



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 2

Trabajo y Energía

Desplazamientos. Deformaciones. Teoremas Energéticos

CURSO 2.026

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

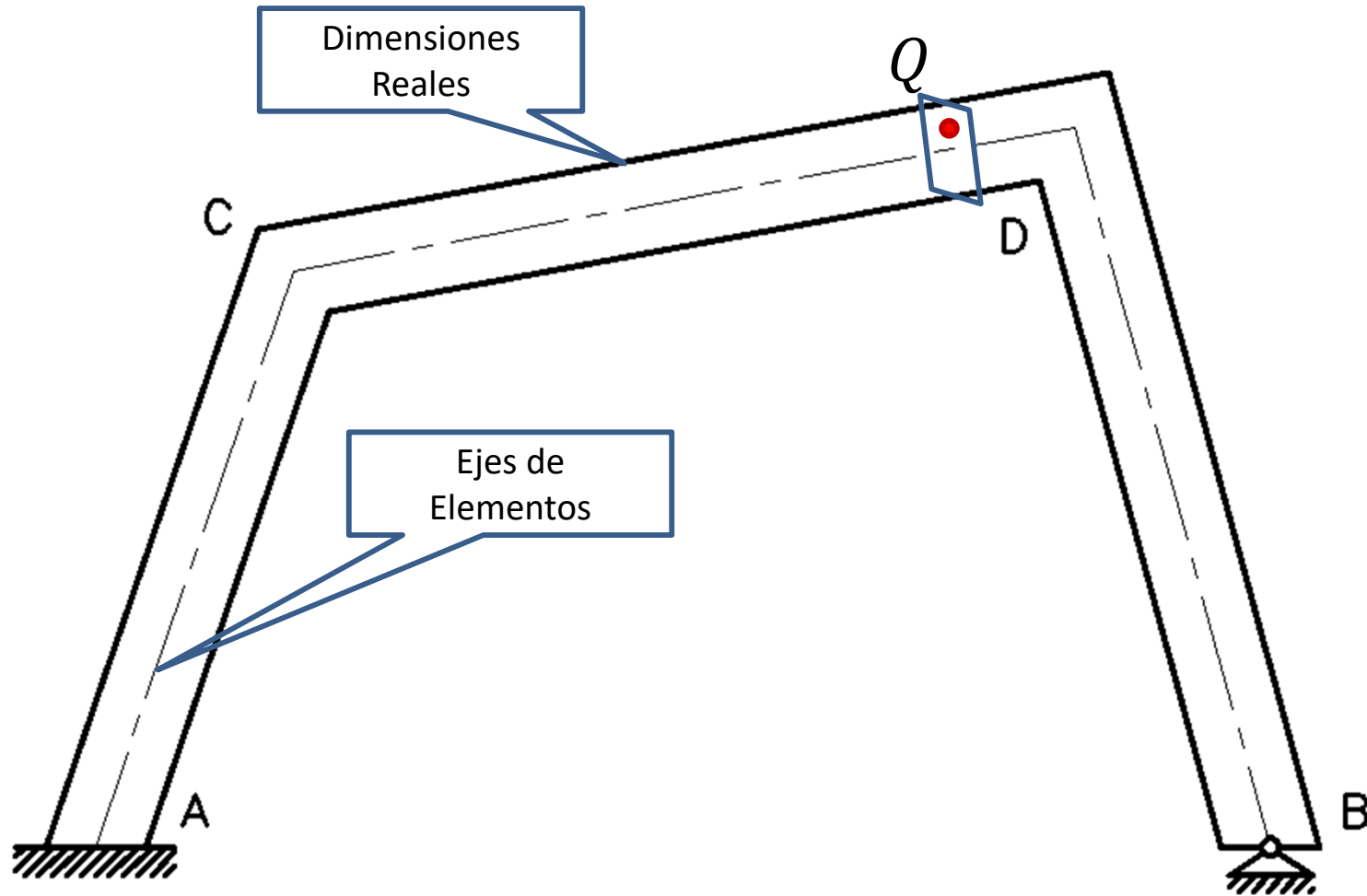
DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Introducción

- Las estructuras cambian de forma debido a acciones externas (cargas, movimientos impuestos, temperatura).
- El cambio en la forma de la estructura se debe a que los elementos que la componen cambian sus dimensiones.
- Al cambiar la forma de la estructura se dice que adquiere su configuración deformada o actualizada, y la línea que representa los ejes de los elementos que la componen se denomina elástica.
- La configuración deformada debe satisfacer las condiciones de compatibilidad internas y externas.
- Cuando la estructura cambia de forma cada punto cambia de posición con respecto a la posición original (configuración original).
- A la magnitud que define el cambio de posición de un punto, se la denomina desplazamiento o corrimiento, es un vector.

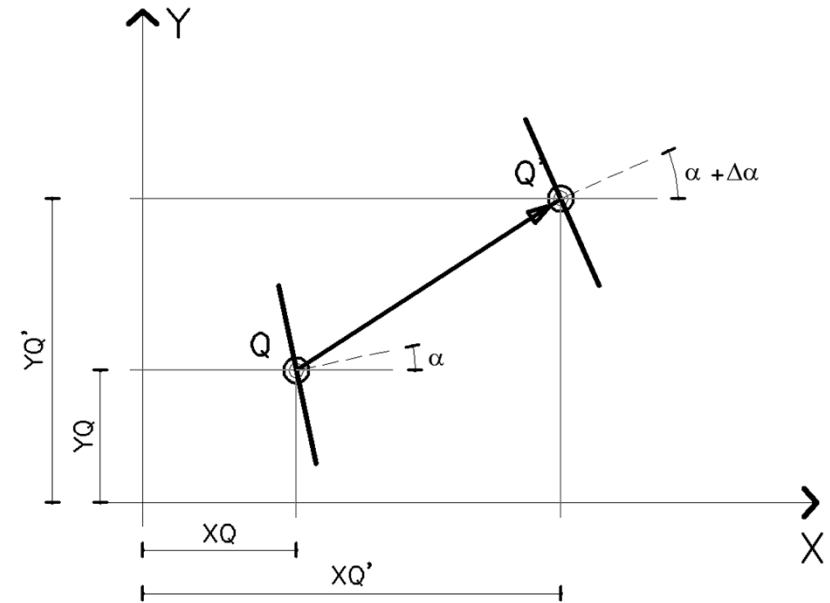
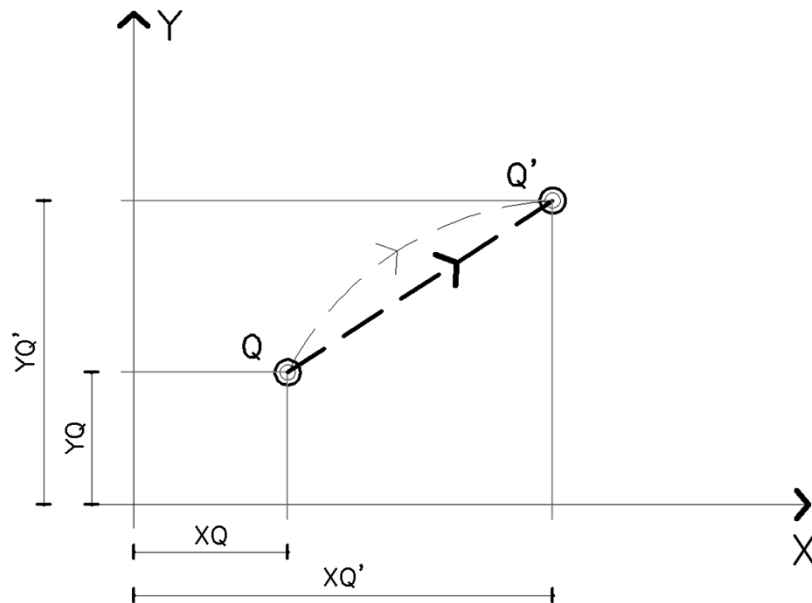
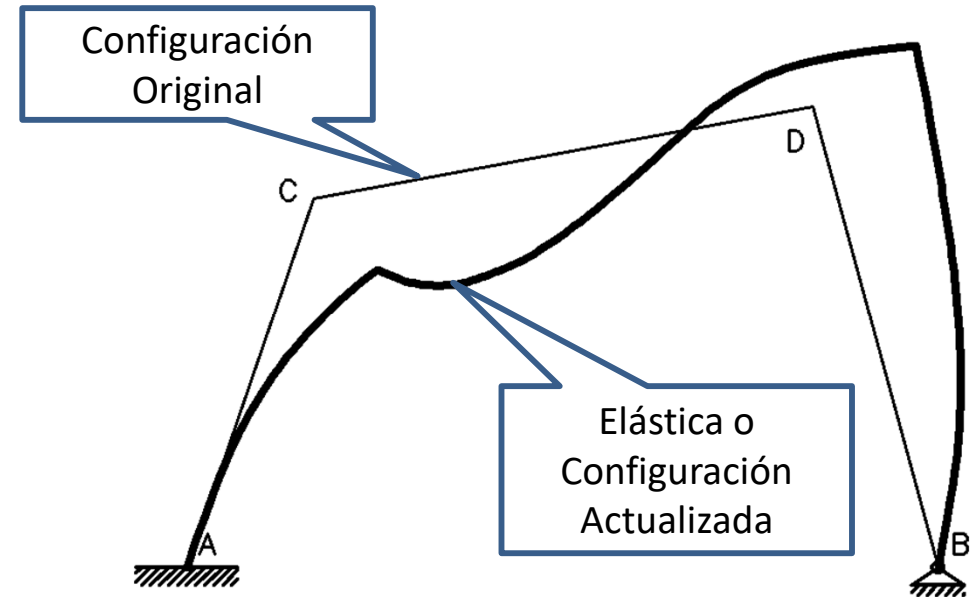
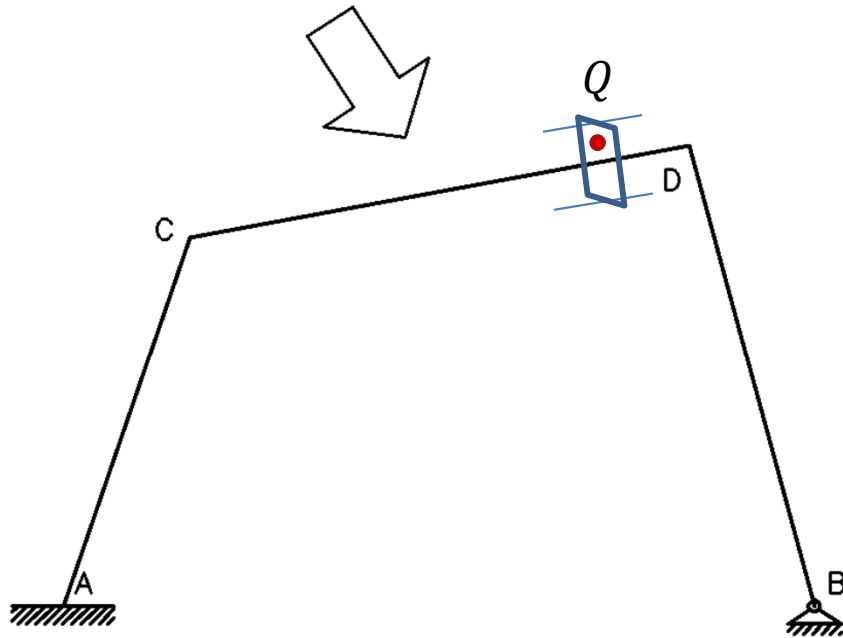
DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



