

UNIDAD 2: Funciones de varias variables

Linealización y Extremos

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



➤ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL
COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA
UNCUYO

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

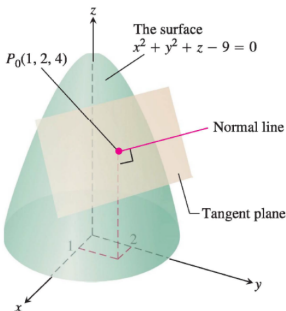
- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Definición (Plano tangente y recta normal a una superficie de nivel)

Si f es una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, el **plano tangente** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) , en dicho punto, es el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es normal al vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Similarmente, la **recta normal** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) , en dicho punto, es la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.



Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(1, 0, 0)$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(1, 0, 0)$.

La superficie de nivel de f que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ es

$$f(x, y, z) = f(1, 0, 0): x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(1, 0, 0)$.

La superficie de nivel de f que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ es

$$f(x, y, z) = f(1, 0, 0): x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

Ecuación plano tangente (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$): $x = 1$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(1, 0, 0)$.

La superficie de nivel de f que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ es

$$f(x, y, z) = f(1, 0, 0): x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

Ecuación plano tangente (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$): $x = 1$.

Ecuación recta normal (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$):

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(0, 0, 0)$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(0, 0, 0)$.

El conjunto de nivel de f que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ es $f(x, y, z) = f(0, 0, 0) = 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; es un punto

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(0, 0, 0)$.

El conjunto de nivel de f que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ es

$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) = 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; es un punto y $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Ecuaciones de plano tangente y recta normal

Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de la recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, punto $(0, 0, 0)$.

El conjunto de nivel de f que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ es

$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) = 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; es un punto y $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Plano tangente: **no existe el plano tangente** (a sup. nivel en $(0, 0, 0)$).

Recta normal: **no existe recta normal** (a sup. nivel en $(0, 0, 0)$).

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$g_x(P_0)(x - x_0) + g_y(P_0)(y - y_0) + g_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$g_x(P_0)(x - x_0) + g_y(P_0)(y - y_0) + g_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$g_x(P_0)(x - x_0) + g_y(P_0)(y - y_0) + g_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Ejemplo: plano tangente al gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 0, 1)$.

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$g_x(P_0)(x - x_0) + g_y(P_0)(y - y_0) + g_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Ejemplo: plano tangente al gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 0, 1)$.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$g_x(P_0)(x - x_0) + g_y(P_0)(y - y_0) + g_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Ejemplo: plano tangente al gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 0, 1)$.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$2(x - 1) + 0 - (z - 1) = 0,$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Dada $f(x, y)$, se considera

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

El gráfico de f coincide con la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$g_x(P_0)(x - x_0) + g_y(P_0)(y - y_0) + g_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Ejemplo: plano tangente al gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 0, 1)$.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$2(x - 1) + 0 - (z - 1) = 0, \quad z = 2x - 1.$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(x_0, y_0) t \\ y = y_0 + f_y(x_0, y_0) t \\ z = z_0 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(x_0, y_0) t \\ y = y_0 + f_y(x_0, y_0) t \\ z = z_0 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ejemplo: Ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 0, 1)$.

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto

$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(x_0, y_0) t \\ y = y_0 + f_y(x_0, y_0) t \\ z = z_0 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ejemplo: Ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 0, 1)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Hipersuperficies

Dados un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in f(A) = \text{im}(A)$, el conjunto de puntos

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se llama **hipersuperficie** en $\mathbb{R}^n$, si $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos de S .

Hipersuperficies

Dados un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in f(A) = \text{im}(A)$, el conjunto de puntos

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se llama **hipersuperficie** en $\mathbb{R}^n$, si $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos de S . La ecuación del **hiperplano tangente** a una hipersuperficie $f(x_1, \dots, x_n) = c$ en $P_0(a_1, \dots, a_n)$ es

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Hipersuperficies

Dados un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in f(A) = \text{im}(A)$, el conjunto de puntos

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se llama **hipersuperficie** en $\mathbb{R}^n$, si $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos de S . La ecuación del **hiperplano tangente** a una hipersuperficie $f(x_1, \dots, x_n) = c$ en $P_0(a_1, \dots, a_n)$ es

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z, t) = f(\mathbf{x}) = e^x + 3y - zt$.

Hipersuperficies

Dados un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in f(A) = \text{im}(A)$, el conjunto de puntos

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se llama **hipersuperficie** en $\mathbb{R}^n$, si $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos de S . La ecuación del **hiperplano tangente** a una hipersuperficie $f(x_1, \dots, x_n) = c$ en $P_0(a_1, \dots, a_n)$ es

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z, t) = f(\mathbf{x}) = e^x + 3y - zt$.

$P_0(0, 1, 2, 3) \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : e^x + 2y - zt = -2\}$; $\nabla f(\mathbf{x}) = (e^x, 3, -t, z)$.

Hipersuperficies

Dados un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in f(A) = \text{im}(A)$, el conjunto de puntos

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se llama **hipersuperficie** en $\mathbb{R}^n$, si $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos de S . La ecuación del **hiperplano tangente** a una hipersuperficie $f(x_1, \dots, x_n) = c$ en $P_0(a_1, \dots, a_n)$ es

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z, t) = f(\mathbf{x}) = e^x + 3y - zt$.

$P_0(0, 1, 2, 3) \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : e^x + 2y - zt = -2\}$; $\nabla f(\mathbf{x}) = (e^x, 3, -t, z)$.

Ec. hiperplano tangente a S en P_0 :

$$\nabla f(P_0) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - P_0) = 0,$$

Hipersuperficies

Dados un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in f(A) = \text{im}(A)$, el conjunto de puntos

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se llama **hipersuperficie** en $\mathbb{R}^n$, si $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos de S . La ecuación del **hiperplano tangente** a una hipersuperficie $f(x_1, \dots, x_n) = c$ en $P_0(a_1, \dots, a_n)$ es

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z, t) = f(\mathbf{x}) = e^x + 3y - zt$.

$P_0(0, 1, 2, 3) \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : e^x + 2y - zt = -2\}$; $\nabla f(\mathbf{x}) = (e^x, 3, -t, z)$.

