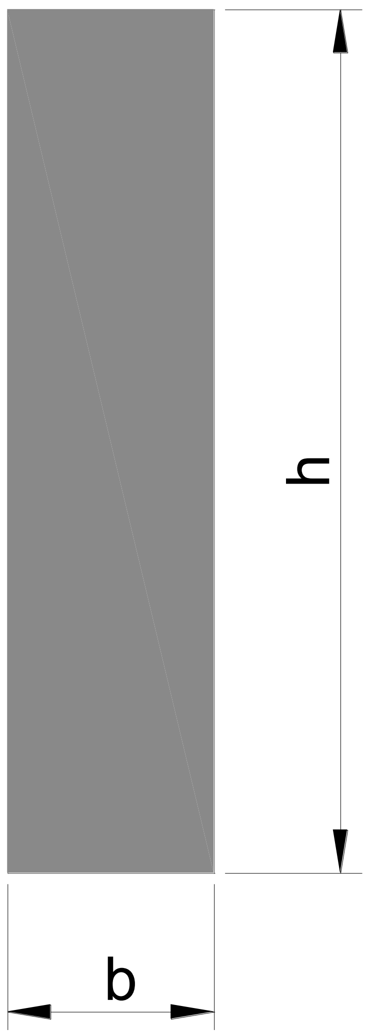
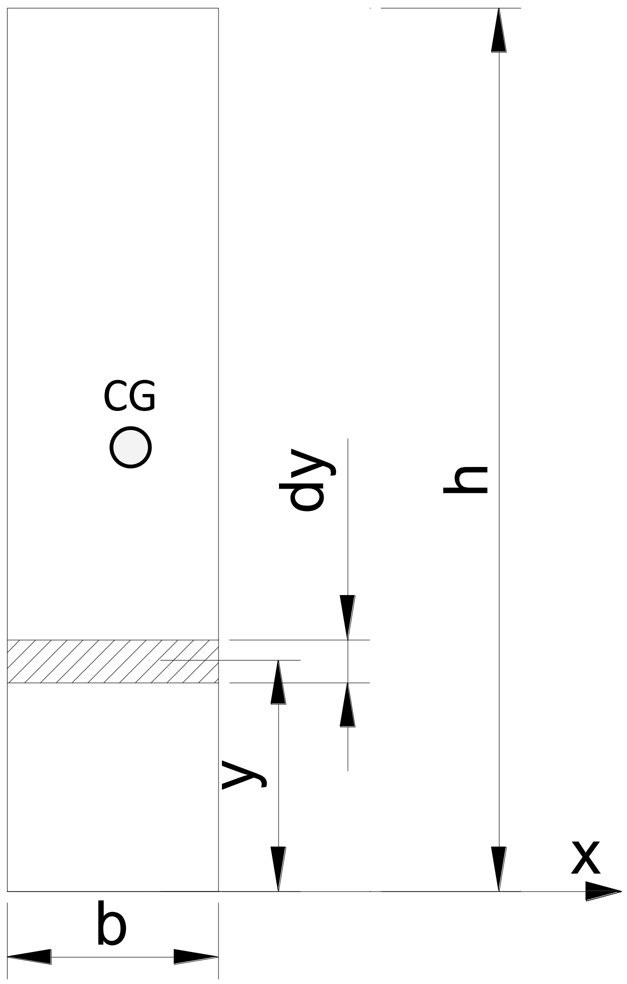
UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES