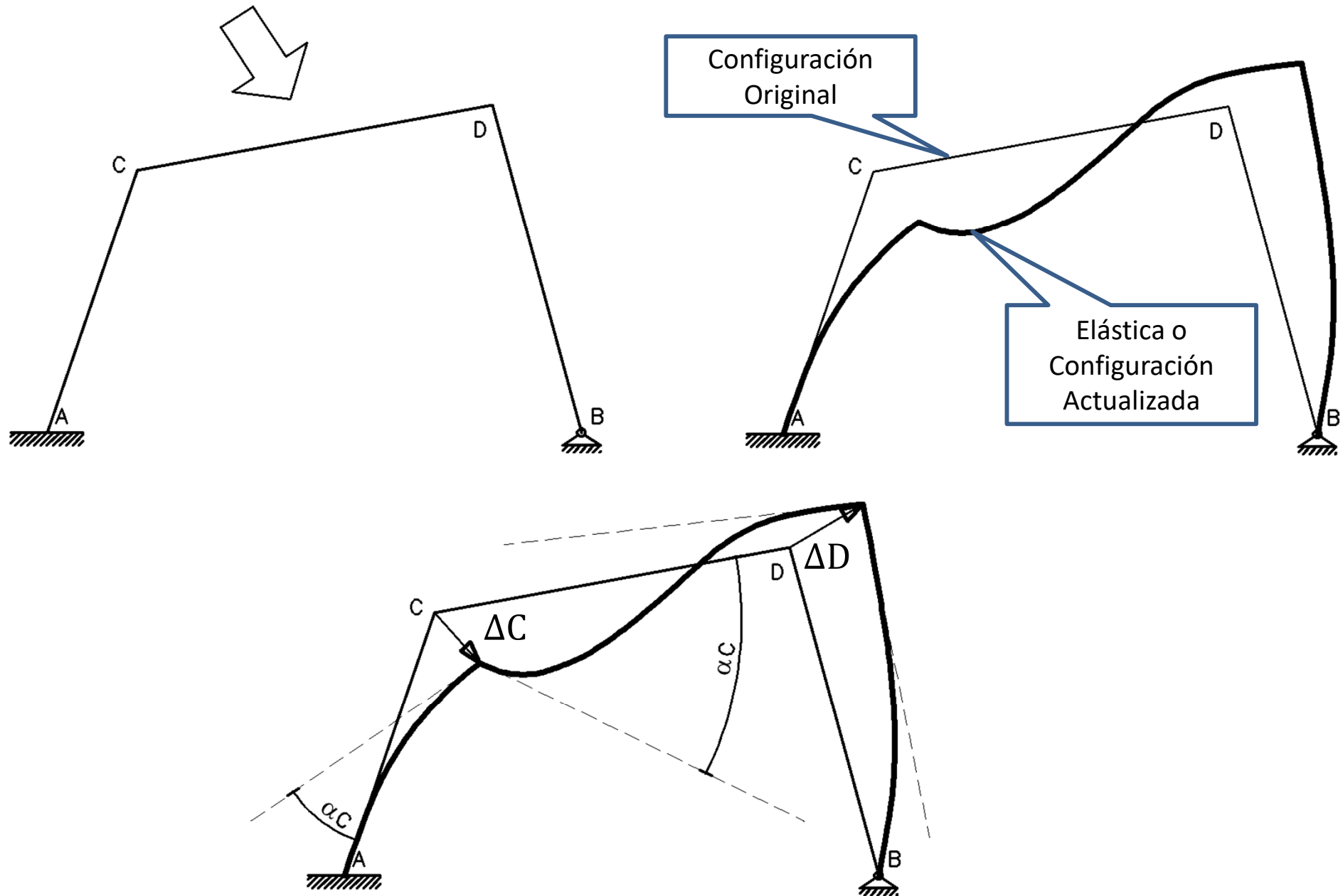
DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos

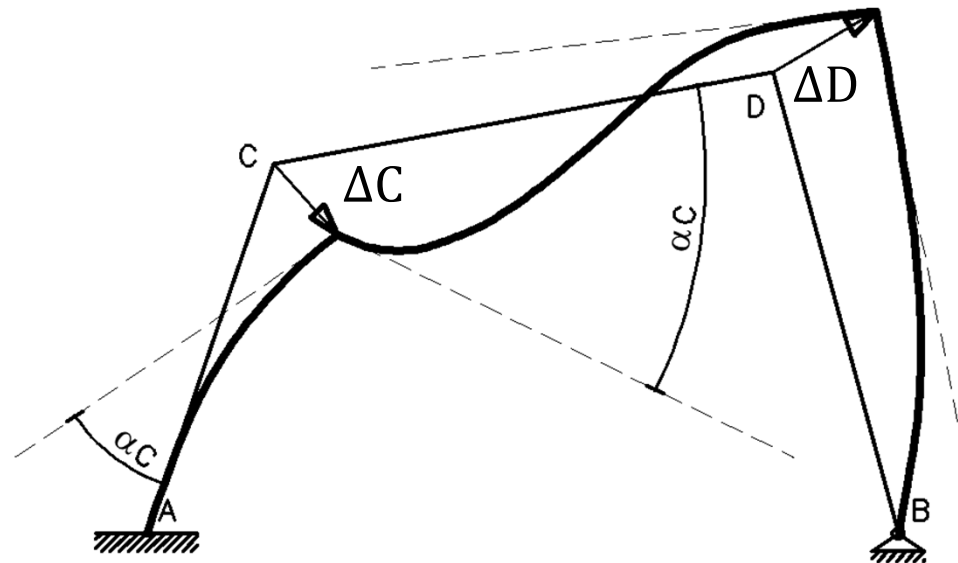


DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Definiciones

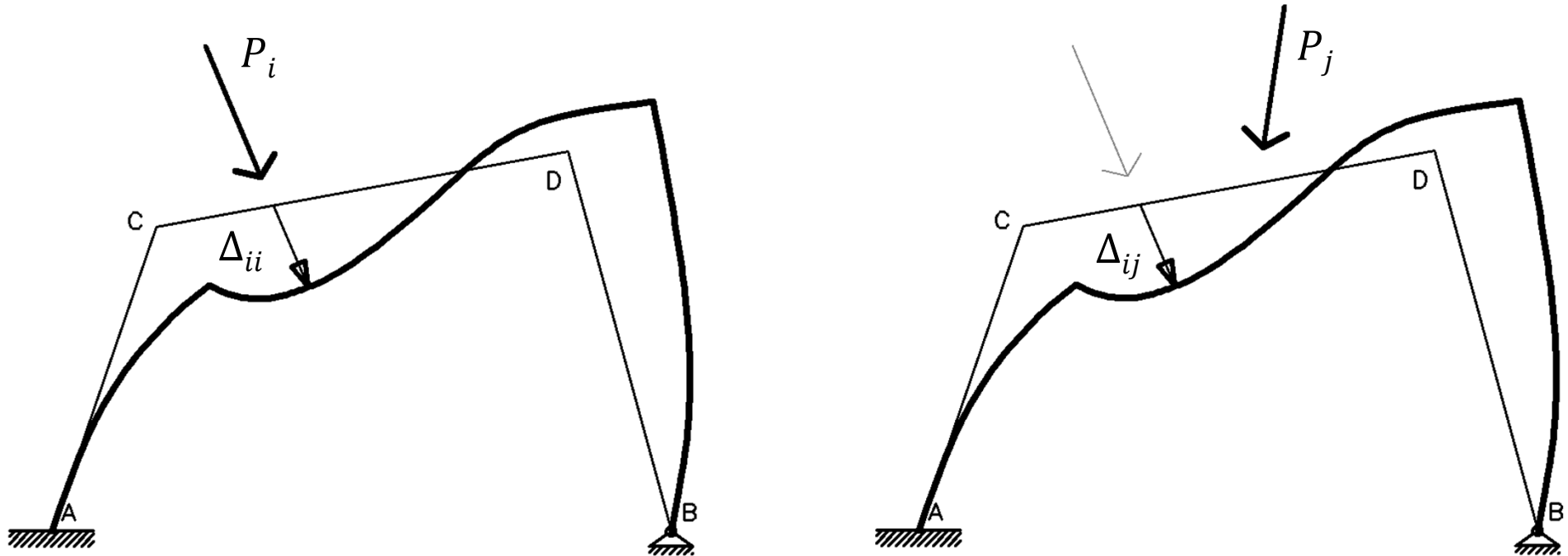
Grados de Libertad: Es la cantidad mínima de desplazamientos independientes que permite definir en forma completa la configuración deformada de una estructura.

Configuración Admisible: Es toda aquella que no viola las condiciones de compatibilidad interna y ni en el contorno.



DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos

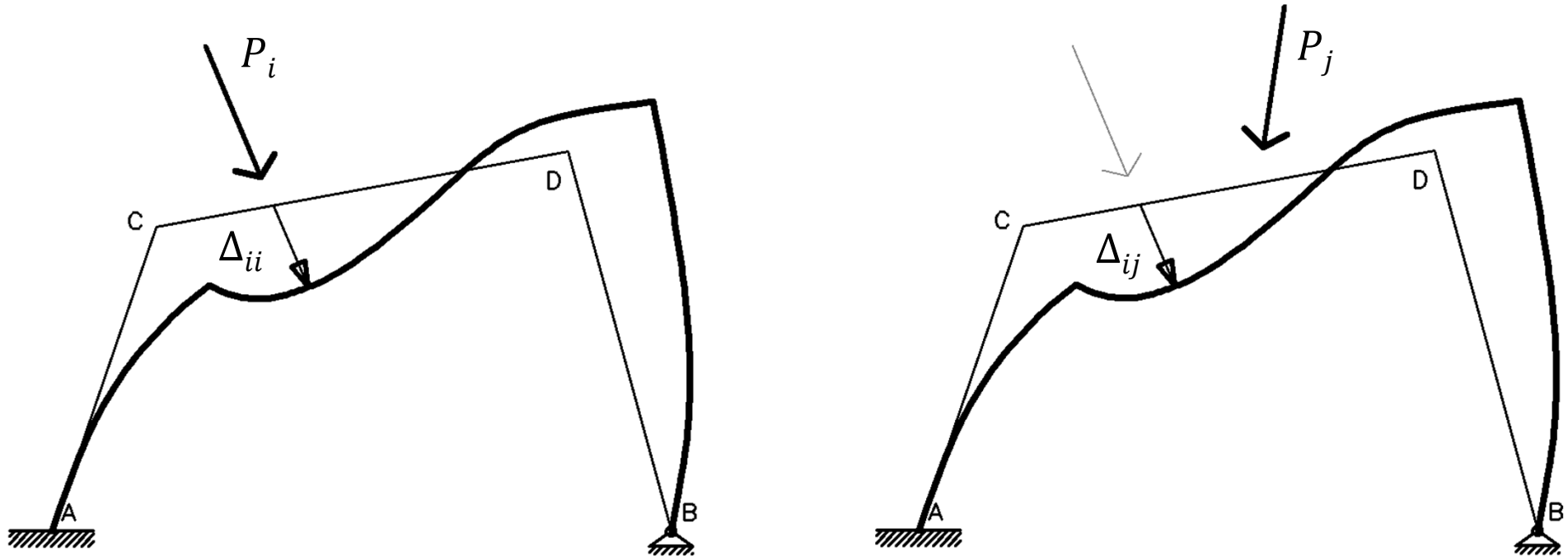


Δ_{ii} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i **provocado** por P_i

Δ_{ij} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i **provocado** por P_j

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



δ_{ii} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i **provocado** por P_i , cuando $P_i = 1$

δ_{ij} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i **provocado** por P_j , cuando $P_j = 1$

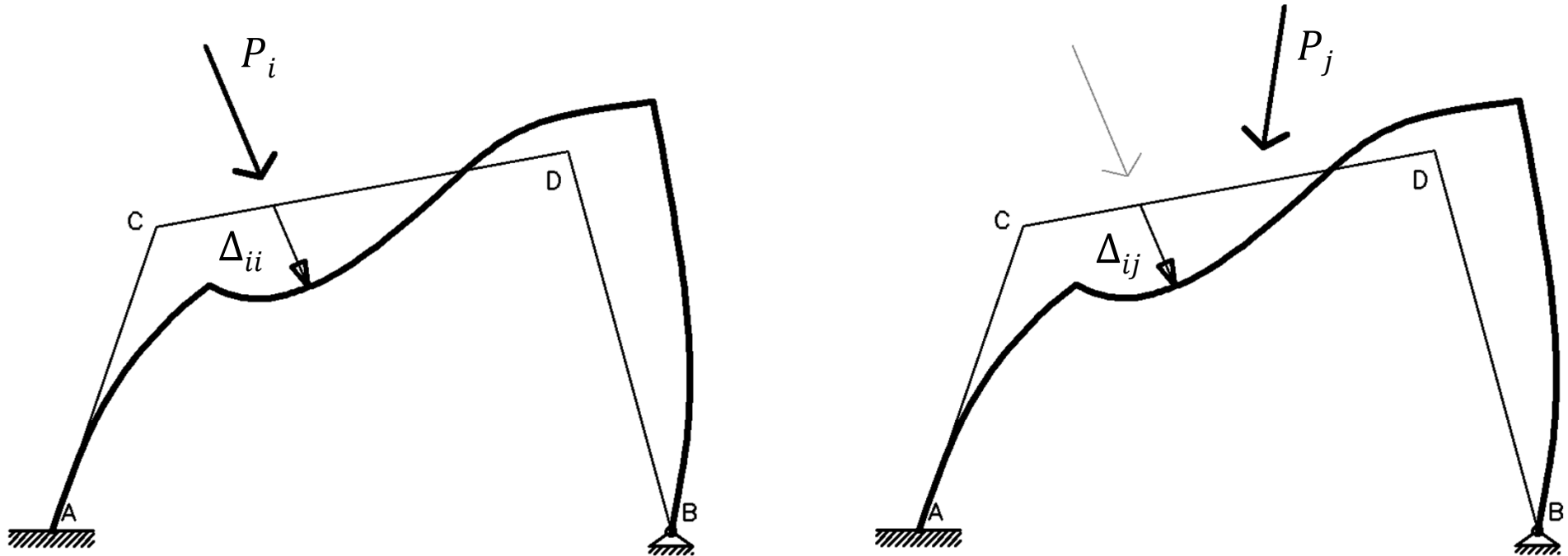
Por hipótesis de la Teoría Clásica de las Estructuras

$$\delta_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{P_i}$$

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{P_j}$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



δ_{ii} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i provocado por P_i , cuando $P_i = 1$

