

UNIDAD 3: Integrales múltiples

Facultad de Ingeniería

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



➤ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL
COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA
UNCUYO

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Definición de función acotada en una región D

Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada en D si existen números reales m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$.

Similarmente se define función acotada en una región $D \subset \mathbb{R}^n$.

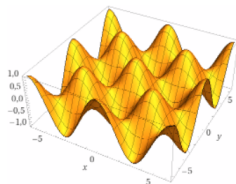
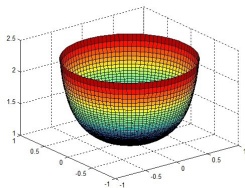
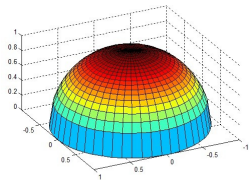
Observación: no debe confundirse el concepto de **función acotada** en una región con el de **región acotada**, estudiado con anterioridad.

Veamos un par de ejemplos.

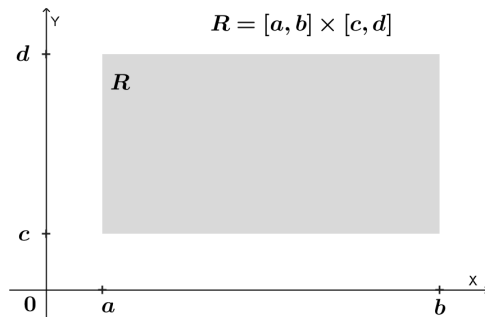
Definición de función acotada en una región D

Ejemplo

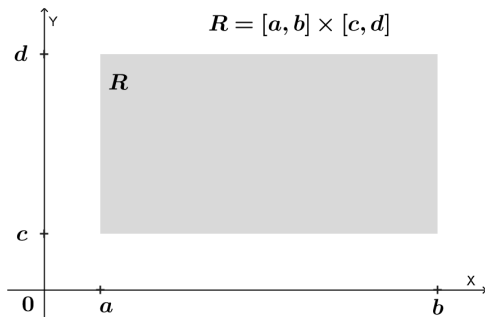
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es una función acotada y su dominio es un conjunto acotado (y cerrado).
- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ es una función no acotada y su dominio es un conjunto acotado (no cerrado).
- $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ es una función acotada y su dominio es $\mathbb{R}^2$, que es no acotado (y cerrado).



Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado



Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

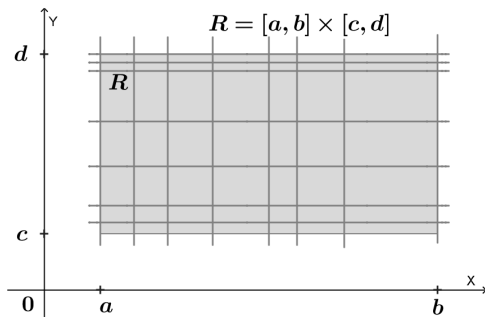


Una **partición** $\mathcal{P}$ de $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$.

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

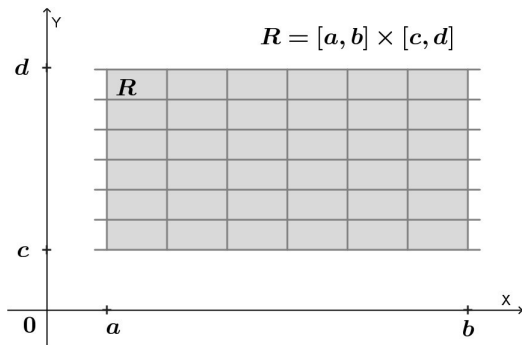


Una **partición** $\mathcal{P}$ de $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$.

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

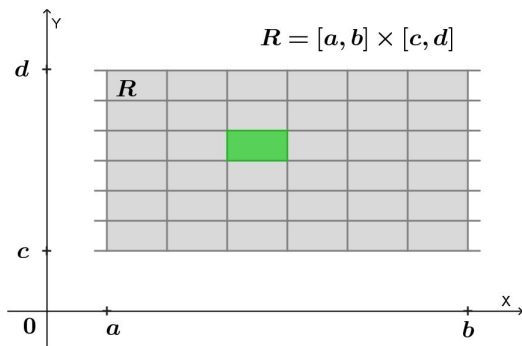


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ de $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$,
 $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

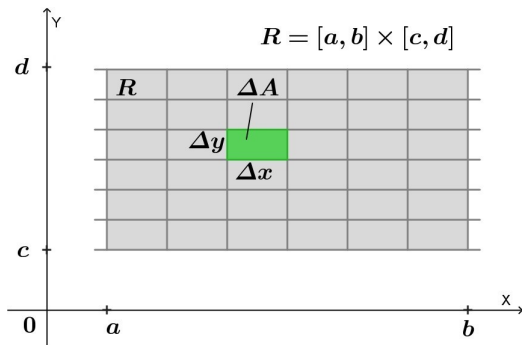


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ de $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$,
 $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

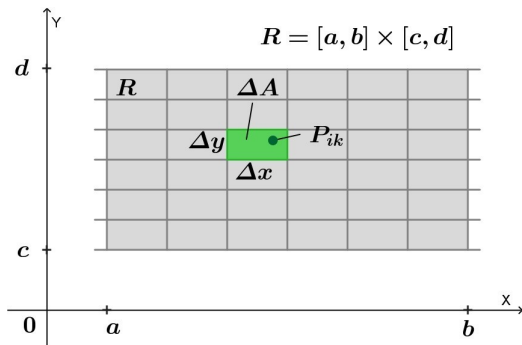


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ de $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$,
 $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

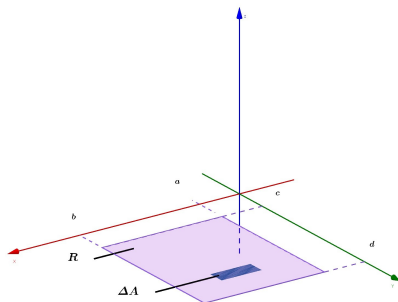
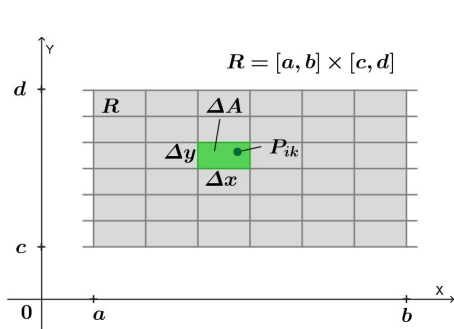


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ de $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

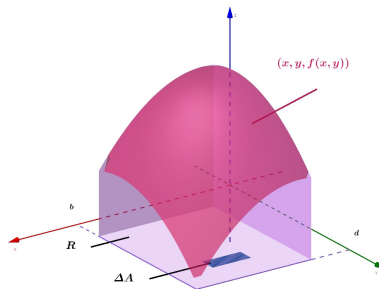
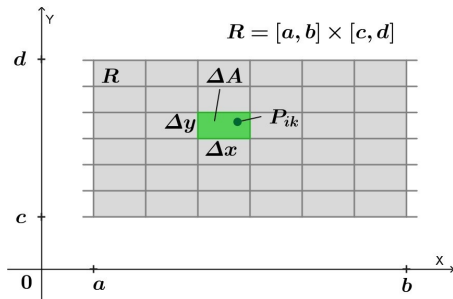
$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$,
 $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

