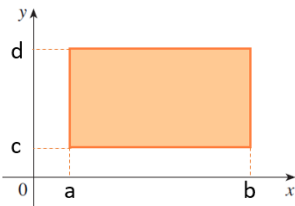
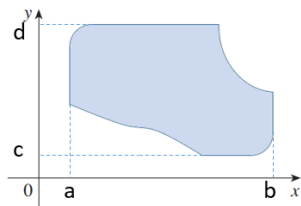


Regiones simples o elementales

Son aquellas regiones que son y -simples y x -simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.

Regiones simples o elementales

Son aquellas regiones que son y -simples y x -simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.



La integral sobre una región elemental

Definición

Si D es una región elemental, R es un rectángulo tal que $D \subset R$ y f es una función continua (y por lo tanto acotada) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se define la función $f^* : R \rightarrow \mathbb{R}$ por

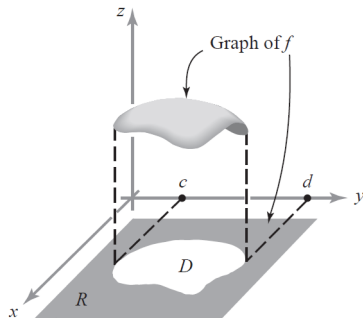
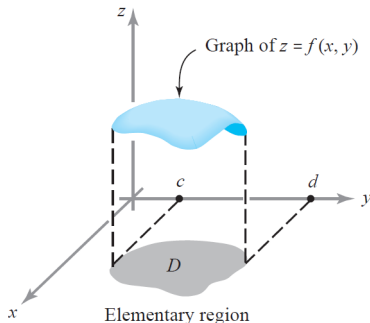
$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{si } (x, y) \notin D, (x, y) \in R. \end{cases}$$

Entonces, podemos definir

$$\iint_D f(x, y) dA := \iint_R f^*(x, y) dA.$$

Observación: f^* es acotada (ya que f lo es) y es continua excepto posiblemente en ∂D . Como ∂D está formada por gráficas de funciones continuas, f^* es integrable sobre R .

Integral doble sobre regiones elementales



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dA &:= \iint_R f^*(x, y) dA \\ &= \int_a^b \int_c^d f^*(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f^*(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Teorema

- Si D es una región y -simple, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

- Si D es una región x -simple, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Caso especial: área de D

Si $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, $\iint_D f(x, y) dA$ es el área de D (vol. sólido altura 1). Además

$$\iint_D 1 dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x)) dx,$$

que coincide con la fórmula vista en AMI.

Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Desigualdad del valor medio

Si f es acotada en D , existen m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq M \cdot A(D).$$

Desigualdad del valor medio

Si f es acotada en D , existen m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq M \cdot A(D).$$

Ejemplo: probar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1, 1 \leq 1 + (xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \frac{1}{1 + (xy)^4} \geq \frac{1}{2}.$
- $\sin x \geq 0$; luego $\frac{\sin x}{1 + (xy)^4} \geq \frac{1}{2} \sin x.$
- $\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2} \sin x dx dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\sin x}{1 + (xy)^4} dx dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1 dx dy = 1.$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1, 1 \leq 1 + (xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \frac{1}{1 + (xy)^4} \geq \frac{1}{2}.$
- $\sin x \geq 0$; luego $\frac{\sin x}{1 + (xy)^4} \geq \frac{1}{2} \sin x.$
- $\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2} \sin x dx dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\sin x}{1 + (xy)^4} dx dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1 dx dy = 1.$

Como

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2} \sin x dx dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sin x dx \right) \left(\int_0^1 dy \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos 1),$$

se concluye que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$$

Teorema (Teorema del valor medio par integrales dobles)

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y D es elemental, entonces para algún punto $(x_0, y_0) \in D$ se cumple

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de D .

Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

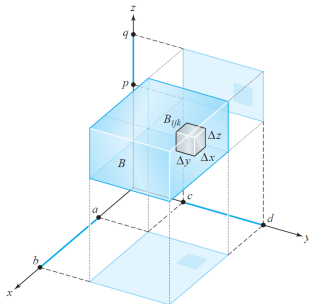
Integrales de línea de campos vectoriales

Definición

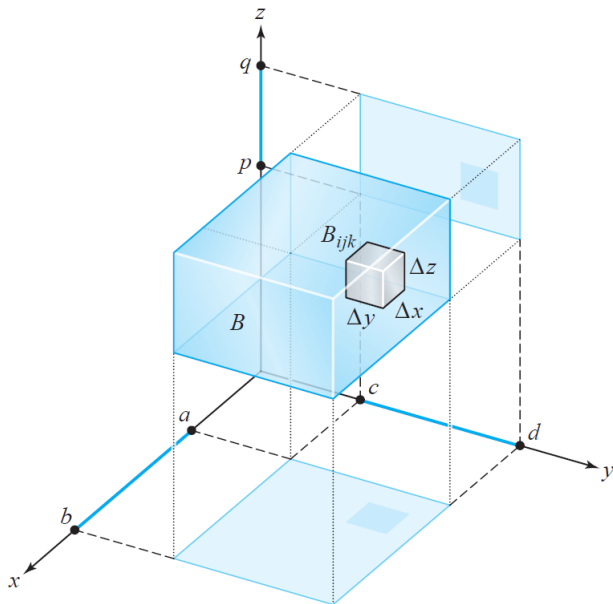
Sean $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un paralelepípedo (una caja o rectángulo generalizado) y f , una función definida en B . Dividimos los tres lados de B en n partes iguales y sumamos:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto de B_{ijk} , el ijk -ésimo paralelepípedo en la partición de B y ΔV es el volumen de B_{ijk} .



Definición



Definición

Definición

Sea $f(x, y, z)$ acotada, definida en B . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

existe y es independiente de la elección de c_{ijk} , decimos que f es integrable y llamamos a S **integral triple** de f en B y se anota

$$\iiint_B f \, dV, \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dV, \quad \circ \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Propiedades

Las funciones continuas definidas en un paralelepípedo B (box) son integrables, igual que las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (como $z = g(x, y)$). Las demás propiedades que valen para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. En particular, vale el Teorema de Fubini:

Propiedades

Las funciones continuas definidas en un paralelepípedo B (box) son integrables, igual que las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (como $z = g(x, y)$). Las demás propiedades que valen para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. En particular, vale el Teorema de Fubini:

Teorema (Teorema de Fubini: Reducción a integrales iteradas.)

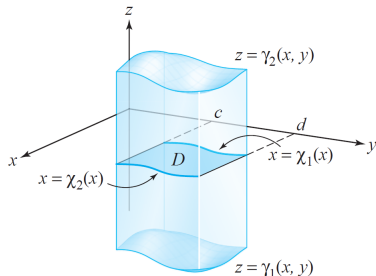
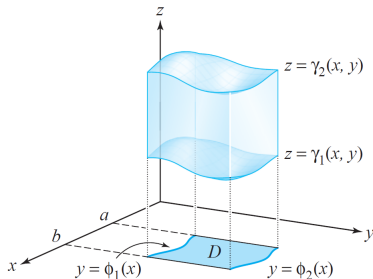
Sea $f(x, y, z)$ una función integrable en la caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Cualquier integral iterada, si existe, es igual a la integral triple; esto es,

$$\begin{aligned}\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx = \dots\end{aligned}$$

En total, hay seis órdenes de integración posibles.

Regiones elementales

Una región elemental en $\mathbb{R}^3$ es aquella en la que una de las variables está entre dos funciones de las otras dos variables, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (esto es, x -simple o y -simple) en el plano.



Integrales triples sobre regiones elementales

Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y . Entonces, o bien

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx,$$

o bien

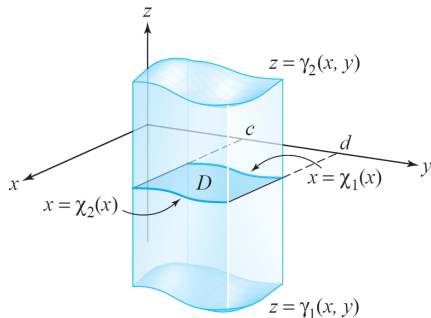
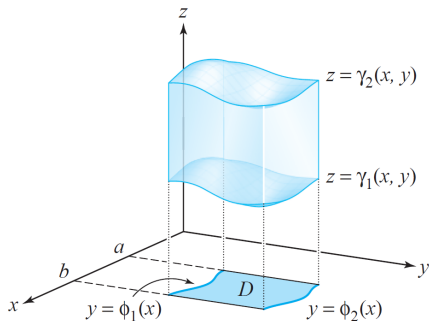
$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy.$$

Si $f = 1$, obtenemos la integral $\iiint_W dx \, dy \, dz$, que es el *volumen* de la región W .