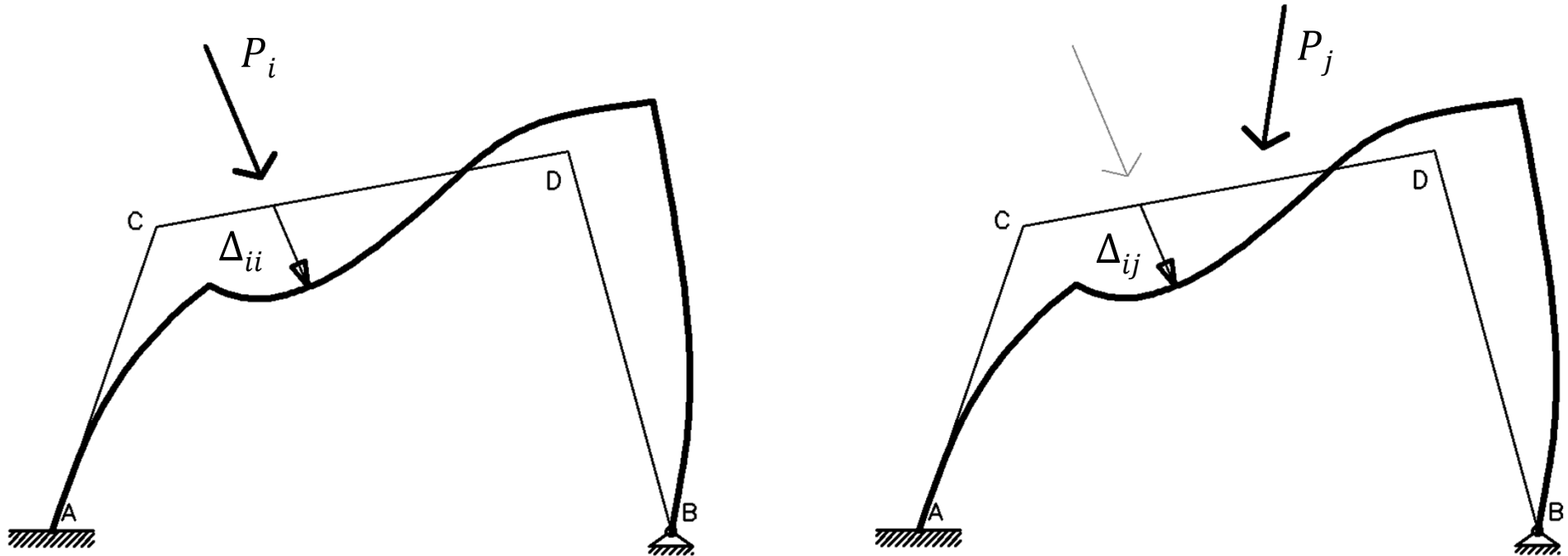
δ_{ij} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i provocado por P_j , cuando $P_j = 1$

Cuando actúan P_i y P_j

$$\Delta_i = \Delta_{ii} + \Delta_{ij} = \delta_{ii} P_i + \delta_{ij} P_j$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



δ_{ii} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i provocado por P_i , cuando $P_i = 1$

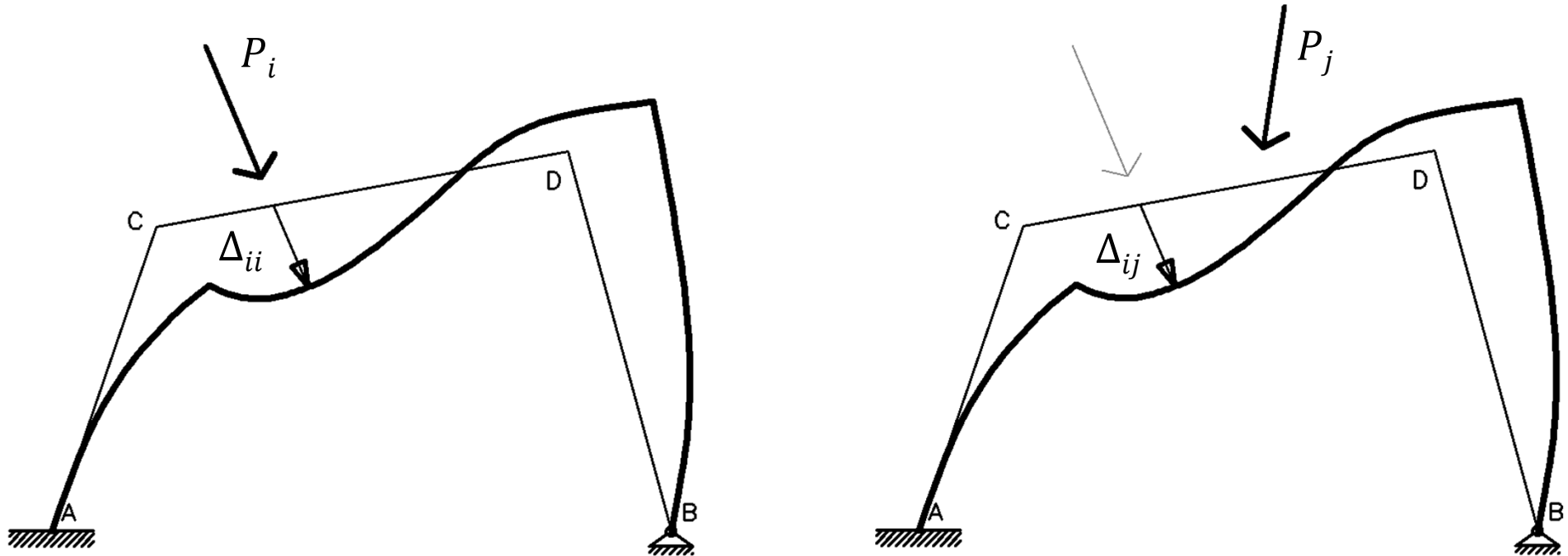
δ_{ij} : Desplazamiento en la **dirección** de P_i provocado por P_j , cuando $P_j = 1$

Cuando actúan $P_1 \dots P_i \dots P_n$

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



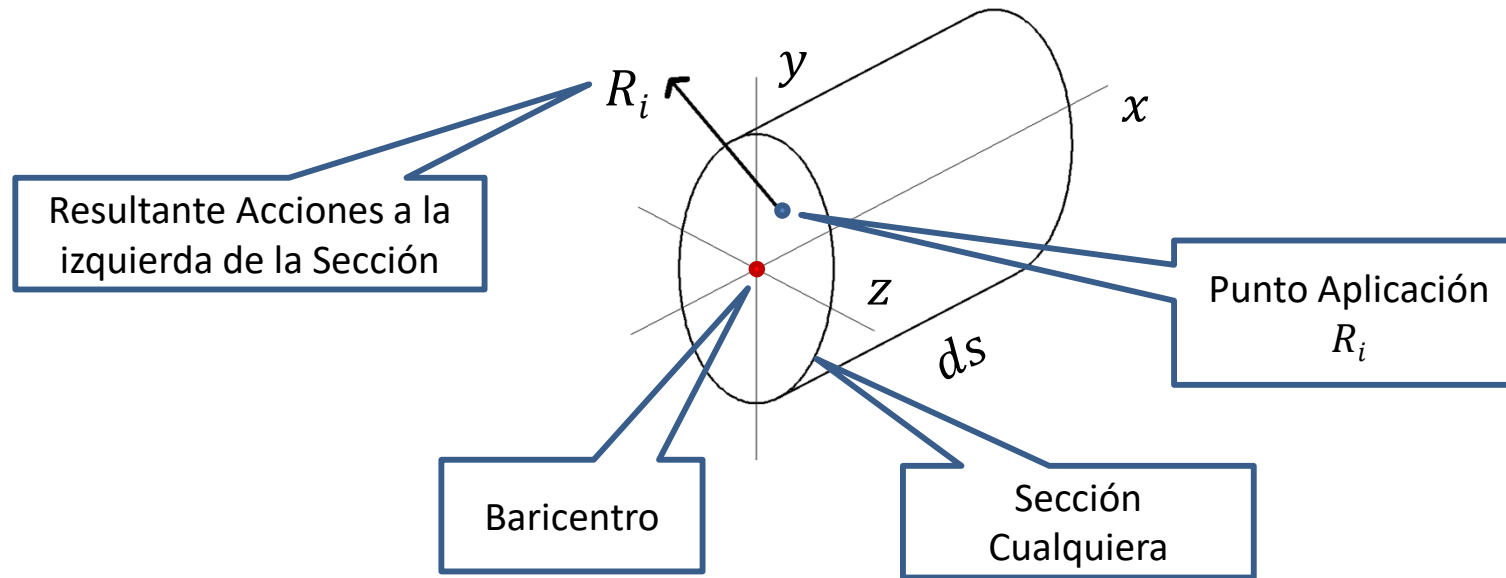
!

P_i se refiere a una Carga genérica. **Fuerza o Momento**

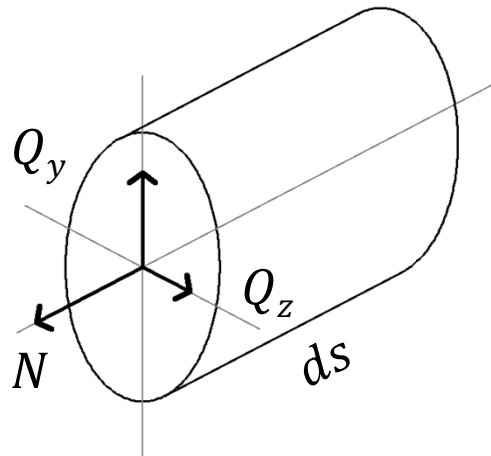
δ_{ij} se refiere a un Desplazamiento genérico, **Lineal o Angular**

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

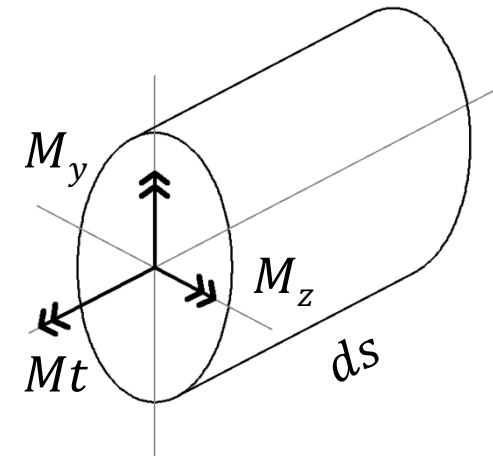
Deformaciones. Esfuerzos Internos



Proyección de R_i

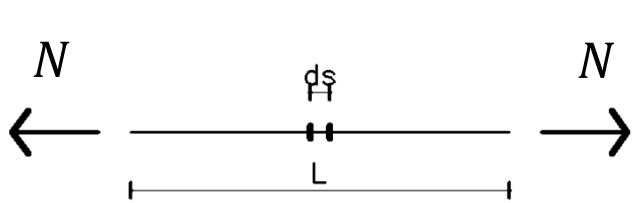


Traslación de R_i

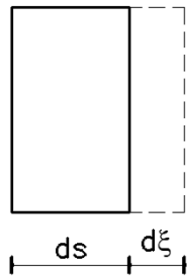


DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Deformaciones debidas a N, Q y Mf



N

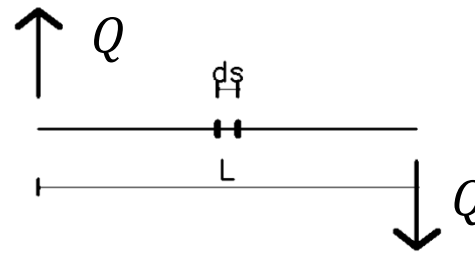


$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

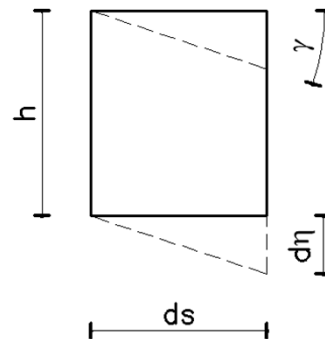
$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} ds$$



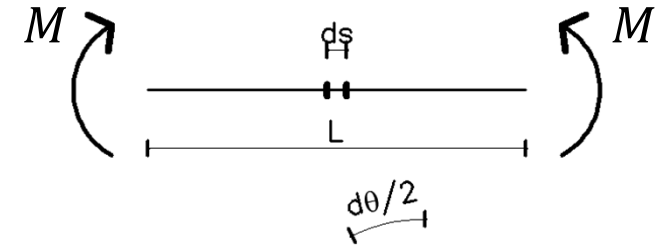
Q



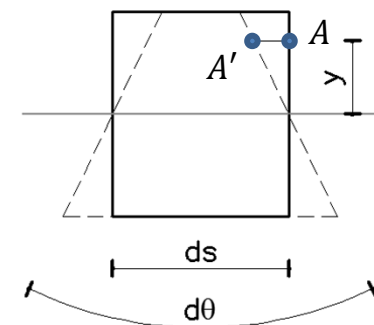
$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \psi \frac{Q}{GA}$$

$$d\eta = \gamma ds$$

$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$



M



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$AA' = y \frac{d\theta}{2}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

$$2AA' = y d\theta$$

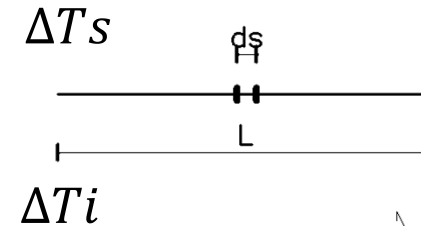
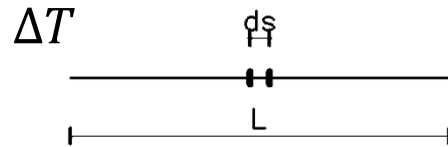
$$\varepsilon = -\frac{My}{EI}$$

$$d\theta = -\frac{\varepsilon ds}{y}$$

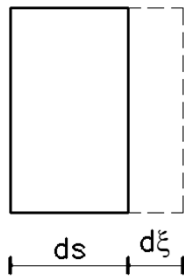
$$\varepsilon = -\frac{2AA'}{ds} \quad d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

