

Proyecto Integrador 2017

Introducción

Se presenta un *modelo matemático* que representa la respuesta transitoria de un problema térmico, para obtener finalmente las tensiones inducidas en un cilindro de pared gruesa.

Se pretende encontrar una respuesta aproximada de la formulación diferencial mediante el uso de derivadas numéricas.

Se obtienen las tensiones inducidas por la distribución de temperaturas mediante la solución numérica de integrales obtenidas de la solución analítica de las ecuaciones de la mecánica.

Objetivos

Se busca implementar computacionalmente y analizar las soluciones numéricas que resuelven en forma aproximada el siguiente modelo matemático y sus casos particulares.

Modelo Matemático del problema

Se busca la función Temperatura $T(r,t)$ en un cilindro grueso, solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = k \left\{ \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right\} \quad \text{en } \Omega = \{r \in R : a \leq r \leq b\} \quad (1)$$

con las siguientes condiciones de borde válidas para todo instante de tiempo t

$$T(0,t) = T_i \cdot g(t) \quad \text{en } r = a \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=b} = 0 \quad \text{en } r = b \quad (3)$$

y con las siguientes condiciones iniciales válidas para todo valor de r

$$T(r,0) = \text{Temp0}(r) \quad (4)$$

Los valores de a, b, c, ρ, k, T_i , y las funciones $g(t)$ y $\text{Temp0}(r)$ son datos.

Obtenida la función Temperatura $T(r,t)$ la solución de las tensiones inducidas en el cilindro grueso están dadas según Timoshenko por

$$\sigma_r(r) = \left(\frac{E \cdot \alpha}{1 - \mu} \right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right) \left\{ \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \int_a^b T(r) \cdot r \cdot dr - \int_a^r T(r) \cdot r \cdot dr \right\} \quad (5)$$

$$\sigma_\vartheta(r) = \left(\frac{E \cdot \alpha}{1 - \mu} \right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right) \left\{ \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) \int_a^b T(r) \cdot r \cdot dr + \int_a^r T(r) \cdot r \cdot dr - r^2 \cdot T(r) \right\} \quad (6)$$

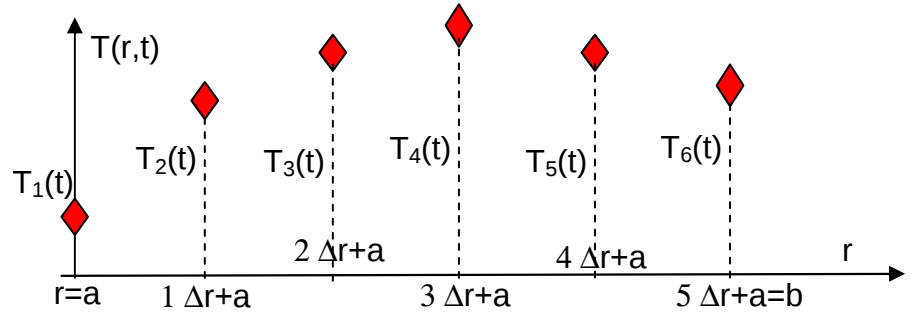
con E, μ, α , datos del material

S. Timoshenko, (1982), Resistencia de Materiales, vol.II, Espasa Calpe, Madrid.(pp266).

Modelo Numérico del problema

Para resolver en forma aproximada el problema diferencial definido por la ecuación (1), se plantea una solución discreta que contenga 6 puntos en total igualmente separados en todo el dominio.

Resulta así que es posible definir arreglos para los valores de radio y de Temperatura dados por



$$r = \begin{bmatrix} a & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & b \end{bmatrix}^T$$

$$T = \begin{bmatrix} T(a,t) & T(r_2,t) & T(r_3,t) & T(r_4,t) & T(r_5,t) & T(b,t) \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

Haciendo uso de derivada numérica, con reglas de derivación de igual orden de error, considerar la solución discreta propuesta en la ecuación diferencial (1) en cada uno de los puntos interiores del dominio; y en los puntos del contorno, considerar las condiciones de borde (2) y (3). En la condición de borde (3) es conveniente utilizar la derivada primera asimétrica de igual orden de error que las derivadas primeras y segundas utilizadas en los puntos interiores del dominio.