Integrales triples sobre regiones elementales

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx;$$

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy.$$

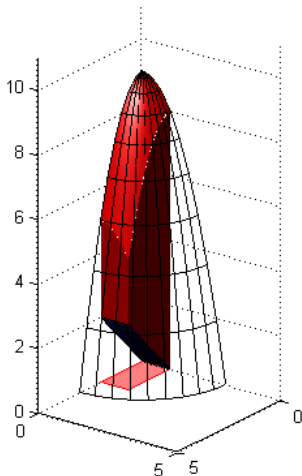


Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D , comprendido entre el paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.

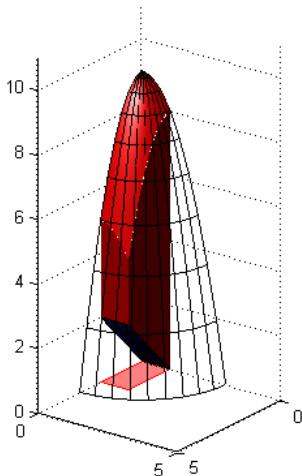
Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D , comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D , comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



$$\int_0^2 \int_0^1 \int_x^{9-x^2+y^2} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

❶ Realizar un esbozo de la región.

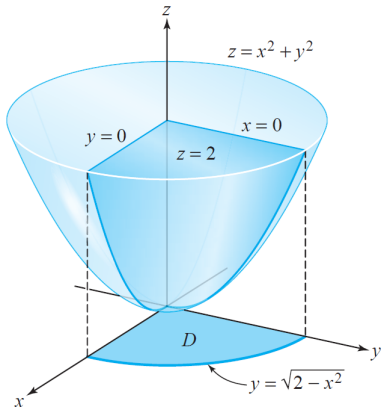
❷ Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1 Realizar un esbozo de la región.

2 Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

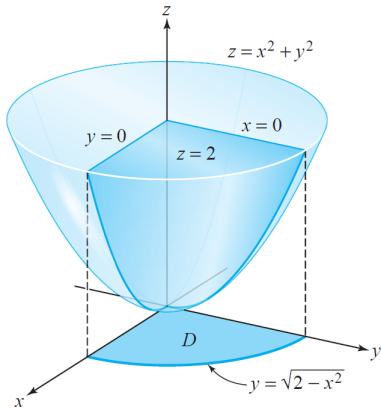


Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1 Realizar un esbozo de la región.

2 Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



$$\begin{aligned}\iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15}.\end{aligned}$$

Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx =$$

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \rightarrow D$ de clase C^1 ; supóngase que T es inyectiva y que $D = T(D^*)$. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Integrales dobles en coordenadas polares

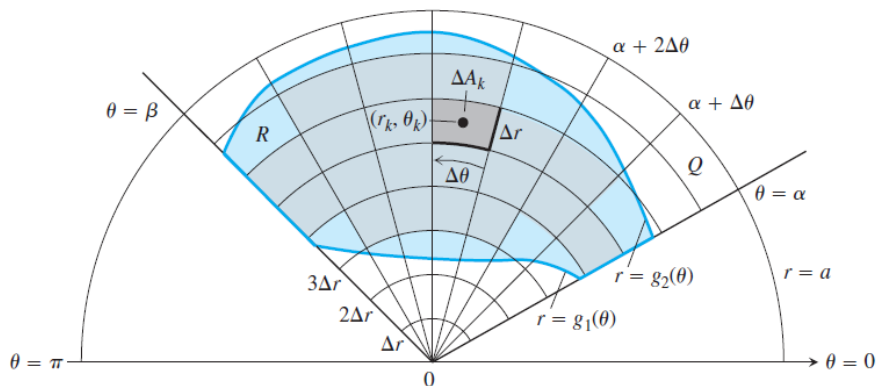
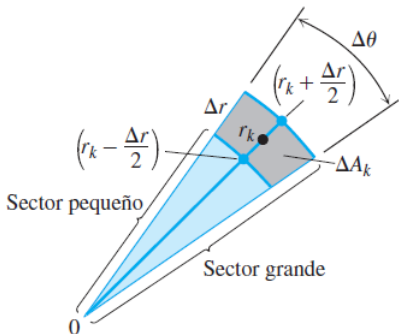


FIGURA 15.21 La región $R: g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, está contenida en la región con forma de abanico $Q: 0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R .



