

UNIDAD 2: Funciones de varias variables

Diferenciación

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



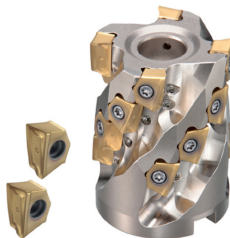
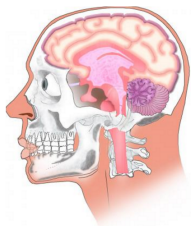
FACULTAD
DE INGENIERÍA

➤ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL
COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA
UNCUYO

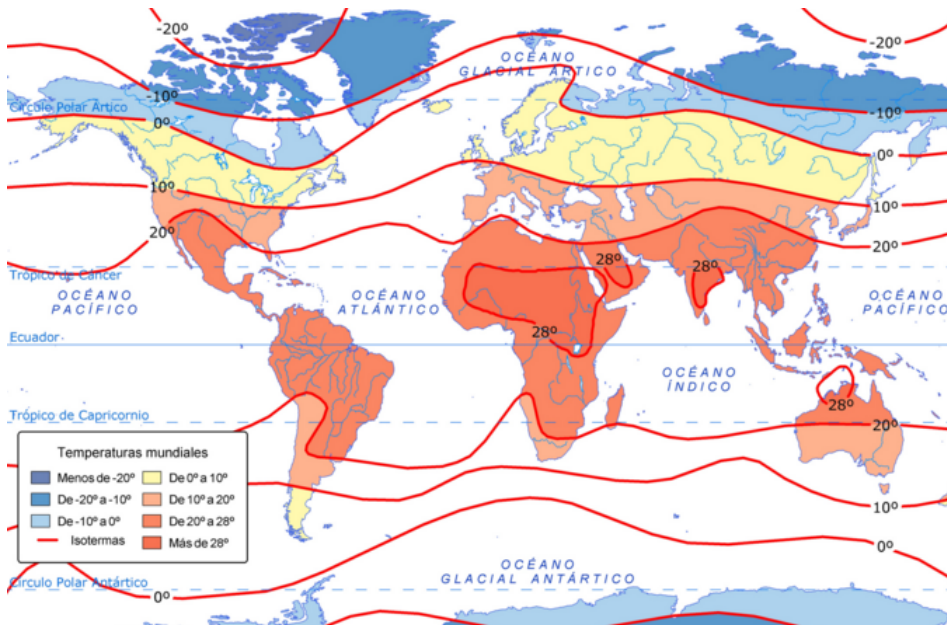
- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

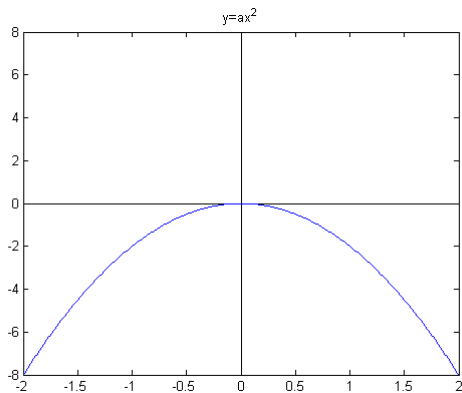
Ejemplos



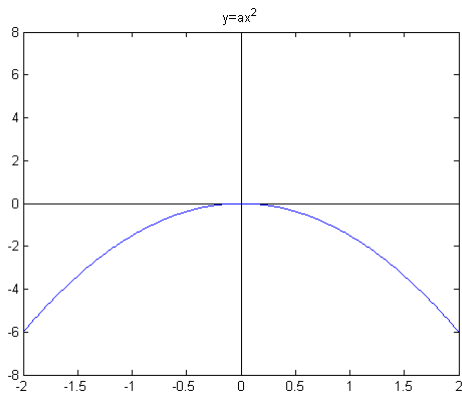
Ejemplos



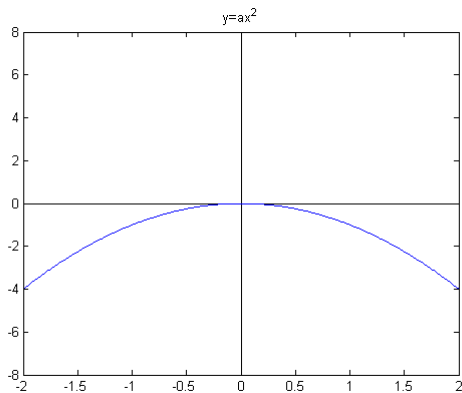
Parábolas $y = ax^2$



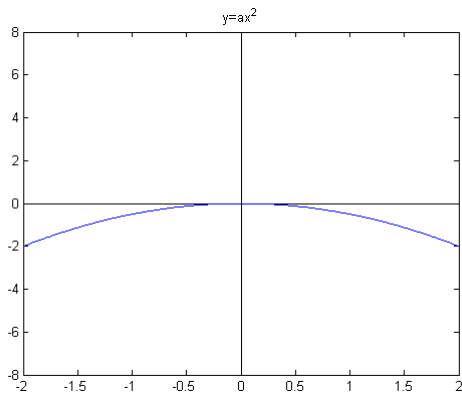
Parábolas $y = ax^2$



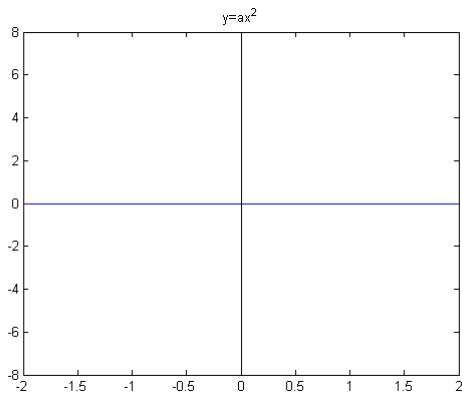
Parábolas $y = ax^2$



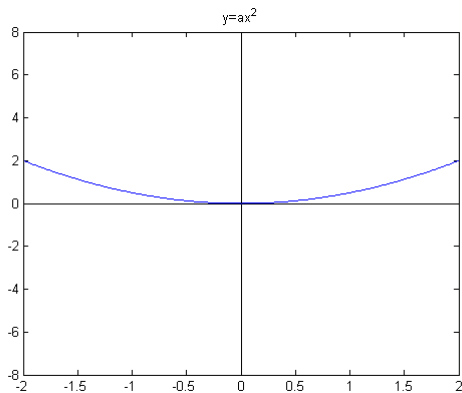
Parábolas $y = ax^2$



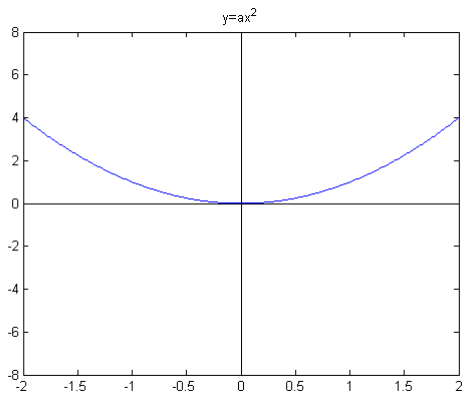
Parábolas $y = ax^2$



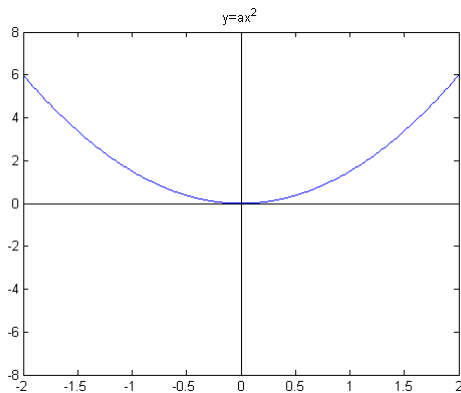
Parábolas $y = ax^2$



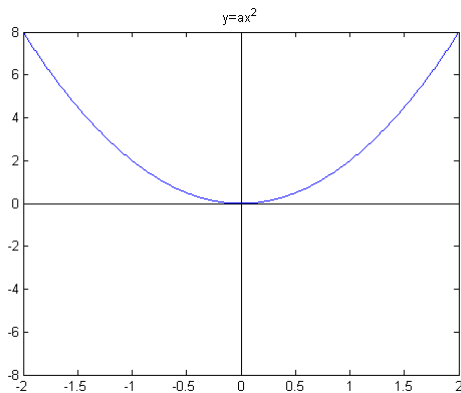
Parábolas $y = ax^2$



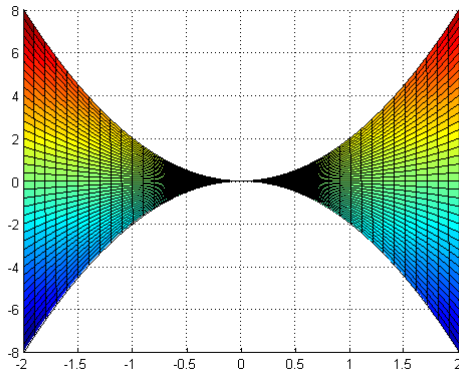
Parábolas $y = ax^2$



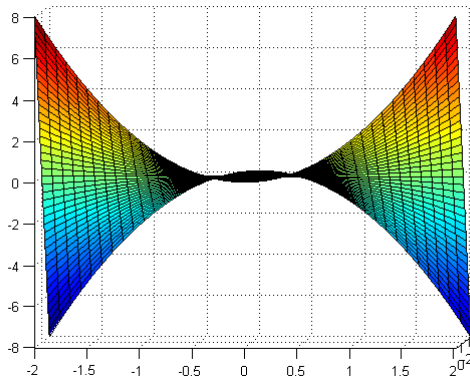
Parábolas $y = ax^2$



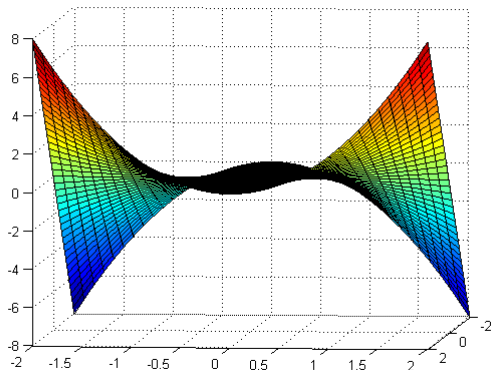
Parábolas $y = f(x, a)$



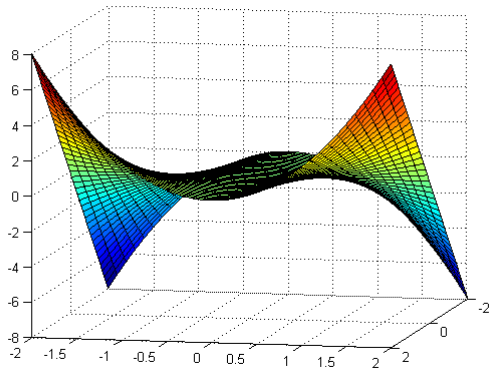
Parábolas $y = f(x, a)$



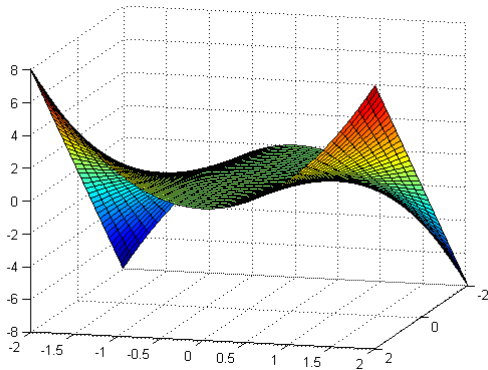
Parábolas $y = f(x, a)$



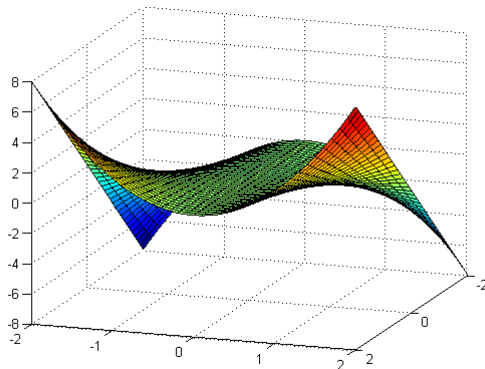
Parábolas $y = f(x, a)$



Parábolas $y = f(x, a)$



Parábolas $y = f(x, a)$

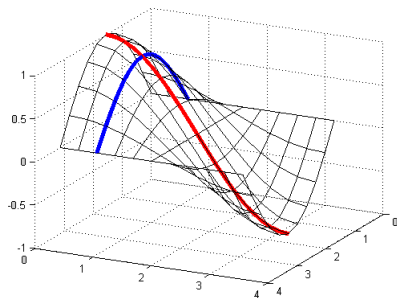
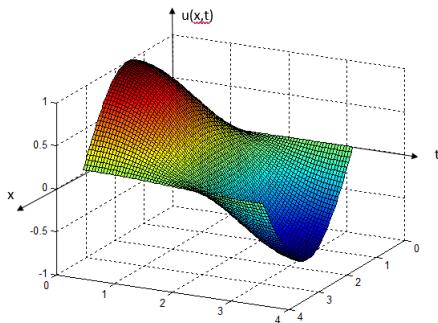


Ejemplo: cuerda vibrante (primer armónico)

$$\lambda_1 = 2L$$



*fundamental
1er. armónico*



- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Definición

Una **función de varias variables** tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Definición

Una **función de varias variables** tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el **rango** de la función.