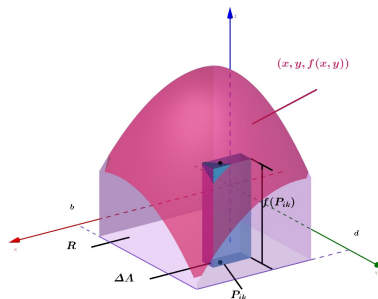
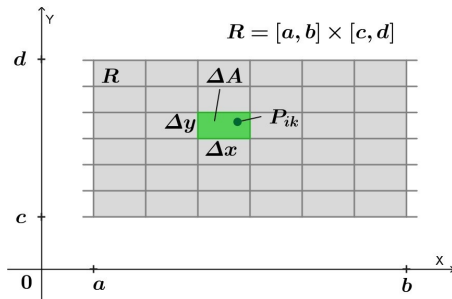
Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado



Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado



Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado



Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

Definición (de integral doble sobre rectángulos)

Dadas una función f definida y acotada en un rectángulo R y una partición $\mathcal{P}$ de R , la suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ik}) \Delta A.$$

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

Definición (de integral doble sobre rectángulos)

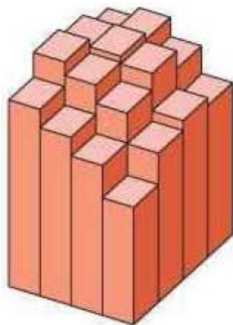
Dadas una función f definida y acotada en un rectángulo R y una partición $\mathcal{P}$ de R , la suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ik}) \Delta A.$$

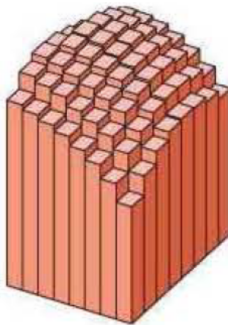
Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe para cualquier elección de puntos P_{ik} en los rectángulos R_{ik} , se dice que f es **integrable** sobre R . En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x, y) dx dy.$$

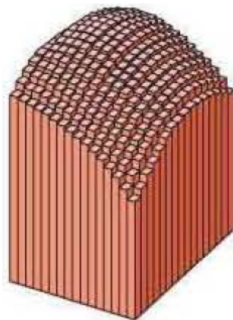
Interpretación: si $f(x, y) \geq 0$ la integral es un volumen



(a) $n = 16$



(b) $n = 64$



(c) $n = 256$

Dos propiedades de la integral doble sobre rectángulos

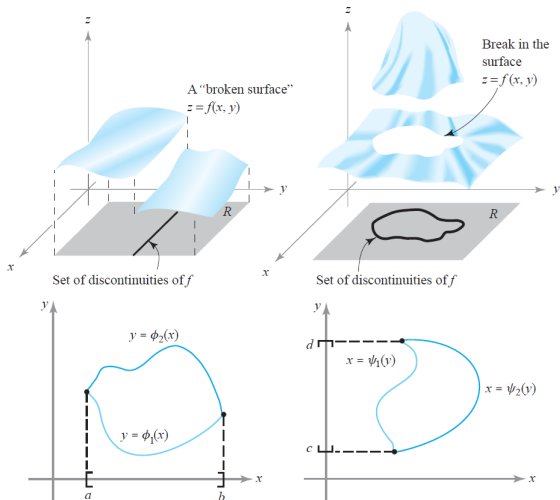
Teorema

Toda función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable en R .

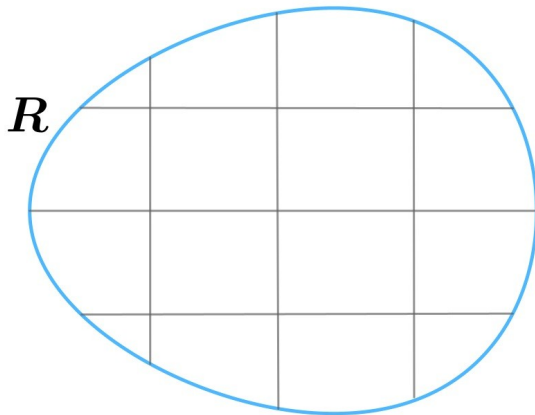
Teorema

Sea f una función definida en un rectángulo cerrado R , acotada y con valores reales. Si el conjunto de puntos donde f es discontinua está incluido en la unión finita de gráficos de funciones continuas, entonces f es integrable en R .

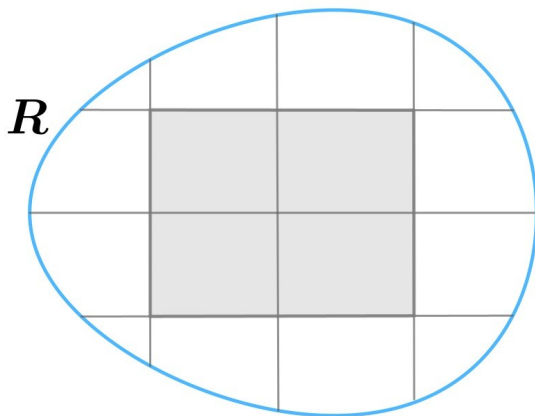
Dos propiedades de la integral doble sobre rectángulos



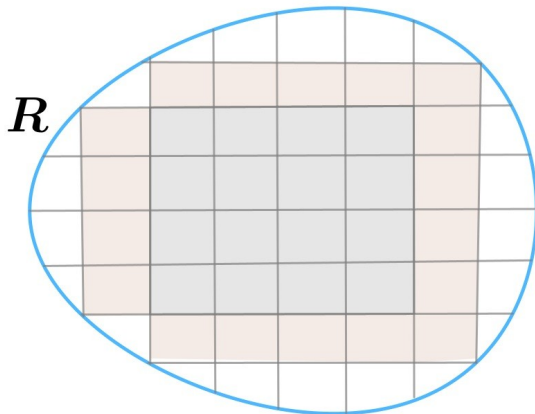
Definición de integral doble sobre otras regiones



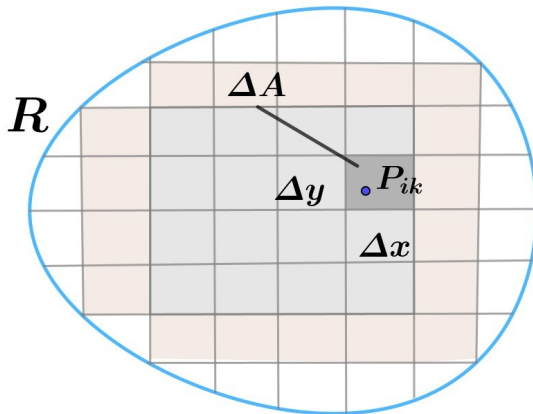
Definición de integral doble sobre otras regiones



