

Proyecto Integrador 2018

Introducción

Se presenta un *modelo matemático* que representa la respuesta transitoria de un problema de vibraciones axiales. El modelo matemático es una representación muy simplificada de situaciones reales como el bungee jumping, o el hecho de hincar pilotes o barras de perforación. El principal objetivo es reconocer el uso de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales a derivadas parciales y analizar distintas situaciones.

Se pretende encontrar una respuesta aproximada de la formulación diferencial mediante el uso de derivadas numéricas. Se obtienen los desplazamientos axiales de puntos materiales elegidos, sus velocidades y la energía cinética del sistema en todo el rango de tiempo analizado.

Objetivos

Se busca implementar computacionalmente y analizar las soluciones numéricas que resuelven en forma aproximada el siguiente modelo matemático y sus casos particulares.

Modelo Matemático del problema

Se busca la función desplazamiento axial $u(x,t)$ de una cuerda, solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$-EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x) \cdot g(t) \quad \text{en } \Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\} \quad (1)$$

con las siguientes condiciones de borde válidas para todo instante de tiempo t

$$u(0,t) = u_0(t) = su_0 \cdot gc(t) \quad \text{en } x = 0 \quad (2)$$

$$EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -M_L \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R \cdot g(t) \quad \text{en } x = L \quad (3)$$

y con las siguientes condiciones iniciales válidas para todo valor de x

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{en } t = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = ve(x) \quad \text{en } t = 0 \quad (5)$$

Los valores de EA , ρA , L , M_L , R , su_0 y las funciones $p(x)$, $g(t)$, $gc(t)$, $f(x)$ y $ve(x)$ son datos. La energía cinética del sistema para cualquier instante de tiempo t está dada por

$$Cin(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \rho A \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot dx + \frac{1}{2} M_L \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=L} \right]^2 \quad (6)$$

Modelo Numérico del problema

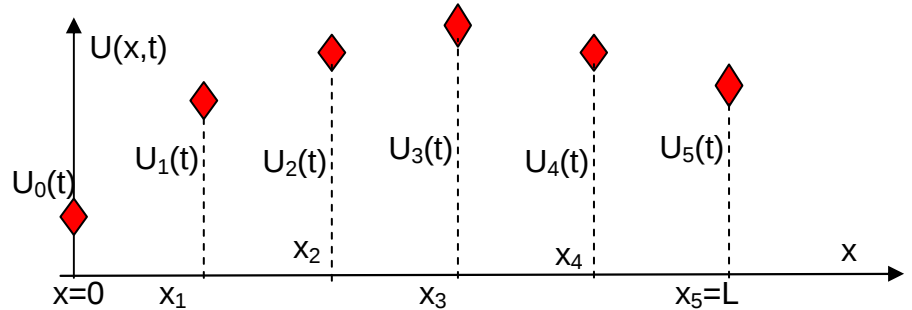
Para resolver en forma aproximada el problema diferencial definido por la ecuación (1), se plantea una solución discreta que contenga **6 puntos en total igualmente separados en todo el dominio**.

Resulta así que es posible definir arreglos para los valores de abscisas y de Desplazamientos

$U(x_k, t)$ dados por

$$x = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & L \end{bmatrix}^T$$

$$U = \begin{bmatrix} U_0(t) & U_1(t) & U_2(t) & U_3(t) & U_4(t) & U_5(t) \end{bmatrix}^T \quad (7)$$



Haciendo uso de derivada numérica, con reglas de derivación de igual orden de error, considerar la solución discreta propuesta en la ecuación diferencial (1) en cada uno de los puntos interiores del dominio; y en los puntos del contorno, considerar las condiciones de borde (2) y (3). En la condición de borde (3) es conveniente utilizar la derivada primera asimétrica de igual orden de error que las derivadas primeras y segundas utilizadas en los puntos interiores del dominio.