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

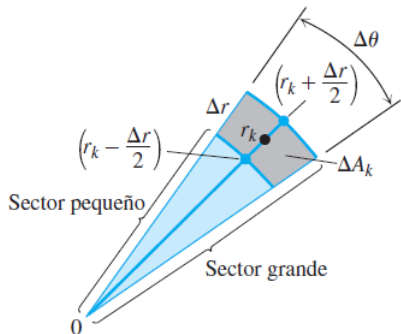
Radio interior: $\frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta\theta$.



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

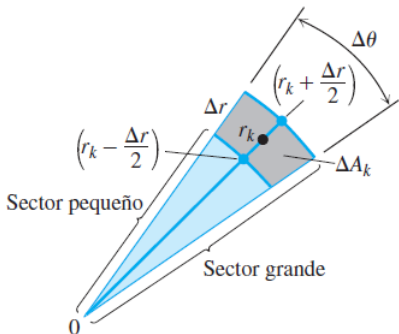
FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

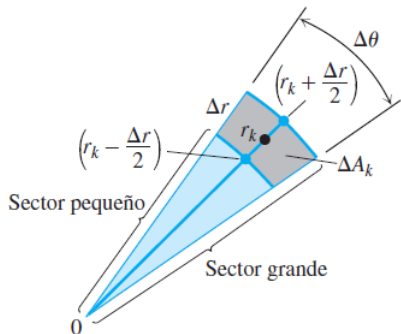
nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Jacobiano:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{array} \right| = |r| = r.$$

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

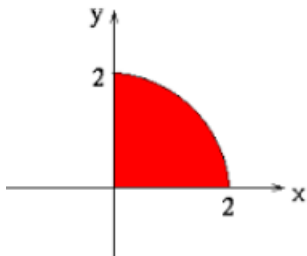
por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

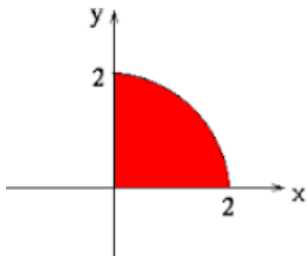


Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.



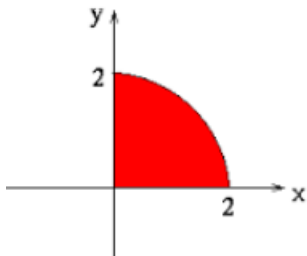
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 dr d\theta$$

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.



$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 dr d\theta = 2\pi.$$

Nota sobre el cambio en integrales triples

Las coordenadas cilíndricas aparecen cuando aplicamos coordenadas polares en el plano xy . Hay más casos pero nos limitaremos a este.

Nota sobre el cambio en integrales triples

Las coordenadas cilíndricas aparecen cuando aplicamos coordenadas polares en el plano xy . Hay más casos pero nos limitaremos a este. El jacobiano de la transformación es r , igual que antes.

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

❶ Realizar un esbozo de la región.

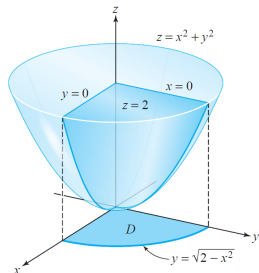
❷ Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

❶ Realizar un esbozo de la región.

❷ Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

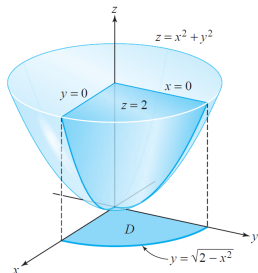


Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

❶ Realizar un esbozo de la región.