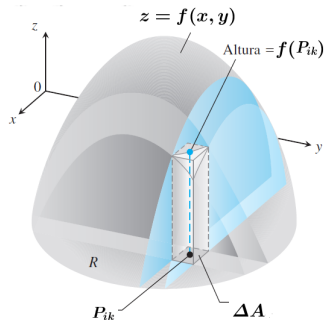
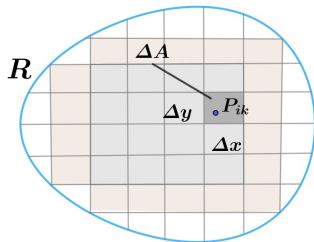
Definición de integral doble sobre otras regiones



Definición de integral doble sobre otras regiones



Definición de integral doble sobre otras regiones



Definición de integral doble sobre otras regiones

Definición (de integral doble sobre otras regiones)

Dadas una función f definida y acotada en una región cerrada y acotada R y una partición $\mathcal{P}$ de R (consideramos sólo los rectángulos incluidos en R). La suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ik}) \Delta A.$$

Definición de integral doble sobre otras regiones

Definición (de integral doble sobre otras regiones)

Dadas una función f definida y acotada en una región cerrada y acotada R y una partición $\mathcal{P}$ de R (consideramos sólo los rectángulos incluidos en R). La suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ik}) \Delta A.$$

Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe para cualquier elección de los puntos P_{ik} en los rectángulos R_{ik} , se dice que f es **integrable** sobre R . En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Propiedades de las integrales dobles

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R , entonces f es integrable en R .

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R , entonces:

$$2 \quad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

$$3 \quad \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

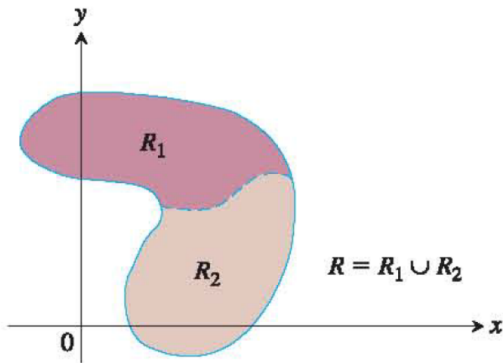
4 Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$,

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

- 5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$



1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

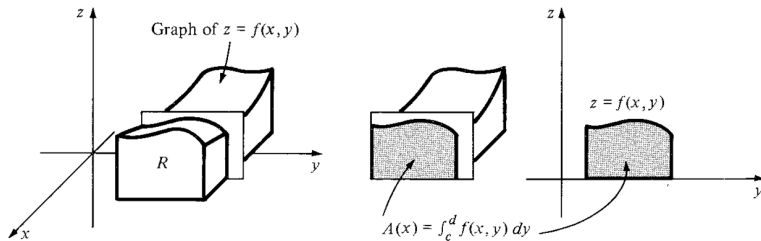
3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

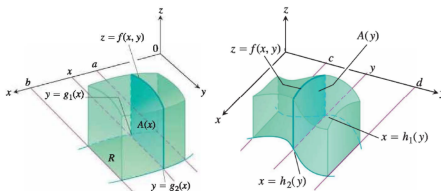
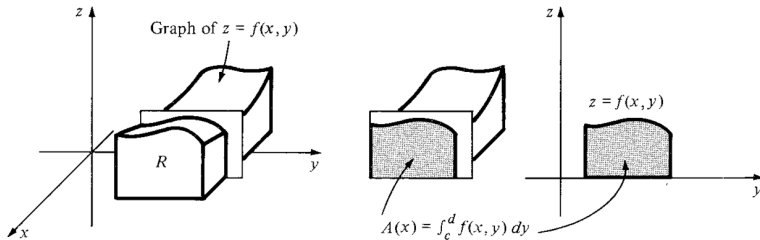
4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Integrales iteradas: Principio de Cavalieri



Integrales iteradas: Principio de Cavalieri



Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces*

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

- R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

- R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

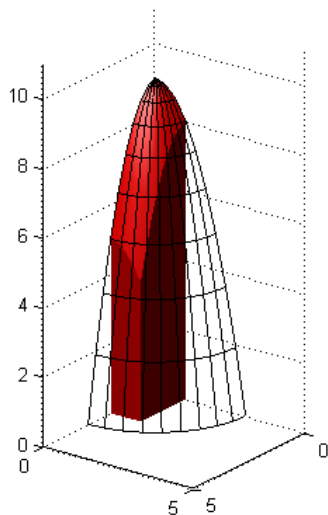
- R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Ejemplo

$$\int_0^2 \int_0^1 (9 - x^2 - y^2) dy dx$$

- ¿Cómo se calcula?
- ¿Qué obtengo al final del cálculo?
- ¿Cómo puedo interpretar ese resultado?



1. Calcule:

a) $\int_1^2 \int_0^4 2xy \, dy dx$

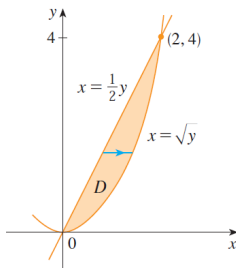
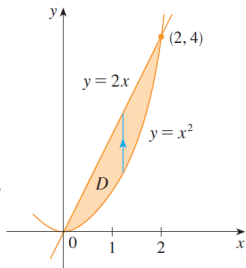
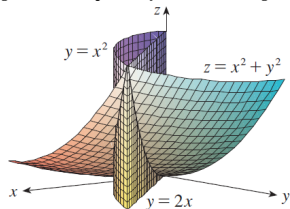
d) $\iint_R xy \cos y \, dA$, donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$

Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy , acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

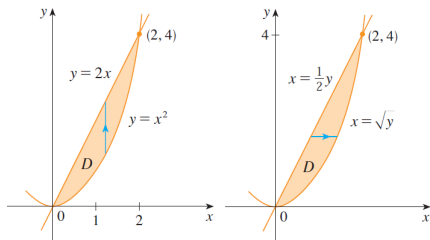
Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy , acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.



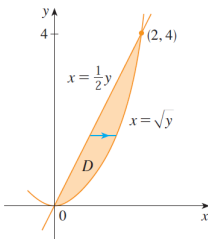
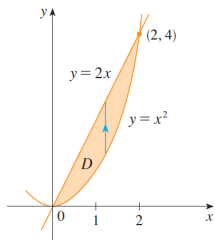
Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy , acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

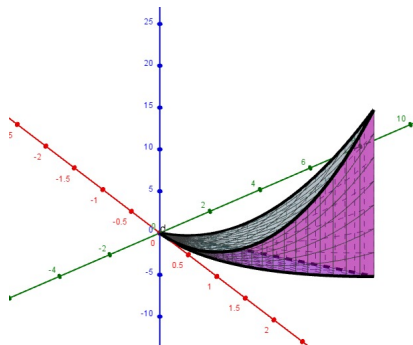


Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy , acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.



Rta: $\frac{216}{35} \approx 6,17$.