Definición

Una **función de varias variables** tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el **rango** de la función. Cada x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ es una **variable independiente**, mientras que w es **variable dependiente**.

Algunas definiciones

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

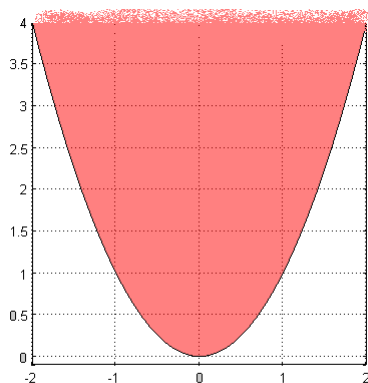
$$I(f) = [0, +\infty)$$

Algunas definiciones

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

$$I(f) = [0, +\infty)$$

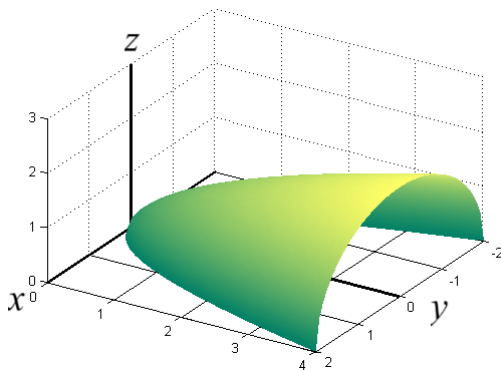


$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

Ejemplo

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

Gráfico de f :



Ejemplo

$$g(x, y, z) = \sqrt{100 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

Ejemplo

$$g(x, y, z) = \sqrt{100 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$D(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$$

Ejemplo

$$g(x, y, z) = \sqrt{100 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$D(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$$

$$I(g) = [0, 10]$$

Conceptos topológicos

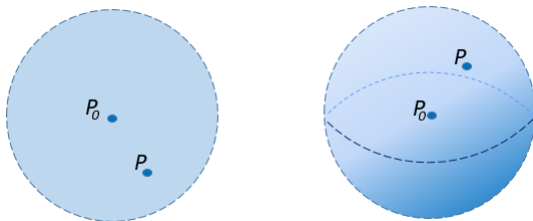
Llamamos **bola abierta** o **disco abierto** de centro $P_0(x_0, y_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.

Llamamos **bola abierta** de centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$.

Conceptos topológicos

Llamamos **bola abierta** o **disco abierto** de centro $P_0(x_0, y_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.

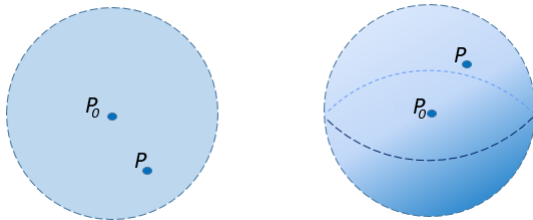
Llamamos **bola abierta** de centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$.



Conceptos topológicos

Llamamos **bola abierta** o **disco abierto** de centro $P_0(x_0, y_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.

Llamamos **bola abierta** de centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$.



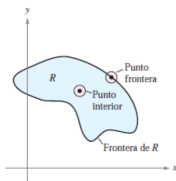
Un **entorno** de P es una bola abierta que contiene a P .

Conceptos topológicos

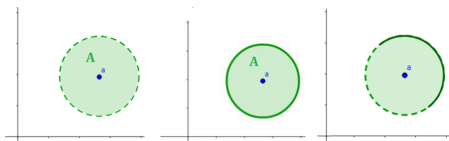
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

P_0 es un **punto interior** de D si **existe** una bola con centro en P_0 incluida en D . D es una región **abierta** si todo punto de D es un punto interior de D .

P_0 es un **punto frontera** de D si **para toda** bola centrada en P_0 hay algunos puntos de la bola que pertenecen a D y otros, que no pertenecen a D . D es una región **cerrada** si todos los puntos frontera de D pertenecen a D .



La frontera y los puntos interiores de una región R

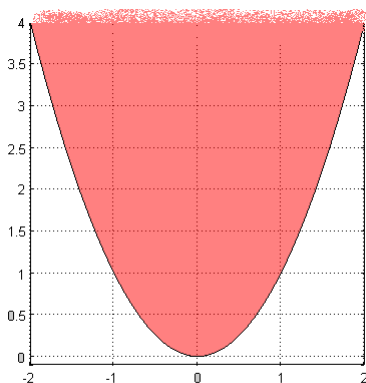


D es una región **acotada** si existe una bola B tal que $D \subset B$.

D es una región **no acotada** si **ninguna bola la incluye**. (No la definición del libro.)

Ejemplos

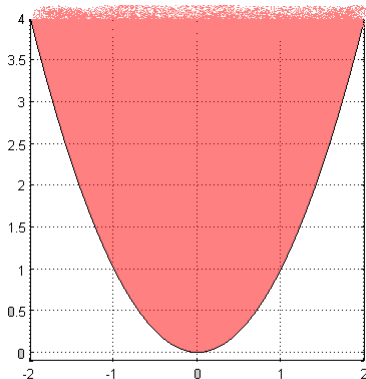
El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.



$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

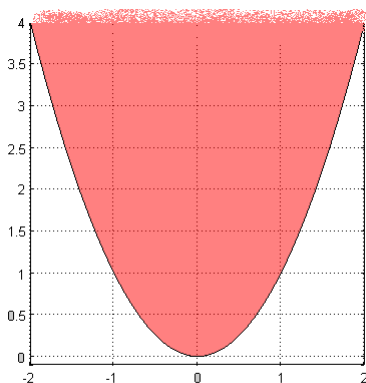


$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

D no es abierto,

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

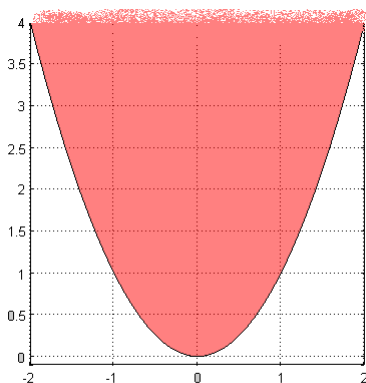


$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

D no es abierto, es cerrado y

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.



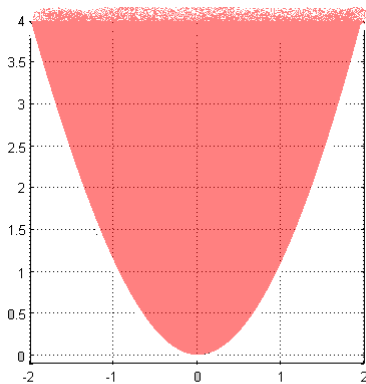
$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

Ejemplos

El dominio de la función dada por $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.



$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$)

Ejemplos

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$)

Ejemplos

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, no es cerrado y es acotado.

Un disco plano sin la circunferencia incluido en el plano xy (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$)

Ejemplos

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, no es cerrado y es acotado.

Un disco plano sin la circunferencia incluido en el plano xy (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) no es abierto, no es cerrado y es acotado.

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Definiciones de gráfica y conjuntos (curvas y superficies) de nivel

Definición

Dada una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subset \mathbb{R}^n$), se llama

- **Gráfico de f al conjunto**

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

Definiciones de gráfica y conjuntos (curvas y superficies) de nivel

Definición

Dada una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subset \mathbb{R}^n$), se llama

- **Gráfico de f al conjunto**

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

- **Conjunto de nivel (k) de f al conjunto**

$\{(x_1, \dots, x_n) \in D : f(x_1, \dots, x_n) = k\}$, para $k \in \text{Im}(f)$. Si $D \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel suelen ser curvas; si $D \subset \mathbb{R}^3$, superficies.

Definiciones de gráfica y conjuntos (curvas y superficies) de nivel

Definición

Dada una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subset \mathbb{R}^n$), se llama

- **Gráfico de f al conjunto**

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

- **Conjunto de nivel (k) de f al conjunto**

$\{(x_1, \dots, x_n) \in D : f(x_1, \dots, x_n) = k\}$, para $k \in \text{Im}(f)$. Si $D \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel suelen ser curvas; si $D \subset \mathbb{R}^3$, superficies.

- Para funciones con dominio incluido en $\mathbb{R}^2$, las trazas del gráfico correspondientes a planos horizontales, se llaman **curvas de contorno** de f .

Representación de funciones de dos variables

$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

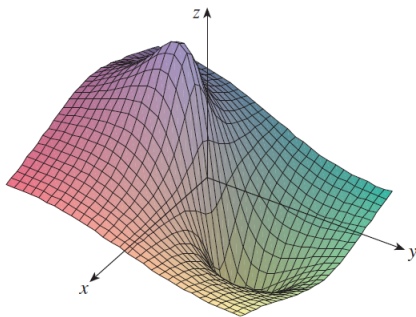
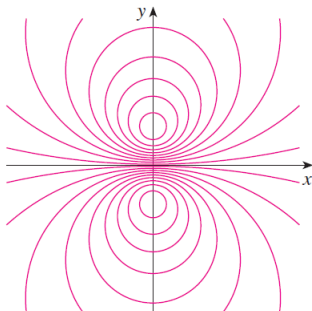