❷ Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



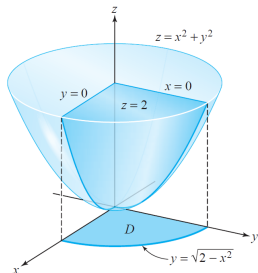
$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$$

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1 Realizar un esbozo de la región.

2 Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



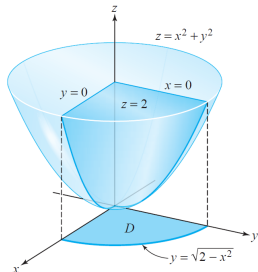
$$\begin{aligned} \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^2 r^2 \cos(\theta) \, dz \, dr \, d\theta &= \end{aligned}$$

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

❶ Realizar un esbozo de la región.

❷ Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



$$\begin{aligned} \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^2 r^2 \cos(\theta) \, dz \, dr \, d\theta &= \frac{8\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

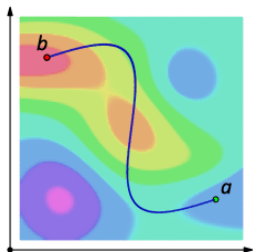
4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

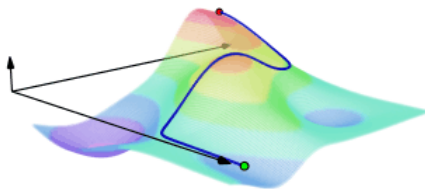
Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

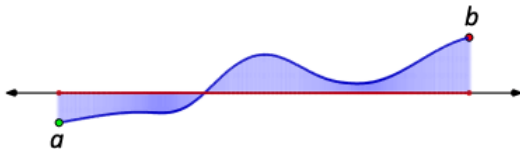
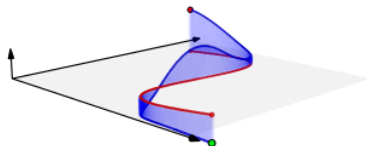
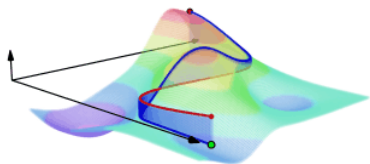
Interpretación



C



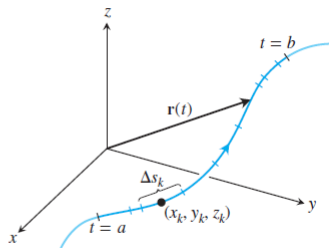
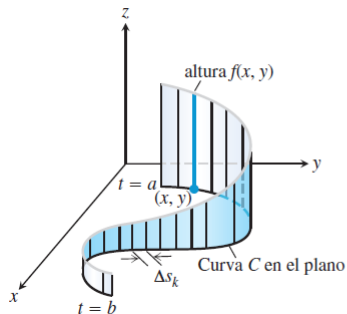
Interpretación



$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt.$$

Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Integrales a lo largo de trayectorias



Integrales a lo largo de trayectorias

Definición (Integrales a lo largo de trayectorias en el plano)

La integral de $f(x, y)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \mapsto f(x(t), y(t))$ es continua en $[a, b]$. Definimos esta integral por

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

A veces, $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ se denota por $\int_{\mathbf{c}} f(x, y) \, ds$ o $\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt$.

Si $\mathbf{c}$ es sólo C^1 a trozos o $f \circ \mathbf{c}$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ descomponiendo $[a, b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua, sumando las integrales sobre los segmentos.

Integrales a lo largo de trayectorias

Definición (Integrales a lo largo de trayectorias en el espacio)

La integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ es continua en $[a, b]$. Definimos esta integral por

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

A veces, $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ se denota por $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$ o $\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt$.

Si $\mathbf{c}$ es sólo C^1 a trozos o $f \circ \mathbf{c}$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ descomponiendo $[a, b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua, sumando las integrales sobre los segmentos.

Propiedades

La integral de un campo escalar continuo a lo largo de una trayectoria C^1 :

- es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto se mantenga la propiedad de tipo C^1 .
- es independiente del sentido de recorrido de la curva.

Propiedades

La integral de un campo escalar continuo a lo largo de una trayectoria C^1 :

- es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto se mantenga la propiedad de tipo C^1 .
- es independiente del sentido de recorrido de la curva.