4. Trace las siguientes regiones de integración:

① $-1 \leq x \leq 2, x - 1 \leq y \leq x^2.$

② $-2 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4.$

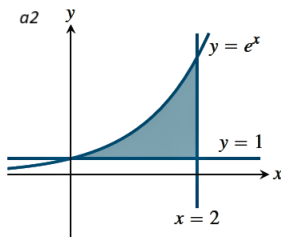
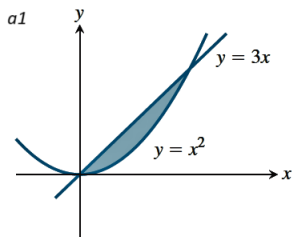
③ $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y.$

④ $1 \leq x \leq e^2, 0 \leq y \leq \ln x.$

Ejercicios del TP3

5. Escriba la integral iterada $\iint_R dA$ sobre la región descrita usando (i) secciones transversales verticales y (ii) secciones transversales horizontales.

1



- 2 Región acotada por $y = e^{-x}$, $y = 1$ y $x = \ln 3$.

6. Trace la región de integración y evalúe la integral.

d)
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, dt \, ds$$

e)
$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{\sec(t)} 3 \cos(t) \, du \, dt$$

10. Determine el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro de ecuación $z = x^2$ y abajo por la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$ en el plano xy .

15. Un sólido tiene su base R sobre el plano xy y está acotado por arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$. El volumen de dicho sólido es

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Grafique la región base R y exprese el volumen del sólido como una integral iterada simple con el orden de integración invertido. Luego evalúe la integral para determinar el volumen.

16. ¿Qué región R en el plano xy maximiza el valor de $\iint_R (4 - x^2 - 2y^2) dA$. Justifique su respuesta.

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f \, dA$

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f \, dA$

❶ La región de integración D es no acotada: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy \, dx.$

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f \, dA$

- ❶ La región de integración D es no acotada: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy \, dx$.
Este es el ejercicio 14 del TP3. Similares: ejercicios 18 y 32.

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f \, dA$

- ① La región de integración D es no acotada: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy \, dx$.

Este es el ejercicio 14 del TP3. Similares: ejercicios 18 y 32.

- ② f es continua en el interior de D pero no lo es en algunos puntos de su frontera: $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx$.

Nota sobre integrales impropias

Tipos de integrales impropias: $\iint_D f \, dA$

- ① La región de integración D es no acotada: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy \, dx$.

Este es el ejercicio 14 del TP3. Similares: ejercicios 18 y 32.

- ② f es continua en el interior de D pero no lo es en algunos puntos de su frontera: $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx$.

- ③ f es una función no acotada en puntos aislados de D :

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \, dx.$$

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

20. Las siguientes integrales y sumas de integrales dan áreas de regiones en el plano xy . Trace cada región, identifique cada curva de la frontera con su ecuación y obtenga las coordenadas de los puntos donde las curvas se cortan, luego calcule el área de la región.

a) $\int_0^6 \int_{\frac{y^2}{3}}^{2y} dx dy.$

c) $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-\frac{x}{2}}^{1-x} dy dx.$

20. Las siguientes integrales y sumas de integrales dan áreas de regiones en el plano xy . Trace cada región, identifique cada curva de la frontera con su ecuación y obtenga las coordenadas de los puntos donde las curvas se cortan, luego calcule el área de la región.

a) $\int_0^6 \int_{\frac{y^2}{3}}^{2y} dx dy.$

c) $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-\frac{x}{2}}^{1-x} dy dx.$

Se parece a lo que se resolvía con métodos de AMI.

Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría?

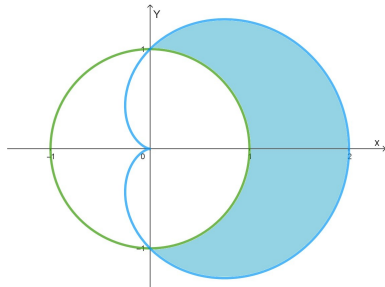
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

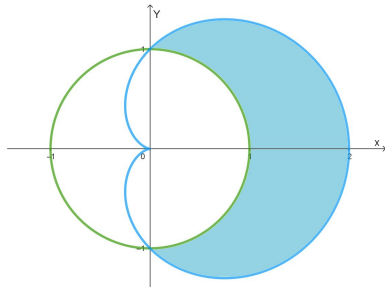
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

cardioide: $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$

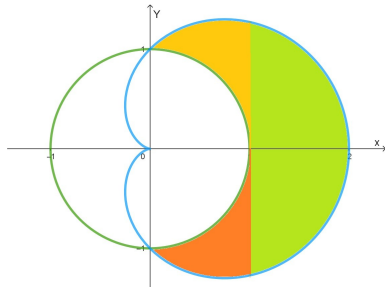
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

cardioide: $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$

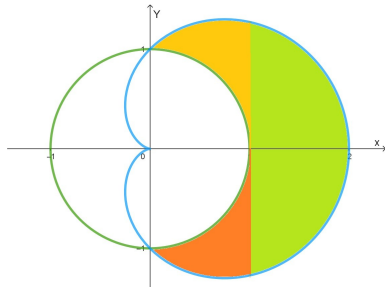
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:



circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

cardioide: $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$

Veremos una forma de calcular esta área.

Valor medio de una función integrable en una región cerrada y acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

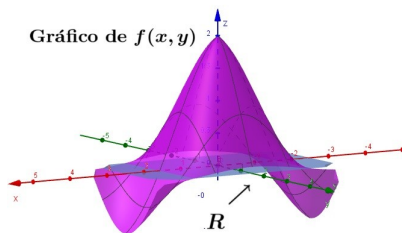
$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

Valor medio de una función integrable en una región cerrada y acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$



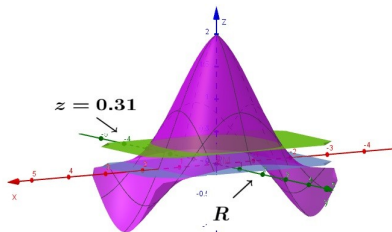
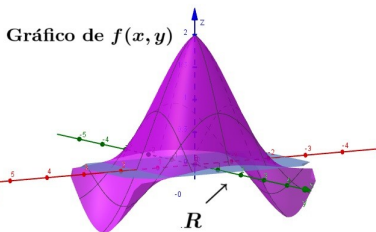
Valor medio de una función integrable en una región cerrada y acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

$$VM = \frac{1}{15} \int_{-2.5}^{2.5} \int_{-1.5}^{1.5} f(x, y) \, dy \, dx = 0.31$$



21. Calcule el valor promedio de $f(x, y) = \sin(x + y)$ sobre

- ① el rectángulo $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$;
- ② el rectángulo $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

TABLA 15.1 Fórmulas para la masa y primer momento

PLACA DE DOS DIMENSIONES

Masa: $M = \iint_R \delta \, dA$ $\delta = \delta(x, y)$ es la densidad en (x, y) .