Comprobar que con la discretización planteada y el uso de derivada numérica con reglas de igual orden de error, se obtiene el siguiente problema:

Buscar $\vec{x}(t)$ solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no homogéneo

$$\vec{\dot{x}}(t) = K \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad (8)$$

siendo

$$K = \frac{k}{c \cdot \rho \cdot Dr^2} \begin{bmatrix} -2 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & -2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & -2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \left(1 - \frac{Dr}{2 \cdot r_5}\right) & -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{Dr}{2 \cdot r_5}\right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{b}(t) = \frac{k}{c \cdot \rho \cdot Dr^2} \cdot (-\beta_1) \cdot T_i \cdot g(t) \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (10)$$

$$\alpha_j = \left(1 + \frac{1}{2(j + \frac{a}{Dr})}\right) \quad \beta_j = \left(1 - \frac{1}{2(j + \frac{a}{Dr})}\right) \quad j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

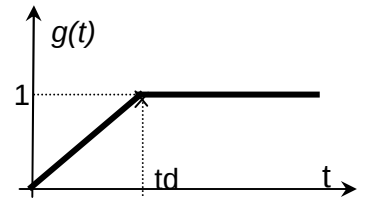
El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden no homogéneo definido en (8) se puede resolver con métodos numéricos como los de tipo Runge Kutta.

Una vez conocida la Temperatura, es posible calcular las tensiones dadas por las integrales (5) y (6) para cada valor de tiempo. Es oportuno destacar que la Temperatura en cada valor de tiempo es una función discreta de la variable r ; y esa función discreta la que se considera en las integrales expresadas en las ecuaciones (5). Así se obtendrán funciones discretas para las tensiones que se

$$\begin{aligned}\sigma_r &= [\sigma_r(a, t) \quad \sigma_r(r_2, t) \quad \sigma_r(r_3, t) \quad \sigma_r(r_4, t) \quad \sigma_r(r_5, t) \quad \sigma_r(b, t)]^T \\ \sigma_\vartheta &= [\sigma_\vartheta(a, t) \quad \sigma_\vartheta(r_2, t) \quad \sigma_\vartheta(r_3, t) \quad \sigma_\vartheta(r_4, t) \quad \sigma_\vartheta(r_5, t) \quad \sigma_\vartheta(b, t)]^T\end{aligned}\quad (12)$$

Ejemplo particular

Sea un cilindro circular de pared gruesa con radio interno $a=3$ metros y radio externo $b=3,4$ metros. En el espacio interior del cilindro y en particular en $r=a$, la Temperatura inicialmente cero, varia linealmente con el tiempo hasta alcanzar un valor $T_i=400$ °C; y luego se mantiene constante. Así la función $g(t)$ es igual a (t/t_d) si $t < t_d$; y es igual 1 para todo $t > t_d$, como la mostrada en la figura. Se considera que $t_d = 2000$ segundos.



En el instante inicial todos los puntos del cilindro entre el radio interno y externo están a temperatura igual a cero.

El material del cilindro es acero con las siguientes propiedades para el problema de temperatura

$$\begin{aligned}k &= 60.5 \text{ (W/(m } ^\circ\text{C))}; c = 434 \text{ (Joule/(kg} ^\circ\text{C))}; \rho = (7850 \text{ kg/m}^3) \\ 1 \text{ Joule/seg} &= 1 \text{ Nm/seg} = 1 \text{ W}\end{aligned}$$