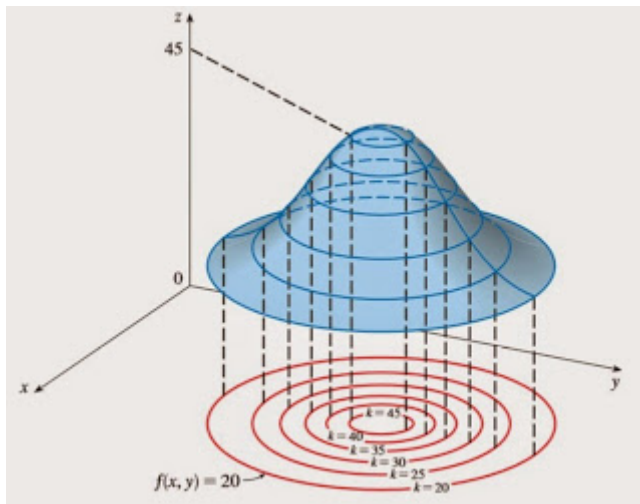
Gráfico de f



Curvas de nivel de f

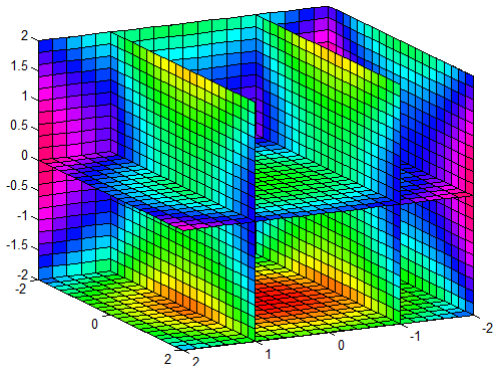
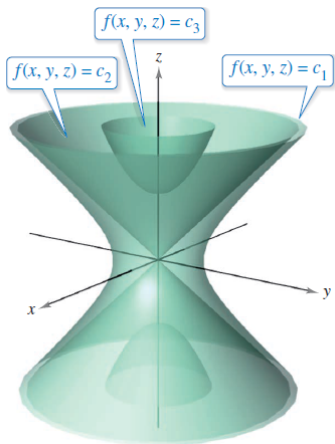
(Ejemplo de Stewart)

Curvas de contorno y curvas de nivel

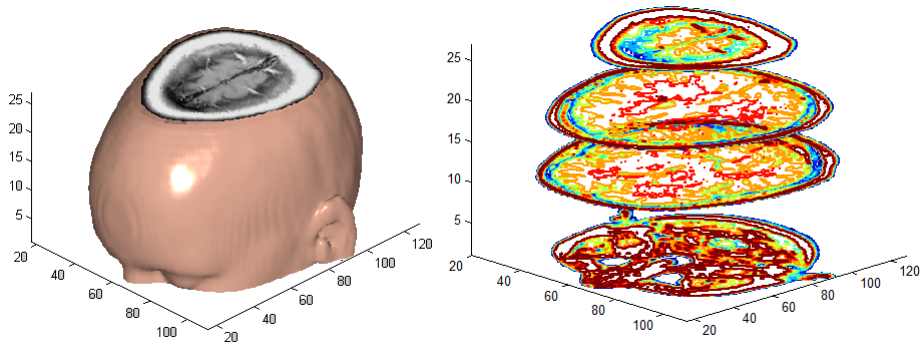


Representación de funciones de tres variables: superficies de nivel

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$



Ejemplo: cerebro



- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Definición

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $P_0(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando P tiende a P_0 , y escribimos

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L,$$

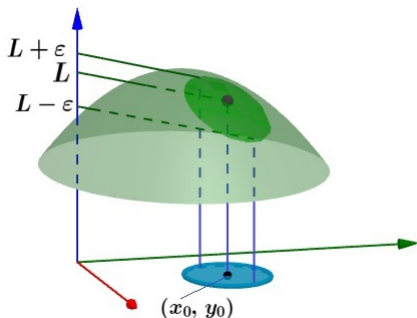
si los valores $f(P)$ se acercan arbitrariamente a L cuando P se acerca suficientemente a P_0 .

Definición de límite en $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$: $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$;

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

si $f(x, y)$ toma valores arbitrariamente cercanos a L cuando consideramos todos los puntos (x, y) en un entorno de (x_0, y_0) de radio positivo, suficientemente pequeño.



Propiedades de límites de funciones de varias variables

Proposición

Si L y M son números reales y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad y \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

entonces:

Propiedades de límites de funciones de varias variables

Proposición

Si L y M son números reales y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

entonces:

1. Suma y resta $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \pm g)(x,y) = L \pm M$

2. Producto $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (fg)(x,y) = LM$

3. Cociente $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g} \right)(x,y) = \frac{L}{M}, \text{ si } M \neq 0$

4. Potencia $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y))^n = L^n, \text{ si } n \in \mathbb{N}$

5. Raíz $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}, \text{ si } n \in \mathbb{N}; \text{ si } n, \text{ par}, L > 0.$

SIN DEMOSTRAR. Válido para n variables.

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} z \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} z \frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} z \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} z \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} z \frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} z \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = 0 \end{aligned}$$

En el trabajo práctico número 2 verán ejemplos de límites iterados.

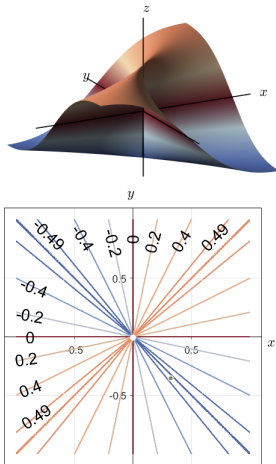
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

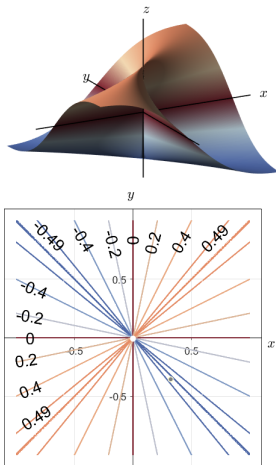


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

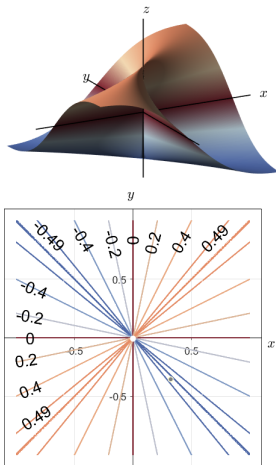


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ no existe}$$

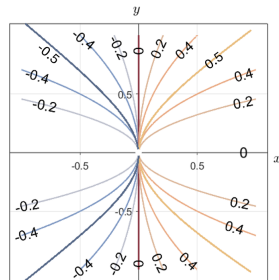
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

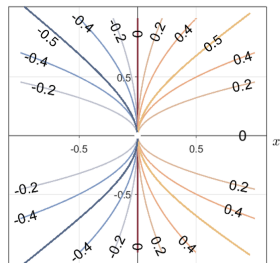
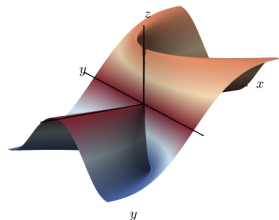
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$



Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

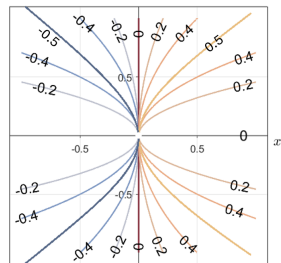
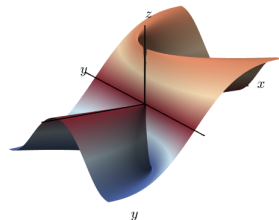


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{mx}{1 + m^4x^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0;$$



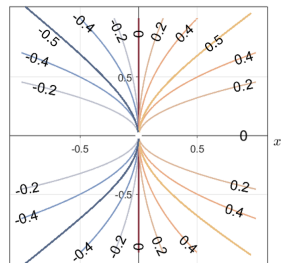
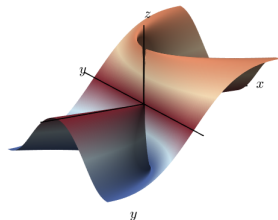
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{mx}{1 + m^4x^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0;$$

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$



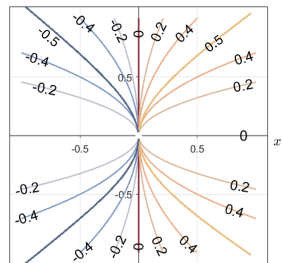
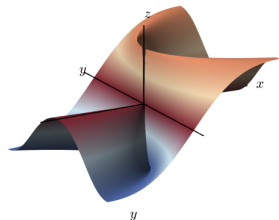
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ no existe}$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \quad f(x, 0) = 0; \quad f(0, y) = 0;$$

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{mx}{1 + m^4 x^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0;$$

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$



Definición

Una función f es **continua** en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0 ;
- existe $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ y
- $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D .

Definición

Una función f es **continua** en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0 ;
- existe $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ y
- $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

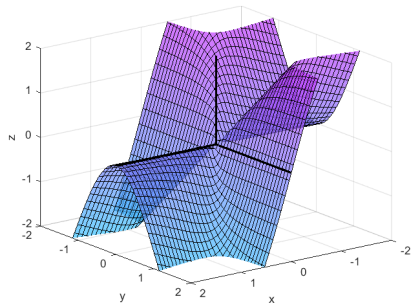
Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D .

Observación

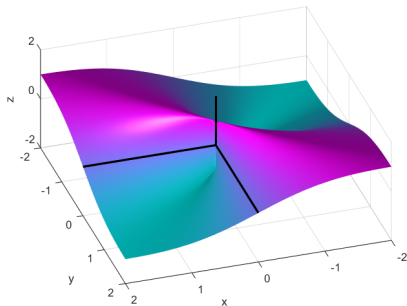
Los polinomios y las funciones racionales son continuos en los puntos de sus respectivos dominios.

Analizar ejemplos.

Continuidad: ejemplos



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-4xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Definición de derivada parcial ($D(f) \subset \mathbb{R}^2$)

Definición

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial ($D(f) \subset \mathbb{R}^2$)

Definición

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

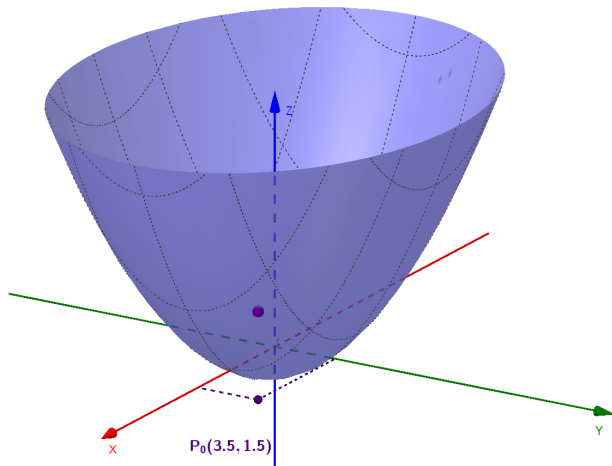
Definición

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es

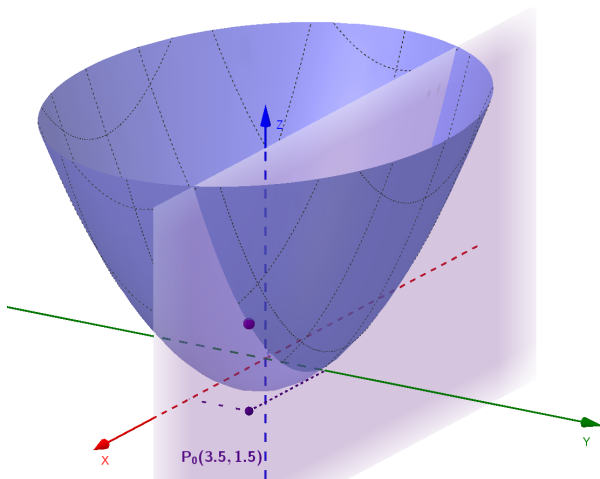
$$f_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

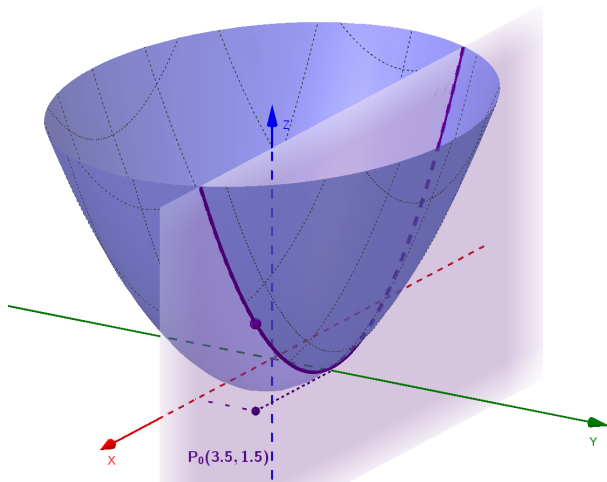
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