Ec. hiperplano tangente a S en P_0 :

$$\nabla f(P_0) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - P_0) = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 2 \\ t - 3 \end{pmatrix} = x + 3y - 3z + 2t - 3 = 0.$$

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- **Linealización de una función en un punto**
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Recordemos que, si f es derivable en $x = x_0$,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación recta tangente.}$$

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Recordemos que, si f es derivable en $x = x_0$,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación recta tangente.}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Linealización de } f \text{ en } x_0.$$

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Recordemos que, si f es derivable en $x = x_0$,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación recta tangente.}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Linealización de } f \text{ en } x_0.$$

Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en P_0 ,

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

↑ Ecuación plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Recordemos que, si f es derivable en $x = x_0$,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación recta tangente.}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Linealización de } f \text{ en } x_0.$$

Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en P_0 ,

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

↑ Ecuación plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

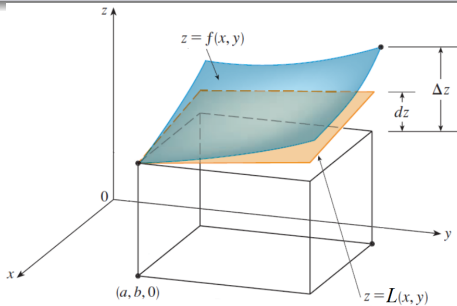
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Definición

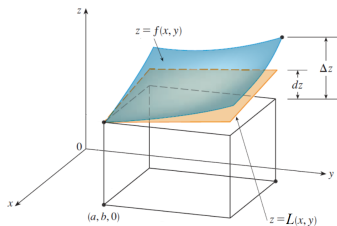
Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f , se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



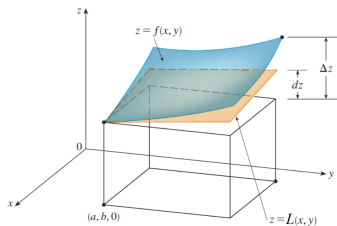
Linealización de una función de dos variables en un punto

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Linealización de una función de dos variables en un punto

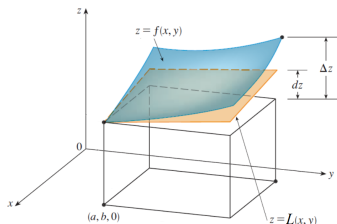
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



$$\Delta L(x_0, y_0) = L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)$$

Linealización de una función de dos variables en un punto

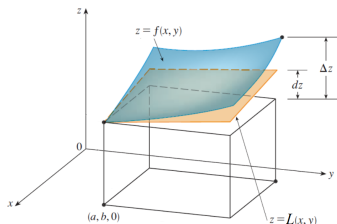
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



$$\begin{aligned}\Delta L(x_0, y_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y - f(x_0, y_0) - 0 - 0\end{aligned}$$

Linealización de una función de dos variables en un punto

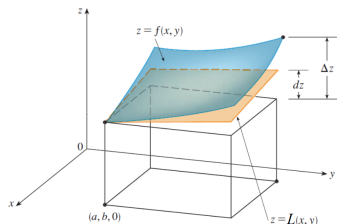
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



$$\begin{aligned}\Delta L(x_0, y_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y - f(x_0, y_0) - 0 - 0 \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\end{aligned}$$

Linealización de una función de dos variables en un punto

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

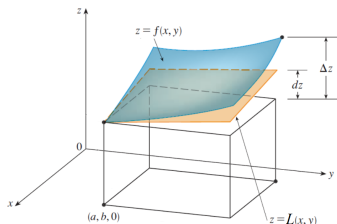


$$\begin{aligned}\Delta L(x_0, y_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y - f(x_0, y_0) - 0 - 0 \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\end{aligned}$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Linealización de una función de dos variables en un punto

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



$$\begin{aligned}\Delta L(x_0, y_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y - f(x_0, y_0) - 0 - 0 \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\end{aligned}$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Observación: si f es diferenciable en P_0 , L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0 .

Linealización y funciones diferenciables

Observación: si f es diferenciable en P_0 , L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0 .

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}_{f(x,y)} = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

$$\underbrace{L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}_{L(x,y)} = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

Definición

Si f es una función de tres variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f , se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0).$$

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

No contamos con una representación gráfica conveniente de este caso.

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta L(P_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - L(x_0, y_0, z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\end{aligned}$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta L(P_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - L(x_0, y_0, z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f(P_0) &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \\ &\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z.\end{aligned}$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta L(P_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - L(x_0, y_0, z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f(P_0) &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \\ &\quad + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z.\end{aligned}$$

Observación: si f es diferenciable en P_0 , L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0 .

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es una función de dos variables diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy.$$

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es una función de dos variables diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy.$$

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

$$L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

$$df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Diferencial de una función de tres variables

Definición

Si f es una función de tres variables diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz.$$

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) =$$

$$f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$

$$L_{f,P_0}(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0).$$

$$df_{(P_0)}(dx, dy, dz) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz.$$

Ejemplo

$$f(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy$$

$$\nabla f(x, y) = (12x + 6y, 6y + 6x)$$

$$f(1, 2) = 30$$

$$\nabla f(1, 2) = (24, 18)$$

Ejemplo

$$f(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy$$

$$f(1, 2) = 30$$

$$\nabla f(x, y) = (12x + 6y, 6y + 6x)$$

$$\nabla f(1, 2) = (24, 18)$$

Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$,

$$\underbrace{f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) - f(1, 2)}_{\Delta f(1,2)} = 24\Delta x + 18\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Ejemplo

$$f(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy$$

$$f(1, 2) = 30$$

$$\nabla f(x, y) = (12x + 6y, 6y + 6x)$$

$$\nabla f(1, 2) = (24, 18)$$

Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$,

$$\underbrace{f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) - f(1, 2)}_{\Delta f(1,2)} = 24\Delta x + 18\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. El cambio $\Delta f(1, 2)$ se puede aproximar por $df_{(1,2)}(dx, dy) = 24dx + 18dy$.