Áreas



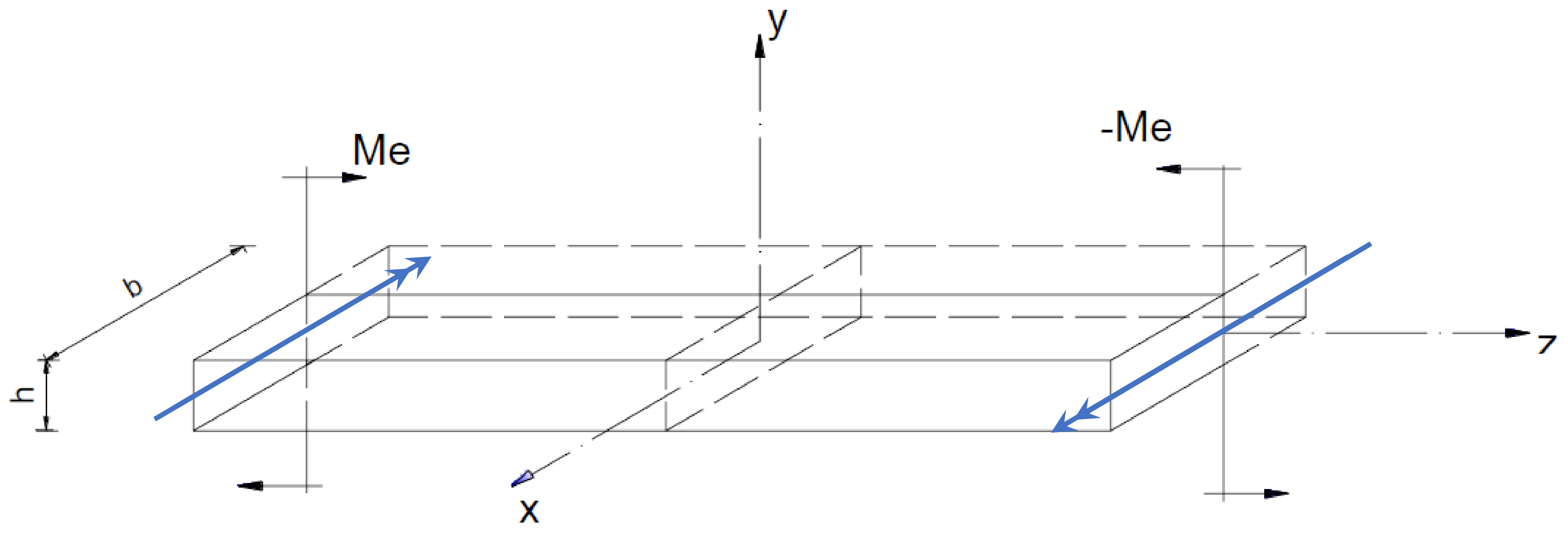


$$A = \int dx \cdot dy$$

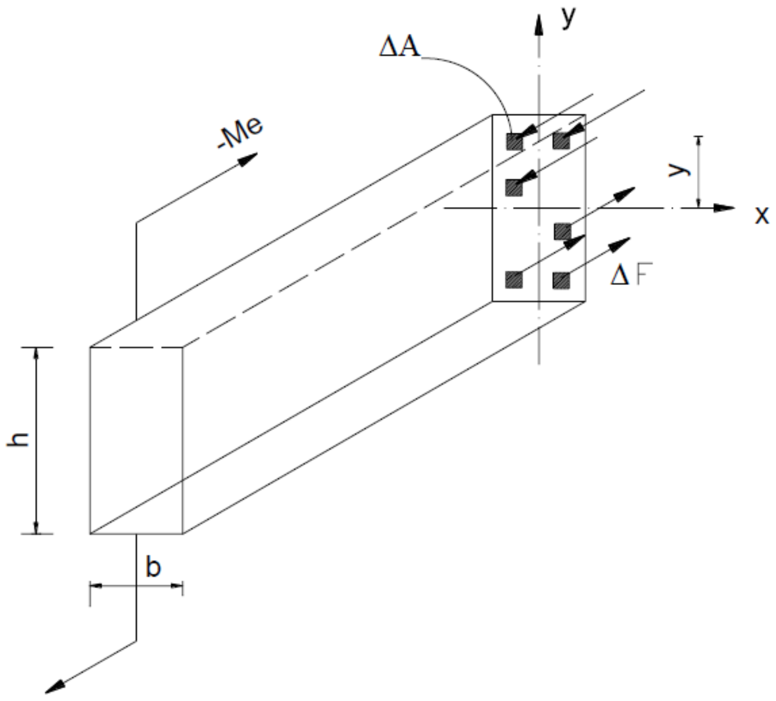
$$A = \int_0^h b \cdot dy = b \cdot h$$

$$S_x = \int_0^h b \cdot y \cdot dy = b \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{b \cdot \frac{h^2}{2}}{b \cdot h} = \frac{h}{2}$$



