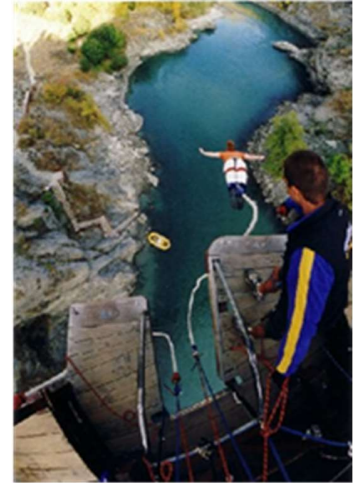


Proyecto Integrador 2022

Introducción

Distintas situaciones de la realidad pueden ser estudiadas mediante modelos matemáticos simplificados, cuya solución exacta suele ser difícil de encontrar. Dichos modelos matemáticos pueden estar expresados por ecuaciones diferenciales o por ecuaciones integrales. Es posible abordar una solución aproximada de esos modelos mediante métodos numéricos. En este trabajo se busca la solución aproximada de un modelo matemático simplificado del fenómeno de bungee, expresado por ecuaciones diferenciales.

Para el modelo matemático formulado con ecuaciones diferenciales se propone una versión discreta de la solución en la dirección del problema de valores de contorno, siguiendo el método de diferencias finitas, para obtener el modelo numérico a resolver mediante métodos numéricos. Se controla la calidad de la solución aproximada obtenida mediante formas de la energía calculadas con integración numérica.



Modelo Matemático del problema

Se busca $u(x,t)$ solución de la siguiente ecuación diferencial:

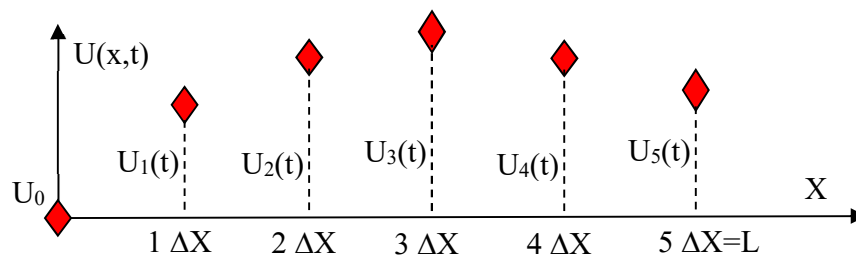
$$\begin{aligned}
 -EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= p(x) \cdot g(t) \quad \text{si } x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\} \\
 u(0,t) &= 0 \quad \forall t \\
 EA \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= -M_L \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} \quad \forall t
 \end{aligned} \tag{1}$$

Los valores de EA , L , $\rho A(x)$, $p(x)$, $g(t)$ y M_L son datos. Como condiciones iniciales se tiene que en $t=0$, para cualquier valor de x , se conoce:

$$\begin{aligned}
 u(x,0) &= U_{\text{dato}}(x) \\
 \left. \frac{\partial(u(x,t))}{\partial t} \right|_{t=0} &= V_{\text{dato}}(x)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Modelo Numérico del problema

Para resolver la ecuación diferencial en forma aproximada se plantea la solución como una función discreta $U(x_i, t) = U_i(t)$ con $i=0,5$; y x_i son las abscisas equidistantes separadas Δx .



Se pretende encontrar una aproximación en el dominio x para todo instante de tiempo t . Así se tendrá que encontrar las funciones $U_i(t)$ en cada instante de tiempo t .

Se debe destacar que en la figura se ha considerado las condiciones de borde en la variable x , aunque no así las condiciones de borde iniciales, o valores iniciales para la variable tiempo.

Comprobar que con la discretización planteada y haciendo uso de la derivada segunda central, de la derivada primera asimétrica, ambas con igual orden de error de truncamiento, se obtiene el siguiente problema:

Buscar $\vec{u}(t)$ solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$M \cdot \ddot{\vec{u}}(t) + K \cdot \vec{u}(t) = \vec{f} \cdot g(t) \quad (3)$$

$$\text{con } \vec{u}(t)^T = \{U_{dato}(x_1); U_{dato}(x_2); U_{dato}(x_3); U_{dato}(x_4); U_{dato}(x_5)\}$$

$$\vec{\dot{u}}(t)^T = \{V_{dato}(x_1); V_{dato}(x_2); V_{dato}(x_3); V_{dato}(x_4); V_{dato}(x_5)\}$$

siendo

$$u(t)^T = \{U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t), U_5(t)\}, \quad (\cdot) \equiv \frac{d(\cdot)}{dt}; \quad (\ddot{\cdot}) \equiv \frac{d^2(\cdot)}{dt^2}; \quad U_i(t) = u(x_i, t) \text{ con } i=1,2,3,4,5.$$

$$M = \begin{pmatrix} \rho A(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A(x_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho A(x_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_L \end{pmatrix} \quad K = (EA/\Delta x^2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \Delta x/2 & -2\Delta x & 3\Delta x/2 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \\ p(x_4) \\ p(x_5) \end{pmatrix}$$