Comprobar que con la discretización planteada y el uso de derivada numérica con reglas de igual orden de error, se obtiene el siguiente problema:

Buscar $\vec{y}(t)$ solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no homogéneo

$$M \cdot \ddot{\vec{y}}(t) + K \cdot \vec{y}(t) = \vec{b}(t) \quad (8)$$

siendo

$$K = \frac{EA}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & & & \\ 0 & \rho A & 0 & & \\ 0 & 0 & \rho A & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2M_L}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{b} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2R/\Delta x \end{pmatrix} \right\} \cdot g(t) + \frac{EA}{\Delta x^2} \left\{ \begin{pmatrix} su_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot g_c(t) \quad (10)$$

Es oportuno destacar que el vector $\vec{y}(t)$ tiene como componentes a los valores aproximados de la función incógnita en las abscisas donde se planteó la solución discreta salvo en $x=0$, que es un dato.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no homogéneo definido en (8) se puede resolver con métodos numéricos como el de Diferencia Central o bien reduciendo a un sistema de primer orden del doble de incógnitas y utilizando un Runge Kutta de Segundo Orden.

Una vez conocidos los valores de desplazamientos $U(t)$, y de las velocidades $V(t)$ en un instante de tiempo t es posible calcular la Energía cinética $Cin(t)$ mediante la expresión dada en (6).

Casos particulares

Para los siguientes datos:

$$L=50000; EA=21E4; \rho A=8E-9; M_L=1,02E-2; g(t)=g_c(t)=0$$

COMPROBAR que el sistema dado por (8) resulta

$$M \cdot \ddot{\vec{y}}(t) + K \cdot \vec{y}(t) = \vec{0} \quad (11)$$

y con

$$\vec{y}(t) = \vec{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (12)$$

se transforma en

$$(K - \omega^2 \cdot M) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad (13)$$

COMPROBAR con el método de la potencia y potencia inversa que las soluciones son:

Menor Frecuencia: 20,1655

Mayor Periodo Natural= $0.3116 = 2\pi/\text{Frecuencia}$

Autovector asociado: $[-0.2012; -0.4022; -0.6025; -0.8019; -1.0000]^T$

Mayor Frecuencia: 974,66

Menor Periodo Natural= $0.0064 = 2\pi/\text{Frecuencia}$

Autovector asociado: $[0.6170; -0.9988; 1.0000; -0.6200; 0.0038]^T$

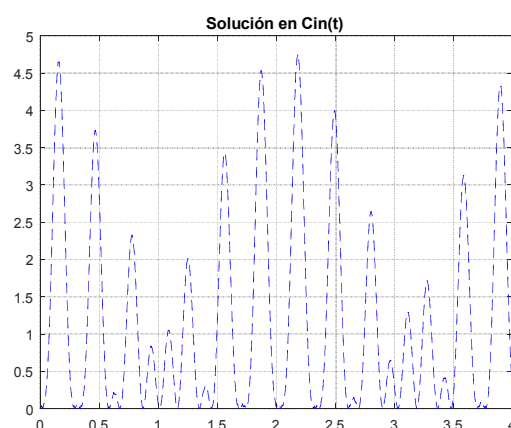
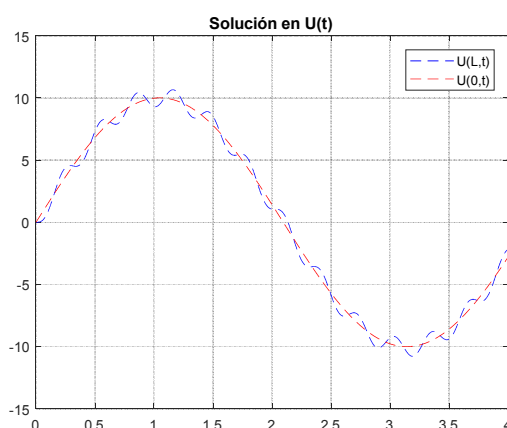
Con esta información es conveniente que la respuesta en el tiempo se obtenga con valores de Δt menores o iguales a 0.001, ya que con dicho valor se obtendrán al menos 5 puntos en el menor período.