y
Me
-Me
b
h
z
x



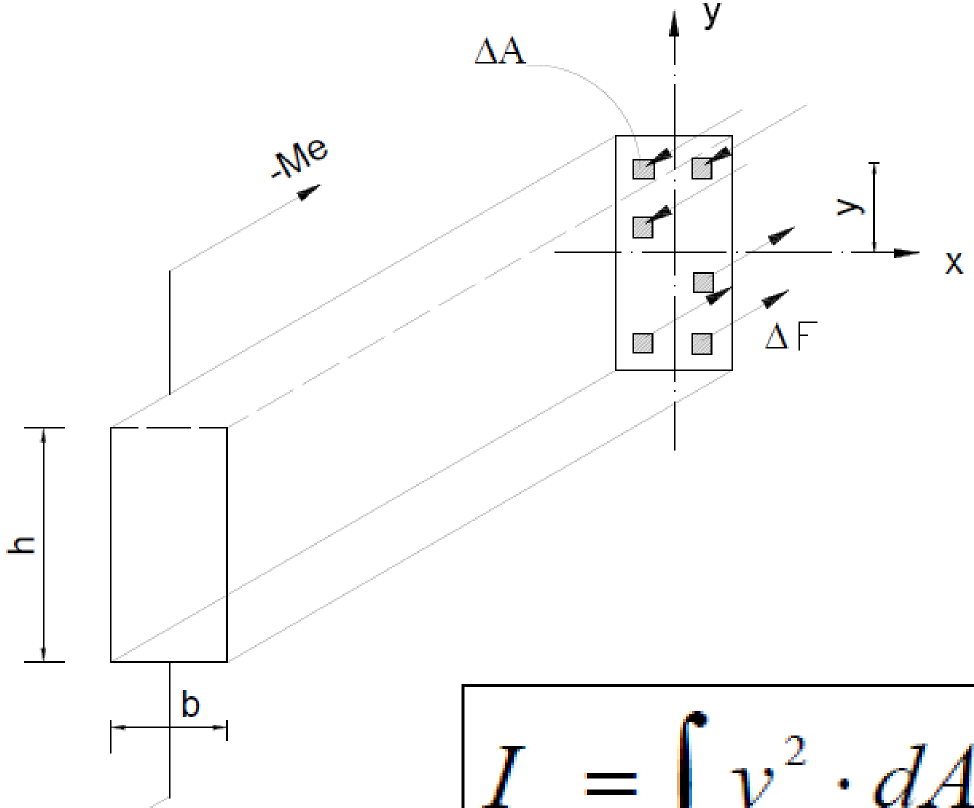
y
ΔA
-Me
y
x
ΔF
h
b

Momento de Inercia

$$\Delta F = k \cdot \Delta A \cdot y$$

$$R = \int_A dF = \int_A k \cdot y \cdot dA = k \cdot \int_A y \cdot dA = k \cdot S_x = 0$$

$$M_x = \int_A dF \cdot y = \int_A k \cdot y \cdot y \cdot dA = k \cdot \int_A y^2 \cdot dA$$



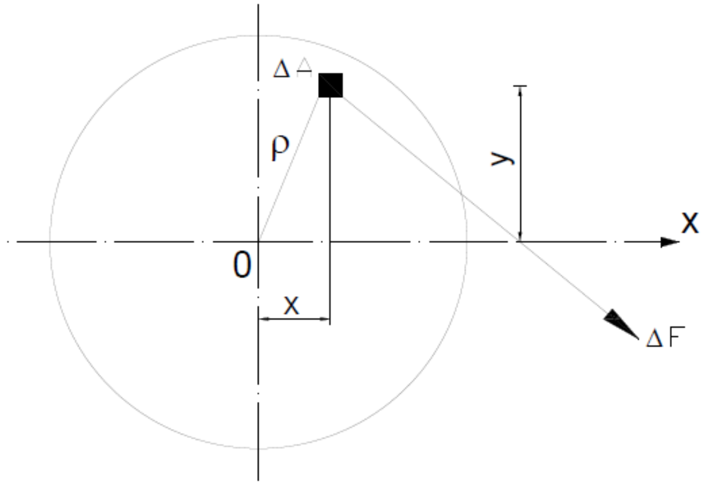
$$\boxed{I_x = \int_A y^2 \cdot dA}$$

Se define: *"Momento de Inercia respecto a una sección de un eje (x), una característica geométrica de la sección, determinada por la expresión matemática":*

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

El momento de inercia centrífugo se define como: $I_{xy} = \int_A dA \cdot x \cdot y$