Teorema (Cambio de parametrización para integrales a lo largo de trayectorias)

Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria C^1 a trozos, f una función continua con valores reales definida sobre la imagen de $\mathbf{c}$ y sea $\mathbf{r}$ cualquier **reparametrización** de $\mathbf{c}$. Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathbf{r}} f(x, y, z) ds.$$

Por ello, si la imagen de $\mathbf{c}$ es C , escribimos

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathbf{r}} f(x, y, z) ds = \int_C f(x, y, z) ds.$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

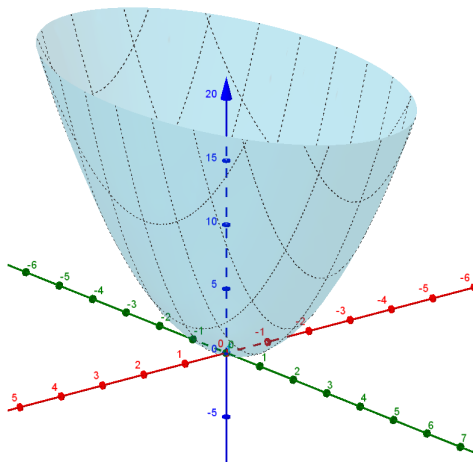
a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

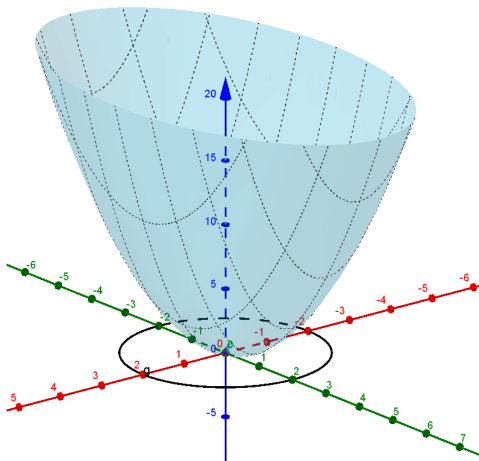


Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

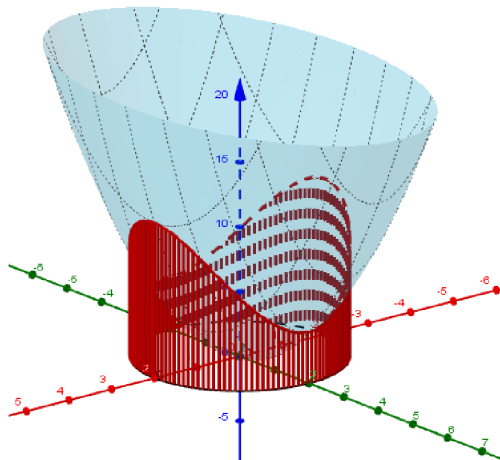


Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

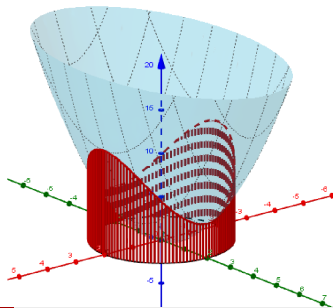
$$C : \mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$$

$$\int_C (3x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt =$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$$

$$\begin{aligned} \int_C (3x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} (3 \cdot 4 \cos^2(t) + 4 \sin^2(t)) 2 dt \\ &= 24 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt + 8 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi. \end{aligned}$$



Recorrido

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integrales a lo largo de trayectorias

Integrales de línea de campos vectoriales

Definición de la integral de línea

Definición (Integrales de línea)

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuo sobre la trayectoria C^1
 $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, por la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos: integramos el producto escalar de $\mathbf{F}$ con $\mathbf{c}'$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Teorema (Propiedades)

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido sobre una trayectoria de clase C^1 :

- La integral de línea de $\mathbf{F}$ es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto sea de clase C^1 . Por ello se suele escribir:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- La integral de línea de $\mathbf{F}$ es **dependiente** del sentido de recorrido de la curva: si llamamos C^- a la misma curva que C pero con orientación opuesta,