Solución en el tiempo

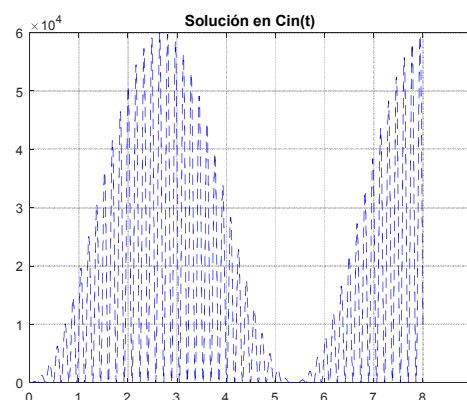
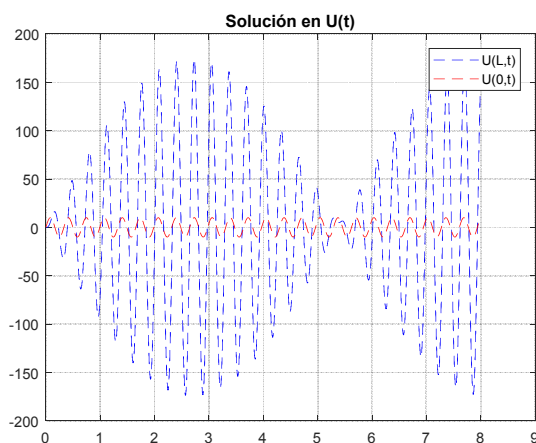
Para los siguientes datos:

$$L=50000; EA=21E4; \rho A=8E-9; M_L=1,02E-2; f(x)=0; ve(x)=0$$

$$g(t)=0 \quad su_0=10 \quad gc(t)=\sin(Fr*t)$$

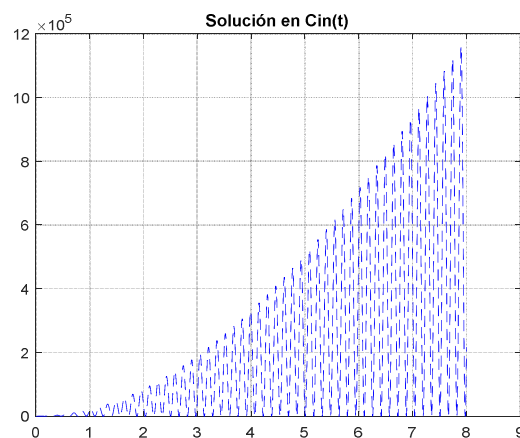
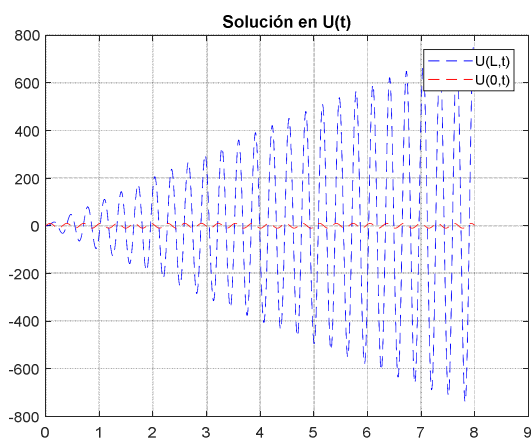
COMPROBAR que las respuestas del sistema dado por (8) resultan**PARA** $Fr=1,5$, que es una frecuencia mucho menor que la menor frecuencia natural (20,1655).

Se observa una oscilación similar tanto en $x=0$ como en $X=L$ que está dominada por la frecuencia $Fr=1,5$.

PARA $Fr=19$ que es una frecuencia cercana a la menor frecuencia natural (20,1655).

Se observa que el movimiento armónico en $x=0$ que es $10*\sin(19*t)$, se amplifica en forma modulada cuando se observa en $x=L$. La amplificación llega a ser de 15 veces el valor de entrada. La energía cinética del sistema varía en forma modulada.

PARA $Fr=20$ que es una frecuencia “coincidente” con la menor frecuencia natural (20,1655).