MOMENTO POLAR DE INERCIA



$$\Delta F = k \cdot \rho \cdot (\Delta A)$$

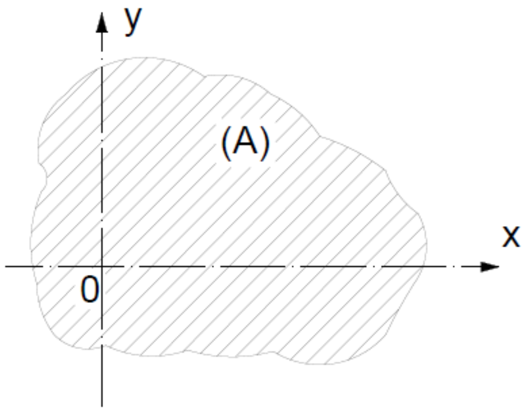
$$\boxed{\begin{aligned} M_0^{(i)} &= \int_A \rho \cdot dF = \int_A \rho^2 \cdot k \cdot dA = k \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA = k \cdot I_0 \\ M_0^{(i)} &= k \cdot I_0 \end{aligned}}$$

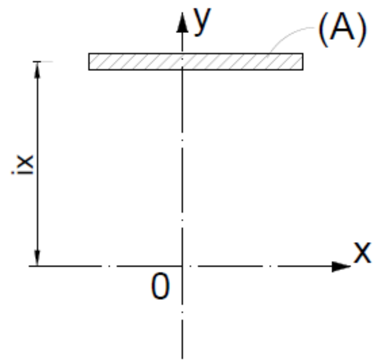
$$\boxed{I_o = \int_A \rho^2 \cdot dA}$$

$$I_o = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\boxed{I_o = I_x + I_y}$$

Radio de Giro de un Área ix





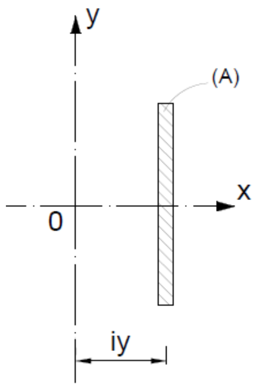
$$I_x = i_x^2 \cdot A$$

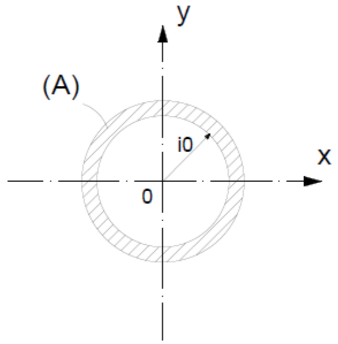
$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad \Rightarrow \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$I_y = i_y^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad \Rightarrow \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$I_o = i_o^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad i_o^2 = \frac{I_o}{A} \quad \Rightarrow \quad i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

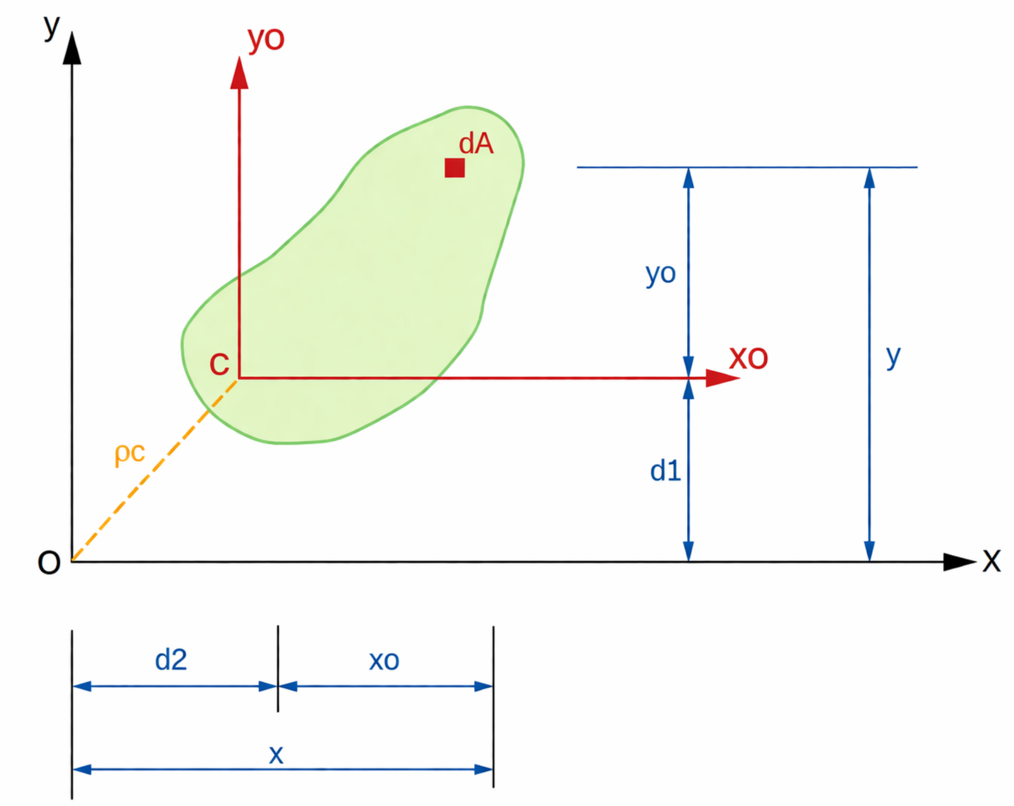
$$i_o^2 \cdot A = i_x^2 \cdot A + i_y^2 \cdot A \qquad \boxed{i_o^2 = i_x^2 + i_y^2}$$