Ejemplo

$$f(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy$$

$$f(1, 2) = 30$$

$$\nabla f(x, y) = (12x + 6y, 6y + 6x)$$

$$\nabla f(1, 2) = (24, 18)$$

Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$,

$$\underbrace{f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) - f(1, 2)}_{\Delta f(1,2)} = 24\Delta x + 18\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. El cambio $\Delta f(1, 2)$ se puede aproximar por $df_{(1,2)}(dx, dy) = 24dx + 18dy$.

$$f(1, 2) = 30;$$

$$L_{f,(1,2)}(1, 2) = 30;$$

$$df_{(1,2)}(0, 0) = 0$$

$$f(1, 1; 1, 9) = 30,63; \quad L_{f,(1,2)}(1, 1; 1, 9) = 30,6; \quad df_{(1,2)}(0, 1; -0, 1) = 0,6$$

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- **Aplicaciones**
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h . Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h . Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h . Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera en ΔV , según los valores de r y h :

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h . Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera en ΔV , según los valores de r y h :

$$\Delta V \approx \pi r 2h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h . Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera en ΔV , según los valores de r y h :

$$\Delta V \approx \pi r 2h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si $r > 2h$, Δh tiene más peso; si $2h > r$, Δr influye más en ΔV .

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n + 1$ son continuas en una región abierta D .

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n + 1$ son continuas en una región abierta D .

Dados $(a, b) \in D$ y h, k tales que $(a + h, b + k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a + th, b + tk)$, $t \in \mathbb{R}$,

que pasa por (a, b) y por $(a + h, b + k)$.

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n + 1$ son continuas en una región abierta D .

Dados $(a, b) \in D$ y h, k tales que $(a + h, b + k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a + th, b + tk)$, $t \in \mathbb{R}$,

que pasa por (a, b) y por $(a + h, b + k)$. Entonces:

$$f(a + h, b + k) = f(\mathbf{r}(1)); \quad f(a, b) = f(\mathbf{r}(0)).$$

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n + 1$ son continuas en una región abierta D .

Dados $(a, b) \in D$ y h, k tales que $(a + h, b + k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a + th, b + tk)$, $t \in \mathbb{R}$,

que pasa por (a, b) y por $(a + h, b + k)$. Entonces:

$$f(a + h, b + k) = f(\mathbf{r}(1)); \quad f(a, b) = f(\mathbf{r}(0)).$$

Definimos la función compuesta w por

$$w(t) := f(\mathbf{r}(t)); \quad \text{así: } f(a + h, b + k) = w(1); \quad f(a, b) = w(0).$$

Fórmula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden $n + 1$ son continuas en una región abierta D .

Dados $(a, b) \in D$ y h, k tales que $(a + h, b + k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a + th, b + tk)$, $t \in \mathbb{R}$,

que pasa por (a, b) y por $(a + h, b + k)$. Entonces:

$$f(a + h, b + k) = f(\mathbf{r}(1)); \quad f(a, b) = f(\mathbf{r}(0)).$$

Definimos la función compuesta w por

$$w(t) := f(\mathbf{r}(t)); \quad \text{así: } f(a + h, b + k) = w(1); \quad f(a, b) = w(0).$$

Recordando la **fórmula de Taylor para w alrededor de 0**:

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

para algún c entre 0 y t .

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n + 1$ son continuas en una región rectangular abierta $R \subset D$ con centro en (a, b) , entonces en R :

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n + 1$ son continuas en una región rectangular abierta $R \subset D$ con centro en (a, b) , entonces en R :

$$f(a + h, b + k) =$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t.$$

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } 1.$$

Como f y sus derivadas parciales hasta orden $n + 1$ son continuas en una región rectangular abierta $R \subset D$ con centro en (a, b) , entonces en R :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \dots?$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$w'(t) =$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$w'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t)$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$w''(t) =$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$w''(t) = f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 +$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$w''(t) = f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 + f_{xy}(a + th, b + tk)hk$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$\begin{aligned} w''(t) &= f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 + f_{xy}(a + th, b + tk)hk \\ &\quad + f_{yx}(a + th, b + tk)kh + f_{yy}(a + th, b + tk)k^2 \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$\begin{aligned} w''(t) &= f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 + f_{xy}(a + th, b + tk)hk \\ &\quad + f_{yx}(a + th, b + tk)kh + f_{yy}(a + th, b + tk)k^2 \end{aligned}$$

$$w''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \frac{w''(0)}{2!} \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

$$w(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\underbrace{a + th}_{x(t)}, \underbrace{b + tk}_{y(t)})$$

$$w(0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) \\ &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

$$w'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$\begin{aligned} w''(t) &= f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 + f_{xy}(a + th, b + tk)hk \\ &\quad + f_{yx}(a + th, b + tk)kh + f_{yy}(a + th, b + tk)k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w''(0) &= f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^2 f \Big|_{(a,b)} \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para dos variables

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a, b) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(a,b)} + \cdots \\ & + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f \Big|_{(a+ch, b+ck)} \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor de primer orden, para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b) , entonces en R :

Fórmula de Taylor de primer orden, para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b) , entonces en R :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(a+ch, b+ck)}$$

para cierto c entre 0 y 1.

Fórmula de Taylor de primer orden, para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b) , entonces en R :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(a+ch, b+ck)}$$

para cierto c entre 0 y 1.

Observación: la linealización de f en (a, b) coincide con la fórmula de Taylor de primer orden sin el término de error.

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

Sea $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$. Buscamos las Fórmulas de Taylor de segundo orden y de primer orden centradas en $(a, b) = (0, 0)$; estudiamos el error que se comete por usar el polinomio de Taylor en lugar de f .

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

Sea $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$. Buscamos las Fórmulas de Taylor de segundo orden y de primer orden centradas en $(a, b) = (0, 0)$; estudiamos el error que se comete por usar el polinomio de Taylor en lugar de f .

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a, b) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \Big|_{(a+ch, b+ck)} \end{aligned}$$

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

Sea $f(x, y) = e^x \sin(y)$. Buscamos las Fórmulas de Taylor de segundo orden y de primer orden centradas en $(a, b) = (0, 0)$; estudiamos el error que se comete por usar el polinomio de Taylor en lugar de f .

