

Proyecto Integrador 2014

Introducción

Distintas situaciones de la realidad pueden ser estudiadas mediante *modelos matemáticos simplificados*, cuya solución exacta suele ser difícil de encontrar, pero es posible obtener soluciones aproximadas de esos modelos mediante métodos numéricos. Dichos modelos matemáticos pueden estar expresados por ecuaciones diferenciales o por ecuaciones integrales. En este trabajo se busca la *solución aproximada* de un modelo matemático de la difusión de calor en un elemento unidimensional, *expresado por ecuaciones diferenciales*.

Se pretende encontrar una solución aproximada en forma de función discreta en la variable geométrica x , y para distintos instantes de tiempo.

Objetivo

Se busca implementar computacionalmente la solución numérica que resuelve en forma aproximada el siguiente modelo matemático y sus casos particulares.

Modelo Matemático del problema

Se busca $u(x,t)$ solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(t) \cdot f(x) \quad \text{si } x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\} \quad (1)$$

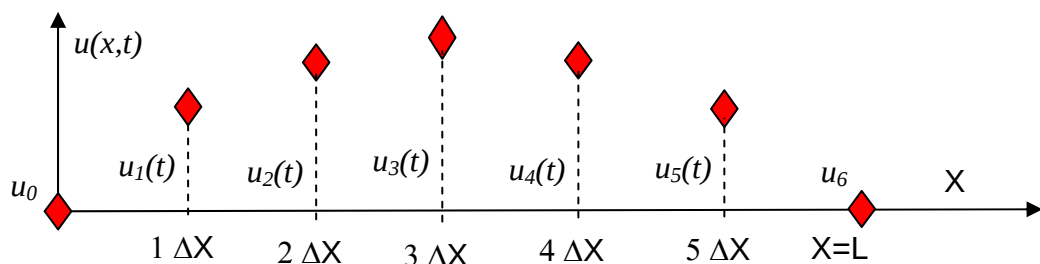
Las funciones $g(t)$, $f(x)$ y el valor de D , son datos. Como condiciones de contorno se tiene que:

- En $S_D = \{x=0 \text{ y } x=L\}$ se debe cumplir que $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para todo valor de t .
- En $t=0$, los valores iniciales para todo valor de x son conocidos

$$u(x,0) = U_{\text{dato}}(x) \quad (2)$$

Solución Aproximada del Modelo Matemático

Para resolver la ecuación diferencial en forma aproximada se plantea la solución como una función discreta $u(x_i, t) = u_i(t)$ con $i=0,6$; y x_i son las abscisas equidistantes separadas Δx . Se pretende encontrar una aproximación en el dominio x para todo instante de tiempo t . Así se tendrá que encontrar las siguientes funciones en cada instante de tiempo t , según la discretización planteada:



Se debe destacar que en la figura se ha considerado las condiciones de borde en S_D , aunque no así los valores iniciales.

Comprobar que haciendo uso de la derivada segunda central, y con la discretización planteada se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\vec{\dot{u}}(t) + K \cdot \vec{u}(t) = g(t) \cdot \vec{b} \quad (3)$$

siendo $u_i(t)=u(x_i,t)$ con $i=1,2,3,4,5$; $(\dot{}) \equiv \frac{d()}{dt}$ y

$$K = (D / \Delta x^2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{Bmatrix} \quad \vec{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{Bmatrix}$$

Parte 1: Caso independiente del tiempo.

Un caso particular de interés se obtiene cuando el término independiente de la ecuación (1) no depende del tiempo ($g(t)=1$); y también se pueden despreciar las derivadas de $u(x,t)$ respecto de tiempo. En ese caso se tiene que las ecuaciones (3) se simplifican y resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$K \cdot \vec{u} = \vec{b} \quad (3)$$

Implementar un código en MATLAB que reciba como datos los valores de L , D , y los $f(x_i)$, resuelva mediante un método iterativo la solución del sistema de ecuaciones (3) y entregue los resultados u_i graficados en función de la posición x .

También resulta de interés conocer la integral

$$\chi = \frac{1}{2} \int_0^L D \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Para lo cual se debe implementar, a partir de la solución discreta obtenida anteriormente, el cálculo de la derivada primera y luego de la integral, en ambos casos en forma numérica.

Parte 2: Solución con un Método de Runge Kutta del problema de valores iniciales.

Implementar un código en MATLAB que reciba como datos los valores de valores de L , D , las funciones $U_{dato}(x)$, $g(t)$ y $f(x_i)$; y calcule la solución del sistema dado por ecuación (3) mediante un método de Runge Kutta de segundo orden, y entregue los resultados $u_i(t)$ graficados en función del tiempo.

También resulta de interés en un valor de tiempo determinado " t_d " conocer la integral

$$\chi = \frac{1}{2} \int_0^L D \cdot \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2_{t=t_d} dx$$

para lo cual se debe implementar, a partir de la solución discreta obtenida anteriormente, el cálculo en forma numérica de la derivada primera y luego de la integral.

Parte 3: Solución por Autovalores.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por las ecuaciones (3), cuando el término independiente es nulo, resulta en un sistema homogéneo que admite una solución del tipo

$$\vec{u}(t) = \vec{v} \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (9)$$

cuyos coeficientes λ y $v_i(t)$ se determinan resolviendo el siguiente problema de valores propios.

$$(K + \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad (10)$$

Existen dos situaciones particularmente de interés: cuando sólo es necesario el menor valor de λ y su autovector asociado; y cuando son necesarios todos los autovalores y autovectores.

Para considerar el primer caso, implementar un código en MATLAB que reciba como datos los valores de L , D , y calcule con el método de la Potencia o Potencia Inversa los autovectores y autovalores correspondientes.

Para considerar el segundo caso para problemas de dimensión tres, implementar un código en MATLAB que dado un polinomio de grado 3, obtenga su gráfica y permita obtener las raíces mediante algún método iterativo para raíces de ecuaciones no lineales.

Aprobación del Proyecto Integrador

El Proyecto Integrador se aprobará mediante una evaluación individual que se desarrollará en los horarios correspondientes a las Comisiones de Laboratorio durante la semana del 4 de Junio al 9 de Junio de 2014.

En dicha evaluación cada alumno deberá programar un código en MATLAB que resuelva alguno de los siguientes problemas:

- Obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante los métodos de Jacobi o Gauss Seidel, a partir de conocer la matriz de coeficientes y el vector de incógnitas, graficando la solución.
- Obtener la integral del cuadrado de la derivada primera de una función discreta conocida.
- Obtener las raíces de ecuaciones no lineales mediante alguno de los métodos iterativos como el de Newton Raphson, Secante, Punto Fijo o Regula Falsi.
- Obtener la solución de un sistema de EDO mediante el método de Runge Kutta de segundo orden, y graficar su solución; a partir de conocer la matriz de coeficientes, el termino independiente del sistema y sus valores iniciales.