

UNIDAD 3

Integrales múltiples e integrales sobre curvas.

Matemática para Computación



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

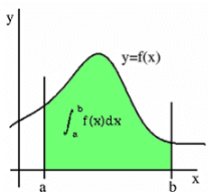
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

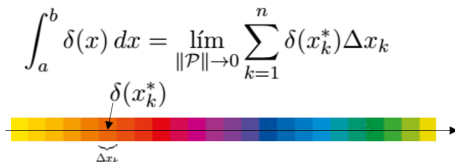
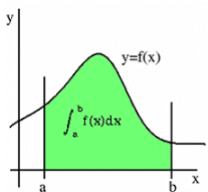
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Volúmenes de sólidos sobre regiones rectangulares.

Sea R un rectángulo con los lados paralelos a los ejes, que se expresa como $[a, b] \times [c, d]$.

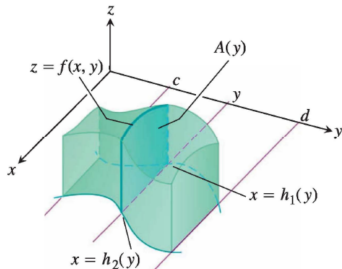
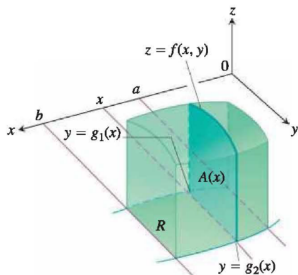
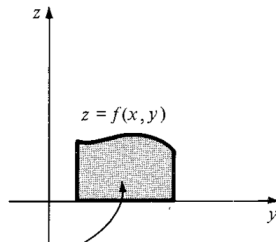
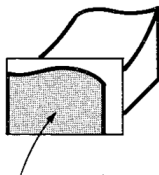
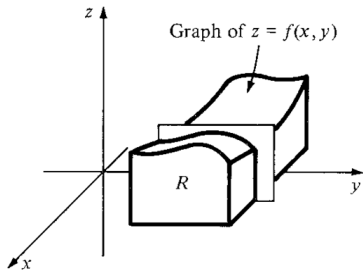
Definición

El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función continua no negativa f se llama integral doble de f sobre R y se anota

$$\iint_R (f(x, y) \, dA \text{ o } \iint_R (f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dar ejemplos (prismas, semiesfera).

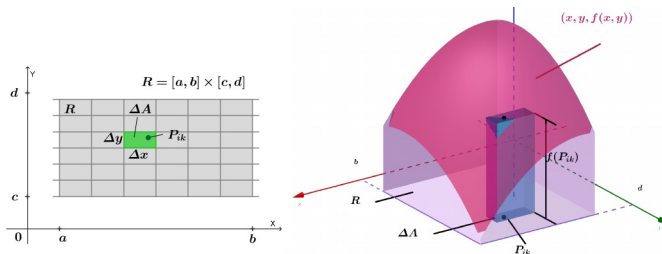
Principio de Cavalieri e integrales iteradas



$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

$$= \int_a^b A(x) dx$$

Definición de integral doble sobre rectángulos



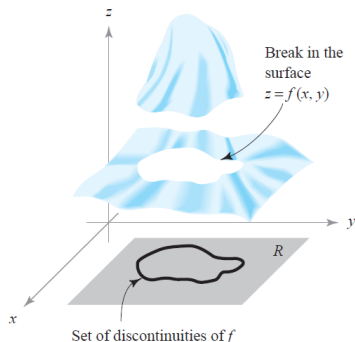
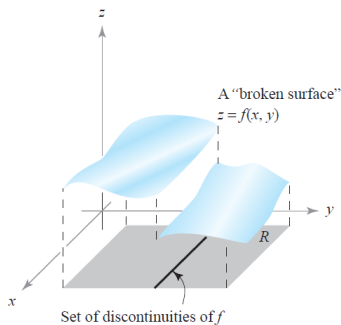
Sea f una función definida y **acotada** en un rectángulo R . Definimos una partición de R , formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ik}) \Delta A$.

Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe para cualquier elección de P_{ik} , se dice que f es **integrable** sobre R . En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x, y) dA, \quad \iint_R f(x, y) dx dy \quad \circ \quad \iint_R f dx dy.$$

Teorema (Condición suficiente para la integrabilidad)

1. Si f es continua en un rectángulo R cerrado, es integrable en R .
2. Si f es acotada sobre un rectángulo R y el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R .



Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles)

Si f y g son funciones integrables sobre el rectángulo R , y c es una constante, entonces:

1.
$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

2.
$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

3. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$,

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

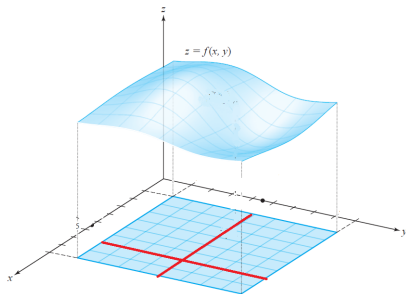
4.
$$\left| \iint_R f(x, y) dA \right| \leq \iint_R |f(x, y)| dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles, Cont.)

5. Si $R_1, R_2, \dots, R_m$ son rectángulos con interiores disjuntos dos a dos, f es acotada e integrable sobre cada R_i y $Q = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces f es integrable en Q y

$$\iint_Q f(x, y) dA = \sum_{i=1}^m \iint_{R_i} f(x, y) dA.$$



1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Teorema de Fubini

Teorema (Teorema de Fubini)

Si f es continua en la región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

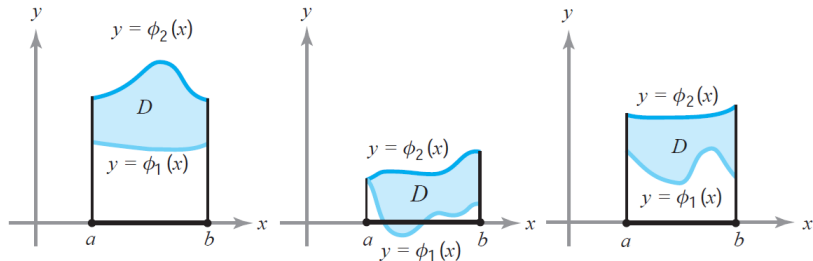
5 Integrales sobre curvas

Regiones y -simples

Dadas $\phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$, el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

se llama y -simple. La frontera de D está formada por segmentos verticales y las gráficas de funciones continuas de x definidas en $[a, b]$.

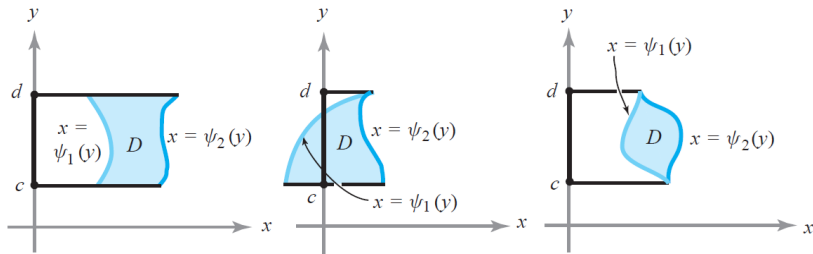


Regiones x -simples

Dadas $\psi_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$, el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

se llama x -simple. La frontera de D está formada por segmentos horizontales y las gráficas de funciones continuas de y definidas en $[c, d]$.



Regiones simples o elementales

Son aquellas regiones que son y -simples y x -simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.

La integral sobre una región elemental

Definición

Si D es una región elemental, R es un rectángulo tal que $D \subset R$ y f es una función continua (y por lo tanto acotada) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se define la función $f^* : R \rightarrow \mathbb{R}$ por

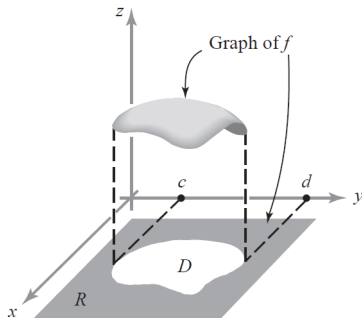
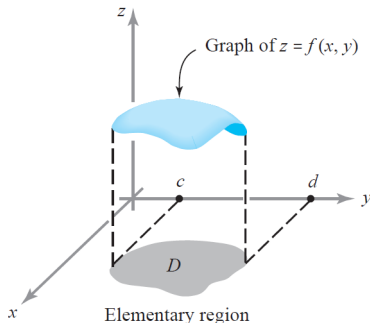
$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{si } (x, y) \notin D, (x, y) \in R. \end{cases}$$