TEOREMA DE STEINNER O DE LOS EJES PARALELOS

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$



Pero $y = y_0 + d_1 \quad \therefore \quad I_x = \int (y_0 + d_1)^2 \cdot dA$

$$I_x = \int_A y_0^2 \cdot dA + \int_A d_1^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot y_0 \cdot d_1 \cdot dA$$

$$= \int_A y_0^2 \cdot dA + d_1^2 \cdot \int_A dA + 2 \cdot d_1 \cdot \int_A y_0 \cdot dA$$

$$I_{x0} = \int_A y_0^2 \cdot dA \quad ; \quad \int_A dA = A$$

$\int_A y_0 \cdot dA = 0 = S_{x0}$ Momento Estático Respecto al Eje Baricéntrico

$$\boxed{I_x = I_{x0} + d_1^2 \cdot A} \qquad \boxed{I_y = I_{y0} + d_2^2 \cdot A}$$

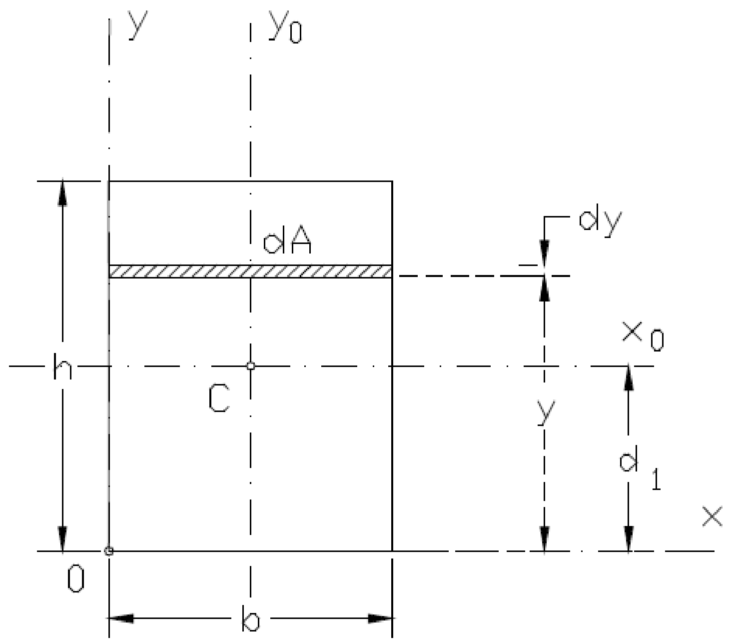
$$I_{xy} = \int_A dA \cdot x \cdot y = \int_A dA \cdot (x_0 + d_2) \cdot (y_0 + d_1)$$

$$= \int_A x_0 \cdot y_0 \cdot dA + \underbrace{\int_A x_0 \cdot d_1 \cdot dA}_{=0} + \underbrace{\int_A d_2 \cdot y_0 \cdot dA}_{=0} + \int_A d_2 \cdot d_1 \cdot dA$$

Momentos estáticos con respecto a ejes baricéntricos

$$\boxed{I_{xy} = I_{x0y0} + d_1 \cdot d_2 \cdot A}$$

5.1. RECTÁNGULO



Considerando un elemento de área (A) y espesor infinitésimo, el momento de inercia respecto al eje (x), será:

$$I_x = \int y^2 \cdot dA = \int^h y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Aplicando el momento de inercia respecto a ejes paralelos:

$$I_x = I_{x_0} + d_1^2 \cdot A \qquad \Rightarrow \qquad I_{x_0} = I_x - d_1^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h$$