Parte 1: Solución por Autovalores.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por las ecuaciones (3) cuando $p(x)$ de las ecuaciones (1) es nulo ($p(x)=0$), resulta en el siguiente sistema homogéneo:

$$M \cdot \ddot{\vec{u}}(t) + K \cdot \vec{u}(t) = \vec{0} \quad (4)$$

que admite una solución del tipo

$$\vec{u}(t) = \vec{v} \cdot e^{I\omega t} \quad (5)$$

Cuyos coeficientes ω y v_j se determinan resolviendo el siguiente problema de valores propios.

$$(K - \omega^2 M) \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad (6)$$

- **Obtener la menor frecuencia** ω_{MENOR} , también denominada frecuencia fundamental del sistema, y su autovector asociados usando el Método de la Potencia Inversa.
- **Obtener el Período Fundamental** que está dado por $T = 2 \cdot \pi / \omega_{MENOR}$:

$$T = 2 \cdot \pi / \omega_{MENOR} \quad (7)$$

La menor frecuencia $\omega_{ANALITICO}$ **obtenida mediante una solución analítica** de la ecuación (1), está dada por:

$$\omega_{ANALITICO} = \frac{\lambda}{L} \cdot \sqrt{\frac{EA}{\rho A}} \quad (8)$$

con λ solución de la siguiente ecuación no lineal:

$$\lambda \cdot \operatorname{tg}(\lambda) = \frac{\rho A \cdot L}{M_L} \quad (9)$$

- **Comprobar y completar la siguiente Tabla de Resultados:**

Considerar los siguientes datos: $EA=21E4$, $L=5E4$, $\rho A(x)=8E-9$, $p(x)=0$

$M_L * g$	M_L	$\rho A * L / M_L$	λ	$\omega_{\text{Analítico}} = \frac{\lambda}{L} \sqrt{\frac{EA}{\rho A}}$	ω_{MENOR} Potencia Inversa
$1E-4$	$1,02E-8$	39250	$\approx \pi/2$	160,938	161,03
1	$1,02E-4$	$3,925$	$1,26$	129,109	129,69
100	$1,02E-2$	$1/25,477$	$0,1968$	20,166	20,172
$1E4$	$1,02$	$1/2547,7$	$0,0198$	2,03	2,03

Parte 2: Solución por Método de Diferencia Central del problema de valores iniciales.

Plantear un esquema de diferencia central en el tiempo para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden dado en ecuación (3). Implementar un sistema que reciba como datos los valores de L , EA , M_L , $p(x_i)$ y los $\rho A(x_i)$, para entregar los resultados $u_i(t)$ graficados en función del tiempo.

- **Comprobar que** el vector de estado de las incógnitas en el instante $t+\Delta t$, se puede obtener de la forma:

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = -\vec{u}^{t-\Delta t} + (2 \cdot I - \Delta t^2 \cdot M^{-1} \cdot K) \cdot \vec{u}^t + g(t) \cdot \Delta t^2 \cdot M^{-1} \cdot \vec{f}^t \quad (10)$$

Siendo I la matriz identidad de orden cinco.

Parte 2.1: Caso homogéneo del problema de valores iniciales.

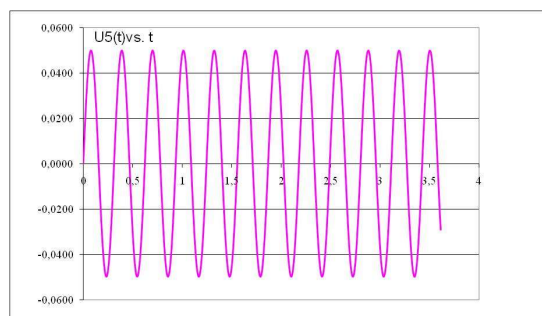
Considerar los siguientes datos:

$$EA=21E4, L=5E4, \rho A(x)=8E-9, p(x)=0; M_L=1,02E-2$$

$$U^T \text{dato} = \{ 0,0 ; 0,0 ; 0,0 ; 0,0 ; 0,0 \}$$

$$V^T \text{dato} = \{ 1,0 ; 1,0 ; 1,0 ; 1,0 ; 1,0 \}$$

- **Comprobar que** usando un $\Delta t=0,001$ que la solución $U_5(t)$ es la que se puede observar en la siguiente gráfica:



Se puede observar que se asemeja a un movimiento armónico simple, en el que se pueden contar 8 ciclos en 2,5 segundos.