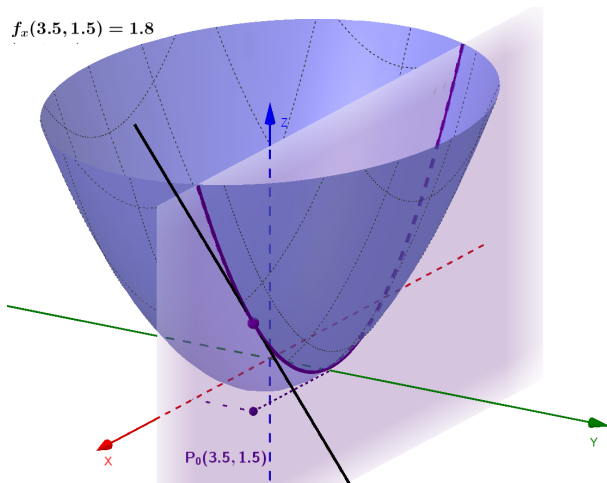
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



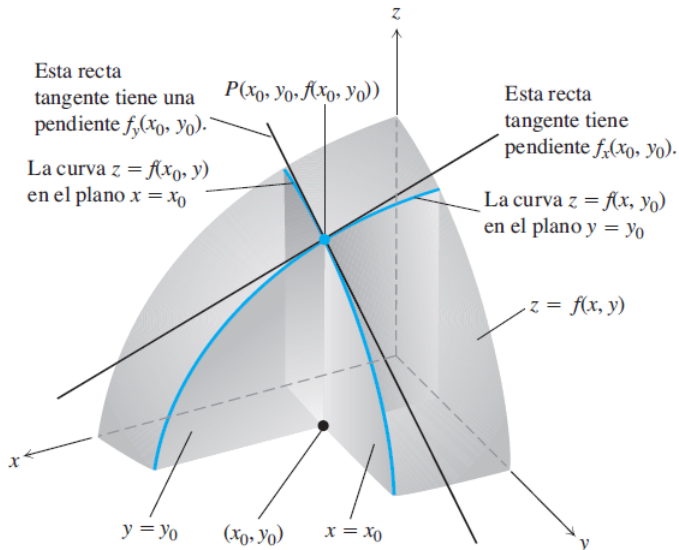
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



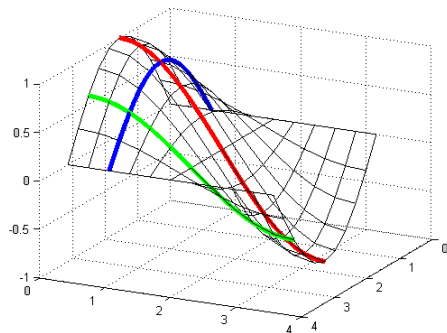
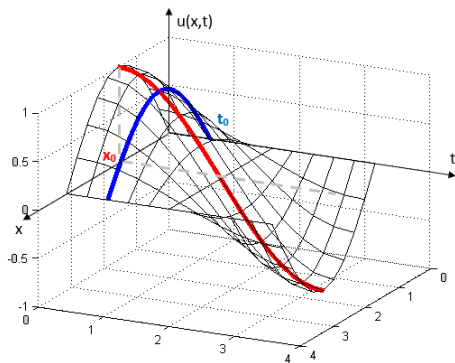
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Interpretación geométrica derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Aplicación al caso de las ondas



¿Cómo se interpretan en este ejemplo las derivadas parciales de la función posición $u(x,t)$ de la partícula en la ubicación seleccionada, x_0 , y en el instante elegido, t_0 , con respecto a x y con respecto a t , respectivamente?

Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

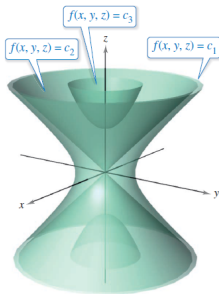
Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.



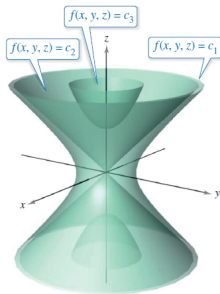
Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.



Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z .

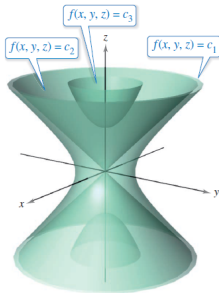
Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.



Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z . En este caso la derivada se interpreta como la razón instantánea de cambio de la función en la dirección que corresponda (x , y o z).

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i , derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i , derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Ejemplo

Dada $f(x, y) = \sin(x)y^2$, halle las derivadas parciales:

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i , derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Ejemplo

Dada $f(x, y) = \sin(x)y^2$, halle las derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = \cos(x)y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \sin(x)2y.$$

Derivadas parciales y continuidad

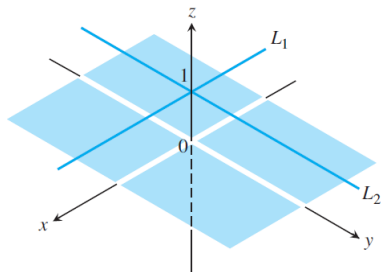
Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

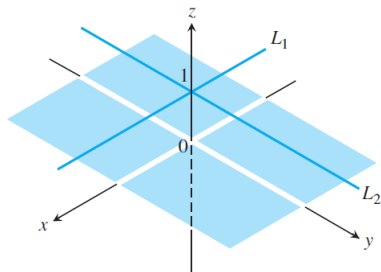


Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

• No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y),$

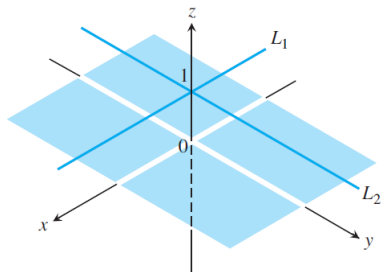


Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

- No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,
- f no es continua en $(0, 0)$,

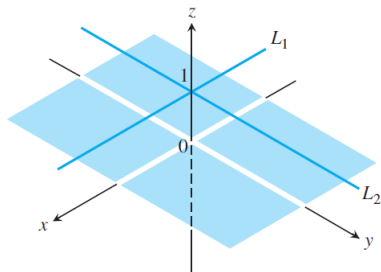


Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

- No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,
- f no es continua en $(0, 0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$:

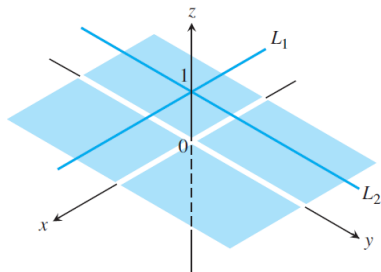


Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

- No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,
- f no es continua en $(0, 0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$:



$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0; \end{aligned}$$

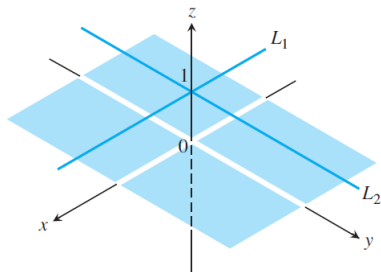
$$f_y(0, 0) = 0.$$

Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

- No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,
- f no es continua en $(0, 0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$:



$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0; \end{aligned}$$

$$f_y(0, 0) = 0.$$

Observación: la existencia de derivadas parciales en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto.

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Las derivadas parciales **de** las derivadas parciales de f , se llaman **derivadas parciales iteradas** y se anotan así (caso de dos variables):

Las derivadas parciales de las derivadas parciales de f , se llaman **derivadas parciales iteradas** y se anotan así (caso de dos variables):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Las derivadas parciales de las derivadas parciales de f , se llaman **derivadas parciales iteradas** y se anotan así (caso de dos variables):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Las derivadas de segundo orden f_{xy} y f_{yx} se llaman **derivadas parciales mixtas o cruzadas**.

Las derivadas parciales de las derivadas parciales de f , se llaman **derivadas parciales iteradas** y se anotan así (caso de dos variables):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Las derivadas de segundo orden f_{xy} y f_{yx} se llaman **derivadas parciales mixtas o cruzadas**.

Similarmente, las derivadas de tercer orden se anotan como

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = f_{xyy}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = f_{xyz}, \text{ etc.}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 = f_y(0, 0)$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 = f_y(0, 0)$$

$$f_x(0, k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - \frac{0}{k^2}}{h}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 = f_y(0, 0)$$

$$\begin{aligned} f_x(0, k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - \frac{0}{k^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 k - k^3}{h^2 + k^2} = -k \end{aligned}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 = f_y(0, 0)$$

$$\begin{aligned} f_x(0, k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - \frac{0}{k^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 k - k^3}{h^2 + k^2} = -k \end{aligned}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

$$\begin{aligned} f_y(h, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - \frac{0}{h^2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^3 - hk^2}{h^2 + k^2} = h \end{aligned}$$

Teorema de Clairaut o de la derivada mixta

Teorema

Si f y sus derivadas parciales f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a, b) y todas son continuas en (a, b) , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

SIN DEMOSTRACIÓN.

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad**
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Definición (Diferenciabilidad de una función de dos variables)

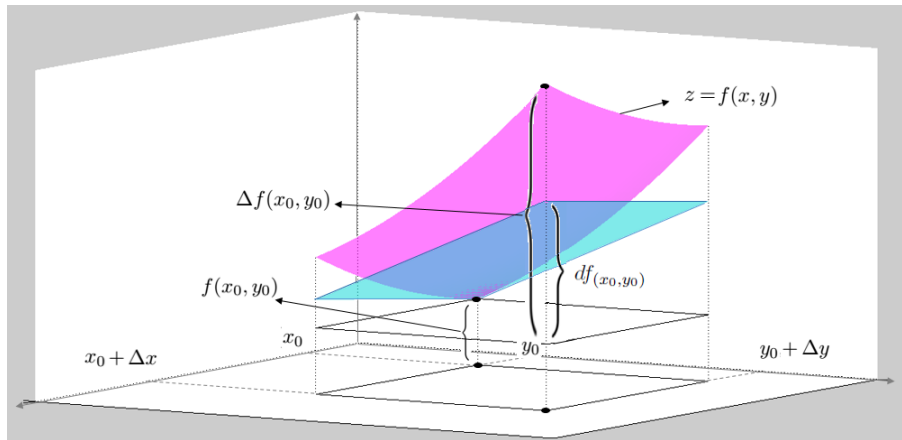
Una función f es **diferenciable** en un punto $P_0(x_0, y_0)$ **interior** a su dominio si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple que el incremento $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ verifica:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ y } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Función diferenciable en (x_0, y_0) .



$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio.