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(a,b)}$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \Big|_{(a+ch, b+ck)}$$

$$f(h, k) = f(0, 0) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(0,0)}$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \Big|_{(ch, ck)}$$

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

$$\begin{aligned} f(h, k) = f(0, 0) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(0,0)} \\ + \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \Big|_{(ch,ck)} \end{aligned}$$

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

$$f(h, k) = f(0, 0) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(0,0)} \\ + \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \Big|_{(ch, ck)}$$

$f_x(x,y)=e^x \operatorname{sen}(y)$	$f_{xx}(x,y)=e^x \operatorname{sen}(y)$	$f_{xxx}(x,y)=e^x \operatorname{sen}(y)$
	$f_{xy}(x,y)=e^x \cos(y)$	$f_{xxy}(x,y)=e^x \cos(y)$
$f_y(x,y)=e^x \cos(y)$	$f_{yy}(x,y)=-e^x \operatorname{sen}(y)$	$f_{yyx}(x,y)=-e^x \operatorname{sen}(y)$
		$f_{yyy}(x,y)=-e^x \cos(y)$
$f_x(0,0)=0$	$f_{xx}(0,0)=0$	$f_{xxx}(ch,ck)=e^{ch} \operatorname{sen}(ck)$
	$f_{xy}(0,0)=1$	$f_{xxy}(ch,ck)=e^{ch} \cos(ck)$
$f_y(0,0)=1$	$f_{yy}(0,0)=0$	$f_{yyx}(ch,ck)=-e^{ch} \operatorname{sen}(ck)$
		$f_{yyy}(ch,ck)=-e^{ch} \cos(ck)$

Ejemplo de Fórmula de Taylor, dos variables

$$f(h, k) = f(0, 0) + (hf_x + kf_y) \Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(0,0)} \\ + \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \Big|_{(ch, ck)}$$

$$f_x(x, y) = e^x \sin(y) \quad f_{xx}(x, y) = e^x \sin(y) \quad f_{xxx}(x, y) = e^x \sin(y)$$

$$f_{xy}(x, y) = e^x \cos(y) \quad f_{xxy}(x, y) = e^x \cos(y)$$

$$f_y(x, y) = e^x \cos(y) \quad f_{yy}(x, y) = -e^x \sin(y) \quad f_{yyx}(x, y) = -e^x \sin(y) \quad f_{yyy}(x, y) = -e^x \cos(y)$$

$$f_x(0, 0) = 0 \quad f_{xx}(0, 0) = 0 \quad f_{xxx}(ch, ck) = e^{ch} \sin(ck)$$

$$f_{xy}(0, 0) = 1 \quad f_{xxy}(ch, ck) = e^{ch} \cos(ck)$$

$$f_y(0, 0) = 1 \quad f_{yy}(0, 0) = 0 \quad f_{yyx}(ch, ck) = -e^{ch} \sin(ck) \quad f_{yyy}(ch, ck) = -e^{ch} \cos(ck)$$

$$f(h, k) = 0 + (0 + k) + \frac{1}{2} (0 + 2hk + 0) \\ + \frac{1}{6} \left(h^3 e^{ch} \sin(ck) + 3h^2 k e^{ch} \cos(ck) - 3hk^2 e^{ch} \sin(ck) - k^3 e^{ch} \cos(ck) \right)$$

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

1 Linealización y diferencial total de una función

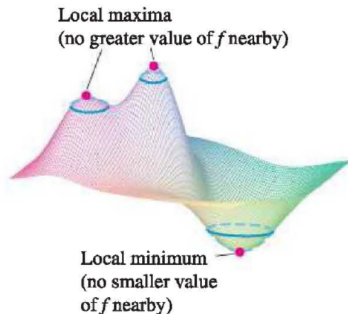
- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

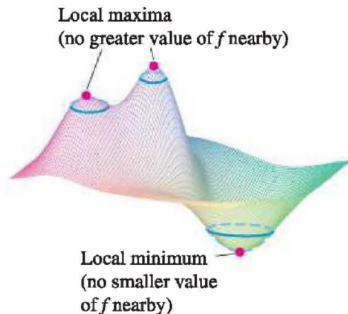
Definiciones de máximo local y mínimo local



Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los $(x, y) \in D(f)$ de algún entorno de (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un (valor) **máximo local** de f . Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b) .

Definiciones de máximo local y mínimo local



Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los $(x, y) \in D(f)$ de algún entorno de (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un (valor) **máximo local** de f . Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b) .

Similarmemente se define **mínimo local**.

Optimización de un proceso petroquímico

En una planta de refinación, la desviación de la eficiencia global de un reactor se modela matemáticamente mediante la función rendimiento:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).

Optimización de un proceso petroquímico

En una planta de refinación, la desviación de la eficiencia global de un reactor se modela matemáticamente mediante la función rendimiento:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- x^3, y^3 : Representan las asimetrías cinéticas de la reacción exotérmica cuando el sistema opera fuera de las condiciones nominales.

Optimización de un proceso petroquímico

En una planta de refinación, la desviación de la eficiencia global de un reactor se modela matemáticamente mediante la función rendimiento:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- x^3, y^3 : Representan las asimetrías cinéticas de la reacción exotérmica cuando el sistema opera fuera de las condiciones nominales.
- $3xy^2$: Término de acoplamiento termodinámico. Expresa cómo la fluctuación de presión amplifica drásticamente el efecto de la temperatura en el rendimiento.

Optimización de un proceso petroquímico

En una planta de refinación, la desviación de la eficiencia global de un reactor se modela matemáticamente mediante la función rendimiento:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- x^3, y^3 : Representan las asimetrías cinéticas de la reacción exotérmica cuando el sistema opera fuera de las condiciones nominales.
- $3xy^2$: Término de acoplamiento termodinámico. Expresa cómo la fluctuación de presión amplifica drásticamente el efecto de la temperatura en el rendimiento.
- $-15x, -15y$: Coeficientes de penalización lineal asociados al gasto energético de los sistemas de bombeo y enfriamiento para corregir las desviaciones.