Primeros momentos: $M_y = \iint_R x \delta \, dA, \quad M_x = \iint_R y \delta \, dA$

Centro de masa: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

TABLA 15.2 Fórmulas de momentos de inercia (segundos momentos)

PLACA DE DOS DIMENSIONES

Con respecto al eje x :
$$I_x = \iint y^2 \delta \, dA$$
 $\delta = \delta(x, y)$

Con respecto al eje y :
$$I_y = \iint x^2 \delta \, dA$$

Con respecto a la recta L :
$$I_L = \iint r^2(x, y) \delta \, dA$$
 $r(x, y) = \text{distancia desde el punto } (x, y) \text{ hasta la recta } L$

Con respecto al origen
(momento polar):
$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta \, dA = I_x + I_y$$

33. Calcule el centro de masa de una placa delgada de densidad $\delta = 3$ acotada por las rectas $x = 0$, $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$ en el primer cuadrante.
36. Calcule el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y , de una placa rectangular delgada cortada en el primer cuadrante por las rectas $x = 6$ y $y = 1$, si $\delta(x, y) = x + y + 1$ (plantear).

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos

Para resolver por sustitución la integral $I = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$, planteamos:

$$u = g(x); \quad du = g'(x) dx$$

y hacemos

$$I = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Recordemos

Para resolver por sustitución la integral $I = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$, planteamos:

$$u = g(x); \quad du = g'(x) dx$$

y hacemos

$$I = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

$$I = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx.$$

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Verificar que $\mathbf{r}(\rho, 0)$, $0 \leq \rho \leq 1$, es el segmento $[0, 1] \times 0$; y que $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio S y la imagen R de $\mathbf{r}$.

Verificar que $\mathbf{r}(\rho, 0)$, $0 \leq \rho \leq 1$, es el segmento $[0, 1] \times 0$; y que $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Esta transformación no es inyectiva en la frontera de S (todos los puntos $(0, \theta)$ tienen imagen $(0, 0)$), pero sí lo es en el interior de S .

Fórmula del cambio de variables

Para calcular

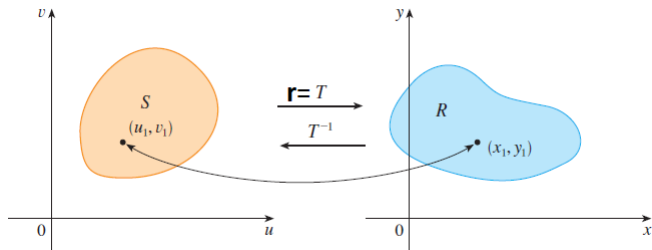
$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

Fórmula del cambio de variables

Para calcular

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

se puede definir una transformación



$$T : S \rightarrow R \quad \text{biyectiva}$$

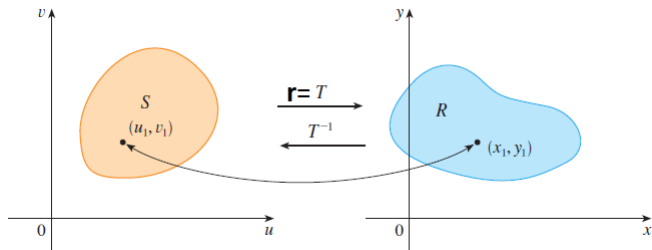
$$T(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

Fórmula del cambio de variables

Para calcular

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

se puede definir una transformación



$$T : S \rightarrow R \quad \text{biyectiva}$$

$$T(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

Se puede probar que **si** f es continua, x y y tienen derivadas parciales de primer orden continuas y el jacobiano de la transformación, $J(u, v)$, solo se anula en puntos aislados o nunca, **entonces**

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Definición

El Jacobiano de la transformación $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLES

Teorema

Supóngase que T es una transformación biyectiva de S en R , tal que sus componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en S y cuyo Jacobiano es no nulo en S . Supóngase que f es continua en R . Entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Observación: el teorema también vale si T no es inyectiva en puntos de la frontera de S .

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

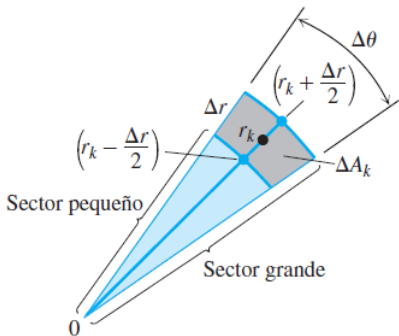
2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

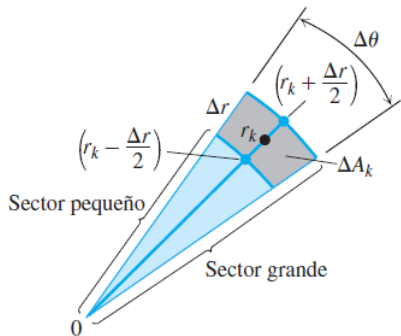
Radio interior: $\frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta\theta$.



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

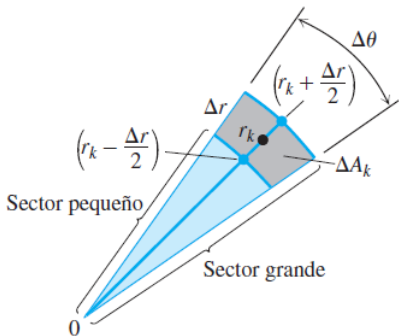
FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

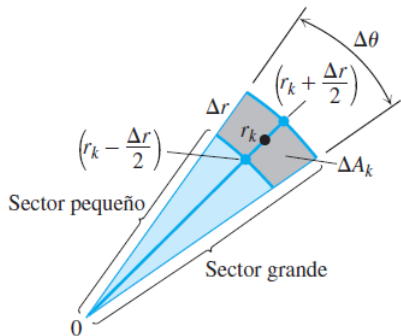
nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = |r| = r.$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y) dA$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **rectangulares**:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **rectangulares**:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **polares**:

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **polares**:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta$$

Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano xy ?

Planteo: $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **polares**:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 d\theta dr = \frac{\pi}{8}$$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es $A = \iint_R dA.$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es $A = \iint_R dA$.

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

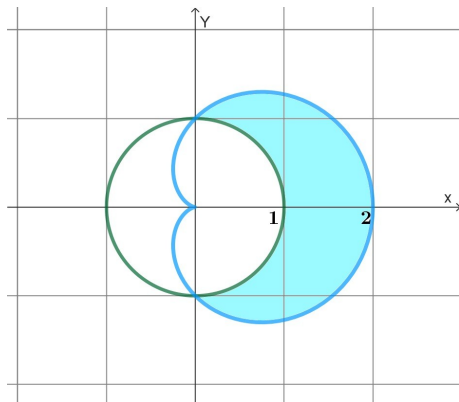
Si la región plana R es **acotada**, su área es $A = \iint_R dA$.

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:
Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es $A = \iint_R dA$.

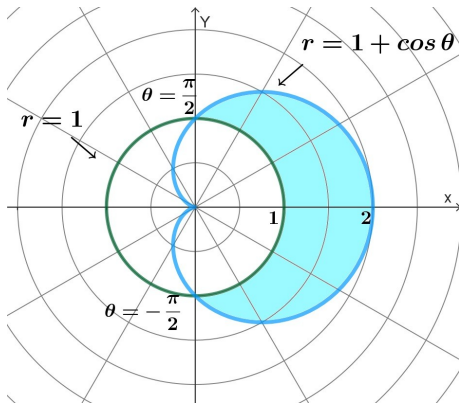
Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$:
Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.



Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es $A = \iint_R dA$.

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.

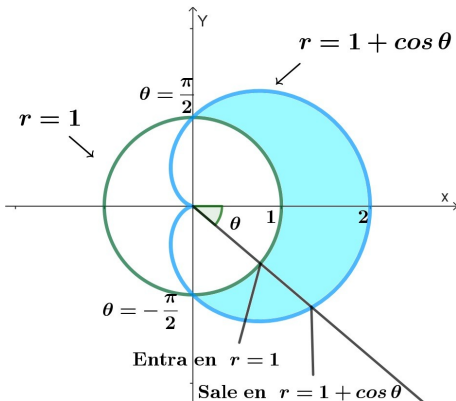


Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es

$$A = \iint_R dA.$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.

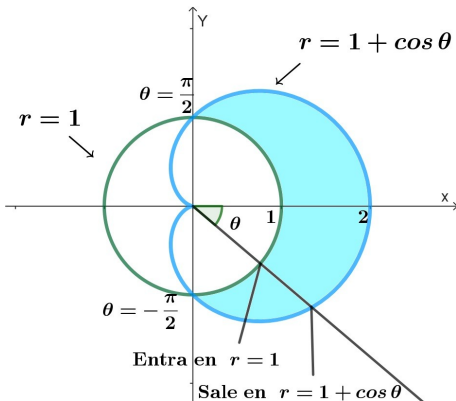


Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es

$$A = \iint_R dA.$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.



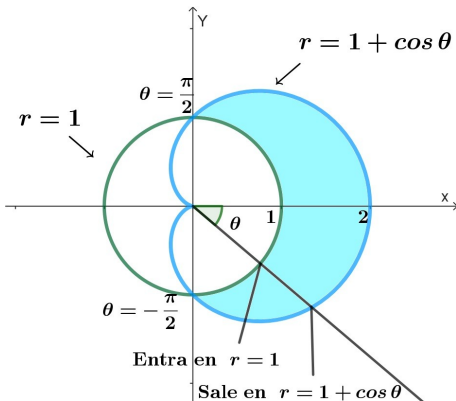
$$\begin{aligned} 1 + \cos(\theta) &= 1 \\ \cos(\theta) &= 0 \\ \theta_1 &= -\frac{\pi}{2} \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Aplicación al cálculo de áreas planas y acotadas

Si la región plana R es **acotada**, su área es

$$A = \iint_R dA.$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo centrado en $(0,0)$ y radio $r = 1$ y dentro de la cardioide de radio $r = 1 + \cos \theta$: Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.



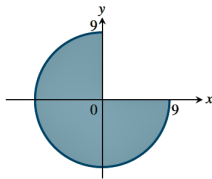
$$\begin{aligned} 1 + \cos(\theta) &= 1 \\ \cos(\theta) &= 0 \\ \theta_1 &= -\frac{\pi}{2} \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos(\theta)} r \, dr \, d\theta.$$

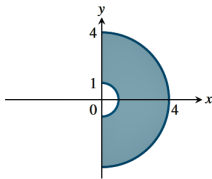
Ejercicios del TP3

23. (o) regiones 1,2,4 y 6 (r) 3 y 5. En los ejercicios dados a continuación, describe, en coordenadas polares, la región dada.

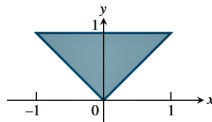
1. (o)



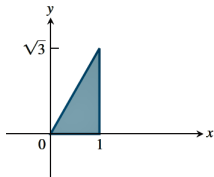
2. (o)



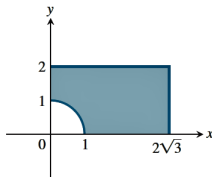
3. (r)



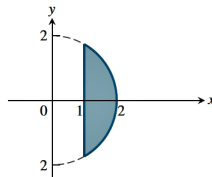
4. (o)



5. (r)



6. (o)



24. Cambie la integral cartesiana por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

1 $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy.$

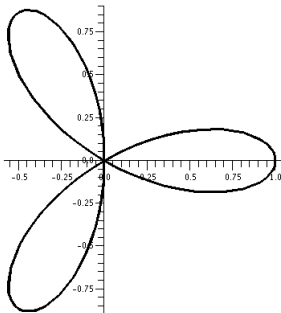
2 $\int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^y dx dy.$

3 $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx \text{ (plantear).}$

4 $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dy dx \text{ (plantear).}$

Ejercicios del TP3

27. Obtenga el área encerrada en el pétalo de una rosa $r = \cos(3\theta)$, en coordenadas polares (plantear).



28. Determine la altura promedio de la superficie hemisférica $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy (plantear).

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

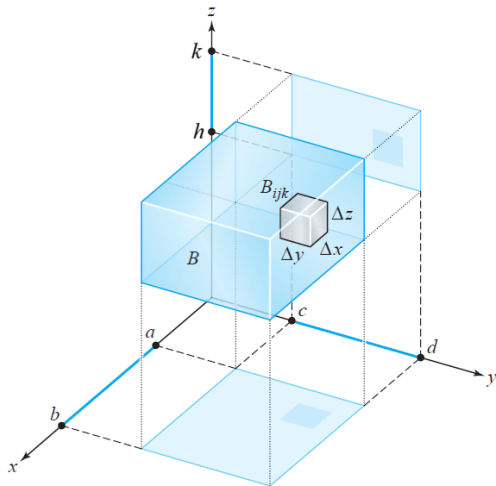
- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Partición de una caja en $\mathbb{R}^3$

Una caja o rectángulo generalizado o prisma en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto $R = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$.



Partición de una caja en $\mathbb{R}^3$

Una **partición regular** $\mathcal{P}$ de R está formada por tres colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}, \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ y } \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

tales que, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, se verifica que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{y} \quad x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n},$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \quad \text{y} \quad y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d - c}{n},$$

$$h = z_0 < z_1 < \dots < z_n = k \quad \text{y} \quad z_i - z_{i-1} = \Delta z = \frac{k - h}{n}$$

Integral triple sobre un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^3$

Definición (de integral triple sobre rectángulos)

Dadas una función f definida y acotada en un rectángulo R y una partición $\mathcal{P}$ de R , la suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ijk}) \Delta V.$$

Integral triple sobre un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^3$

Definición (de integral triple sobre rectángulos)

Dadas una función f definida y acotada en un rectángulo R y una partición $\mathcal{P}$ de R , la suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ijk}) \Delta V.$$

Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe para cualquier elección de puntos P_{ijk} en los rectángulos R_{ijk} , se dice que f es **integrable** sobre R . En este caso, la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV \quad \circ \quad \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Definición de integral triple sobre otras regiones

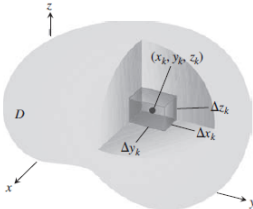


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k .

Definición de integral triple sobre otras regiones

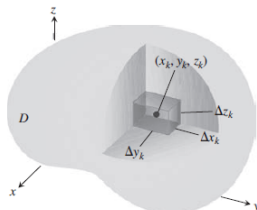


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k .