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \\ f(x_0, y_0) &= x_0 y_0\end{aligned}$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \\ f(x_0, y_0) &= x_0 y_0 \\ \Delta f(x_0, y_0) &= \end{aligned}$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \\ f(x_0, y_0) &= x_0 y_0 \\ \Delta f(x_0, y_0) &= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\text{¿}\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y?}\end{aligned}$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \\ f(x_0, y_0) &= x_0 y_0 \\ \Delta f(x_0, y_0) &= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\text{¿}\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y?} \\ &= y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \frac{1}{2} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0, y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= x_0 y_0 \\ \Delta f(x_0, y_0) &= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\text{¿} \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \text{?}}\end{aligned}$$

$$= y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \frac{1}{2} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \Delta x \Delta y$$

$$= y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta y \Delta x}_{\varepsilon_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x \Delta y}_{\varepsilon_2}$$

Ejemplo

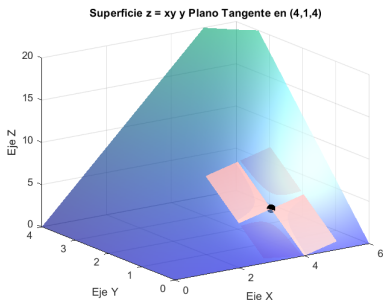
La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

$$\Delta f(x_0, y_0) = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta y}_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)}} \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x}_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)}} \Delta y$$

Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0, y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

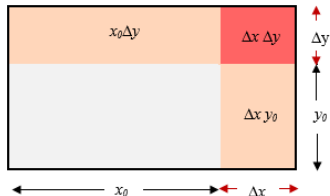
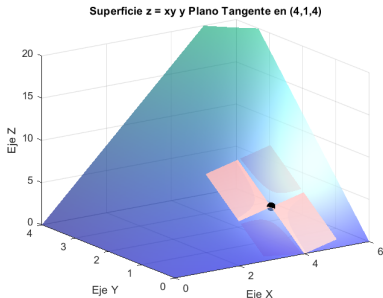
$$\Delta f(x_0, y_0) = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta y}_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)}} \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x}_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)}} \Delta y$$



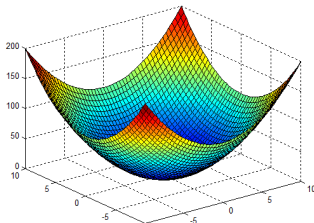
Ejemplo

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y , para $x \geq 0, y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tal que $x_0 + \Delta x \geq 0$ y $y_0 + \Delta y \geq 0$.

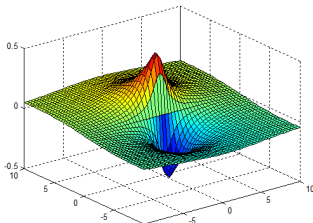
$$\Delta f(x_0, y_0) = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta y}_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)}} \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x}_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)}} \Delta y$$



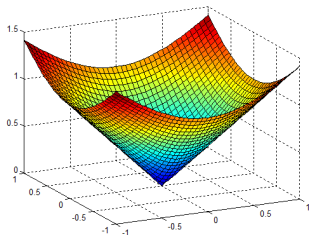
Ejemplos varios: analizar cada uno gráficamente



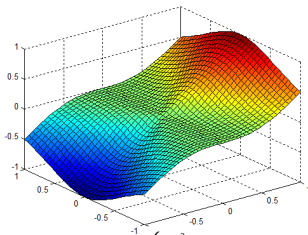
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$$



$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Teorema

Si una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, entonces es continua en P_0 .

DEMOSTRAR el caso $n = 2$.

Teorema

Si una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, entonces es continua en P_0 .

DEMOSTRAR el caso $n = 2$.

Sea f diferenciable en $P_0(x_0, y_0) \in \text{int } D(f)$. Para probar que

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

llamemos $P(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Diferenciabilidad implica continuidad

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)]$$

Diferenciabilidad implica continuidad

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)]\end{aligned}$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Por ser f diferenciable en P_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)]\end{aligned}$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Por ser f diferenciable en P_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \\&\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + f(x_0, y_0)],\end{aligned}$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Por ser f diferenciable en P_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \\&\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + f(x_0, y_0)],\end{aligned}$$

donde $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$

Diferenciabilidad implica continuidad

Por ser f diferenciable en P_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \\&\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + f(x_0, y_0)],\end{aligned}$$

donde $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Evaluando cada uno de los límites de los términos, obtenemos:

Diferenciabilidad implica continuidad

Por ser f diferenciable en P_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \\&\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + f(x_0, y_0)],\end{aligned}$$

donde $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Evaluando cada uno de los límites de los términos, obtenemos:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f_x(P_0) \cdot 0 + f_y(P_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + f(P_0) = f(P_0).$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Por ser f diferenciable en P_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)] \\&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \\&\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + f(x_0, y_0)],\end{aligned}$$

donde $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Evaluando cada uno de los límites de los términos, obtenemos:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f_x(P_0) \cdot 0 + f_y(P_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + f(P_0) = f(P_0).$$

Luego f es continua en $P_0(x_0, y_0)$.

Teorema del incremento: DEMOSTRAR

Teorema (Teorema del incremento)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) . Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

Teorema del incremento: DEMOSTRAR

Teorema (Teorema del incremento)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) . Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

Teorema (El mismo Teorema del incremento)

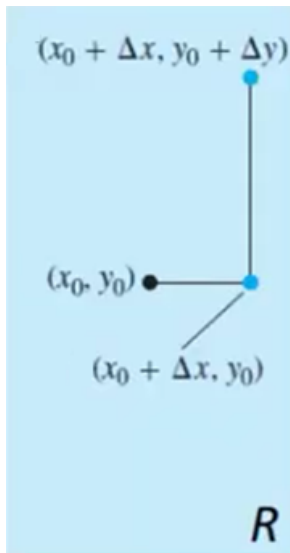
Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) . Entonces el incremento en el valor de f , $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, en R , satisface una ecuación de la forma

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

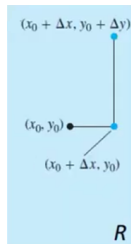
en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ y } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

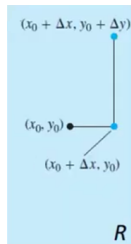
Teorema del incremento: DEMOSTRAR



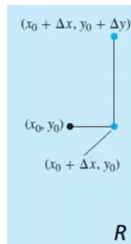
$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

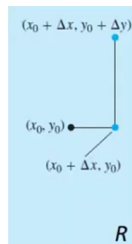


$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0, y_0) &= \\
 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}_{\substack{\downarrow \\ \text{TVM}}} + \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}_{\substack{\downarrow \\ \text{TVM}}}
 \end{aligned}$$

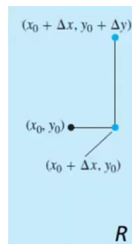


$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0, y_0) &= \\
 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} + \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} \\
 &= f_y(x_0 + \Delta x, y_0) \Delta y + f_x(x_0, y_0) \Delta x
 \end{aligned}$$

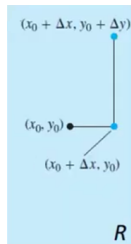




$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0, y_0) &= \\
 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} + \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} \\
 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y + f_x(c, y_0) \Delta x \\
 &= f_x(c, y_0) \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0, y_0) &= \\
 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} + \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} \\
 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y + f_x(c, y_0) \Delta x \\
 &= f_x(c, y_0) \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y \\
 &= (f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1) \Delta x + (f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2) \Delta y
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0, y_0) &= \\
 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} + \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}_{\substack{\downarrow \text{TVM}}} \\
 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y + f_x(c, y_0) \Delta x \\
 &= f_x(c, y_0) \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y \\
 &= (f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1) \Delta x + (f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2) \Delta y
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0)$$

$$\zeta \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} 0?$$

Ejemplos

Dada $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, sus derivadas parciales son

Ejemplos

Dada $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, sus derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ y } f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ejemplos

Dada $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, sus derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ y } f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

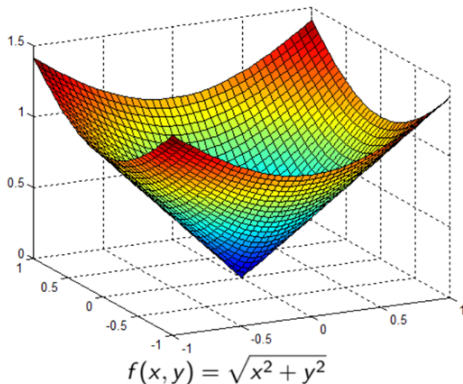
Existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ejemplos

Dada $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, sus derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ y } f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Luego, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; pero f no es diferenciable en $(0, 0)$.



Ejemplos

La función dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x + y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$$

Ejemplos

La función dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x + y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$ aunque

Ejemplos

La función dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x + y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$ aunque g_x y g_y no son continuas en $(0, 0)$.

Ejemplos

La función dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x + y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$ aunque g_x y g_y no son continuas en $(0, 0)$.

Ejemplifica que la recíproca de la implicación del Teorema del incremento puede ser falsa: no es **necesario** que las derivadas parciales de una función sean continuas en un punto para que la función sea diferenciable en dicho punto.

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Regla de la cadena: Interpretación

Un dron vuela en un plano en el que la temperatura depende de la posición. El dron se mueve de acuerdo a una función $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que describe la posición en función del tiempo.



Regla de la cadena: Interpretación

Un dron vuela en un plano en el que la temperatura depende de la posición. El dron se mueve de acuerdo a una función $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que describe la posición en función del tiempo. La temperatura en cada punto de ese plano viene dada por $f(x, y)$.



Regla de la cadena: Interpretación

Un dron vuela en un plano en el que la temperatura depende de la posición. El dron se mueve de acuerdo a una función $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que describe la posición en función del tiempo. La temperatura en cada punto de ese plano viene dada por $f(x, y)$.



La función $w = f \circ \mathbf{r}$ representa la temperatura en función del tiempo.

Regla de la cadena: Interpretación

Un dron vuela en un plano en el que la temperatura depende de la posición. El dron se mueve de acuerdo a una función $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que describe la posición en función del tiempo. La temperatura en cada punto de ese plano viene dada por $f(x, y)$.



La función $w = f \circ \mathbf{r}$ representa la temperatura en función del tiempo.

¿Qué representa la derivada de la función compuesta?

Regla de la cadena: Interpretación

Un dron vuela en un plano en el que la temperatura depende de la posición. El dron se mueve de acuerdo a una función $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que describe la posición en función del tiempo. La temperatura en cada punto de ese plano viene dada por $f(x, y)$.

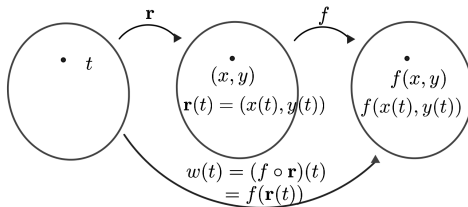


La función $w = f \circ \mathbf{r}$ representa la temperatura en función del tiempo.

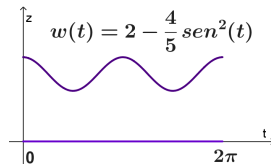
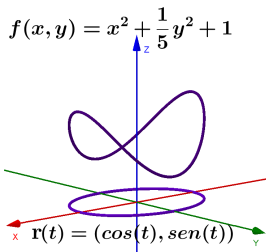
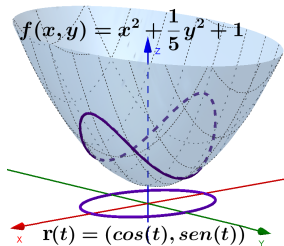
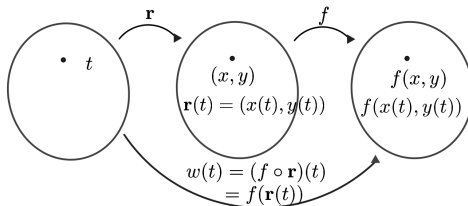
¿Qué representa la derivada de la función compuesta?

¿Cómo se calcula esta derivada?