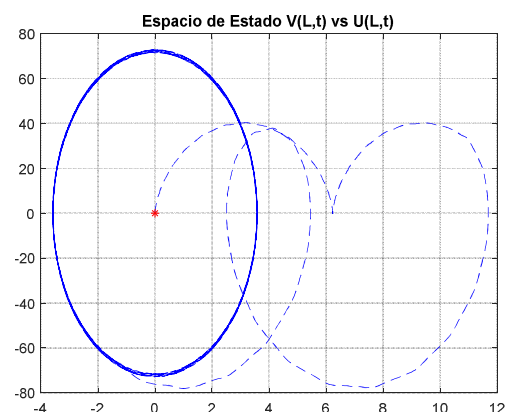
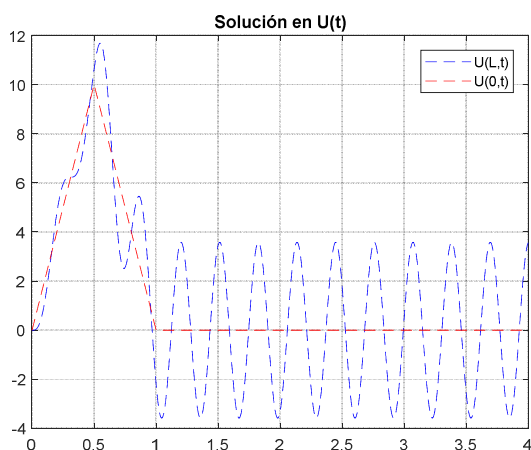
Se observa que la respuesta en $x=L$ se amplifica cada vez más, y que los valores máximos de cada ciclo van aumentando en forma aproximadamente de una recta. Por otra parte la energía cinética es creciente continuamente. Este fenómeno es característico de una resonancia.

Para los siguientes datos:

$$L=50000; EA=21E4; \rho A=8E-9; M_L=1,02E-2; f(x)=0; ve(x)=0$$

$$g(t)=0 \quad su_0=10 \quad gc(t) \text{ en forma triangular}$$

COMPROBAR que las respuestas del sistema dado por (8) resultan



Se observa que el extremo en $x=0$ parte de un valor nulo, se incrementa linealmente hasta valer 10 en $t=0,5$, y decrece linealmente hasta cero para $t=1$, permaneciendo cero de allí en más. Por otra parte el extremo en $x=L$ presenta valores que “siguen” a $u_0(t)$, aunque oscilando. Desde $t=1$ el comportamiento del extremo $x=l$ es de una oscilación libre cuya frecuencia debe ser cercana al de la menor frecuencia natural del sistema 20,1655.

En la gráfica de Espacio de estado el estado inicial de posición y velocidad nulos está representado por el asterisco en el origen de coordenadas, y la oscilación libre en la que permanece el sistema está representado por la “elipse” con semiejes cercanos a 70 y 4.

Consideraciones generales

El Proyecto Integrador se aprobará mediante la Evaluación Integradora de Programación que es de carácter individual y se desarrollará en los horarios correspondientes a cada Comisión de Laboratorio, según corresponda de acuerdo al cronograma presentado. En caso de NO APROBAR se debe recuperar en la siguiente semana, en el mismo horario.

En dicha evaluación cada alumno deberá programar un código en MATLAB que resuelva alguno de los siguientes problemas:

- Obtener la solución de un sistema de EDO mediante el método de Runge Kutta de segundo orden, y graficar su solución.
- Obtener la solución de un sistema EDO mediante el Método de Diferencia Central, y graficar su solución
- Obtener la integral del producto de las derivadas primeras de dos funciones discretas conocidas.
- Obtener la solución de un problema de Autovalores y autovectores, mediante el método de la potencia o potencia inversa, con escalamiento.
- Obtener la Aproximación por mínimos cuadrados de una función discreta usando distintas bases de funciones.
- Obtener las raíces de ecuaciones no lineales mediante alguno de los métodos iterativos como el de Newton Raphson, Secante, Punto Fijo o Regula Falsi.