

Proyecto Integrador 2012

Introducción

Distintas situaciones de la realidad pueden ser estudiadas mediante *modelos matemáticos simplificados*, cuya solución exacta suele ser difícil de encontrar, pero es posible obtener soluciones aproximadas de esos modelos mediante métodos numéricos. Dichos modelos matemáticos pueden estar expresados por ecuaciones diferenciales o por ecuaciones integrales. En este trabajo se busca la *solución aproximada* de un modelo matemático del fenómeno de vibraciones libres de una cuerda tensa, *expresado por ecuaciones diferenciales*.

Se pretende encontrar una solución aproximada en forma de función discreta en la variable geométrica x , y para distintos instantes de tiempo.

Objetivo

Se busca implementar computacionalmente la solución numérica que resuelve en forma aproximada el siguiente modelo matemático y sus casos particulares.

Modelo Matemático del problema

Se busca $u(x,t)$ solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{si } x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\} \quad (1)$$

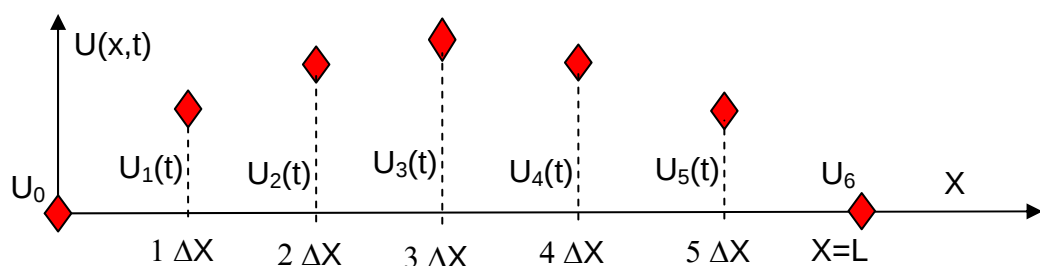
Los valores de L , T , $\rho(x)$ son datos. Como condiciones de contorno se tiene que:

- En $S_D = \{x=0 \text{ y } x=L\}$ se debe cumplir que $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para todo valor de t .
- En $t=0$, los valores iniciales para todo valor de x son

$$\begin{aligned} u(x,0) &= U_{\text{dato}}(x) \\ \left. \frac{\partial(u(x,t))}{\partial t} \right|_{t=0} &= V_{\text{dato}}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Solución Aproximada del Modelo Matemático

Para resolver la ecuación diferencial en forma aproximada se plantea la solución como una función discreta $U(x_i, t) = U_i(t)$ con $i=0,6$; y x_i son las abscisas equidistantes separadas Δx . Se pretende encontrar una aproximación en el dominio x para todo instante de tiempo t . Así se tendrá que encontrar las siguientes funciones en cada instante de tiempo t , según la discretización planteada:



Se debe destacar que en la figura se ha considerado las condiciones de borde en S_D , aunque no así las valores iniciales.

Comprobar que haciendo uso de la derivada segunda central, y con la discretización planteada se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$M \cdot \ddot{\vec{u}}(t) + K \cdot \vec{u}(t) = \vec{0} \quad (3)$$

siendo

$$u(t)^T = \{U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t), U_5(t)\}, \quad (\dot{}) \equiv \frac{d()}{dt}; \quad (\ddot{}) \equiv \frac{d^2()}{dt^2}; \quad U_i(t) = u(x_i, t) \text{ con } i=1,2,3,4,5.$$

$$M = \begin{pmatrix} \rho(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho(x_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho(x_5) \end{pmatrix} \quad K = (T/h^2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Parte 1: Solución por Método de Diferencia Central del problema de valores iniciales.

Plantear un esquema de diferencia central en el tiempo para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden dado en ecuación (3). Implementar un sistema que reciba como datos los valores de L , T , y los $\rho(x_i)$, para entregar los resultados $u_i(t)$ graficados en función del tiempo.

- **Comprobar que** el vector de estado de las incógnitas en el instante $t + \Delta t$, se puede obtener de la forma:

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = -\vec{u}^{t-\Delta t} + (2 \cdot I - \Delta t^2 \cdot M^{-1} \cdot K) \cdot \vec{u}^t \quad (4)$$

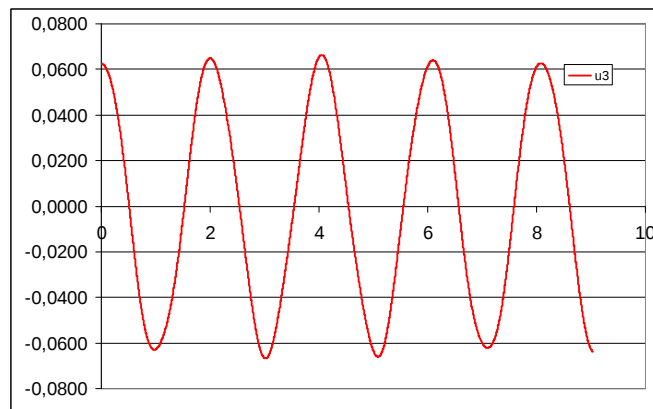
Siendo I la matriz identidad de orden cinco.