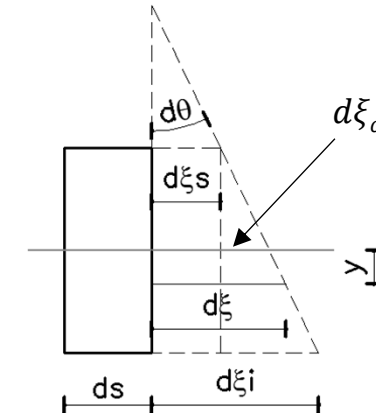
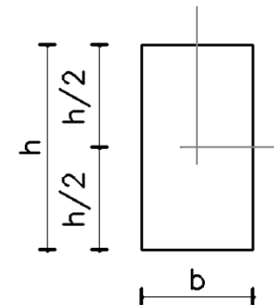
Deformaciones debidas a variaciones de Temperatura



**ΔT
ctte**



**ΔT
var**



$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

$$d\xi = \alpha \Delta T ds$$

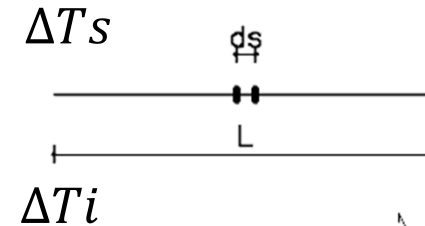
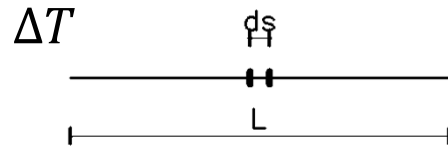
$$d\xi_i = \alpha \Delta T_i ds, \quad d\xi_s = \alpha \Delta T_s ds$$

$$d\xi_c = \frac{d\xi_i + d\xi_s}{2} = \frac{\alpha (\Delta T_i + \Delta T_s) ds}{2}$$

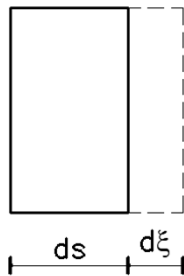
$$\Delta L = \int_0^L \alpha \Delta T ds$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

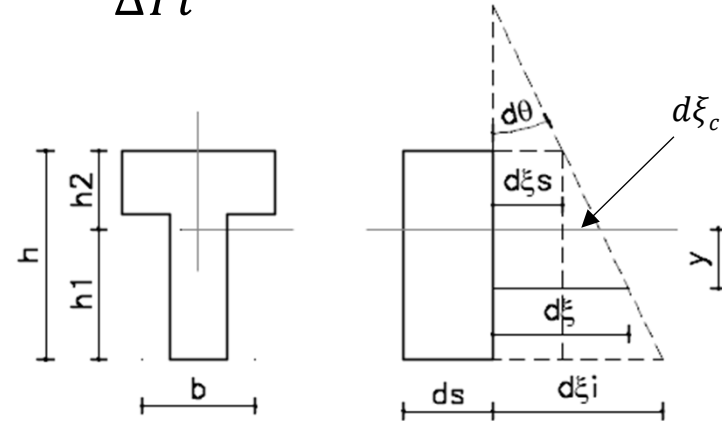
Deformaciones debidas a variaciones de Temperatura



**ΔT
ctte**



**ΔT
var**



$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

$$d\xi = \alpha \Delta T ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \alpha \Delta T ds$$

$$d\xi_i = \alpha \Delta T_i ds, \quad d\xi_s = \alpha \Delta T_s ds$$

$$d\xi_c = \frac{d\xi_i + d\xi_s}{2} = \frac{\alpha (\Delta T_i + \Delta T_s) ds}{2}$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha (\Delta T_i h1 + \Delta T_s h2) ds}{h}$$

$$d\theta = \frac{d\xi_i - d\xi_s}{h} = \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s) ds}{h}$$

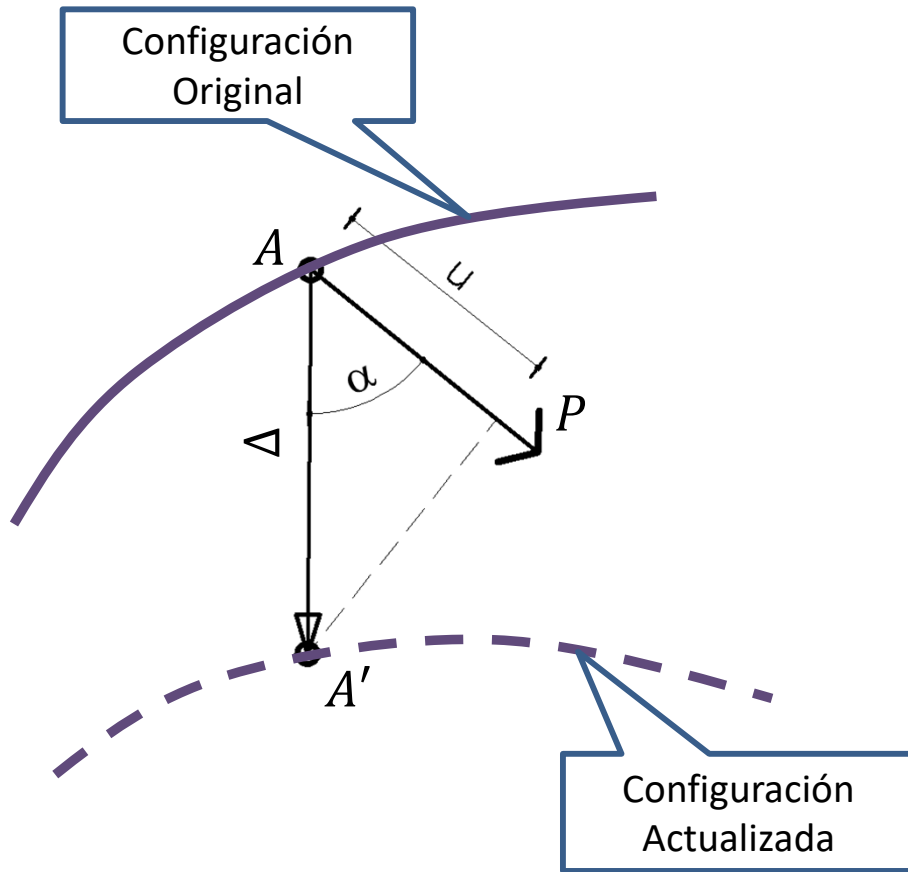
TRABAJO Y ENERGÍA

Introducción

- Para el cálculo de desplazamientos se requiere conocer el trabajo de las acciones externas y la energía de deformación de las acciones (esfuerzos) internas.
- Las acciones externas realizan trabajo en los desplazamientos de sus punto o secciones de aplicación.
- Las acciones internas desarrollan energía en las deformaciones.
- El trabajo y la energía serán **reales** si lo realizan las acciones en las deformaciones y desplazamientos que ellas mismas provocan.
- El trabajo y la energía serán **virtuales** si lo realizan las acciones en las deformaciones y desplazamientos provocados por otras acciones.
- Al trabajo de las acciones externas los llamamos **W** y a la energía de las acciones internas **U**