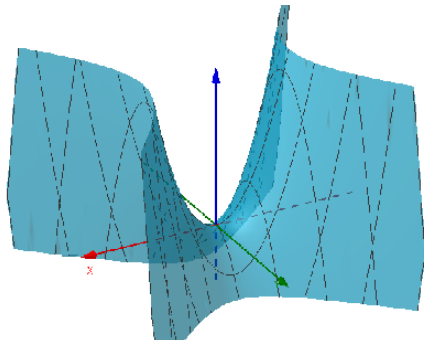
El objetivo del equipo de ingeniería de procesos es determinar los valores críticos de desvío $(x, y) = (\Delta T, \Delta P)$ que maximizan el rendimiento neto del sistema, identificando además las regiones de inestabilidad operacional (puntos de silla) donde el proceso podría volverse incontrolable. Este enfoque es fundamental para la sintonización de controladores predictivos (MPC) en la industria moderna.

Punto crítico y punto de silla

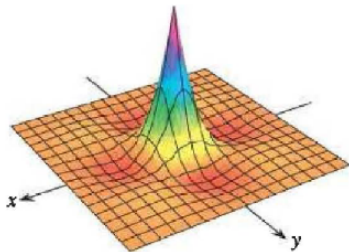
Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ es un **punto crítico** de f .

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P)$ no existe, es un **punto (singular o) crítico** de f .

Si f es **diferenciable en P** , tiene un **punto de silla** en P si P es un punto crítico de f y f no presenta en P un máximo local ni un mínimo local.



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



$$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Teorema (Criterio de la derivada primera)

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0 , entonces $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRAR

Criterio de la derivada primera para valores extremos locales

Teorema (Criterio de la derivada primera)

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0 , entonces $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRAR Supongamos que $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo local de f .

Entonces la función $f(x, y_0)$, como función de una variable independiente, también tiene un extremo en $x = x_0$. Por el criterio de la derivada primera para funciones de una variable, si la derivada existe en x_0 debe ser cero.

Luego $f_x(x_0, y_0) = 0$.

Similarmente se prueba que $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- f es la desviación de la eficiencia global del reactor :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- f es la desviación de la eficiencia global del reactor :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- f es la desviación de la eficiencia global del reactor :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 = 0 \end{cases}$$

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura respecto al setpoint de diseño (ΔT).
- y : Desviación normalizada de la presión respecto al setpoint operativo (ΔP).
- f es la desviación de la eficiencia global del reactor :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y.$$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 3y^2 + 6xy - 15)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 3y^2 + 6xy - 15 = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \quad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \quad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

Entonces,

- ➊ f tiene un **máximo local** en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$;
- ➋ f tiene un **mínimo local** en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$;
- ➌ f tiene un **punto de silla** en (a,b) si $H_f(a,b) < 0$;
- ➍ el criterio **no es concluyente** si $H_f(a,b) = 0$.

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{vmatrix} = 6x(6x + 6y) - (6y)^2$$

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{vmatrix} = 6x(6x + 6y) - (6y)^2$$

$$H_f(0, \pm\sqrt{5}) = -36 \cdot 5 < 0$$

$$H_f(2, 1) = 12 \cdot 18 - 36 = 180 > 0; \quad f_{xx}(2, 1) = 12 > 0$$

$$H_f(-2, -1) = -12 \cdot (-18) - 36 = 180 > 0; \quad f_{xx}(-2, -1) = -12 < 0$$

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

Puntos críticos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{vmatrix} = 6x(6x + 6y) - (6y)^2$$

$$H_f(0, \pm\sqrt{5}) = -36 \cdot 5 < 0$$

$$H_f(2, 1) = 12 \cdot 18 - 36 = 180 > 0; \quad f_{xx}(2, 1) = 12 > 0$$

$$H_f(-2, -1) = -12 \cdot (-18) - 36 = 180 > 0; \quad f_{xx}(-2, -1) = -12 < 0$$

Puntos de silla: $(0, \sqrt{5}, -10\sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5}, 10\sqrt{5})$.

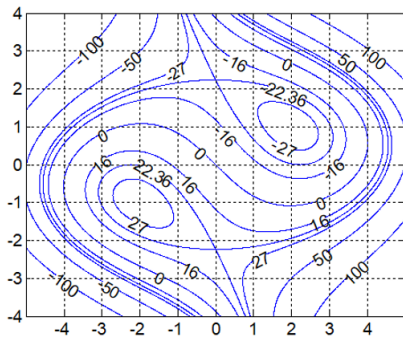
Mínimo local: $f(2, 1) = -30$; máximo local: $f(-2, -1) = 30$.

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

Optimización de un proceso petroquímico

- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.

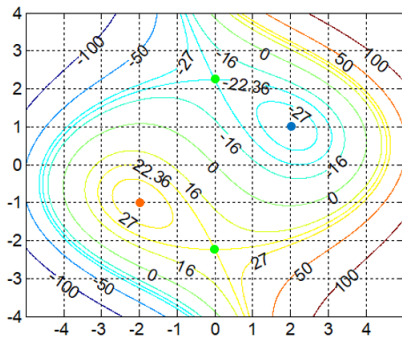
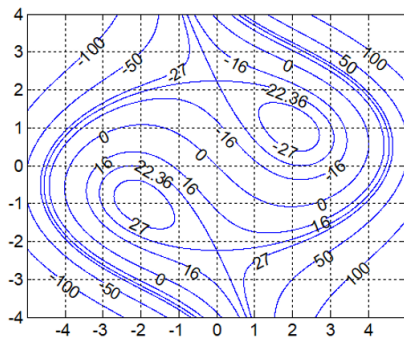


Puntos de silla: $(0, \sqrt{5}, -10\sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5}, 10\sqrt{5})$.

Mínimo local: $f(2, 1) = -30$; máximo local: $f(-2, -1) = 30$.

Optimización de un proceso petroquímico

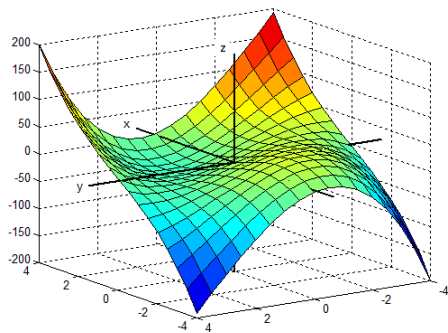
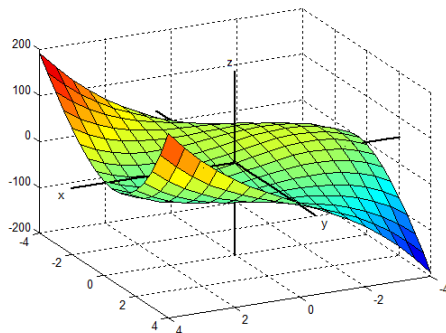
- x : Desviación normalizada de la temperatura.
- y : Desviación normalizada de la presión.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 - 15x - 15y$: desviación de eficiencia global.