$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

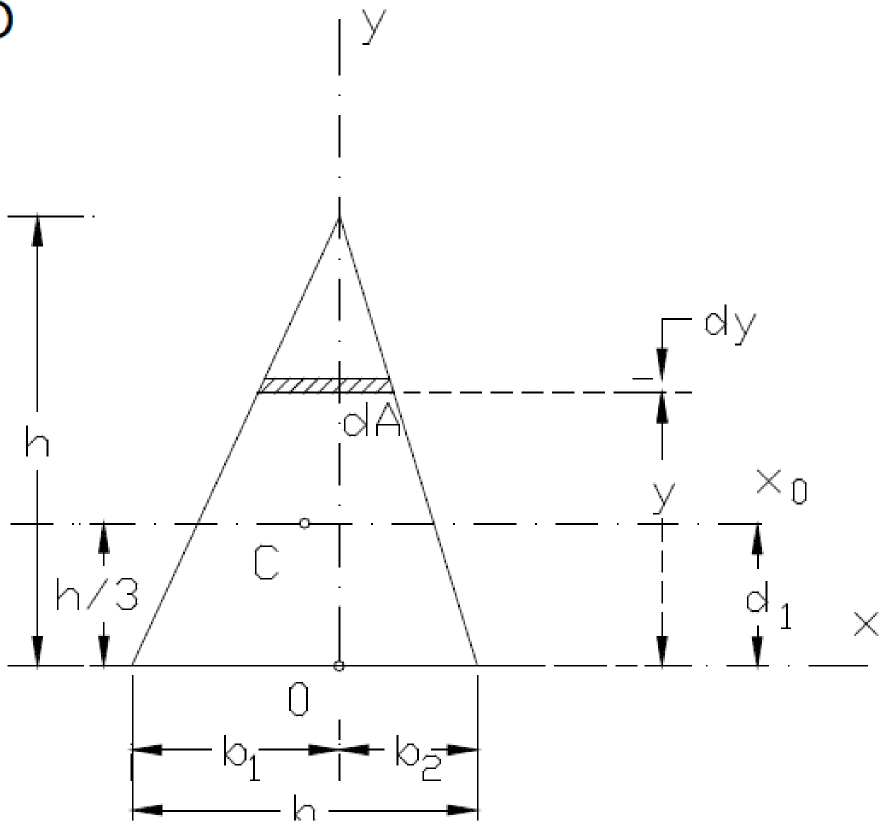
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Aplicando la definición de radio de giro:

$$i_{x0} = \sqrt{\frac{I_{x0}}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FACULTAD DE INGENIERÍA

TRIÁNGULO



por relación de triángulos:

$$b_y = \frac{b}{h} \cdot (h - y)$$

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \qquad dA = b_y \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot (h - y)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h} \cdot (h - y) \cdot dy$$

$$I_x = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy - \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^4}{h \cdot 4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

radio de giro

$$i_{x0}^{\ 2} = \frac{I_{x0}}{A} = \frac{b \cdot h^3}{36} \frac{2}{b \cdot h} = \frac{h^2}{18}$$

$$i_{x0} = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

$$I_{x0} = I_x - d^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

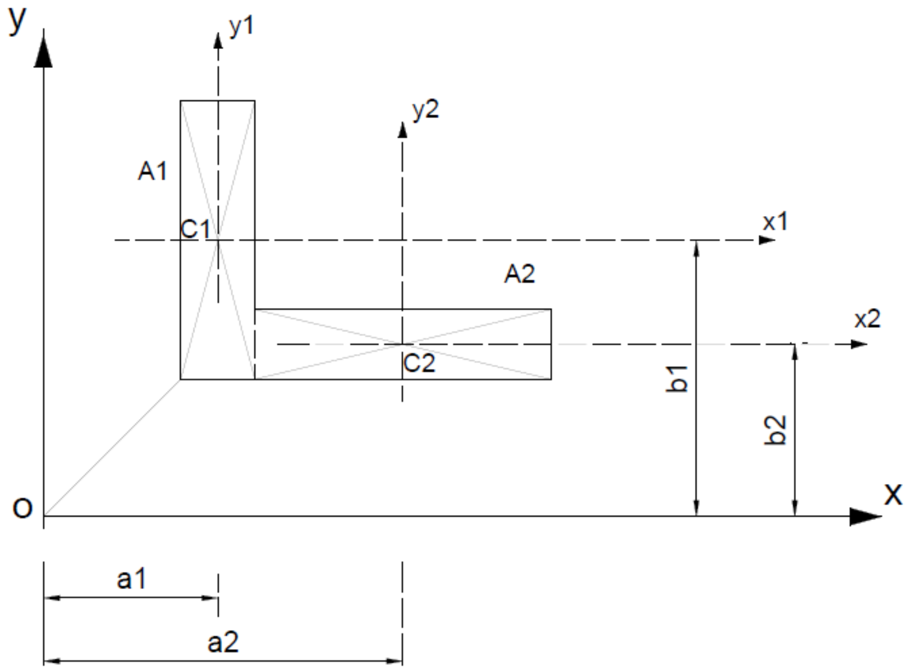
$$I_{x0} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