TRABAJO Y ENERGÍA

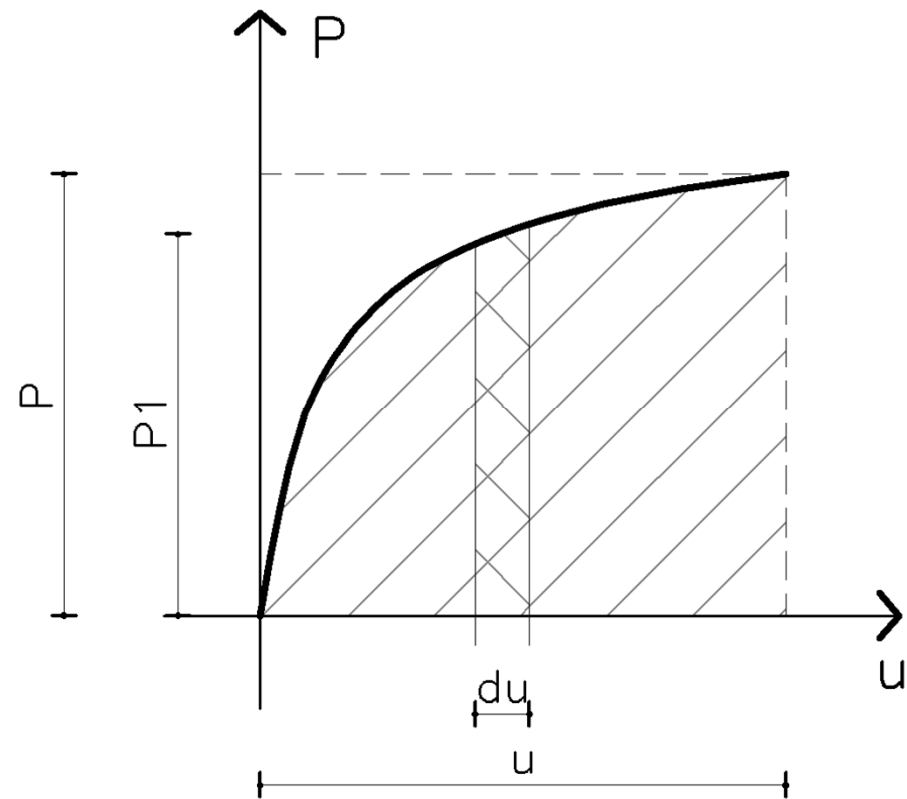
Trabajo de una Fuerza



$$dW = P1 du$$

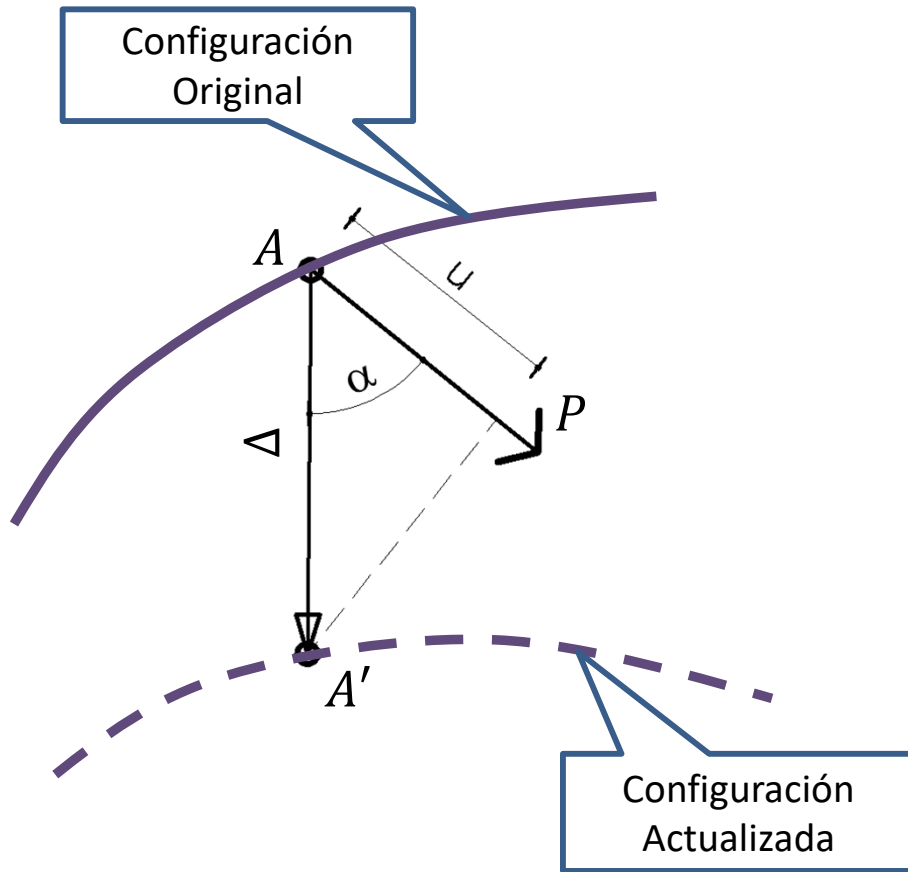
$$W = \int_0^u P du$$

Cualquier Material



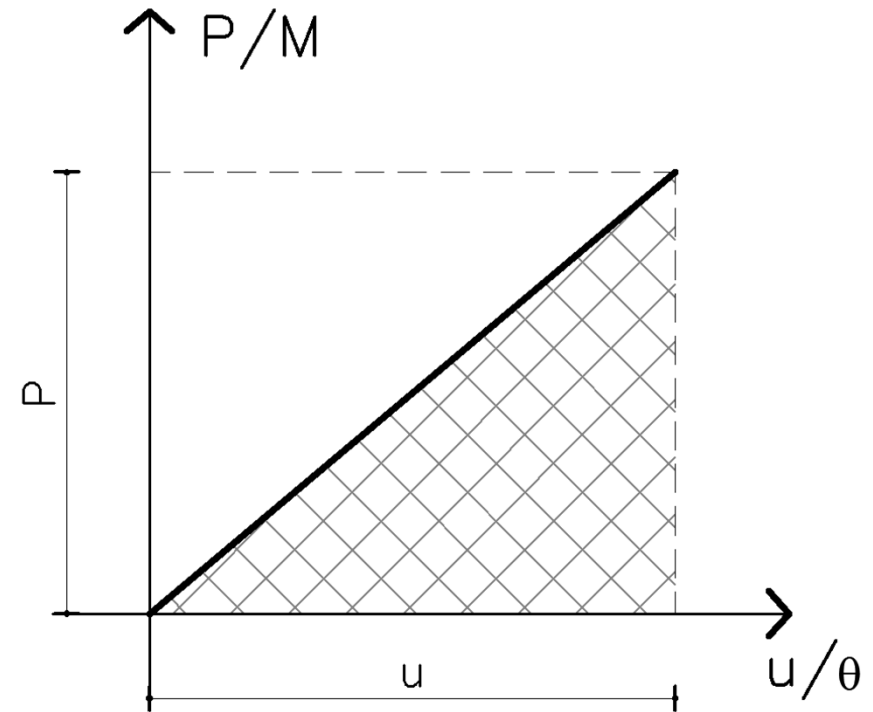
TRABAJO Y ENERGÍA

Trabajo de una Fuerza/Par. Material Elástico



$$W = \frac{1}{2} P u$$

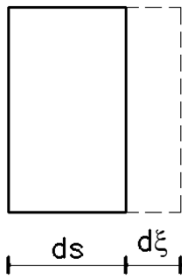
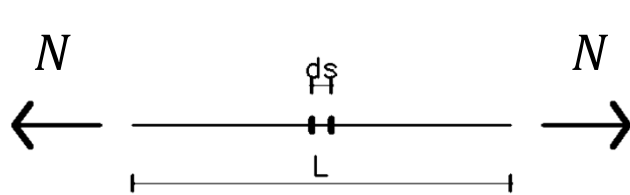
Material Elástico



$$W = \frac{1}{2} M \theta$$

TRABAJO Y ENERGÍA

Energía de Deformación de N / Q / Mf



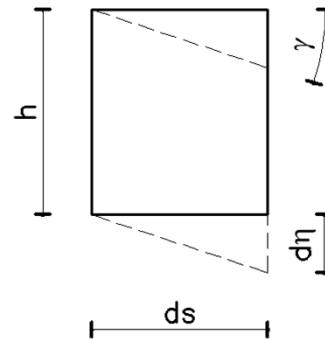
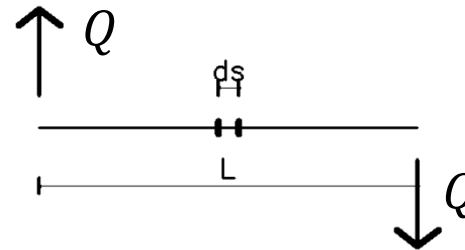
$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} N d\xi$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} ds$$

N, E, A
ctte

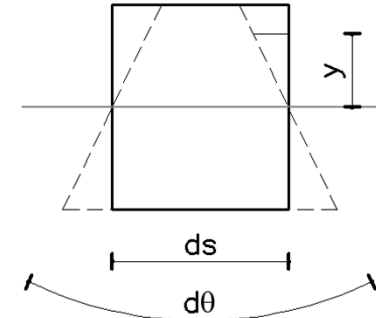
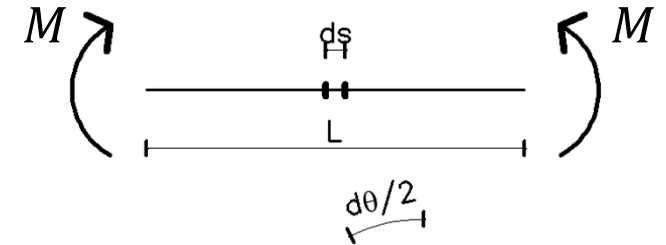
$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L$$



$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} Q d\eta$$

$$U = \psi \int_0^L \frac{1}{2} Q \frac{Q}{GA} ds$$



$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} M d\theta$$

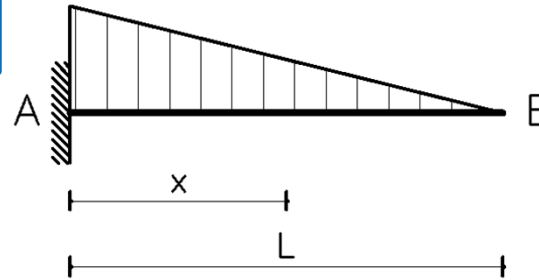
$$U = \int_0^L \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} ds$$

TRABAJO Y ENERGÍA

Aplicaciones. Cálculo de Corrimientos



M

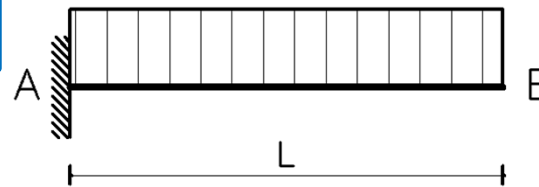


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



Q



$$Q(x) = P$$

$$W = U$$

$$\frac{1}{2} P f = \int_0^L \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} dx + \int_0^L \frac{1}{2} Q \frac{\psi Q}{GA} dx$$

$$\frac{1}{2} P f = \int_0^L \frac{P^2 (L - x)^2}{2EI} dx + \psi \int_0^L \frac{P^2}{2GA} dx$$

$$P f = \frac{P^2}{EI} \left(L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3} \right) + \psi \frac{P^2 L}{GA}$$

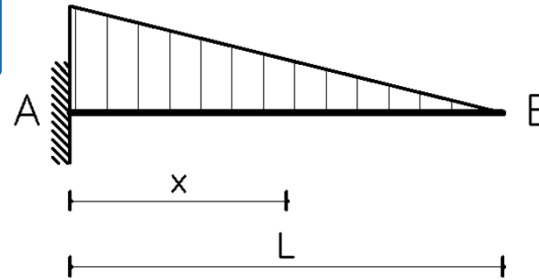
$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

TRABAJO Y ENERGÍA

Aplicaciones. Calculo de Corrimientos



M



$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



$$P = 30.00 \text{ kN}$$

$$L = 10.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0.25 \text{ m}$$

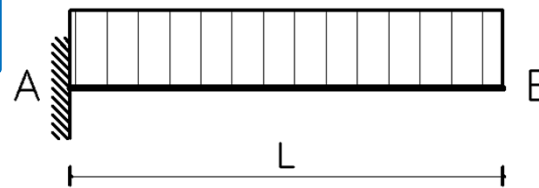
$$G = 0.40 E$$

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

$$A = 0.20 \frac{L}{10} = \frac{L}{50} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.20}{12} \left(\frac{L}{10} \right)^3 = \frac{L^3}{60000} \text{ m}^4$$

Q



$$Q(x) = P$$

$$P = 30.00 \text{ kN}$$

$$L = 1.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0.25 \text{ m}$$

$$G = 0.40 E$$

$$f = \frac{60000 P}{3 E} + \psi 125 \frac{P}{E}$$

$$A = 0.20 L = \frac{L}{5} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.20}{12} L^3 = \frac{L^3}{60} \text{ m}^4$$

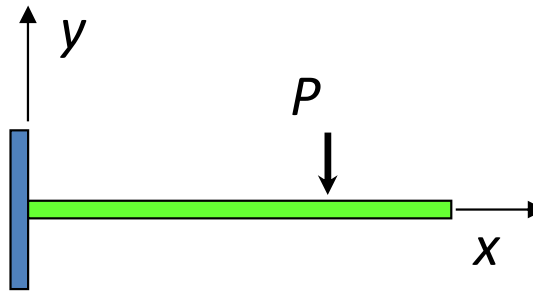
$$f = \frac{60 P}{3 E} + \psi 12.5 \frac{P}{E}$$

TRABAJO Y ENERGÍA VIRTUALES

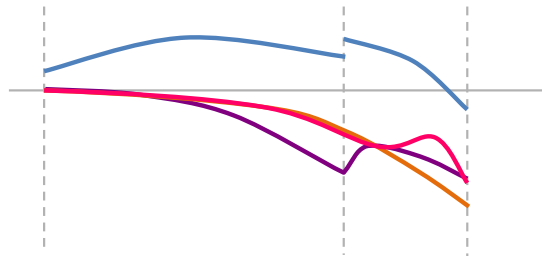
Desplazamiento y Deformación Virtual

- Desplazamiento Virtual: Es todo desplazamiento pequeño, posible, que satisface las condiciones de vínculo (contorno cinemáticas) y las condiciones de compatibilidad interna. Pueden no ocurrir.
- La configuración de la estructura sujeta a desplazamientos virtuales en todos sus puntos se denomina Admisible y puede ser no equilibrada.

Estructura



Elástica



- Deformación Virtual: Son las que originan los desplazamientos virtuales. En general se designan deformaciones virtuales tanto a los desplazamientos como a las deformaciones propiamente dichas.

TRABAJO VIRTUAL

Definiciones. Trabajo Virtual

- Trabajo Virtual. Es el que realizan las Acciones Reales aplicadas sobre la estructura en Desplazamientos Virtuales originados por acciones distintas de las reales. También se lo denomina Trabajo Virtual Externo.
- También puede ser el trabajo de Acciones Ficticias, en los Desplazamientos debidos a las Acciones Reales aplicadas sobre la estructura.
- Similarmente las Acciones Internas Reales desarrollan Energía en las Deformaciones Virtuales. También se lo denomina Trabajo Virtual Interno.

Sistema Equilibrado. SE

- Sistema Equilibrado. Toda estructura que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las cargas externas y las reacciones de vinculo.

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Clapeyron

El trabajo real de varias fuerzas, independientemente de su orden de aplicación, es igual a la semisuma del producto de cada fuerza por el desplazamiento que en su dirección provocan todas las fuerzas.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Trabajo de un sistema equilibrado en un movimiento rígido

El trabajo de un sistema de acciones en equilibrio, que actúan sobre un sólido rígido, es nulo en todo desplazamiento virtual del mismo.

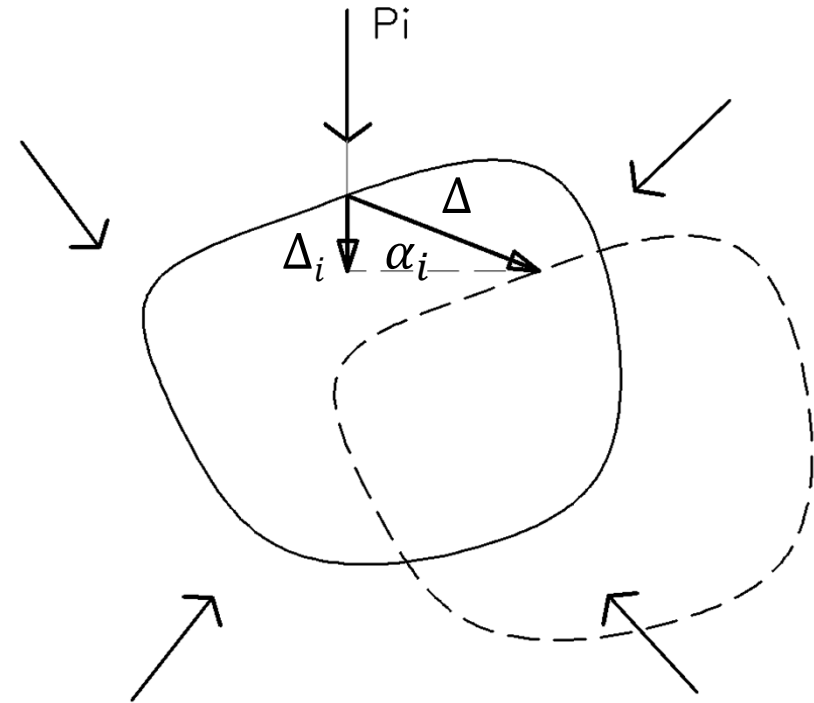
Traslación

$$W_i = P_i \Delta_i = P_i \Delta \cos \alpha_i$$

$$W = \sum_{i=1}^n P_i \Delta \cos \alpha_i$$

$$W = \Delta \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i$$

$$W = 0$$



TEOREMAS ENERGETICOS

Trabajo de un sistema equilibrado en un movimiento rígido

El trabajo de un sistema de acciones en equilibrio, que actúan sobre un sólido rígido, es nulo en todo desplazamiento virtual del mismo.