Para $L=10$; $T=2000$; $\rho=20$

$$U_{\text{dato}} = \{0,03472222 \quad 0,05555556 \quad 0,0625 \quad 0,05555556 \quad 0,03472222\}$$

$$V_{\text{dato}} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

- **Comprobar que** la solución $U_3(t)$ es la que se puede observar en la siguiente gráfica:



Se puede observar que se asemeja a un movimiento armónico simple. La solución exacta de la ecuación diferencial de la cuerda vibrante es una oscilación armónica simple con la menor frecuencia dada por

$$\omega = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{T/\rho}$$

Y con período dado por

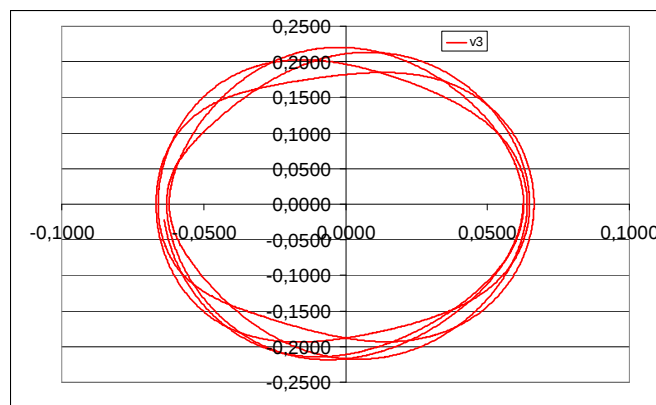
$$T = 2 \cdot L \cdot \sqrt{\rho/T}$$

- **Verificar que** el periodo exacto para los datos utilizados es 2 y compararlo con el período que se puede estimar de la solución numérica obtenida.
- **Obtener las velocidades** en cada instante de tiempo a partir del vector de posiciones en cada instante de tiempo. Para ello se deberá utilizar una derivada primera numérica hacia atrás de error de truncamiento local igual a dos. Para cualquier componente j, la derivada se puede calcular como

$$\dot{U}_j = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{3}{2} \cdot U_j^t - 2 \cdot U_j^{t-\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot U_j^{t-2\Delta t} \right\}$$

Notar que para cada instante de tiempo se puede calcular las posiciones y las velocidades, sin ser necesario calcular toda la historia de posiciones y luego la de velocidades.

- **Comprobar que** la grafica de la velocidad en x_3 ($\dot{U}_3(t)$) en función de la posición en x_3 ($U_3(t)$), para todos los instantes del tiempo es la que se puede observar en la siguiente figura. Este diagrama denominado en espacio de estado, debe ser una curva cerrada para un movimiento armónico simple.



Parte 2: Integración.

En un movimiento armónico como el de la cuerda vibrante con condiciones iniciales no nulas se conoce que la energía mecánica del sistema se mantiene como constante en todo instante de tiempo. La energía mecánica es la suma de la energía cinética mas la energía de deformación elástica.

Para la cuerda vibrante se definen ambas energías de la siguiente forma:

Energía Cinética $C = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$

Energía de Deformación $\chi = \frac{1}{2} \int_0^L T \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$

Como se ha discretizado la solución se tiene un vector de posiciones $U_j(t)$ funciones del tiempo; es decir que se tienen **funciones discretas de velocidad y posición**. Es decir que las integrales de las energías se deben hacer en forma numérica haciendo uso de la Regla de Simpson.

- **Verificar que** la Energía Cinética se puede aproximar como

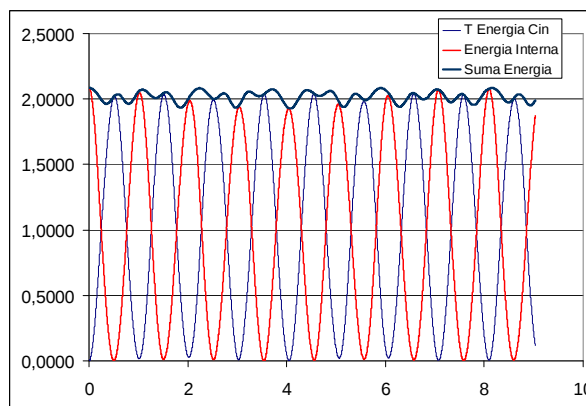
$$C = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{3} \{ \rho_0 \cdot \dot{U}_0^2 + 4\rho_1 \cdot \dot{U}_1^2 + 2\rho_2 \cdot \dot{U}_2^2 + 4\rho_3 \cdot \dot{U}_3^2 + 2\rho_4 \cdot \dot{U}_4^2 + 4\rho_5 \cdot \dot{U}_5^2 + \rho_6 \cdot \dot{U}_6^2 \}$$