- **Comparar** el periodo obtenido mediante esta solución con el período obtenido con la solución por autovalores y la solución analítica obtenidos anteriormente.
- **Obtener las velocidades** en cada instante de tiempo a partir del vector de posiciones en cada instante de tiempo. Para ello se deberá utilizar una derivada primera numérica hacia atrás de error de truncamiento local igual a dos. Para cualquier componente j , la derivada se puede calcular como

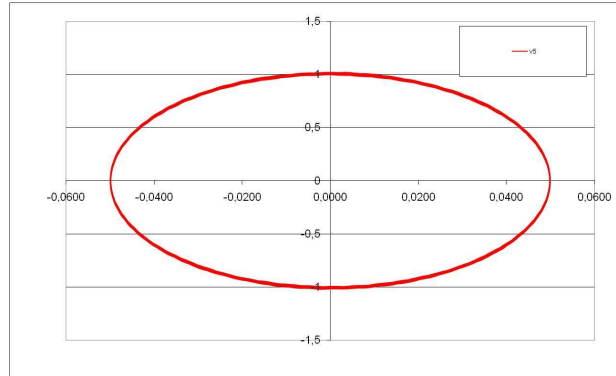
$$\dot{U}_j^t = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{3}{2} \cdot U_j^t - 2 \cdot U_j^{t-\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot U_j^{t-2\Delta t} \right\} \quad (11)$$

O bien

$$\dot{U}_j^t = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ -U_j^{t-\Delta t} + U_j^{t+\Delta t} \right\} \quad (12)$$

Notar que para cada instante de tiempo se puede calcular las posiciones y las velocidades, sin ser necesario calcular toda la historia de posiciones y luego la de velocidades.

- **Comprobar que** la gráfica de la velocidad en $x=L$ ($\dot{U}_5(t)$) en función de la posición en $x=L$ ($U_5(t)$), para todos los instantes del tiempo, es la que se puede observar en la siguiente figura. Este diagrama denominado en espacio de estado, debe ser una curva cerrada para un movimiento armónico simple.



Parte 3: Integración.

En un movimiento armónico con condiciones iniciales no nulas se conoce que la energía mecánica del sistema se mantiene como constante en todo instante de tiempo. La energía mecánica es la suma de la energía cinética más la energía de deformación elástica. Para el sistema en estudio se definen ambas energías de la siguiente forma:

Energía Cinética

$$C = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \cdot M_L \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2_{x=L} \quad (13)$$

Energía de Deformación

$$\chi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14)$$

Como se ha discretizado la solución se tiene un vector de posiciones $U_j(t)$ funciones del tiempo; es decir que se tienen **funciones discretas de velocidad y posición**. Es decir que las integrales de las energías se deben hacer en forma numérica haciendo uso de la Regla de Trapecios.

- **Verificar que** la Energía Cinética se puede aproximar como

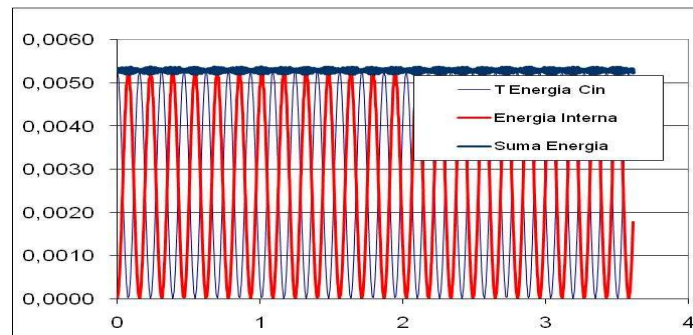
$$C = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{2} \{ \rho_0 \cdot \dot{U}_0^2 + 2\rho_1 \cdot \dot{U}_1^2 + 2\rho_2 \cdot \dot{U}_2^2 + 2\rho_3 \cdot \dot{U}_3^2 + 2\rho_4 \cdot \dot{U}_4^2 + \rho_5 \cdot \dot{U}_5^2 \} + \frac{1}{2} \cdot M_L \cdot \dot{U}_5^2 \quad (15)$$