Rotación

$$W_i = P_i \Delta_i = P_i \Delta \cos \alpha_i$$

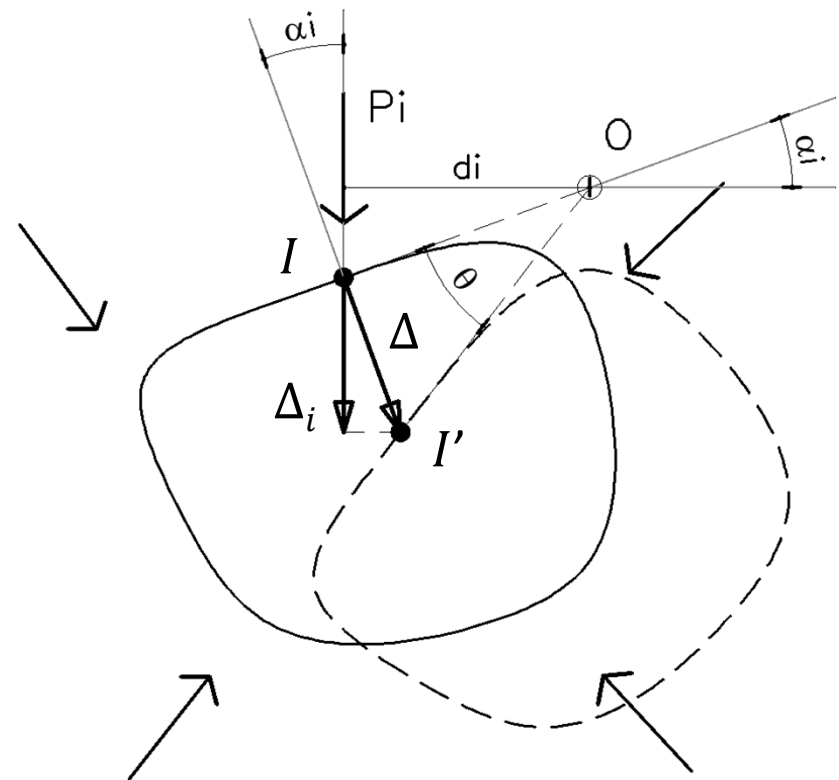
$$\Delta = \theta OI$$

$$W_i = P_i \theta OI \cos \alpha_i$$

$$W_i = P_i \theta d_i$$

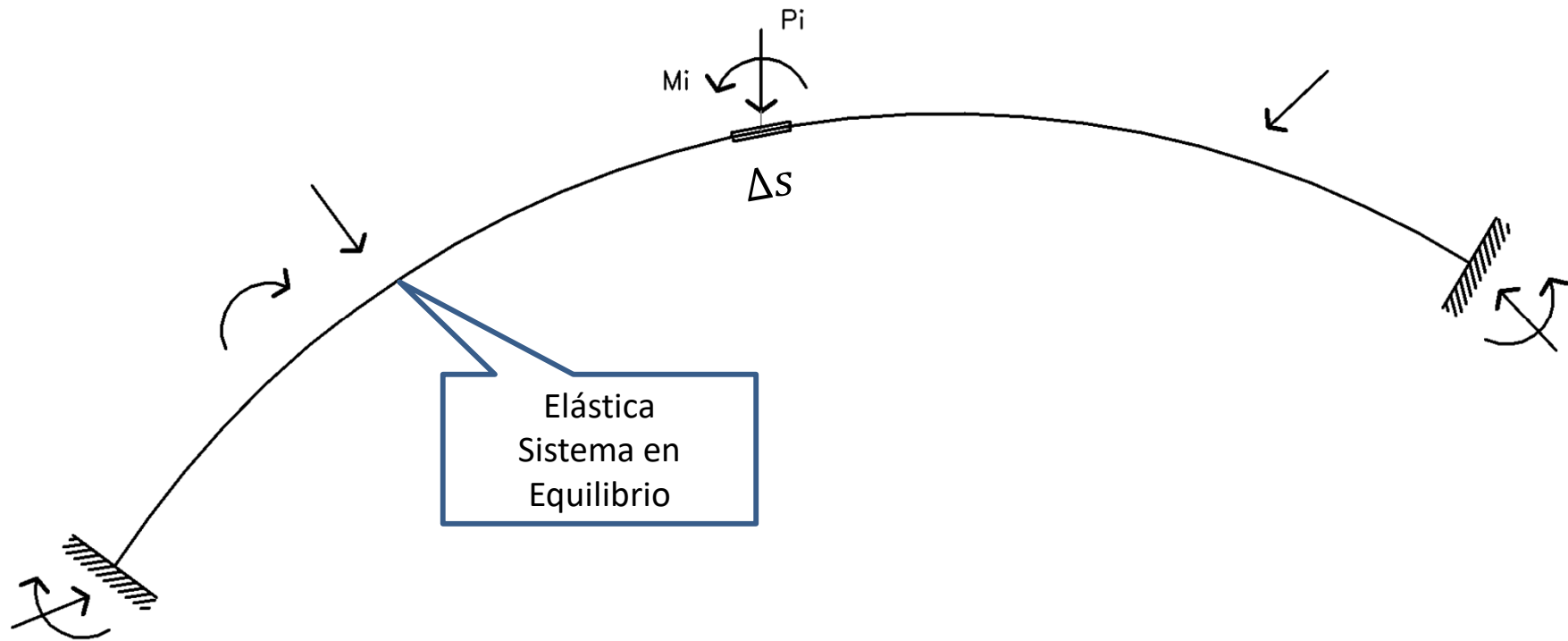
$$W = \theta \sum_{i=1}^n P_i d_i$$

$$W = 0$$



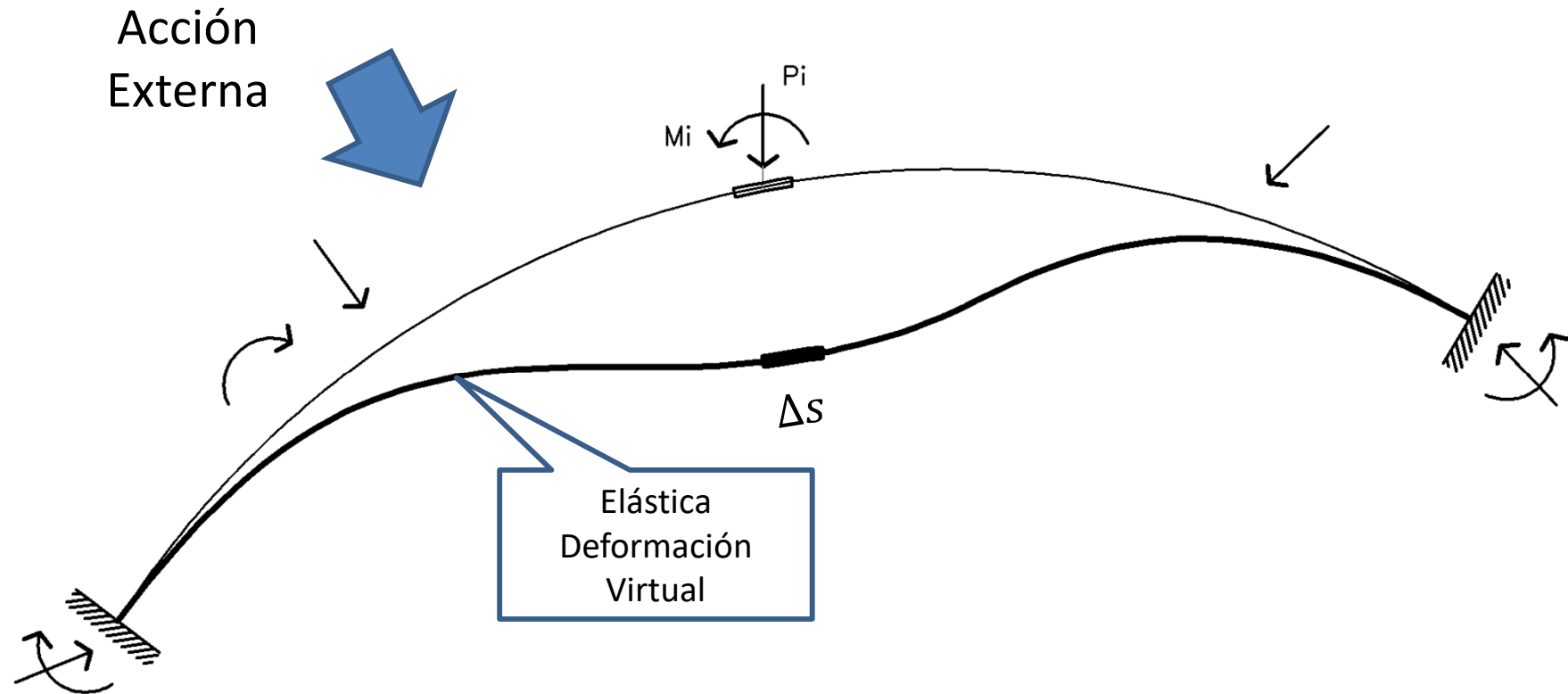
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



TEOREMAS ENERGETICOS

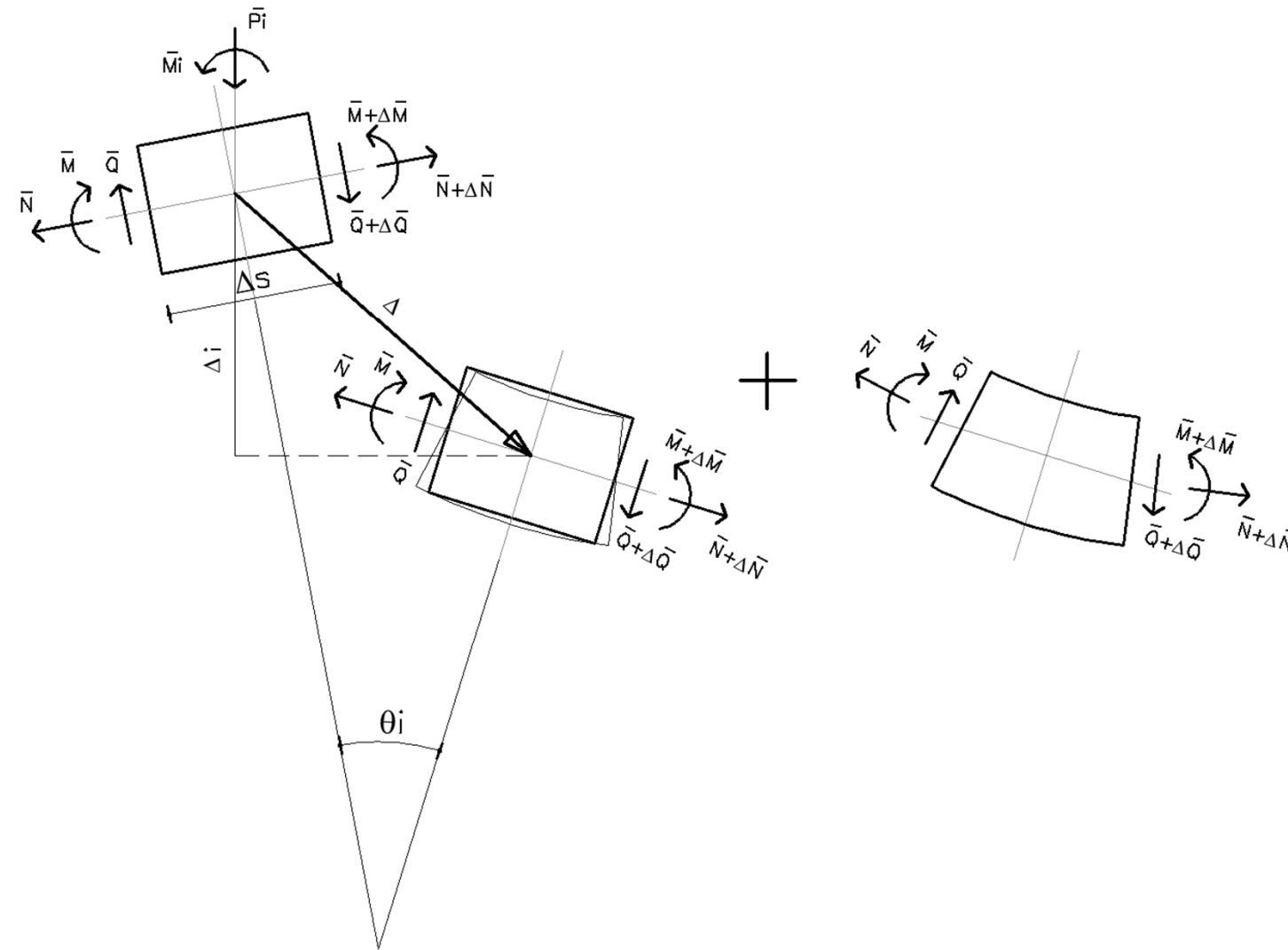
Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