- **Verificar que** la Energía de Deformación se puede aproximar

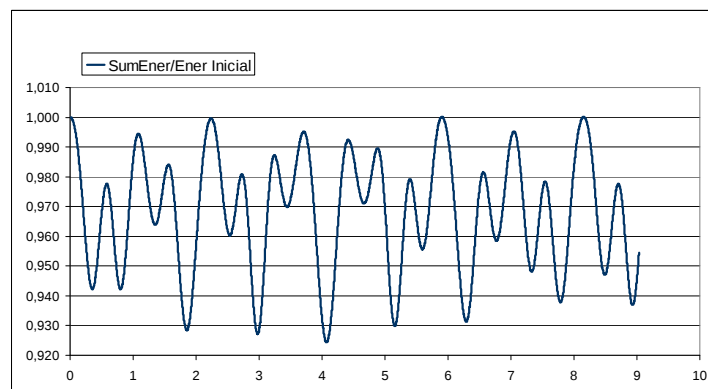
$$C = \frac{T}{2} \frac{\Delta x}{3} \{ \rho_0 \cdot \varepsilon_0^2 + 4\rho_1 \cdot \varepsilon_1^2 + 2\rho_2 \cdot \varepsilon_2^2 + 4\rho_3 \cdot \varepsilon_3^2 + 2\rho_4 \cdot \varepsilon_4^2 + 4\rho_5 \cdot \varepsilon_5^2 + \rho_6 \cdot \varepsilon_6^2 \}$$

Siendo $\varepsilon_j = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{3}{2} \cdot U_0 + 2 \cdot U_1 - \frac{1}{2} \cdot U_2 \right) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\Delta x} (-U_{j-1} + U_{j+1}) & \text{si } x = x_j \\ \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{3}{2} \cdot U_6 - 2 \cdot U_5 + \frac{1}{2} \cdot U_4 \right) & \text{si } x = L \end{cases}$

- **Comprobar que** la grafica de las energías es la que se puede observar en la siguiente figura, para los datos asumidos en la parte 1 del proyecto



O bien en forma referida a la energía inicial se tiene la siguiente figura:



La variación de la energía mecánica es una medida de la calidad de la solución aproximada obtenida.

Parte 3: Solución por Autovalores.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por las ecuaciones (3) (que se transcribe seguidamente

$$M \cdot \ddot{\vec{u}}(t) + K \cdot \vec{u}(t) = \vec{0} \quad (8)$$

admite una solución del tipo

$$\vec{u}(t) = \vec{v}(t) \cdot e^{I\omega t} \quad (9)$$

Cuyos coeficientes ω y $v_j(t)$ se determinan resolviendo el siguiente problema de valores propios.

$$(K - \omega^2 M) \cdot \vec{v}(t) = \vec{0} \quad (10)$$

Este problema se deberá resolver con el Método de la Potencia o Potencia inversa según corresponda.

- **Comprobar que** para los datos asumidos en la Parte 1 del proyecto, la solución de la menor frecuencia del sistema y su autovector asociados están dados por:

$$\omega_{MENOR} = 3,105829$$

$$\vec{v}^T = \{0,5; 0,8660254; 1; 0,8660254; 0,5\}$$

La frecuencia exacta es $\omega = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{T/\rho}$ igual a 3,14, para los datos asumidos.

Consideraciones generales

El Proyecto Integrador podrá realizarse en Grupos de 2 (dos) personas de una misma Comisión. Los grupos se inscribirán por escrito y con la *firma* de todos sus integrantes hasta el día **21 de Abril de 2012**. A tal efecto presentarán una nota dirigida a la Cátedra, detallando los *nombres y número de Legajo* de todos los integrantes. *Deberá ser en un papel tamaño A4*, y se entregará al docente a cargo de la Comisión de Laboratorio.

Se deberán respetar las siguientes consignas:

- Cada grupo desarrollará el software completo antes de la finalización del cursado de la materia, y será aprobado por el docente a cargo de dicha Comisión.
- Es posible ir desarrollando las distintas partes según el siguiente cronograma:

Parte 1	inmediatamente de rendido el Primer Parcial
Parte 2	inmediatamente de rendido el Segundo Parcial
Partes 3	inmediatamente de rendido el Tercer Parcial
- Cada alumno desarrollará un documento, que serán presentadas al rendir examen final. Dicho documento debe registrar el proceso de solución del modelo matemático y una descripción del sistema implementado. Además, deberá presentarse respetando los siguientes puntos:
 - Título**, a elección de cada grupo;
 - Resumen**, de alrededor de 100 palabras, que explicará en qué consiste el proyecto;

Introducción, donde se expondrá el contexto en que se realiza el trabajo, sus alcances, objetivos, y en forma sintética los contenidos;

Desarrollo, abarcará las secciones necesarias para lograr los objetivos planteados;

Ejemplo de aplicación., con los datos provistos e este documento

Conclusiones.

Bibliografía utilizada para realizar el proyecto.

- Es conveniente la elaboración de una guía del usuario donde se describirán los datos necesarios a ingresar por el usuario según cada opción del software.
- El lenguaje en el que se desarrollará el sistema será elección del grupo de trabajo y debe ser conocido por todos los integrantes del grupo. Puede tratarse de planillas de cálculo tipo Excel, MATLAB, o lenguajes de programación tipo Visual Basic, etc.