y las siguientes para el problema de tensiones

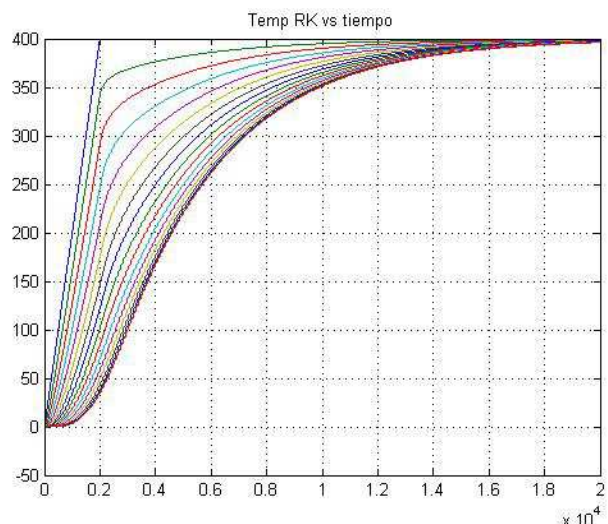
$$E = 2e11 \text{ Pa}; \mu = 0,3; \alpha = 1e-7 \text{ } 1/^\circ\text{C} \quad \text{Pa} = 1 \text{ N/m}^2 \quad 1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$$

Solución en el tiempo

Resolver el sistema de EDO dado por ecuaciones (8) y comparar las soluciones obtenidas con las siguientes gráficas obtenidas con 16 segmentos, usando un método de Runge Kutta de segundo orden con $dt = 1$ seg, que se pueden tomar como solución de referencia.

En la Figura 1 se presenta la evolución de la temperatura en función del tiempo. Hay 17 funciones, una por cada abscisa del radio donde se plateó la función discreta. Se puede observar que para $r=a$ la temperatura sigue la forma de la función $g(t)$. Mientras que en $r=b$ la temperatura es una curva tipo “S”.

En la Figura 1 se observa que para todos los puntos interiores entre $r=a$ y $r=b$ la temperatura tiende al valor constante de 400°C. Es decir que la solución para un tiempo suficientemente grande es de



temperatura constante.

En Figura 2 se presenta la distribución de temperaturas en función del radio r para $t=t_d$. Se puede observar que en el instante de tiempo t_d , mientras el punto $r=a$ alcanza los 400°C el punto externo $r=b$ aún está a una temperatura inferior a 50°C .

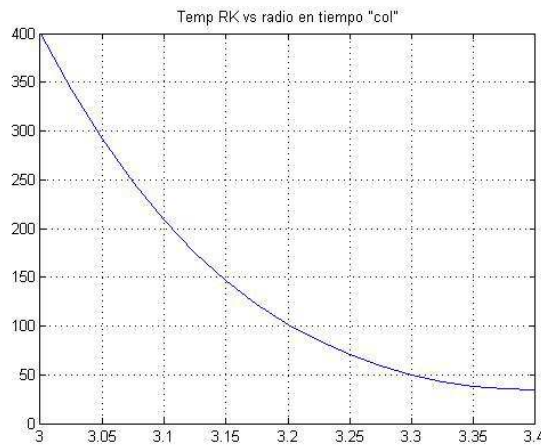


Figura 2_ Temperatura en función del radio para $t=t_d=2000$ seg

Por otra parte se puede observar en la Figura 2 que la curva tiene pendiente cercana a cero en $r=b$, tal como exige la ecuación (3).

En las Figuras 3 y 4 se pueden observar las soluciones obtenidas en $t=t_d$ de las tensiones calculadas con las ecuaciones (12).