- **Verificar que** la Energía de Deformación se puede aproximar

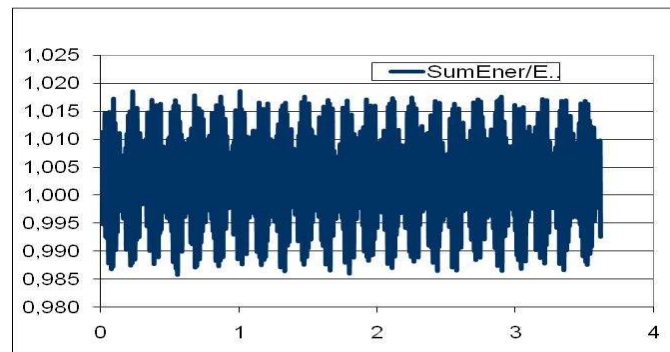
$$\chi = \frac{EA}{2} \frac{\Delta x}{2} \{ \varepsilon_0^2 + 2 \cdot \varepsilon_1^2 + 2 \cdot \varepsilon_2^2 + 2 \cdot \varepsilon_3^2 + 2 \cdot \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 \} \quad (16)$$

$$\text{Siendo } \varepsilon_j = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{-3}{2} \cdot U_0 + 2 \cdot U_1 - \frac{1}{2} \cdot U_2 \right) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\Delta x} (-U_{j-1} + U_{j+1}) & \text{si } x = x_j \\ \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{3}{2} \cdot U_5 - 2 \cdot U_4 + \frac{1}{2} \cdot U_3 \right) & \text{si } x = L \end{cases} \quad (17)$$

- **Comprobar** que la grafica de las energías es la que se puede observar en la siguiente figura, para la solución obtenida en la Parte 2 del Proyecto.



O bien en forma referida a la energía inicial se tiene la siguiente figura:



La variación de la energía mecánica es una medida de la calidad de la solución aproximada obtenida.

Parte 4: Caso NO homogéneo del problema de valores iniciales.

Para los siguientes datos:

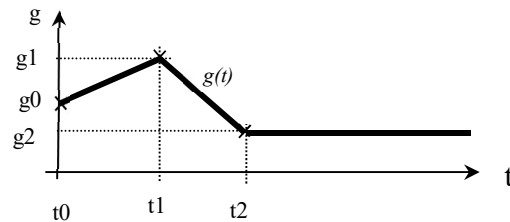
$$L = 50000 \quad m = 8,0E-9$$

$$k = 210000 \quad p = 7,85E-5$$

$$U(x,0)=V(x,0)=0 \text{ para todos los puntos } x \text{ del dominio.}$$

Para la función $g(t)$ se debe considerar la siguiente función:

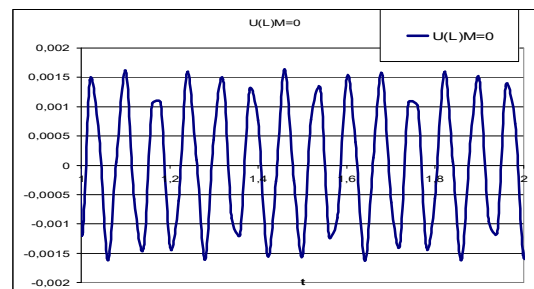
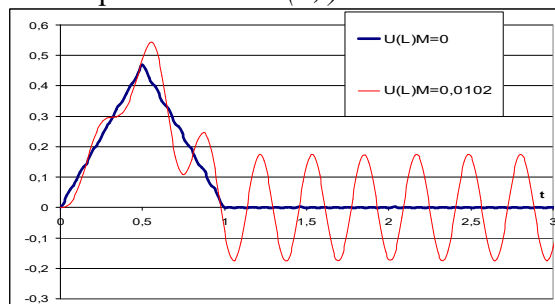
t	g(t)
0	0
0,5	1
1	0
20	0



Se debe notar que la acción externa dada por $g(t)$ desaparece del sistema después de 1 seg., ya que se mantiene un valor nulo.

Con estos datos es posible resolver las ecuaciones (10) del Método de Diferencia Central.

Comprobar que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias da la siguiente gráfica los desplazamientos $u(L,t)$ en función del tiempo.



Notar que cuando $M_L=0,0102$, es decir cuando es una masa cuyo peso es 100; se tiene la curva que después de 1 segundo termina oscilando con mayor amplitud que la situación de $M_L=0$. Se debe obtener la gráfica de $U(L)$ en función del tiempo cuando $M_L=0$ y en el intervalo entre 1 segundo y 2 segundos comprobar que cuando la masa $M_L=0$ el sistema también termina en una oscilación libre, pero de menor amplitud.

Consideraciones generales

Para comprobar los planteos del presente Proyecto Integrador, resulta necesario poder resolver haciendo uso de MATLAB/OCTAVE los siguientes métodos numéricos:

Raíces de ecuaciones no lineales.

Método de la Potencia inversa para obtener Autovalores y Autovectores

Derivación e Integración numéricas

Método de Diferencia Central

Además, habrá que complementar con aplicación de derivada numérica para ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno, interpolación, y mínimos cuadrados.