Áreas Compuestas

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + \dots$$

$$\int_A y^2 \cdot dA = \int_{A1} y^2 \cdot dA + \int_{A2} y^2 \cdot dA + \int_{A3} y^2 \cdot dA + \dots$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$



Con la definición anterior se tendrá:

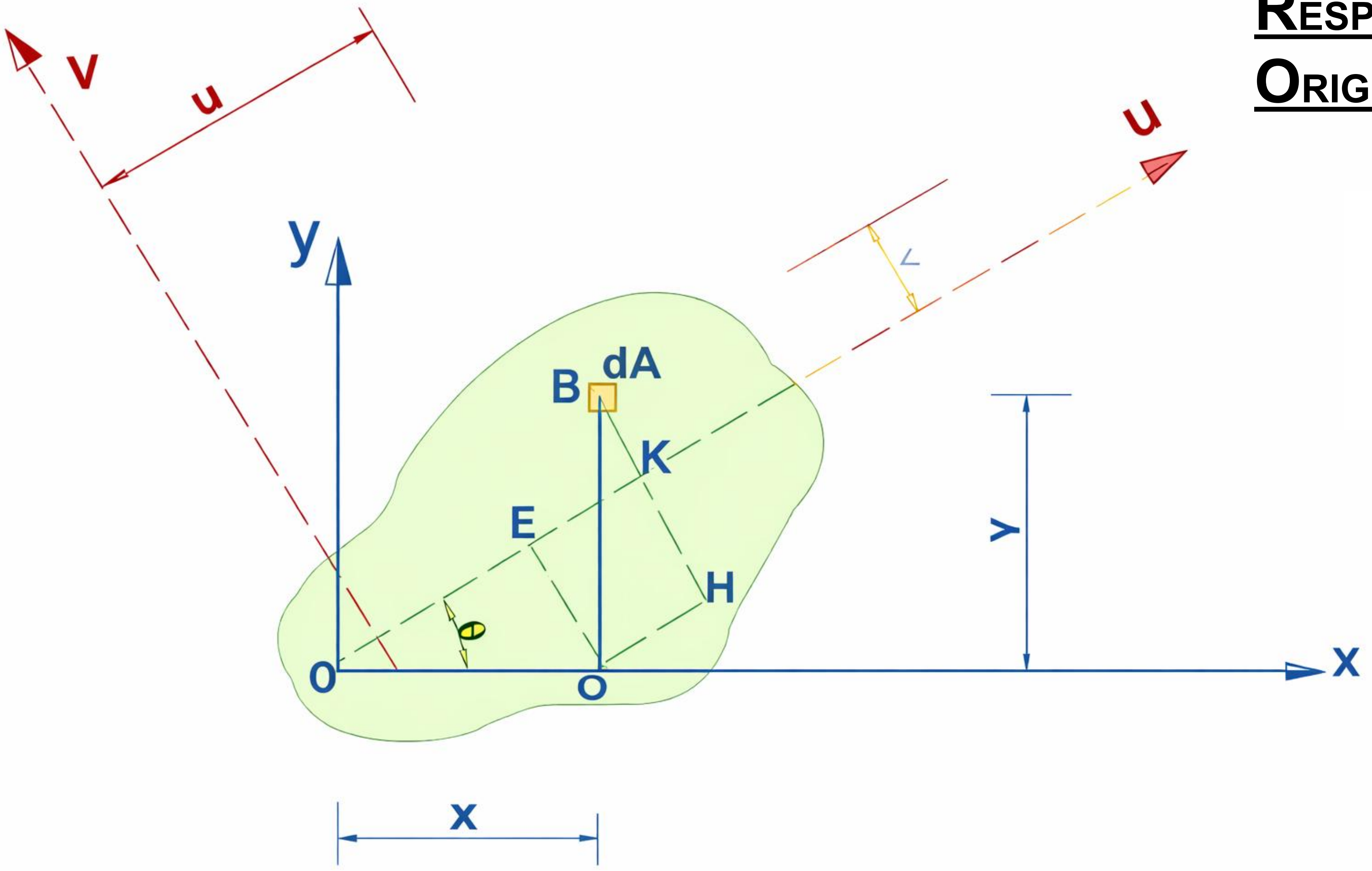
$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)}$$

donde $I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1$; $I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + b_2^2 \cdot A_2$

entonces:

$$I_x = I_{x_1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{x_2}^{(2)} + b_2^2 \cdot A_2$$