Entonces, podemos definir

$$\iint_D f(x, y) dA := \iint_R f^*(x, y) dA.$$

Observación: f^* es acotada (ya que f lo es) y es continua excepto posiblemente en ∂D . Como ∂D está formada por gráficas de funciones continuas, f^* es integrable sobre R .

Integral doble sobre regiones elementales



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dA &:= \iint_R f^*(x, y) dA \\ &= \int_a^b \int_c^d f^*(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f^*(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Teorema

- Si D es una región y -simple, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

- Si D es una región x -simple, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Caso especial: área de D

Si $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, $\iint_D f(x, y) dA$ es el área de D (vol. sólido altura 1). Además

$$\iint_D 1 dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x)) dx,$$

que coincide con la fórmula vista en AMI.

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Desigualdad del valor medio

Si f es acotada en D , existen m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq M \cdot A(D).$$

Desigualdad del valor medio

Si f es acotada en D , existen m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq M \cdot A(D).$$

Ejemplo: probar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1, 1 \leq 1 + (xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \frac{1}{1+(xy)^4} \geq \frac{1}{2}.$
- $\sin x \geq 0$; luego $\frac{\sin x}{1+(xy)^4} \geq \frac{1}{2} \sin x.$
- $\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2} \sin x dx dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\sin x}{1+(xy)^4} dx dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1 dx dy = 1.$

Como

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2} \sin x dx dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sin x dx \right) \left(\int_0^1 dy \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos 1),$$

se concluye que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$$

Teorema (Teorema del valor medio par integrales dobles)

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y D es elemental, entonces para algún punto $(x_0, y_0) \in D$ se cumple

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de D .

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Definición

Sea $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un paralelepípedo (una caja o rectángulo generalizado) y sea f una función definida en B . Dividimos los tres lados de B en n partes iguales y sumamos:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto de B_{ijk} , el ijk -ésimo paralelepípedo en la partición de B y ΔV es el volumen de B_{ijk} .

Definición

Definición

Sea $f(x, y, z)$ acotada, definida en B . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

existe y es independiente de la elección de c_{ijk} , decimos que f es integrable y llamamos a S **integral triple** de f en B y se anota

$$\iiint_B f \, dV, \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dV, \quad \circ \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

definición, propiedades y cálculo de volúmenes.

1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

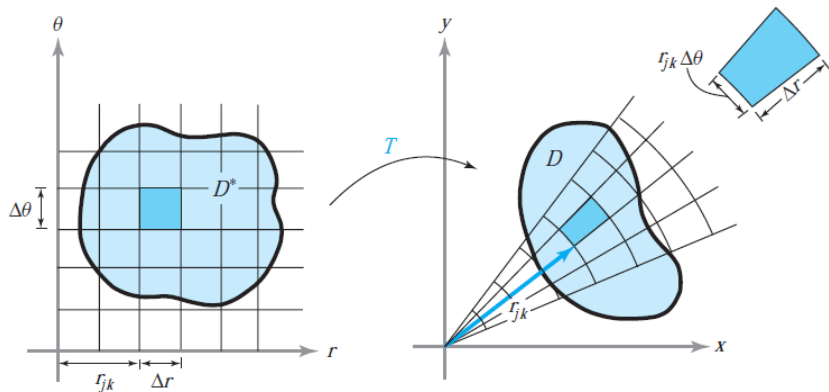
3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

Cambio de variables a coordenadas polares

$$T : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$



1 Integrales dobles

Revisión integrales de funciones de una variable

2 Integrales dobles e iteradas

Teorema de Fubini

La integral doble sobre regiones más generales

Teorema del valor medio para integrales dobles

3 Integrales triples

4 Cambio de variables en integrales dobles

5 Integrales sobre curvas

definición para campos escalares y vectoriales, cálculo mediante parametrización. Aplicaciones.