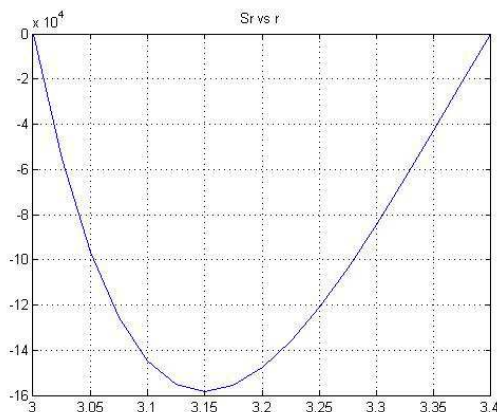


Figura 3 σ_r vs r en $t=t_d=2000$ seg

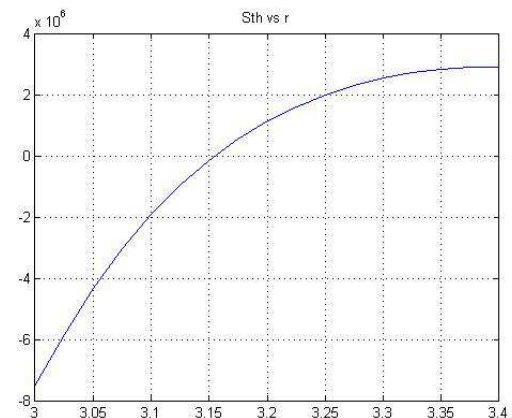


Figura 4 σ_θ vs r en $t=t_d=2000$ seg

Ajuste por Mínimos Cuadrados

Para la solución discreta obtenida de la Temperatura en función del radio en $t=t_d$, con la discretización asumida; que está dada en la siguiente Tabla,

Radio r	3.0000	3.0800	3.1600	3.2400	3.3200	3.4000
Temp	400.0000	239.4639	137.0436	76.2118	44.4213	33.8245

Graficar la función discreta y compararla con la Figura 2

Encontrar Aproximaciones con mínimos cuadrados en las siguientes formas y discutir cual es la mejor representación

$$Temp(r) = C \cdot e^{d \cdot r}$$

$$Temp(r) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (1/r) + a_2 \cdot (1/r)^2 + a_3 \cdot (1/r)^3$$

Problema Homogéneo de Interés

Cuando en el sistema de ecuaciones (8) el término independiente $\vec{b}(t)$ es nulo, el sistema resultante admite una solución del tipo

$$\vec{x}(t) = \vec{v} \cdot e^{\lambda t} \quad (14)$$

Cuyos coeficientes λ y $v_j(t)$ se determinan resolviendo el siguiente problema de valores propios.

$$\vec{0} = (K - \lambda I) \cdot \vec{v} \quad (15)$$

CALCULAR el mayor y el menor autovalor y sus autovectores asociados.

COMPROBAR

Que usando el método de la Potencia y Potencia inversa en ambos casos los autovalores son negativos.

Considerar el valor de tiempo de referencia dado por $(4/\lambda_{\min})$, siendo $\lambda_{\min}$ el menor de los autovalores comparados en valor absoluto

Problema Estacionario de Interés

Cuando en el sistema de ecuaciones (8) se considera un tiempo muy grande (que tiende a infinito) en este tipo de problemas el vector de derivadas tiende a cero, y vector $\vec{b}$ tiende a un vector constante. El sistema resultante resulta

$$\vec{0} = K \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(\infty) \quad (16)$$

OBTENER

su solución que es la solución denominada estacionaria. **COMPARAR** con los valores de temperatura de la Figura 1, en en $t=20000$ segundos que corresponde a 10 td.

Consideraciones generales

El Proyecto Integrador se aprobará mediante la Evaluación Integradora de Programación que es de carácter individual y se desarrollará en los horarios correspondientes a cada Comisión de Laboratorio, según corresponda de acuerdo al cronograma presentado. En caso de NO APROBAR se debe recuperar en la siguiente semana, en el mismo horario.

En dicha evaluación cada alumno deberá programar un código en MATLAB que resuelva alguno de los siguientes problemas:

- Obtener la solución de un sistema de EDO mediante el método de Runge Kutta de segundo orden, y graficar su solución.
- Obtener la solución de un sistema EDO mediante el Método de Diferencia Central, y graficar su solución
- Obtener la integral del producto de las derivadas primeras de dos funciones discretas conocidas.
- Obtener la solución de un problema de Autovalores y autovectores, mediante el método de la potencia o potencia inversa, con escalamiento.
- Obtener la Aproximación por mínimos cuadrados de una función discreta usando distintas bases de funciones.
- Obtener las raíces de ecuaciones no lineales mediante alguno de los métodos iterativos como el de Newton Raphson, Secante, Punto Fijo o Regula Falsi.