Puntos de silla: $(0, \sqrt{5}, -10\sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5}, 10\sqrt{5})$.

Mínimo local: $f(2, 1) = -30$; máximo local: $f(-2, -1) = 30$.

Optimización de un proceso petroquímico



Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.

Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

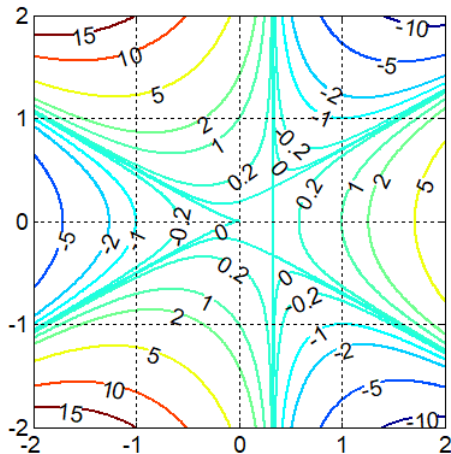
$H_f(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}) = -4 < 0$, dos puntos de silla: $(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \frac{1}{27})$; $H_f(0, 0) = 0$.

Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

$H_f(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}) = -4 < 0$, dos puntos de silla: $(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \frac{1}{27})$; $H_f(0, 0) = 0$.

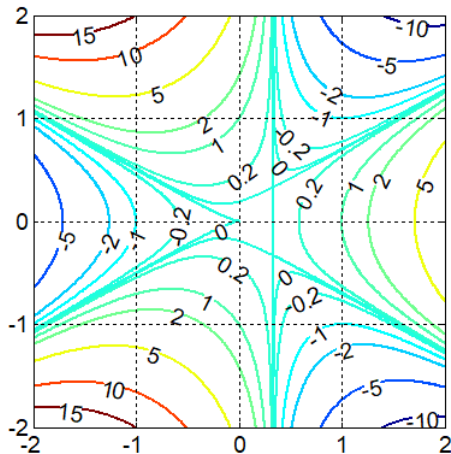


Criterio de la derivada segunda: caso especial

Hallar los extremos y puntos de silla de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$.

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

$H_f(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}) = -4 < 0$, dos puntos de silla: $(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \frac{1}{27})$; $H_f(0, 0) = 0$.



$$f(x, 0) = x^3.$$

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- **Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas**
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Valores extremos de funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados

Teorema

Si f es una función continua en un conjunto D que es cerrado y acotado, entonces existen en D puntos en los cuales f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

SIN DEMOSTRAR

Restricciones operacionales en el reactor

En la práctica de la ingeniería, las desviaciones operacionalmente seguras no son infinitas. El reactor cuenta con una ventana de operación segura controlada por válvulas de alivio y sistemas de paro de emergencia.

Restricciones operacionales en el reactor

En la práctica de la ingeniería, las desviaciones operacionalmente seguras no son infinitas. El reactor cuenta con una ventana de operación segura controlada por válvulas de alivio y sistemas de paro de emergencia. Supongamos que las limitaciones físicas de los materiales y del catalizador restringen las desviaciones admisibles a la siguiente región cerrada y acotada D :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Restricciones operacionales en el reactor

En la práctica de la ingeniería, las desviaciones operacionalmente seguras no son infinitas. El reactor cuenta con una ventana de operación segura controlada por válvulas de alivio y sistemas de paro de emergencia. Supongamos que las limitaciones físicas de los materiales y del catalizador restringen las desviaciones admisibles a la siguiente región cerrada y acotada D :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- **Significado de la frontera** ($x^2 + y^2 = 4$): Representa el límite de tolerancia de esfuerzo termo-mecánico combinado. Cruzar esta frontera activa un protocolo de parada por riesgo de fisura o explosión.

Restricciones operacionales en el reactor

En la práctica de la ingeniería, las desviaciones operacionalmente seguras no son infinitas. El reactor cuenta con una ventana de operación segura controlada por válvulas de alivio y sistemas de paro de emergencia. Supongamos que las limitaciones físicas de los materiales y del catalizador restringen las desviaciones admisibles a la siguiente región cerrada y acotada D :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- **Significado de la frontera** ($x^2 + y^2 = 4$): Representa el límite de tolerancia de esfuerzo termo-mecánico combinado. Cruzar esta frontera activa un protocolo de parada por riesgo de fisura o explosión.
- **El problema de optimización restringida**: Para optimizar la eficiencia real, se debe evaluar la función objetivo en los puntos críticos del interior y en la frontera de la región D (en este ejemplo, el disco de radio 2).

Restricciones operacionales en el reactor: Análisis de la frontera

Para conocer el comportamiento de la función objetivo en la frontera de la región D , se procede de distintas maneras, según sea la descripción que se tiene de la misma.

Restricciones operacionales en el reactor: Análisis de la frontera

Para conocer el comportamiento de la función objetivo en la frontera de la región D , se procede de distintas maneras, según sea la descripción que se tiene de la misma.

- 1 Si se cuenta con una descripción **geométrica** y se puede representar con funciones, se busca hacer sustituciones y hallar los extremos de las funciones obtenidas.

Restricciones operacionales en el reactor: Análisis de la frontera

Para conocer el comportamiento de la función objetivo en la frontera de la región D , se procede de distintas maneras, según sea la descripción que se tiene de la misma.

- 1 Si se cuenta con una descripción **geométrica** y se puede representar con funciones, se busca hacer sustituciones y hallar los extremos de las funciones obtenidas.
- 2 Si la frontera es una curva que se puede describir mediante una **parametrización** $\mathbf{r}$, se puede aplicar el **Teorema del Gradiente Ortogonal**.