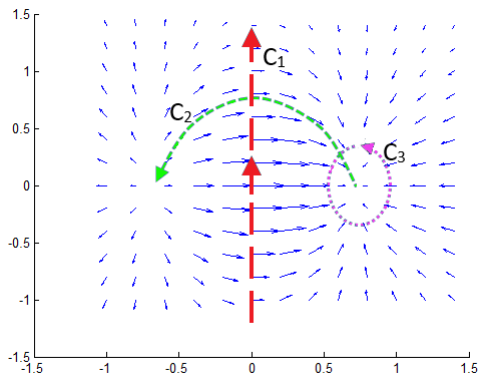
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- Si C es la unión por los extremos de $C_1, C_2, \dots, C_k$, (orientadas) entonces se escribe $C = C_1 + \dots + C_k$ y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

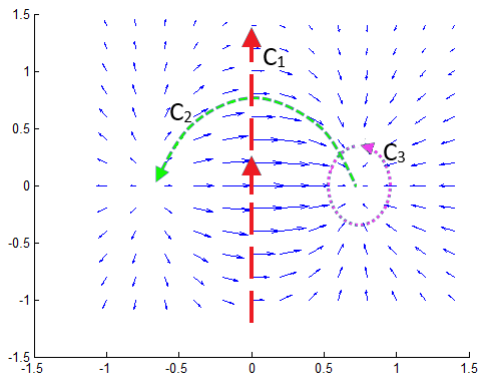
Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1 , C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1 , C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



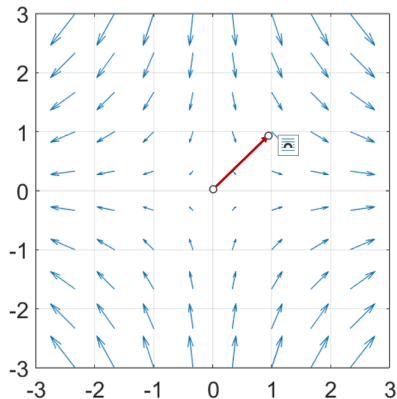
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0; \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0; \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx 0.$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

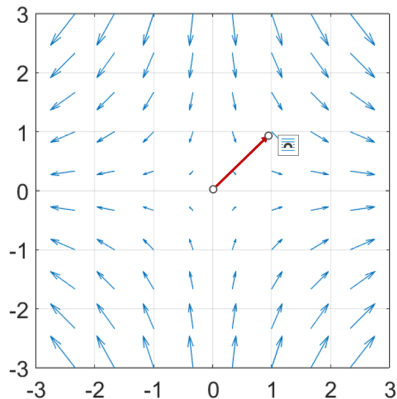
Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.



Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.



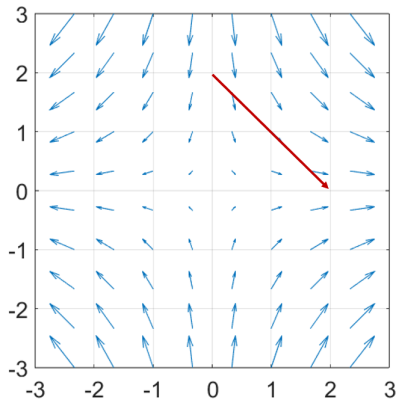
$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \cdot (1, 1) dt \\ &= \int_0^1 0 dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, 2 - t)$, $0 \leq t \leq 2$.

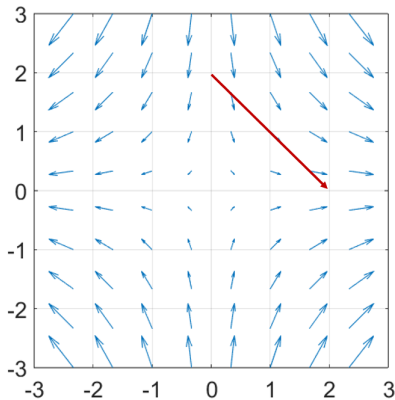
Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, 2 - t)$, $0 \leq t \leq 2$.



Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ sobre $\mathbf{c}(t) = (t, 2 - t)$, $0 \leq t \leq 2$.



$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt \\&= \int_0^2 \begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} \cdot (1, -1) dt \\&= \int_0^2 (t + 2 - t) dt \\&= 2.\end{aligned}$$