Momentos de Segundo Orden Respecto a Ejes del Mismo Origen



$$u = \overline{OK} = \overline{OE} + \overline{EK}$$

$$u = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot sen(\theta)$$

$$v = \overline{BK} = \overline{BH} + \overline{HK}$$

$$v = y \cdot \cos(\theta) - x \cdot sen(\theta)$$

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A [y \cdot \cos(\theta) - x \cdot sen(\theta)]^2 \cdot dA$$

$$I_u = \cos^2(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA + sen^2(\theta) \cdot \int_A x^2 \cdot dA - 2 \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA$$

pero $sen(\theta) \cdot \cos(\theta) = sen\frac{2 \cdot \theta}{2}$

$$\boxed{I_u = I_x \cdot \cos^2(\theta) + I_y \cdot sen^2(\theta) - I_{xy} \cdot sen(2 \cdot \theta)}$$

análogamente se obtiene:

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA$$

$$I_u = \cos^2(\theta) \cdot \int_A x^2 \cdot dA + sen^2(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA + 2 \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$\boxed{I_v = I_x \cdot sen^2(\theta) + I_y \cdot \cos^2(\theta) + I_{xy} \cdot sen(2 \cdot \theta)} \qquad (2)$$

Si ahora se suma miembro a miembro las expresiones

$$I_u + I_v = I_x \cdot [\cos^2(\theta) + sen^2(\theta)] + I_y \cdot [\cos^2(\theta) + sen^2(\theta)] = I_x + I_y$$

$$I_u + I_v = I_x + I_y = cte = I_0$$

para el momento de inercia centrífugo se tendrá:

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \left[\int_A x \cdot \cos(\theta) \cdot dA + \int_A y \cdot sen(\theta) \cdot dA \right] \cdot \left[\int_A y \cdot \cos(\theta) \cdot dA - \int_A x \cdot sen(\theta) \cdot dA \right]$$

$$I_{uv} = \cos^2(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA - sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A x^2 \cdot dA + sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA - sen^2(\theta) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$I_{uv} = \cos^2(\theta) \cdot I_{xy} - sen^2(\theta) \cdot I_{xy} - sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_y + sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_x$$

agrupando convenientemente y sacando factor común:

$$I_{uv} = I_{xy} \cdot \underbrace{\left[\cos^2(\theta) - sen^2(\theta)\right]}_{\cos(2 \cdot \theta)} - \frac{sen(2 \cdot \theta)}{2} \cdot I_y + \frac{sen(2 \cdot \theta)}{2} \cdot I_x$$

$$\boxed{I_{uv} = I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot sen(2 \cdot \theta)}$$

$\mathrm{Re}\,cordando:$

$$sen(\theta) \cdot \cos(\theta) = \frac{sen(2 \cdot \theta)}{2}$$

$$\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = \cos(2 \cdot \theta)$$

$$\cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$$

EJES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

$$\frac{dI_u}{d\theta} = 2 \cdot I_x \cdot \cos\theta \cdot [-sen(\theta)] + 2 \cdot I_y \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta)$$

$$\left.\frac{dI_u}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_O} = -(I_x - I_y) \cdot sen(2 \cdot \theta_o) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta_o) = 0$$

$$\boxed{tg(2 \cdot \theta_o) = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} \cdot (I_x - I_y)}}$$

$$\boxed{I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}}}$$

Se denomina ejes principales de inercia a los que poseen las siguientes propiedades:

a) Los momentos de inercia respecto a ellos, tienen valores extremos, respecto a uno de ellos es máximo y respecto al otro es mínimo.

b) Son perpendiculares entre sí.

c) El momento centrífugo respecto a los ejes principales es nulo, o sea *son ejes conjugados de inercia.*

$$2 \cdot \frac{\theta_o}{2} = \theta_o \qquad \text{y} \qquad \frac{2 \cdot \theta_o + \pi}{2} = \theta_o + \frac{\pi}{2}$$