Elástica Deformación Virtual $\Rightarrow$ *Mov. Rígido* + *Deformación*

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV

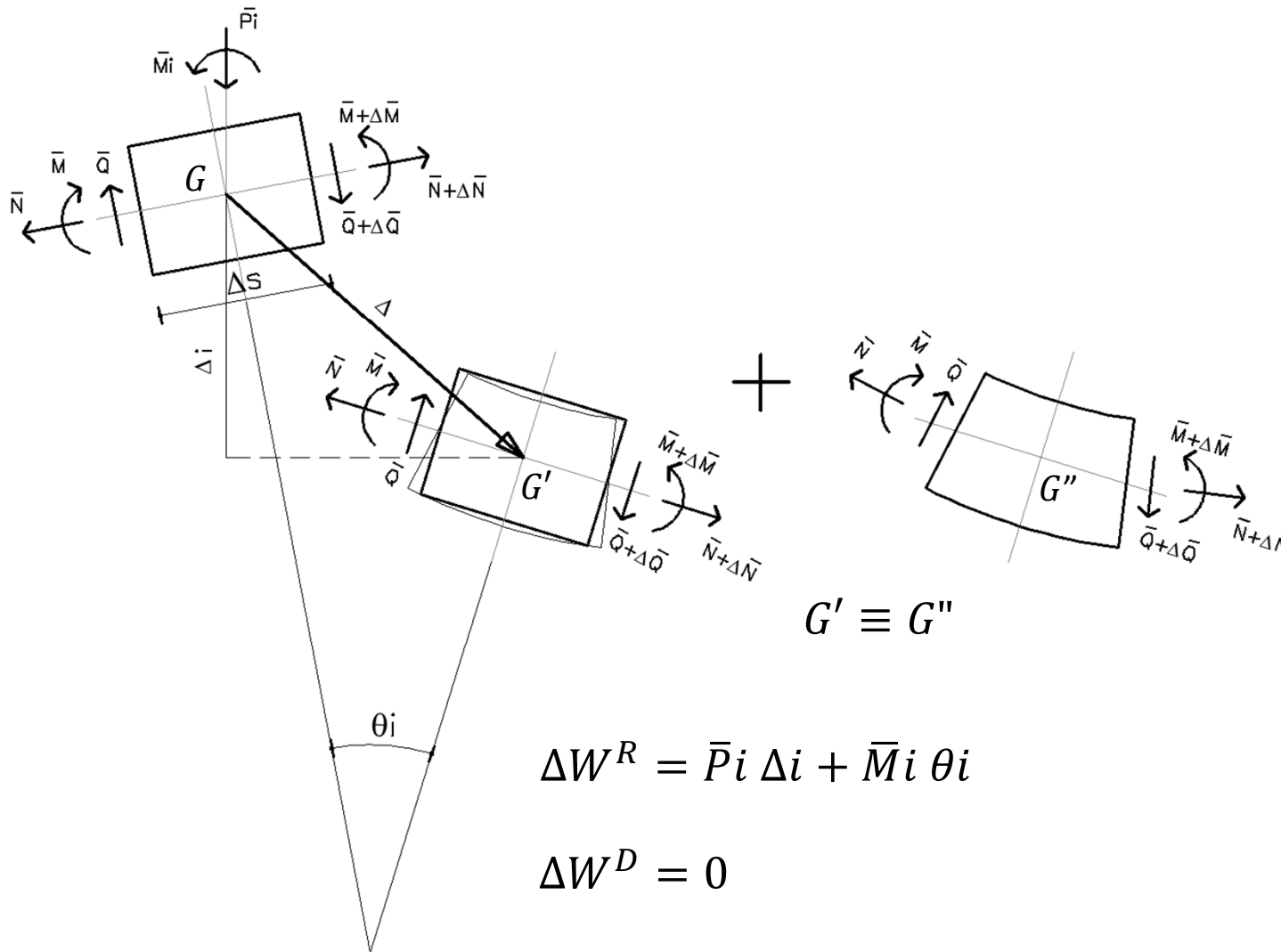


Roto-Traslación Rígida

Deformación

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W^R = \bar{P}_i \Delta i + \bar{M}_i \theta i$$

$$\Delta W^D = 0$$

$$\Delta W = \Delta W^R$$

$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

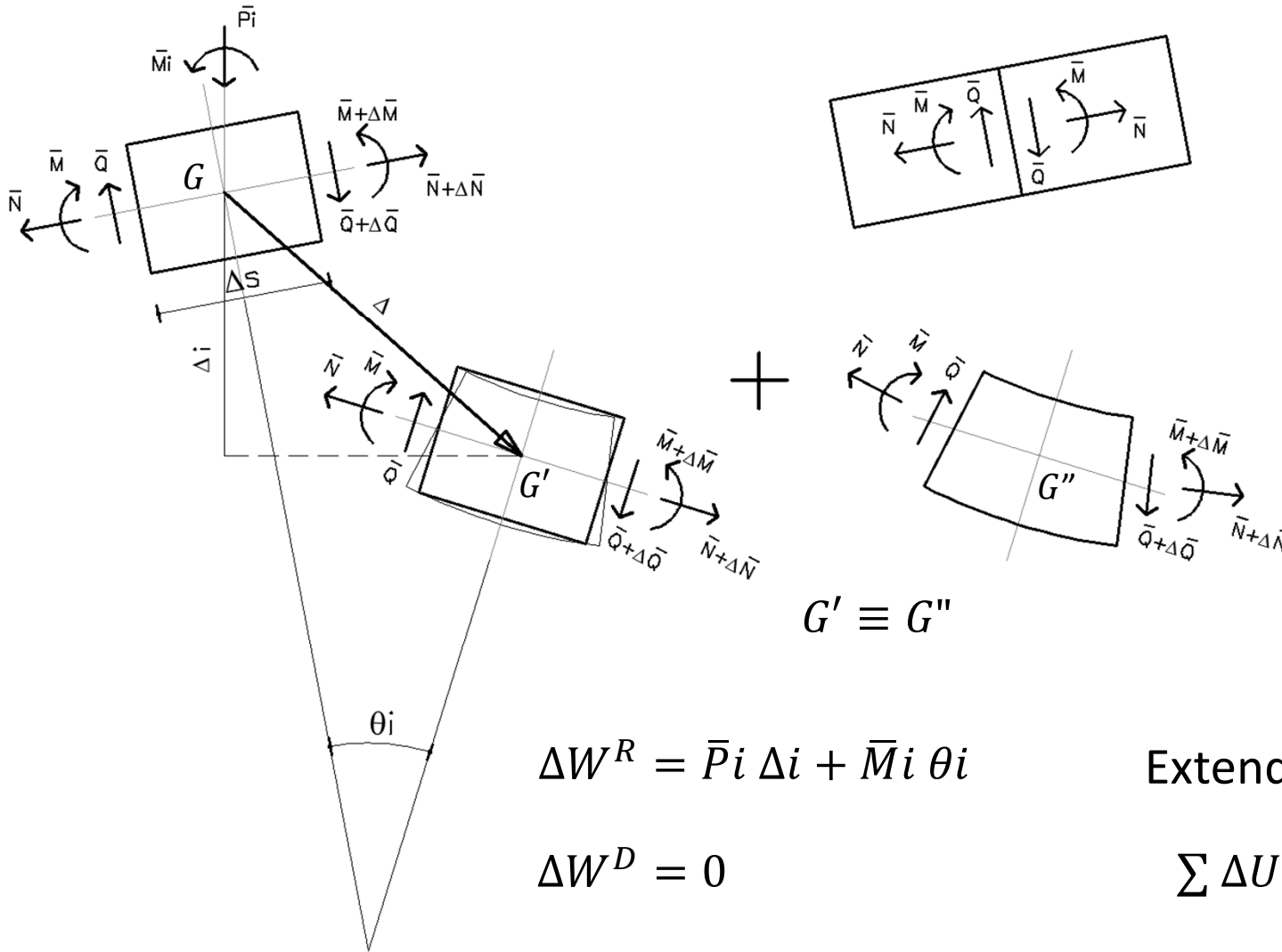
$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\Delta U = -\Delta W^R + \Delta U^D$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W^R = \bar{P}_i \Delta i + \bar{M}_i \theta_i$$

$$\Delta W^D = 0$$

$$\Delta W = \Delta W^R$$

$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\Delta U = -\Delta W^R + \Delta U^D$$

Extendido a toda la Estructura

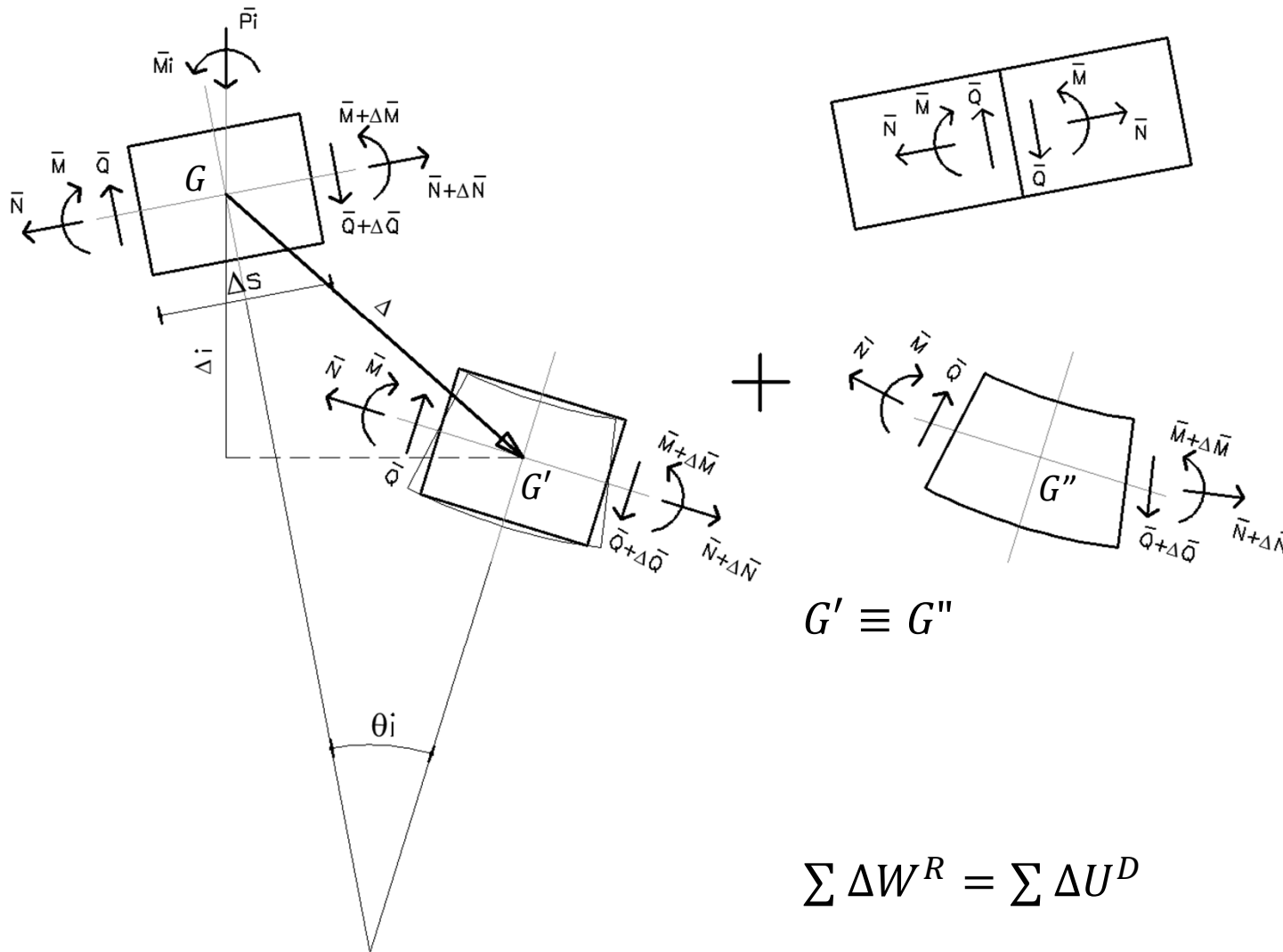
$$\sum \Delta U = -\sum \Delta W^R + \sum \Delta U^D$$

$$\sum \Delta U = 0$$

$$\sum \Delta W^R = \sum \Delta U^D$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\sum \Delta W^R = \sum \Delta U^D$$

$$W^R = U^D$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV

En todo sistema equilibrado sujeto a una deformación virtual, el trabajo de las acciones externas es igual a la energía (trabajo) de las acciones internas.

$$W = U$$

$$T_e = T_i$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación TTV

$$T_e = T_i$$

$$W^R = T_e = \sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i$$

$$dU^D = \bar{N}d\xi + \bar{M}d\theta + \bar{Q}d\eta$$

$$U^D = T_i = \int \bar{N}d\xi + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{Q}d\eta$$

Expresión general para cualquier material

$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N}d\xi + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{Q}d\eta$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación TTV

$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N} d\xi + \int \bar{M} d\theta + \int \bar{Q} d\eta$$

Para material elástico

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$d\xi = \alpha \Delta T ds$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha (\Delta T_i + \Delta T_s) ds}{2}$$

$$d\theta = \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s) ds}{h}$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2) ds}{h}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación TTV

Expresión General de aplicación de TTV. Material elástico

$$\begin{aligned} \sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta i &= \int \bar{N} \frac{N}{EA} ds + \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \psi \int \bar{Q} \frac{Q}{GA} ds + \\ &+ \int \bar{N} \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} ds + \int \bar{M} t \frac{Mt}{GJt} ds \end{aligned}$$

METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV

Se consideran dos sistemas:

- La estructura real, con su geometría, materiales, cargas y vínculos.
- La misma estructura, sobre la que actúa una sola carga unitaria en la dirección del desplazamiento que se desea calcular. Es una carga ficticia o virtual.