Regla de la cadena: Interpretación



Regla de la cadena: Interpretación



Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Sea f una función definida y diferenciable en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función definida en (a, b) tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en todo $t \in (a, b)$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable en (a, b) y:

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in (a, b).$$

Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Sea f una función definida y diferenciable en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función definida en (a, b) tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en todo $t \in (a, b)$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable en (a, b) y:

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in (a, b).$$

DEMOSTRAR

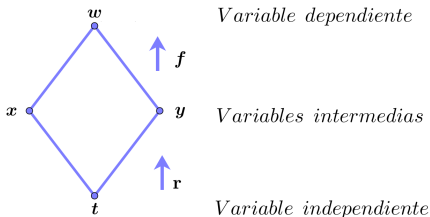
Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Sea f una función definida y diferenciable en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función definida en (a, b) tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en todo $t \in (a, b)$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable en (a, b) y:

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in (a, b).$$

DEMOSTRAR



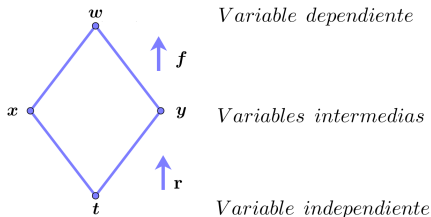
Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Sea f una función definida y diferenciable en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función definida en (a, b) tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en todo $t \in (a, b)$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable en (a, b) y:

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in (a, b).$$

DEMOSTRAR



Notación usual:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Regla de la cadena: demostración

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)) - f(\mathbf{r}(t_0))}{\Delta t}$$

Regla de la cadena: demostración

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)) - f(\mathbf{r}(t_0))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t}\end{aligned}$$

Regla de la cadena: demostración

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)) - f(\mathbf{r}(t_0))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0); \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0).$$

Regla de la cadena: demostración

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)) - f(\mathbf{r}(t_0))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0); \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0).$$

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t_0) + \Delta x, y(t_0) + \Delta y) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t}$$

Regla de la cadena: demostración

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)) - f(\mathbf{r}(t_0))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0); \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0).$$

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t_0) + \Delta x, y(t_0) + \Delta y) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t}$$

Por ser f diferenciable en $(x(t_0), y(t_0))$,

$$(f \circ \mathbf{r})'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t}$$

$$\text{donde } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0 \text{ y } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0.$$

$$(f \circ \mathbf{r})'(t_0) =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Como $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ y $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ **por ser $x(t)$ y $y(t)$ derivables** en t_0 ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Como $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ y $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ **por ser $x(t)$ y $y(t)$ derivables** en t_0 ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0).$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Como $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ y $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ **por ser $x(t)$ y $y(t)$ derivables** en t_0 ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0).$$

La **continuidad de x y de y** en t_0 implica que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Como $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ y $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ **por ser $x(t)$ y $y(t)$ derivables** en t_0 ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0).$$

La **continuidad de x y de y** en t_0 implica que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) = 0 \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Como $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ y $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ **por ser $x(t)$ y $y(t)$ derivables** en t_0 ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0).$$

La **continuidad de x y de y** en t_0 implica que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) = 0 \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

En consecuencia, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ y

$$\begin{aligned}
 (f \circ \mathbf{r})'(t_0) &= \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t_0), y(t_0))\Delta x + f_y(x(t_0), y(t_0))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t_0), y(t_0))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Como $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ y $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ **por ser $x(t)$ y $y(t)$ derivables** en t_0 ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0).$$

La **continuidad de x y de y** en t_0 implica que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) = 0 \text{ y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

En consecuencia, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ y

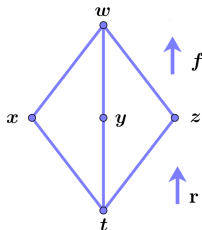
$$(f \circ \mathbf{r})'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) + 0 \cdot x'(t_0) + 0 \cdot y'(t_0).$$

Regla de la cadena: otros casos

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, una función de t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que $\mathbf{r}$ es derivable en $[a, b]$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable en $[a, b]$ y

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t).$$



SIN DEMOSTRAR

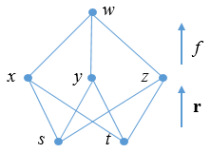
Regla de la cadena: otros casos

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ una función de s y t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(s, t)$, $y(s, t)$ y $z(s, t)$ son diferenciables en (s, t) . Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es una función derivable con respecto a t y con respecto a s en (s, t) y

$$(f \circ \mathbf{r})_s(s, t) = f_x(x(s, t), y(s, t), z(s, t))x_s(s, t) + f_y(x(s, t), y(s, t), z(s, t))y_s(s, t) + f_z(x(s, t), y(s, t), z(s, t))z_s(s, t);$$

$$(f \circ \mathbf{r})_t(s, t) = f_x(x(s, t), y(s, t), z(s, t))x_t(s, t) + f_y(x(s, t), y(s, t), z(s, t))y_t(s, t) + f_z(x(s, t), y(s, t), z(s, t))z_t(s, t).$$



SIN DEMOSTRAR

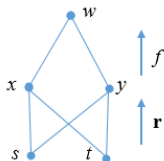
Regla de la cadena: otros casos

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ una función de s y t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(s, t)$ y $y(s, t)$ son diferenciables en (s, t) . Entonces $f \circ \mathbf{r}$, es una función derivable con respecto a s y con respecto a t en (s, t) y

$$\frac{\partial(f \circ \mathbf{r})}{\partial s}(s, t) = f_x(x(s, t), y(s, t))x_s(s, t) + f_y(x(s, t), y(s, t))y_s(s, t);$$

$$\frac{\partial(f \circ \mathbf{r})}{\partial t}(s, t) = f_x(x(s, t), y(s, t))x_t(s, t) + f_y(x(s, t), y(s, t))y_t(s, t);$$



SIN DEMOSTRAR

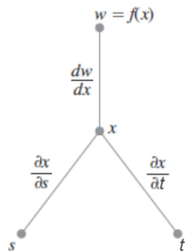
Regla de la cadena: otros casos

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{r}(s, t) = x(s, t)$ una función diferenciable en (s, t) , tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D . Entonces $f \circ \mathbf{r}$, es una función derivable con respecto a s y con respecto a t en (s, t) y

$$\frac{\partial(f \circ \mathbf{r})}{\partial s}(s, t) = f'(x(s, t))x_s(s, t); \quad \frac{\partial(f \circ \mathbf{r})}{\partial t}(s, t) = f'(x(s, t))x_t(s, t).$$

SIN DEMOSTRAR



Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(30, 45, 90) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90}}\right)^2}{45^2}.$$

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$t = \mathbf{r}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \quad w = f(t) = \frac{1}{t}.$$

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(30, 45, 90) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90}}\right)^2}{45^2}.$$

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$t = \mathbf{r}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \quad w = f(t) = \frac{1}{t}.$$

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{dt}(\mathbf{r}(x, y, z)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(30, 45, 90) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90}}\right)^2}{45^2}.$$

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$t = \mathbf{r}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \quad w = f(t) = \frac{1}{t}.$$

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{df}{dt}(\mathbf{r}(x, y, z)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x, y, z) \\ &= \left(-\frac{1}{t^2}(\mathbf{r}(x, y, z)) \right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(30, 45, 90) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90}} \right)^2}{45^2}.$$

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w , si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x , y y z , es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w / \partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$t = \mathbf{r}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \quad w = f(t) = \frac{1}{t}.$$

$$-\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(30, 45, 90) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90}}\right)^2}{45^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{df}{dt}(\mathbf{r}(x, y, z)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x, y, z) \\ &= \left(-\frac{1}{t^2}(\mathbf{r}(x, y, z))\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y implícitamente como función de x por

$$\operatorname{sen}(y) - x^2 - y = 0$$

podemos derivar ambos miembros y obtener

$$\cos(y)y' - 2x - y' = 0$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y implícitamente como función de x por

$$\sin(y) - x^2 - y = 0$$

podemos derivar ambos miembros y obtener

$$\cos(y)y' - 2x - y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{\cos(y) - 1}.$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y implícitamente como función de x por

$$\sin(y) - x^2 - y = 0$$

podemos derivar ambos miembros y obtener

$$\cos(y)y' - 2x - y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{\cos(y) - 1}.$$

Si la función $y(x)$ se puede expresar implícitamente como $F(x, y) = 0$, podemos derivar parcialmente con respecto a x para obtener

$$0 = F_x(x, y) + F_y(x, y)y'(x)$$

de donde si $F_y \neq 0$,

$$y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Teorema

Supongamos que F es una función de x y de y , que las derivadas parciales F_x y F_y son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) , que $F(x_0, y_0) = c$, para alguna constante c , y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces la ecuación $F(x, y) = c$ define a y implícitamente como una función derivable de x en un entorno de x_0 y la derivada de esta función y está dada por

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Teorema

Supongamos que F es una función de x y de y , que las derivadas parciales F_x y F_y son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) , que $F(x_0, y_0) = c$, para alguna constante c , y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces la ecuación $F(x, y) = c$ define a y implícitamente como una función derivable de x en un entorno de x_0 y la derivada de esta función y está dada por

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Teorema

Supongamos que F es una función de x y de y , que las derivadas parciales F_x y F_y son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) , que $F(x_0, y_0) = c$, para alguna constante c , y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces la ecuación $F(x, y) = c$ define a y implícitamente como una función derivable de x en un entorno de x_0 y la derivada de esta función y está dada por

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Si $F(x, y) = c$ define a y implícitamente como función de x , derivando ambos miembros con respecto a x y aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad \text{Así,}$$

Teorema

Supongamos que F es una función de x y de y , que las derivadas parciales F_x y F_y son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) , que $F(x_0, y_0) = c$, para alguna constante c , y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces la ecuación $F(x, y) = c$ define a y implícitamente como una función derivable de x en un entorno de x_0 y la derivada de esta función y está dada por

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Si $F(x, y) = c$ define a y implícitamente como función de x , derivando ambos miembros con respecto a x y aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad \text{Así,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Derivación implícita

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x , F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c , y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Derivación implícita

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x , F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c , y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis. Si $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como función de x y de y , derivando implícitamente,

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x , F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c , y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Si $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como función de x y de y , derivando implícitamente, $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Derivación implícita

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x , F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c , y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Si $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como función de x y de y , derivando implícitamente, $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Así, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$.

Derivación implícita

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x , F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c , y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

DEMOSTRACION: sólo probamos la fórmula asumiendo las hipótesis.

Si $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como función de x y de y , derivando implícitamente, $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Así, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$.

Similarmente, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$.

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Recorrido

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

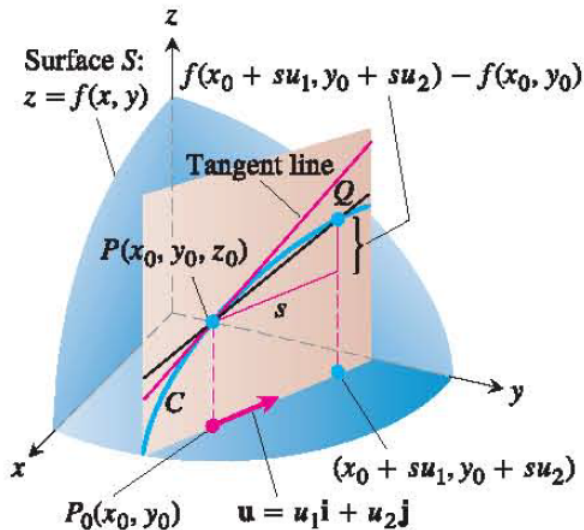
Definición

La **derivada direccional** de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, en un punto $P(x_1, x_2) \in \text{int } D$, viene dada por

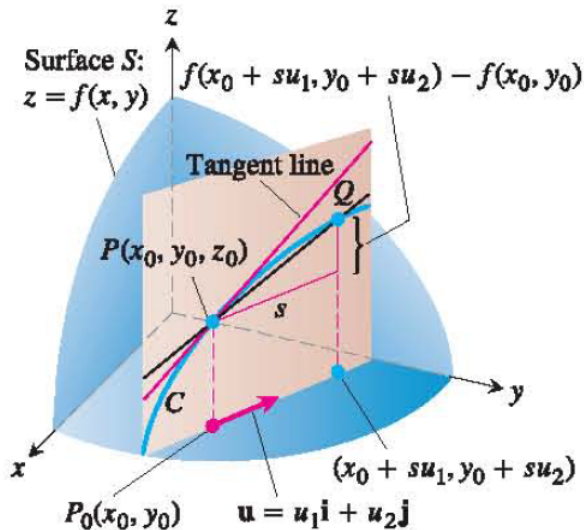
$$D_{\mathbf{u}}f(P) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2) - f(x_1, x_2)}{h},$$

si el límite existe.