Dadas una función f , definida y **acotada** en una región acotada R , y una partición $\mathcal{P}$ de R , consideramos sólo los rectángulos incluidos en R . Formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ijk}) \Delta V$.

Definición de integral triple sobre otras regiones

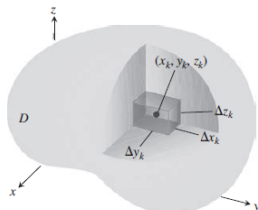


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k .

Dadas una función f , definida y **acotada** en una región acotada R , y una partición $\mathcal{P}$ de R , consideramos sólo los rectángulos incluidos en R . Formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(P_{ijk}) \Delta V$. Si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, para cualquier elección de (P_{ijk}) , se dice que f es **integrable** sobre R . En este caso, la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV \quad \circ \quad \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Propiedades de las integrales triples

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R , entonces f es integrable en R .

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R , entonces:

$$2 \quad \iiint_R [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_R f(x, y, z) dV + \iiint_R g(x, y, z) dV.$$

$$3 \quad \iiint_R c f(x, y, z) dV = c \iiint_R f(x, y, z) dV.$$

4 Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in R$,

$$\iiint_R f(x, y, z) dV \leq \iiint_R g(x, y, z) dv.$$

- 5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iiint_{R_1 \cup R_2} f(x, y, z) dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z) dV.$$

1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$), entonces*

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$), entonces

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_h^k f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_h^k f(x, y, z) dz dx dy \dots\end{aligned}$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$), entonces

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_h^k f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_h^k f(x, y, z) dz dx dy \dots\end{aligned}$$

- R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ y $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Teorema de Fubini

Teorema

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$), entonces

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_h^k f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_h^k f(x, y, z) dz dx dy \dots\end{aligned}$$

- R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ y $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

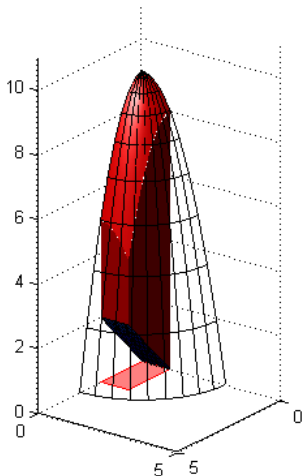
- Hay otros casos...

Ejemplo Teorema de Fubini

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D , comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano $z = x$, el plano $x = 2$ y el plano $y = 1$, en el primer octante.

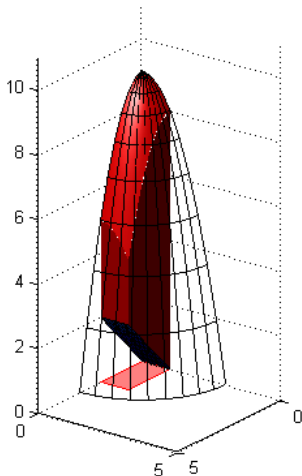
Ejemplo Teorema de Fubini

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D , comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano $z = x$, el plano $x = 2$ y el plano $y = 1$, en el primer octante.



Ejemplo Teorema de Fubini

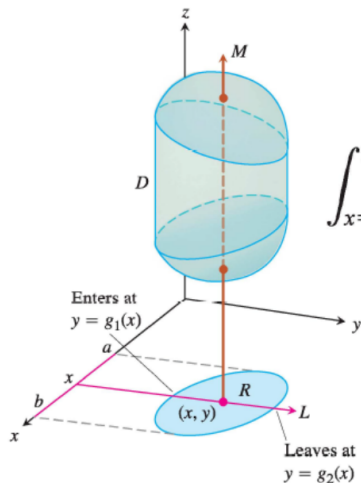
Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D , comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano $z = x$, el plano $x = 2$ y el plano $y = 1$, en el primer octante.



$$\int_0^2 \int_0^1 \int_x^{9-x^2-y^2} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Teorema de Fubini

Si F es continua en $D \subset \mathbb{R}^3$:



$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z) \, dz \, dy \, dx.$$

Valor medio de una función de tres variables

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{volumen de } R} \iiint_R f \, dV.$$

Valor medio de una función de tres variables

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{volumen de } R} \iiint_R f \, dV.$$

¿Cuál es la temperatura media del planeta Tierra?



Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es **cerrada y acotada**, su volumen es

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es **cerrada y acotada**, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es **cerrada y acotada**, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es **cerrada y acotada**, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x \delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y \delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z \delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

Aplicaciones

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es **cerrada y acotada**, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

Si tal sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x \delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y \delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z \delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

Observación: cuando δ es constante, el centro de masa se llama **centroide**.

TABLA 15.1 Fórmulas para la masa y primer momento

SÓLIDO TRIDIMENSIONAL

Masa: $M = \iiint_D \delta \, dV$ $\delta = \delta(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z) .

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_D x \, \delta \, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \, \delta \, dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z \, \delta \, dV$$

Centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

TABLA 15.2 Fórmulas de momentos de inercia (segundos momentos)

SÓLIDO DE TRES DIMENSIONES

Con respecto al eje x :
$$I_x = \iiint (y^2 + z^2) \delta \, dV \quad \delta = \delta(x, y, z)$$

Con respecto al eje y :
$$I_y = \iiint (x^2 + z^2) \delta \, dV$$

Con respecto al eje z :
$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \delta \, dV$$

Con respecto a la recta L :
$$I_L = \iiint r^2 \delta \, dV$$
 $r(x, y, z)$ = distancia del punto (x, y, z) a la recta L

Ejemplo: masa

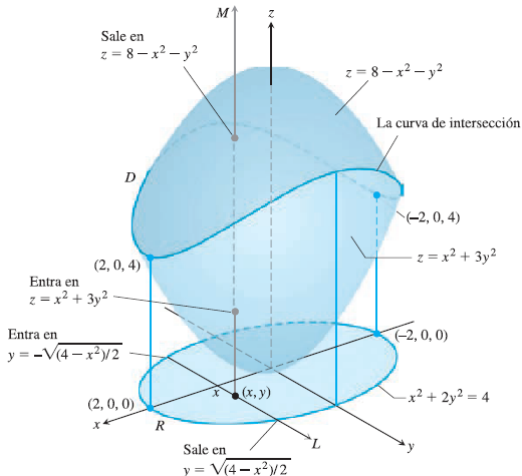
Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$.

Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL: (pag.862)

Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL: (pag.862)



Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL: (pag.862)



38. Escriba seis diferentes integrales triples iteradas que permitan calcular el volumen de:
- b) El tetraedro determinado en el primer octante por el plano $6x + 3y + 2z = 6$. Evalúe una de las integrales.
39. Sea D la región acotada por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$. Escriba dos integrales triples que permitan calcular el volumen de D . Evalúe una de ellas.