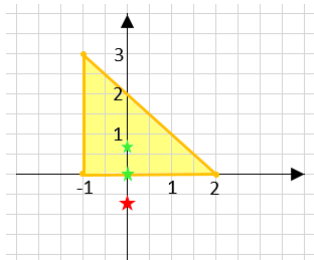
Restricciones operacionales en el reactor: Análisis de la frontera

Para conocer el comportamiento de la función objetivo en la frontera de la región D , se procede de distintas maneras, según sea la descripción que se tiene de la misma.

- 1 Si se cuenta con una descripción **geométrica** y se puede representar con funciones, se busca hacer sustituciones y hallar los extremos de las funciones obtenidas.
- 2 Si la frontera es una curva que se puede describir mediante una **parametrización r** , se puede aplicar el **Teorema del Gradiente Ortogonal**.
- 3 Si la frontera se puede describir como conjunto de nivel de una (o más) funciones diferenciables, se puede aplicar el método de **Multiplicadores de Lagrange**.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. Ejemplo.

Buscar los extremos de $f(x, y) = y^2 - y^4 - x^2$ en los puntos de D que es el triángulo con vértices $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(-1, 3)$ (**Restricción**).



Los puntos críticos de f son $(0, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, pero el último de éstos no pertenece a D y lo descartamos.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas

Evaluamos f en los puntos críticos pertenecientes a D :

$$f(0, 0) = 0; \quad f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Evaluamos f en la frontera de D :

① $f(-1, 0) = -1; \quad f(2, 0) = -4; \quad f(-1, 3) = -8,75;$

② $f(x, 0) = -x^2;$

③ $f(-1, y) = y^2 - y^4 - 1; \quad f\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -0,75;$

④ $f(2 - y, y) = -y^4 + 4y - 4; \quad f(1, 1) = -1.$

El valor máximo es $\frac{1}{4}$ y se alcanza en $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$; el valor mínimo es $-8,75$ y se alcanza en $(-1, 3)$.

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

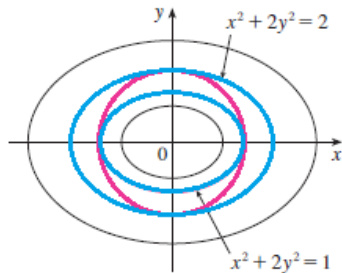
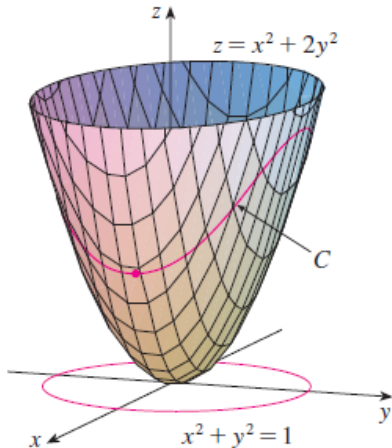
3 Anexo: Ejemplos varios

Extremos condicionados: restricción en el dominio

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la **restricción** $g(x, y) = 0$.



Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C , entonces ∇f es ortogonal a C en P_0 .

DEMOSTRAR

Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C , entonces ∇f es ortogonal a C en P_0 .

DEMOSTRAR

Sea C parametrizada por $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y sea $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$, para cierto $t_0 \in [a, b]$. Si $w(t) = (f \circ \mathbf{r})(t)$ alcanza un valor extremo en t_0 , por la diferenciabilidad de f y debido a que $w(t_0)$ es extremo, se tiene:

$$w'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad \text{y} \quad w'(t_0) = 0,$$

Luego $\nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$.

Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C , entonces ∇f es ortogonal a C en P_0 .

DEMOSTRAR

Sea C parametrizada por $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y sea $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$, para cierto $t_0 \in [a, b]$. Si $w(t) = (f \circ \mathbf{r})(t)$ alcanza un valor extremo en t_0 , por la diferenciabilidad de f y debido a que $w(t_0)$ es extremo, se tiene:

$$w'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad \text{y} \quad w'(t_0) = 0,$$

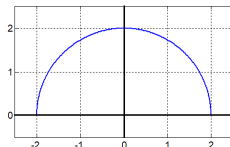
Luego $\nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$.

Corolario

En $\mathbb{R}^2$ también vale.

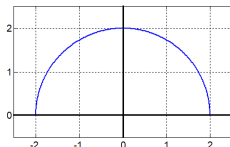
APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (**restricción**).



APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (**restricción**).



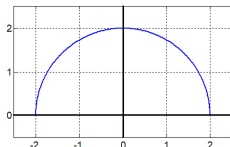
Se puede parametrizar la curva restricción

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), 0 \leq t \leq \pi$$

y buscar los extremos de $f \circ \mathbf{r}$: $f(\mathbf{r}(t)) = 4 \cos^2(t) + 4$.

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (**restricción**).



Se puede parametrizar la curva restricción

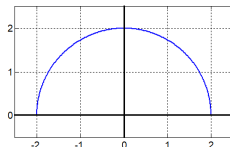
$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), 0 \leq t \leq \pi$$

y buscar los extremos de $f \circ \mathbf{r}$: $f(\mathbf{r}(t)) = 4 \cos^2(t) + 4$.

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 8 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} = -8 \sin(t) \cos(t)$$

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, (restricción).



Se puede parametrizar la curva restricción

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), 0 \leq t \leq \pi$$

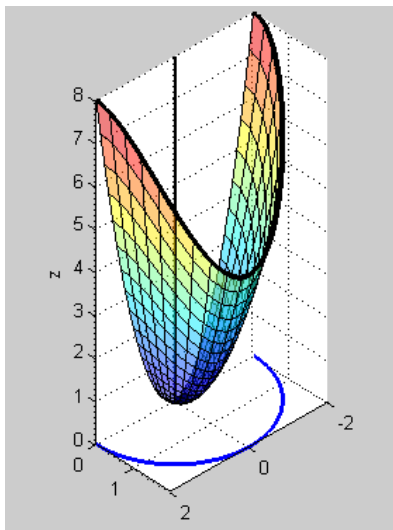
y buscar los extremos de $f \circ \mathbf{r}$: $f(\mathbf{r}(t)) = 4 \cos^2(t) + 4$.