Derivada direccional



Derivada direccional



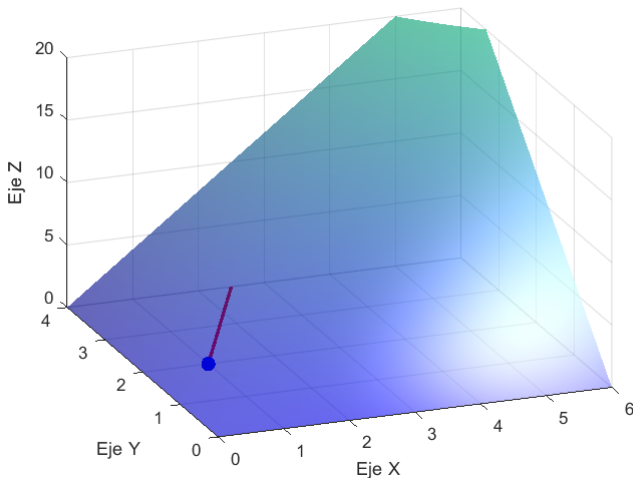
Interpretación
como
pendiente y
como razón de
cambio.

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?



Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\mathbf{u}) - f(P)}{h}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\mathbf{u})-f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,2)+h(3/5,4/5))-f(1,2)}{h} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\mathbf{u})-f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,2)+h(3/5,4/5))-f(1,2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{3}{5}h)(2+\frac{4}{5}h)-2}{h} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\mathbf{u}) - f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,2)+h(3/5, 4/5)) - f(1,2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{3}{5}h)(2+\frac{4}{5}h) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{6}{5}h + \frac{4}{5}h + \frac{12}{25}h^2 - 2}{h} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\mathbf{u})-f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,2)+h(3/5,4/5))-f(1,2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{3}{5}h)(2+\frac{4}{5}h)-2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+\frac{6}{5}h+\frac{4}{5}h+\frac{12}{25}h^2-2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\frac{10}{5}+\frac{12}{25}h)}{h} \end{aligned}$$

Ejemplo

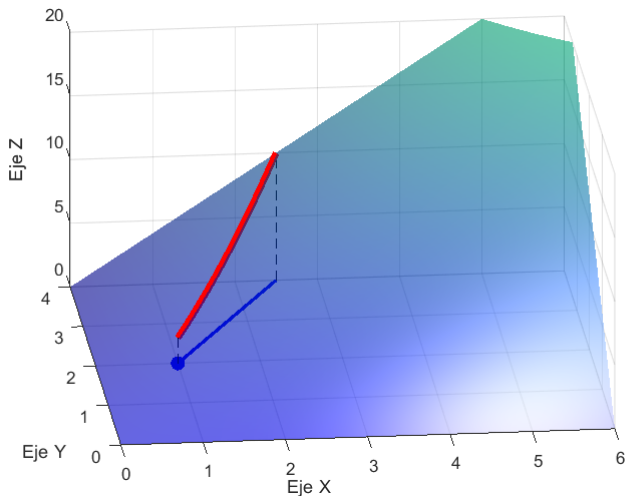
Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\mathbf{u})-f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,2)+h(3/5,4/5))-f(1,2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{3}{5}h)(2+\frac{4}{5}h)-2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+\frac{6}{5}h+\frac{4}{5}h+\frac{12}{25}h^2-2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\frac{10}{5}+\frac{12}{25}h)}{h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = xy$, ¿cuánto vale la tasa instantánea de cambio de f en el punto $P(1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, 4)$?



Definición

La **derivada direccional** de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, en un punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \text{int } D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(P) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2, x_3 + hu_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h},$$

si el límite existe.

Interpretación como razón de cambio.

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 **Derivada direccional y vector gradiente**
 - Derivada direccional
 - **Vector gradiente**
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Definición

El **gradiente** de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0 , si existen. Se denota por ∇f .

Vector gradiente

Definición

El **gradiente** de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0 , si existen. Se denota por ∇f .

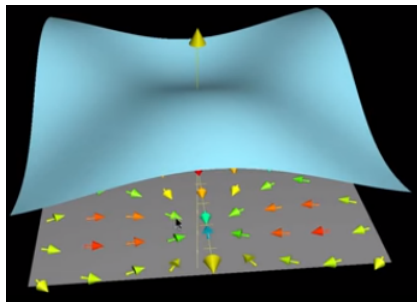
Observación: el símbolo ∇ representa a un operador matemático que se llama *nabla*.

Vector gradiente

Definición

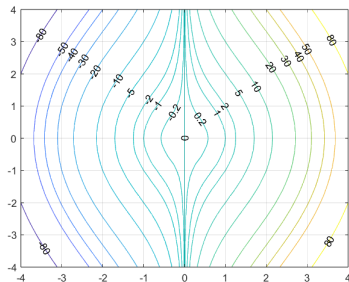
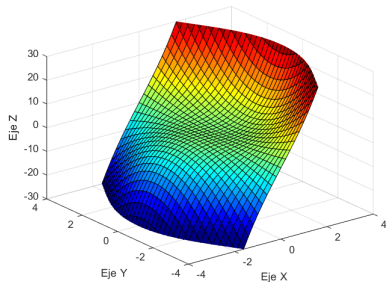
El **gradiente** de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0 , si existen. Se denota por ∇f .

Observación: el símbolo ∇ representa a un operador matemático que se llama *nabla*.



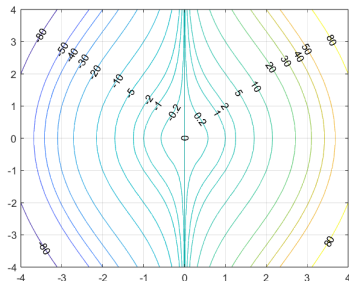
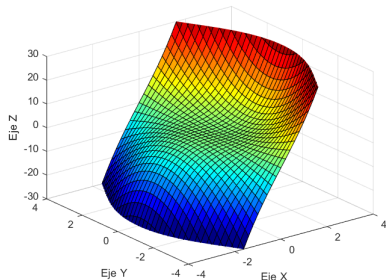
Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^3 + xy^2$ y sus representaciones:



Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^3 + xy^2$ y sus representaciones:

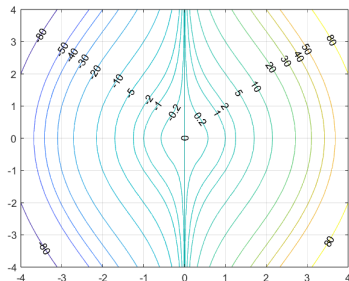
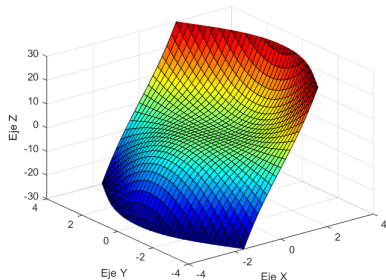


El gradiente de f es:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y^2, 2xy).$$

Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^3 + xy^2$ y sus representaciones:



El gradiente de f es:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y^2, 2xy).$$

Por ejemplo,

$$\nabla f(1, -1) = (4, -2).$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h}$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} \quad \mathbf{r}(t) = P + t\mathbf{u}; t \in \mathbb{R}; \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u}$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} & \mathbf{r}(t) &= P + t\mathbf{u}; t \in \mathbb{R}; \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(h)) - f(\mathbf{r}(0))}{h} \end{aligned}$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} & \mathbf{r}(t) &= P + t\mathbf{u}; t \in \mathbb{R}; \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(h)) - f(\mathbf{r}(0))}{h} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r}) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} & \mathbf{r}(t) &= P + t\mathbf{u}; t \in \mathbb{R}; \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(h)) - f(\mathbf{r}(0))}{h} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r}) \right|_{t=0} \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) \end{aligned}$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Si f es un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en $P \in D$, entonces la derivada direccional de f en P existe en todas las direcciones. Y si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} & \mathbf{r}(t) &= P + t\mathbf{u}; t \in \mathbb{R}; \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(h)) - f(\mathbf{r}(0))}{h} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r}) \right|_{t=0} \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) \\ &= \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Ejemplo: halle las derivadas direccionales de $g(x, y) = xy^2$ en el punto $(2, -1)$,

- 1 en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario genérico.
- 2 En la dirección que da la máxima derivada direccional. Indique cuál es esta dirección y cuánto vale esta derivada direccional máxima.

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Ejemplo: halle las derivadas direccionales de $g(x, y) = xy^2$ en el punto $(2, -1)$,

- 1 en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario genérico.
- 2 En la dirección que da la máxima derivada direccional. Indique cuál es esta dirección y cuánto vale esta derivada direccional máxima.
- 1 Recordar que por ser g un polinomio es diferenciable en (x, y) y, en este caso, la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot \mathbf{u},$$

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Ejemplo: halle las derivadas direccionales de $g(x, y) = xy^2$ en el punto $(2, -1)$,

- 1 en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario genérico.
- 2 En la dirección que da la máxima derivada direccional. Indique cuál es esta dirección y cuánto vale esta derivada direccional máxima.
- 1 Recordar que por ser g un polinomio es diferenciable en (x, y) y, en este caso, la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot \mathbf{u},$$

calculamos $\nabla g(x, y) = (y^2, 2xy)$, $\nabla g(2, -1) = (1, -4)$, y

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Ejemplo: halle las derivadas direccionales de $g(x, y) = xy^2$ en el punto $(2, -1)$,

- 1 en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario genérico.
- 2 En la dirección que da la máxima derivada direccional. Indique cuál es esta dirección y cuánto vale esta derivada direccional máxima.
- 1 Recordar que por ser g un polinomio es diferenciable en (x, y) y, en este caso, la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot \mathbf{u},$$

calculamos $\nabla g(x, y) = (y^2, 2xy)$, $\nabla g(2, -1) = (1, -4)$, y
 $D_{\mathbf{u}}g(2, -1) = \nabla g(2, -1) \cdot (u_1, u_2) = (1, -4) \cdot (u_1, u_2) = 1 \cdot u_1 - 4u_2$.

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Ejemplo: halle las derivadas direccionales de $g(x, y) = xy^2$ en el punto $(2, -1)$,

- 1 en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario genérico.
- 2 En la dirección que da la máxima derivada direccional. Indique cuál es esta dirección y cuánto vale esta derivada direccional máxima.
- 1 Recordar que por ser g un polinomio es diferenciable en (x, y) y, en este caso, la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot \mathbf{u},$$

calculamos $\nabla g(x, y) = (y^2, 2xy)$, $\nabla g(2, -1) = (1, -4)$, y
 $D_{\mathbf{u}}g(2, -1) = \nabla g(2, -1) \cdot (u_1, u_2) = (1, -4) \cdot (u_1, u_2) = 1 \cdot u_1 - 4u_2$.

- 2 La máxima derivada direccional es

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Ejemplo: halle las derivadas direccionales de $g(x, y) = xy^2$ en el punto $(2, -1)$,

- 1 en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario genérico.
- 2 En la dirección que da la máxima derivada direccional. Indique cuál es esta dirección y cuánto vale esta derivada direccional máxima.
- 1 Recordar que por ser g un polinomio es diferenciable en (x, y) y, en este caso, la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot \mathbf{u},$$

calculamos $\nabla g(x, y) = (y^2, 2xy)$, $\nabla g(2, -1) = (1, -4)$, y
 $D_{\mathbf{u}}g(2, -1) = \nabla g(2, -1) \cdot (u_1, u_2) = (1, -4) \cdot (u_1, u_2) = 1 \cdot u_1 - 4u_2$.