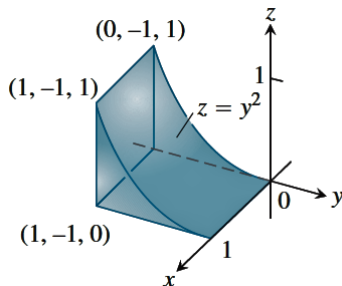
Ejercicios del TP3

40. Represente el sólido correspondiente a la región de integración (y calcule cada integral, en casa):

b)
$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx.$$

41. La siguiente es la región de integración de la integral

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz \, dy \, dx.$$



Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden:

1 $dy \, dz \, dx.$

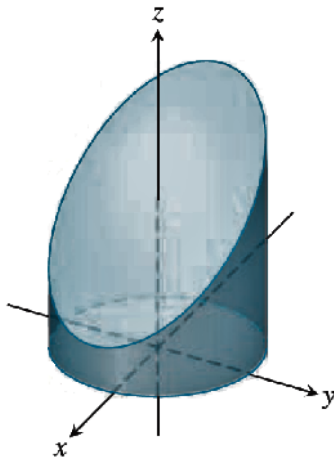
2 $dx \, dy \, dz.$

3 $dz \, dx \, dy.$

Ejercicios del TP3

42. Calcule el volumen de

- c) la región cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$ (gráfico 3).



1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
 - Integrales dobles sobre regiones generales
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Nota sobre integrales impropias

2 Aplicaciones: áreas, valor medio, momentos y centros de masa

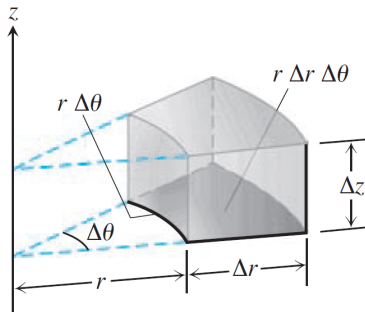
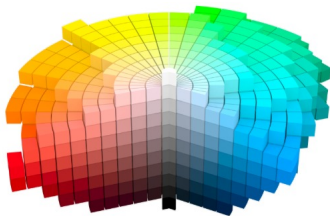
3 Fórmula del cambio de variables

- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares

4 Integrales múltiples

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas



Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r \cos \theta; \quad h(r, \theta, z) = y = r \sin \theta; \quad k(r, \theta, z) = z$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r \cos \theta; \quad h(r, \theta, z) = y = r \sin \theta; \quad k(r, \theta, z) = z$$

Jacobiano:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r \cos \theta; \quad h(r, \theta, z) = y = r \sin \theta; \quad k(r, \theta, z) = z$$

Jacobiano:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 4$$

Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Ejercicios del TP3

45. Evalúe las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas:

a) $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz \, r \, dr \, d\theta$ y represente gráficamente la región de integración.

c) $\int_0^\pi \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z \, dz \, r \, dr \, d\theta.$

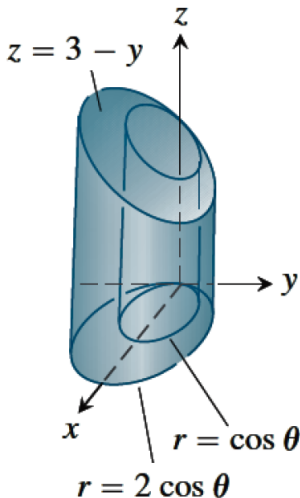
48. Convierta la integral $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz \, dx \, dy$ en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas y evalúe el resultado.

Ejercicios del TP3

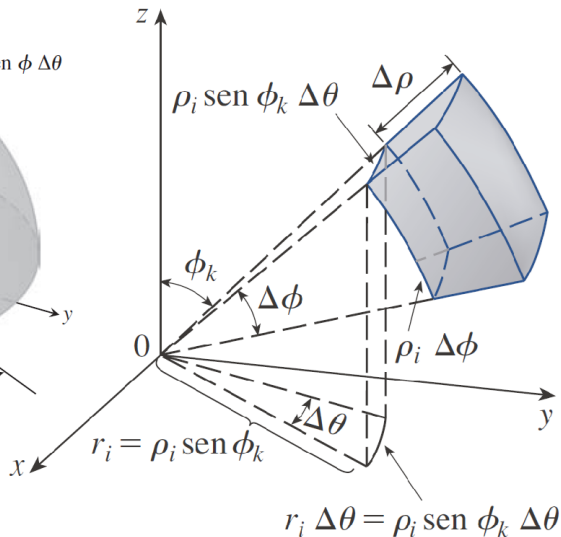
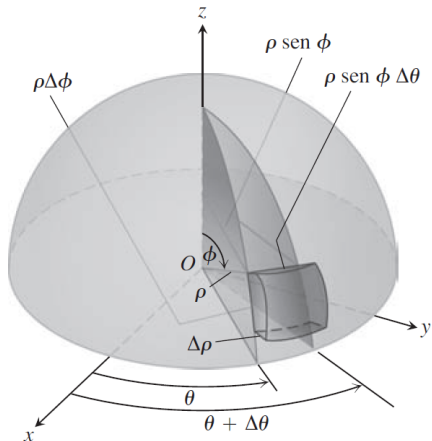
49. En los siguientes ejercicios, enuncie la integral iterada para evaluar

$$\iiint_D f(r, \theta, z) dz r dr d\theta \text{ sobre la región } D \text{ dada.}$$

- d) D es el cilindro recto sólido cuya base es la región entre las circunferencias $r = \cos \theta$ y $r = 2 \cos \theta$ y cuya parte superior está en el plano $z = 3 - y$.



Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas



Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$\begin{aligned}g(\rho, \theta, \phi) = x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; & h(\rho, \theta, \phi) = y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta; \\k(\rho, \theta, \phi) = z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho, \theta, \phi) = x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; \quad h(\rho, \theta, \phi) = y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$$

$$k(\rho, \theta, \phi) = z = \rho \cos \phi$$

Jacobiano:

Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho, \theta, \phi) = x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; \quad h(\rho, \theta, \phi) = y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$$

$$k(\rho, \theta, \phi) = z = \rho \cos \phi$$

Jacobiano:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Plantear una integral que dé el volumen de D .

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

50. Evalúe las siguientes integrales (dadas en coordenadas esféricas) y represente gráficamente la región de integración en cada caso.

a)
$$\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

d)
$$\int_0^2 \int_0^\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \sin(2\phi) \, d\phi \, d\theta \, d\rho.$$

Ejercicios del TP3

52. Para cada uno de los siguientes sólidos, determine los límites en coordenadas esféricas para la integral que da el volumen del sólido dado y evalúe la integral.
- a) El sólido entre la esfera $\rho = \cos \phi$ y el hemisferio $\rho = 2, z \geq 0$ (Figura 4).
 - b) El sólido acotado abajo por la esfera $\rho = 2 \cos \phi$ y arriba por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Figura 5).

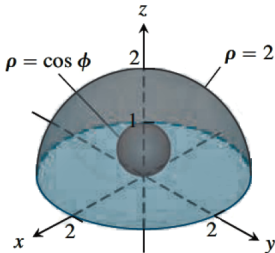


Figura 4

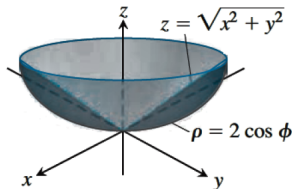


Figura 5