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 8 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} = -8 \sin(t) \cos(t)$$

$$-8 \sin(t) \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}; \quad \frac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}(t) = -8(\cos^2(t) - \sin^2(t)).$$

$$\frac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}(0) = -8 = \frac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}(\pi); \quad \frac{d^2(f \circ \mathbf{r})}{dt^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8.$$

APLICACIÓN Teorema Gradiente Ortogonal



Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).

Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.

Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0 , entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).

Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.

Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0 , entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

El punto P_0 es un **punto crítico** de f restringida a S (puede haber más de uno).

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

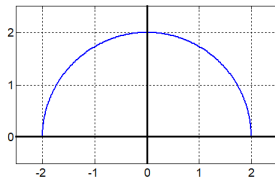
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Para funciones de dos variables, es similar.

Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x, y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

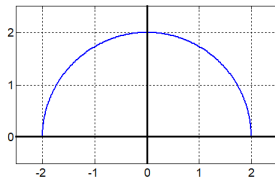


Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x, y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

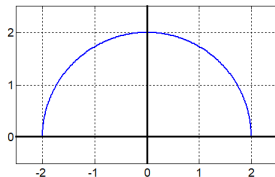


Método de multiplicadores de Lagrange

Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x, y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$



Método de multiplicadores de Lagrange

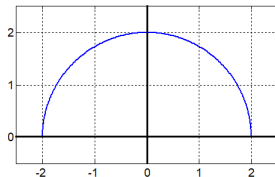
Se busca los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sobre los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ (conjunto S).

Restricción: $g(x, y) = 0$, $y \geq 0$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

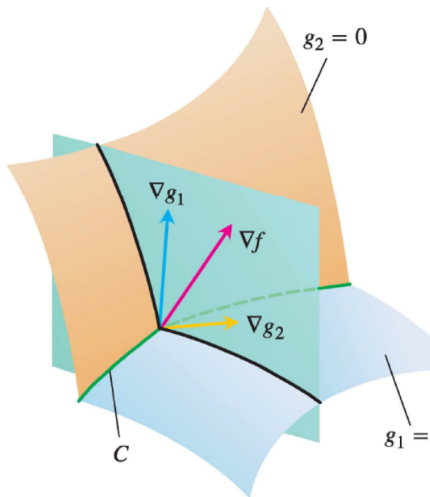
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Puntos críticos: $(\pm 2, 0)$ y $(0, 2)$ ($(0, -2) \notin S$).



Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones



La curva C es la intersección de las superficies S_1 (superficie de nivel $g_1 = 0$) y S_2 (superficie de nivel $g_2 = 0$). Según el T. del Grad. Ortogonal, si f presenta un extremo relativo a C en $P_0 \in C$, debe ocurrir que $\nabla f(P_0)$ es ortogonal a C . Como C es una curva en el espacio, en P_0 habrá un plano normal a C . Por estar C incluida en S_1 , $\nabla g_1(P_0)$ es ortogonal a S_1 y así, es ortogonal a C . Similarmente, $\nabla g_2(P_0)$ es ortogonal a C . Así, si $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$ son linealmente independientes, se podrá expresar $\nabla f(P_0)$ como combinación lineal de $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$.

Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones

El planteo es:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Notar que es un **sistema de 5 ecuaciones no lineales con 5 incógnitas**.

1 Linealización y diferencial total de una función

- Planos tangentes y rectas normales
- Linealización de una función en un punto
- Diferencial total de una función en un punto
- Aplicaciones
- Fórmula de Taylor para dos variables

2 Valores extremos y puntos de silla

- Conceptos y definiciones
 - Criterio de la derivada primera para valores extremos locales
 - Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales
- Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
 - Regiones cerradas y acotadas
- Extremos condicionados

3 Anexo: Ejemplos varios

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

① $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

① $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$

$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

① $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$

$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

② $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

① $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$

$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

② $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

Rta: 1 punto crítico: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ¿es máximo o mínimo?

Es mínimo.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1 , definida por $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1 , definida por $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Planteo:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0); \quad (-2x, 2y - y^3) = (0, 0).$$

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ y $(0, \sqrt{2})$. Los dos últimos **no** pertenecen a D_1 .

Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_1 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

Evalúo f : $f(0, 0) = 0$; $f(0, \pm 1) = 3/4$; $f(\pm 1, 0) = -1$.

Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_1 de 0.75, en los puntos $(0, \pm 1)$, y un mínimo absoluto de -1 en los puntos $(\pm 1, 0)$.

Ejercicio integrador 2

Hallar los extremos de $f(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_2 , definida por $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Planteo:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0); \quad (-2x, 2y - y^3) = (0, 0).$$

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ y $(0, \sqrt{2})$. Los dos últimos **sí** pertenecen a D_2 .

Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_2 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Evalúo f : $f(0, 0) = 0$; $f(0, \pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm\sqrt{2}, 0) = -2$.

Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_2 de 1, en los puntos $(0, \pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -2 en los puntos $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

Ejercicio integrador 3

Hallar los extremos de $f(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_3 , definida por $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Planteo:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0); \quad (-2x, 2y - y^3) = (0, 0).$$

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ y $(0, \sqrt{2})$. Los dos últimos **sí** pertenecen a D_2 .

Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_3 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Evalúo f : $f(0, 0) = 0$; $f(0, \pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm 2, 0) = -4$; $f(0, \pm 2) = 0$.

Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_3 de 1, en los puntos $(0, \pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -4 en los puntos $(\pm 2, 0)$.

Ejemplo: Planos tangentes y rectas normales a superficie de nivel

Ejemplo: dada $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, buscar la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de nivel de f que pasa por el punto indicado, en dicho punto, para los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$. Sol: la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ que contiene al punto $(1, 0, 0)$ es $f(x, y, z) = f(1, 0, 0)$, es decir $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 0$; el plano tangente a esta superficie de nivel en $(1, 0, 0)$ es $z = 0$ y la recta normal a la superficie en ese punto es $\mathbf{r}(t) = (1, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. El punto $(0, 0, 0)$ pertenece a la misma superficie de nivel que $(1, 0, 0)$; en $(0, 0, 0)$, se tiene que $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ de manera que no existe plano tangente ni recta normal.