- 2 La máxima derivada direccional es $\sqrt{17}$ y se da en la dirección $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

Teorema

Si f es diferenciable en P y $\nabla f(P) \neq \mathbf{0}$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

Teorema

Si f es diferenciable en P y $\nabla f(P) \neq \mathbf{0}$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

Por ser f diferenciable en P :

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

Teorema

Si f es diferenciable en P y $\nabla f(P) \neq \mathbf{0}$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

Por ser f diferenciable en P :

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

Teorema

Si f es diferenciable en P y $\nabla f(P) \neq \mathbf{0}$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

Por ser f diferenciable en P :

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Teorema

Si f es diferenciable en P y $\nabla f(P) \neq \mathbf{0}$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

Por ser f diferenciable en P :

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Conclusión

Si el vector gradiente no es nulo, apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función.

Gradiente y dirección de máximo crecimiento

Ver gif.

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es una curva de nivel

$$S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$$

parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ (**suave**), y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$.

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es una curva de nivel

$$S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$$

parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ (**suave**), y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t)$$

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es una curva de nivel

$$S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$$

parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ (**suave**), y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es una curva de nivel

$$S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$$

parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ (**suave**), y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva S .

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es una curva de nivel

$$S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$$

parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ (**suave**), y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva S . Luego, $\nabla f(P_0)$ es normal a la curva de nivel en P_0 .

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^3$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es el

conjunto de nivel: $S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$,

$\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, parametriza una curva suave incluida en S y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$.

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^3$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es el

conjunto de nivel: $S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$,

$\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, parametriza una curva suave incluida en S y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de un conjunto de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t)$$

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^3$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es el

conjunto de nivel: $S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$,

$\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, parametriza una curva suave incluida en S y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de un conjunto de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^3$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es el conjunto de nivel: $S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$,

$\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, parametriza una curva suave incluida en S y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de un conjunto de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva incluida en S ;

El gradiente es normal al conjunto de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función con derivadas parciales continuas en $D(f)$, el gradiente de f en un punto $P_0 \in D(f)$ es normal al conjunto de nivel de f que contiene a P_0 .

DEMOSTRAR:

Digamos que $P_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^3$, $f(P_0) = c$, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, S es el conjunto de nivel: $S = \{P \in D(f) : f(P) = c\} \ni P_0$,

$\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, parametriza una curva suave incluida en S y existe $t_0 \in I$, tal que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de un conjunto de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ y, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva incluida en S ; dado que esto sucede con **todas las curvas** incluidas en S que pasan por P_0 , $\nabla f(P_0)$ es normal al conjunto de nivel S en P_0 .

Ejemplo

$$f(x, y) = xy^2, \nabla f(x, y) =$$

Ejemplo

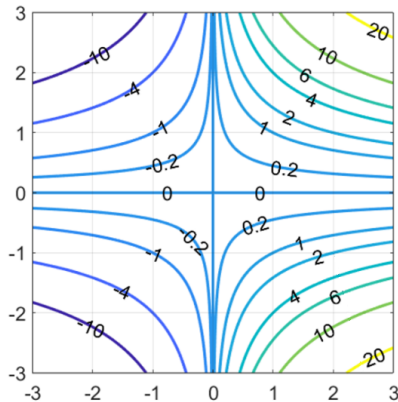
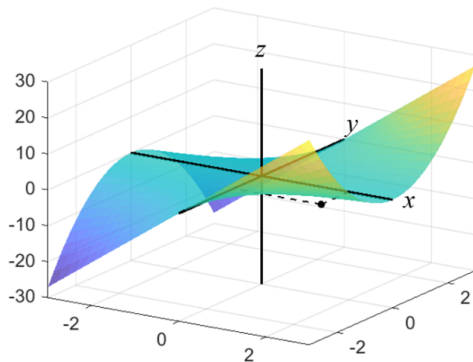
$$f(x, y) = xy^2, \nabla f(x, y) = (y^2, 2xy), \nabla f(2, -1) =$$

Ejemplo

$$f(x, y) = xy^2, \quad \nabla f(x, y) = (y^2, 2xy), \quad \nabla f(2, -1) = (1, -4).$$

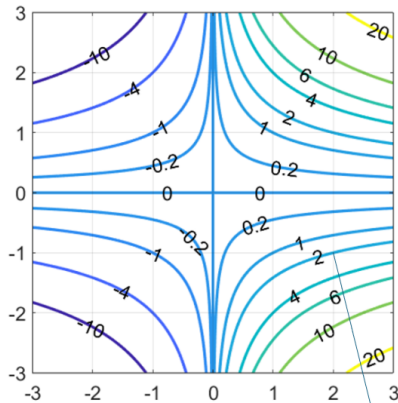
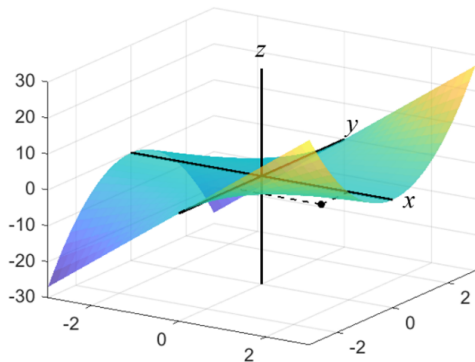
Ejemplo

$$f(x, y) = xy^2, \quad \nabla f(x, y) = (y^2, 2xy), \quad \nabla f(2, -1) = (1, -4).$$

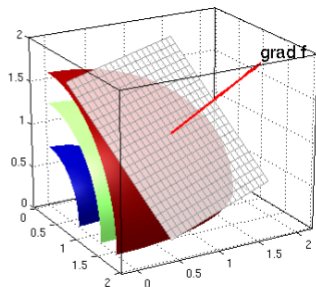
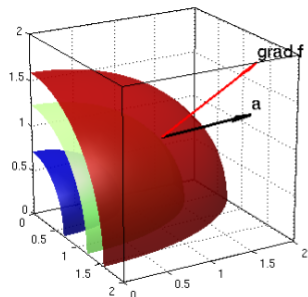


Ejemplo

$$f(x, y) = xy^2, \quad \nabla f(x, y) = (y^2, 2xy), \quad \nabla f(2, -1) = (1, -4).$$



Vector gradiente, función de tres variables



Superficies de nivel.

Proposición (Propiedades algebraicas del vector gradiente)

Dadas dos funciones f y g cuyos vectores gradientes estén definidos en un punto $P \in D(f) \cap D(g)$, entonces en P se tiene

1. *Suma y resta* $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$
2. *Producto* $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
3. *Cociente* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}, \text{ si } g(P) \neq 0.$

DEMOSTRAR: TAREA

- 1 Funciones de varias variables
 - Definiciones
 - Representaciones
- 2 Límites y continuidad en dimensiones superiores
- 3 Derivadas parciales
 - Introducción
 - Derivadas parciales de orden superior
- 4 Diferenciabilidad
- 5 Regla de la cadena
- 6 Derivada direccional y vector gradiente
 - Derivada direccional
 - Vector gradiente
 - Estimación del cambio en una dirección específica

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f **diferenciable** en (a, b) . Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f **diferenciable** en (a, b) . Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} \approx \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f **diferenciable** en (a, b) . Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} \approx \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

$$f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h.$$

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f **diferenciable** en (a, b) . Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} \approx \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

$$f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h.$$

Ejemplo:

Aproxime el cambio en el valor de $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 6xy + 3y^2$ cuando se mueve del punto $(1, 0)$ una distancia de 0,1 en la dirección de $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f **diferenciable** en (a, b) . Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} \approx \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

$$f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h.$$

Ejemplo:

Aproxime el cambio en el valor de $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 6xy + 3y^2$ cuando se mueve del punto $(1, 0)$ una distancia de 0,1 en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Rta: $\Delta f(1, 0) \approx 0,84$.

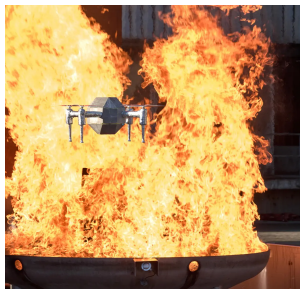
Ejemplo

Un dron vuela en una región en que la temperatura en cada punto es

$$T(x, y, z) = \sqrt{160000 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Aproxime el cambio en la temperatura que experimenta el dron, cuando su posición cambia desde

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0),$$



Ejemplo

Un dron vuela en una región en que la temperatura en cada punto es

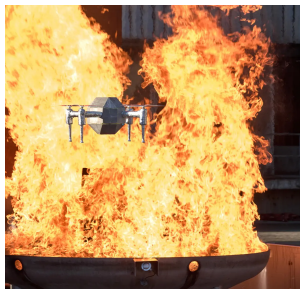
$$T(x, y, z) = \sqrt{160000 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Aproxime el cambio en la temperatura que experimenta el dron, cuando su posición cambia desde

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0),$$

- 1 una distancia h en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$



Ejemplo

Un dron vuela en una región en que la temperatura en cada punto es

$$T(x, y, z) = \sqrt{160000 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

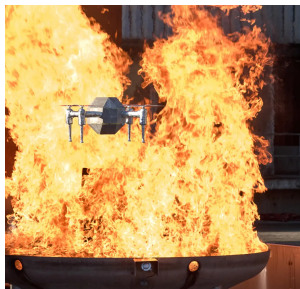
Aproxime el cambio en la temperatura que experimenta el dron, cuando su posición cambia desde

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0),$$

- 1 una distancia h en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

$$\Delta T(P_0) = T(P_0 + h\mathbf{u}) - T(P_0) \approx (\nabla T(P_0) \cdot \mathbf{u})h$$



Ejemplo

Un dron vuela en una región en que la temperatura en cada punto es

$$T(x, y, z) = \sqrt{160000 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Aproxime el cambio en la temperatura que experimenta el dron, cuando su posición cambia desde

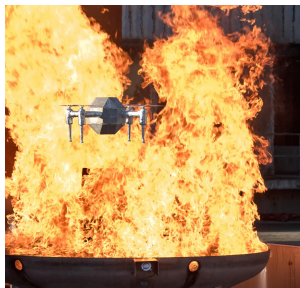
$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0),$$

- 1 una distancia h en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

$$\Delta T(P_0) = T(P_0 + h\mathbf{u}) - T(P_0) \approx (\nabla T(P_0) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta T(10, 0, 0) \approx \left(-\frac{10}{\sqrt{160000 - 100}}, 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) h \approx -0,025h.$$



Ejemplo

Un dron vuela en una región en que la temperatura en cada punto es

$$T(x, y, z) = \sqrt{160000 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Aproxime el cambio en la temperatura que experimenta el dron, cuando su posición cambia desde

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0),$$



- 1 una distancia h en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

$$\Delta T(P_0) = T(P_0 + h\mathbf{u}) - T(P_0) \approx (\nabla T(P_0) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta T(10, 0, 0) \approx \left(-\frac{10}{\sqrt{160000 - 100}}, 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) h \approx -0,025h.$$

- 2 Cantidades Δx , Δy y Δz :

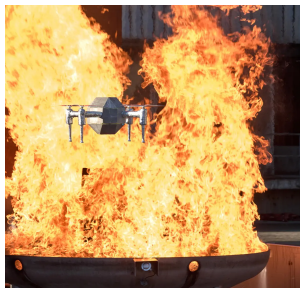
Ejemplo

Un dron vuela en una región en que la temperatura en cada punto es

$$T(x, y, z) = \sqrt{160000 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Aproxime el cambio en la temperatura que experimenta el dron, cuando su posición cambia desde

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0),$$



- 1 una distancia h en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

$$\Delta T(P_0) = T(P_0 + h\mathbf{u}) - T(P_0) \approx (\nabla T(P_0) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta T(10, 0, 0) \approx \left(-\frac{10}{\sqrt{160000 - 100}}, 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) h \approx -0,025h.$$

- 2 Cantidades Δx , Δy y Δz : $\mathbf{w} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$.