SD

SE

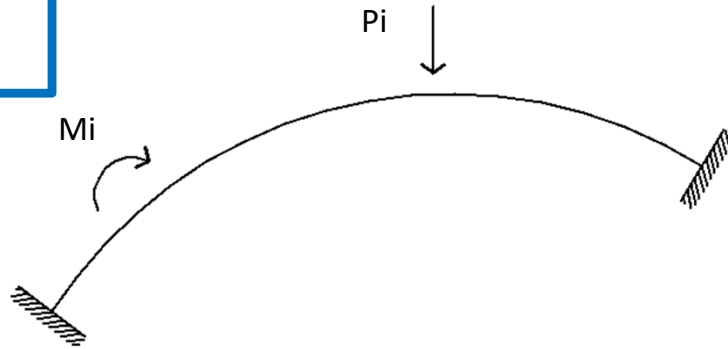
El término desplazamiento es general, puede ser:

- Corrimiento de un punto.
- La rotación de una sección (eje miembro estructural).
- El corrimiento relativo entre dos puntos.
- El giro relativo entre dos secciones.

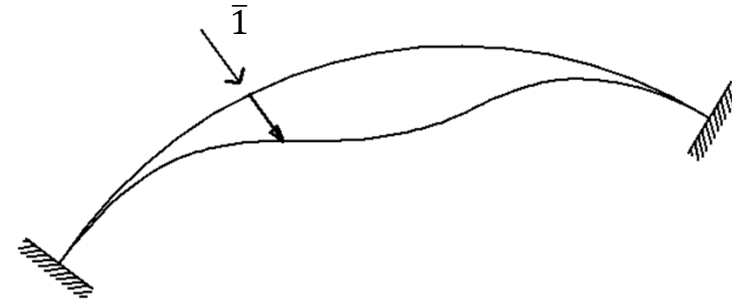
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV

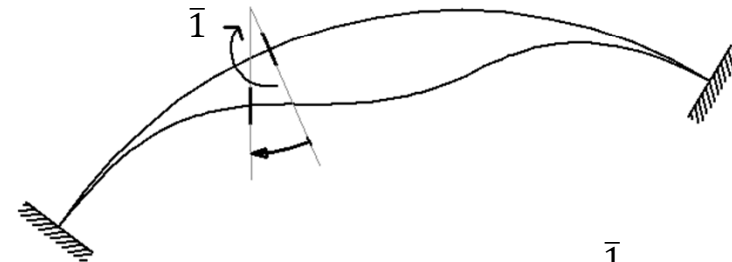
SD



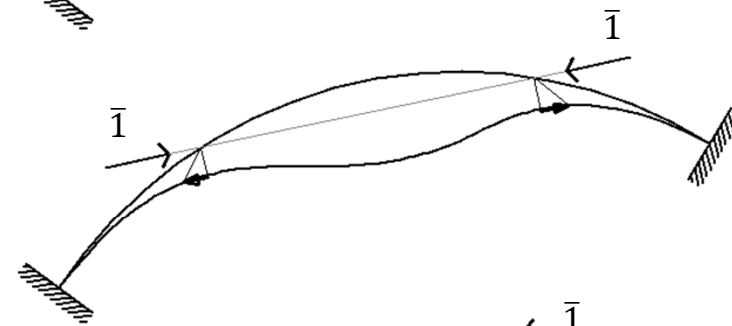
SE



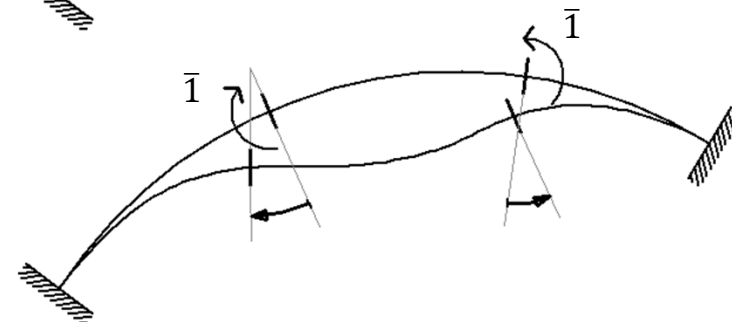
Corrimiento



Giro



Corrimiento relativo



Giro relativo

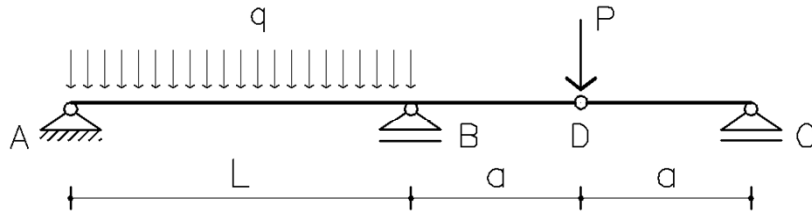
La carga $\bar{1}$ se aplica con sentido arbitrario.

Luego de realizar los cálculos, si el signo resultante para el corrimiento es positivo, el sentido supuesto para $\bar{1}$ coincide con el sentido del corrimiento.

Si el signo resultante para el corrimiento es negativo, el sentido del corrimiento es opuesto al de $\bar{1}$.

METODO DE LA CARGA UNITARIA

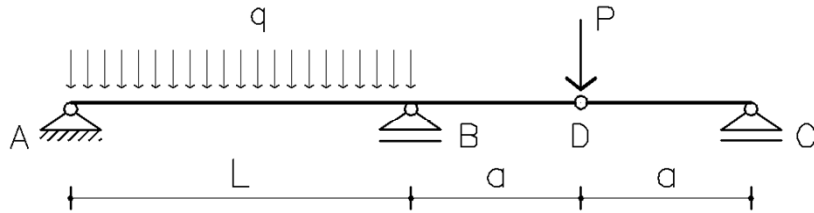
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



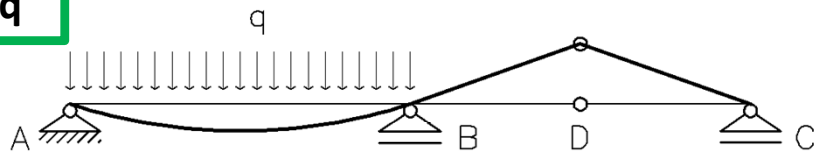
1. Calcular el corrimiento vertical del punto D.
2. Calcular el giro relativo de las secciones en D.

METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

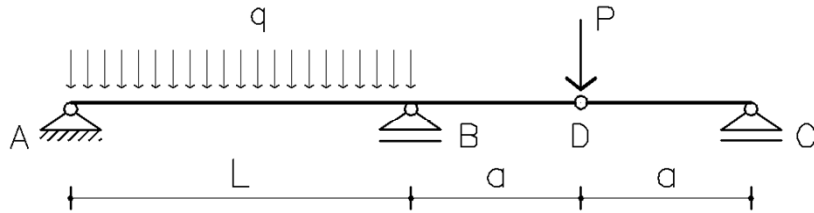


EL q

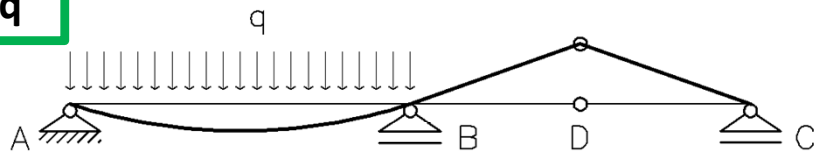


METODO DE LA CARGA UNITARIA

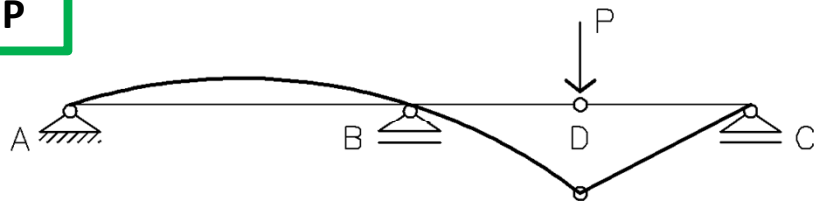
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



EL q

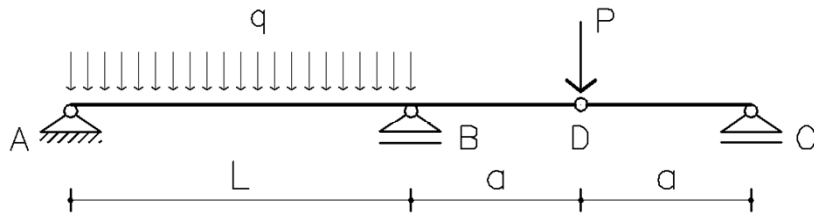


EL P

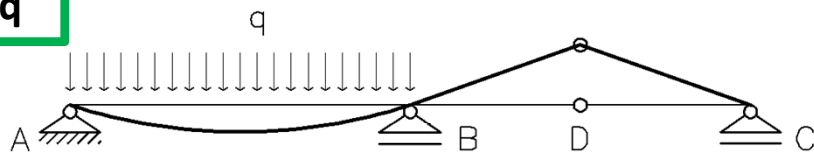


METODO DE LA CARGA UNITARIA

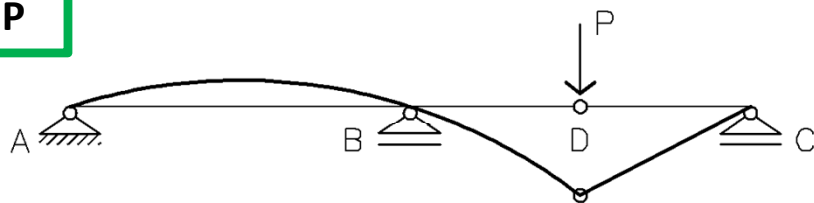
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



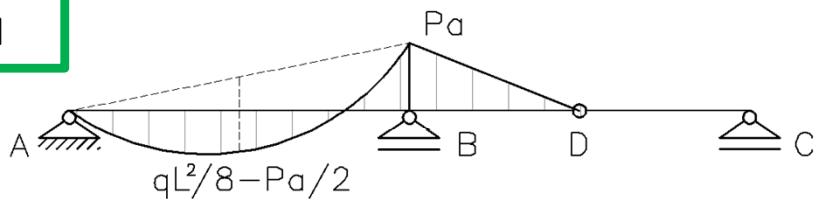
EL q



EL P



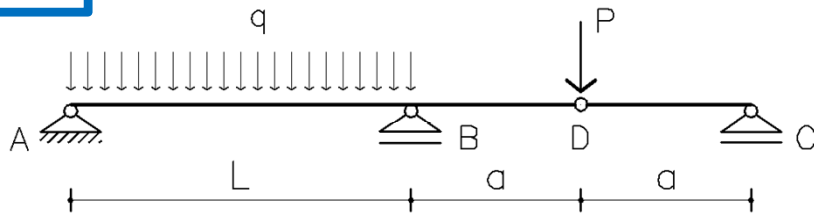
M



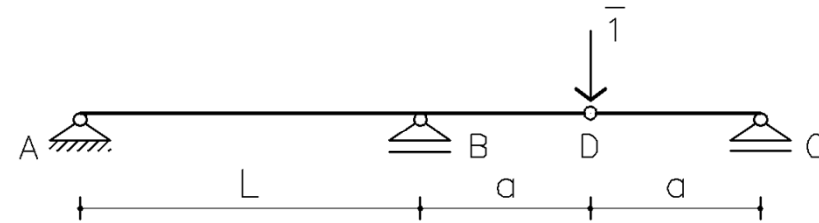
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

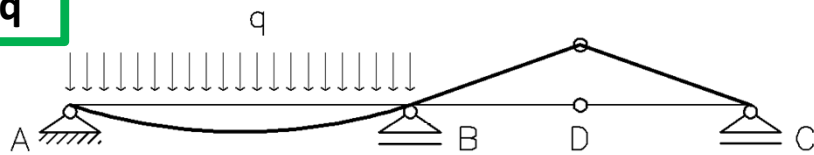
SD



SE

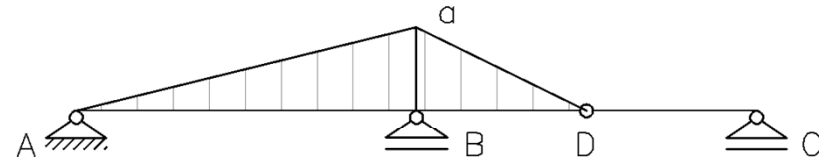


EL q

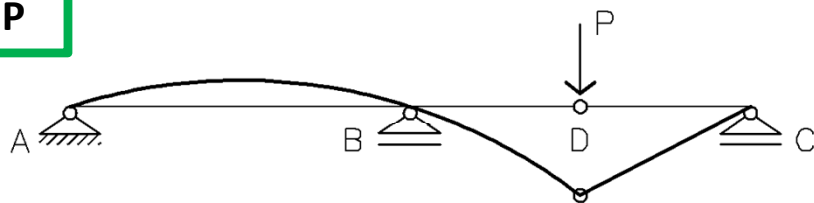


Corrimiento

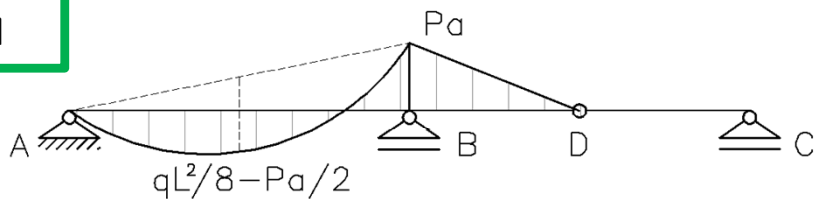
$\bar{M}$



EL P



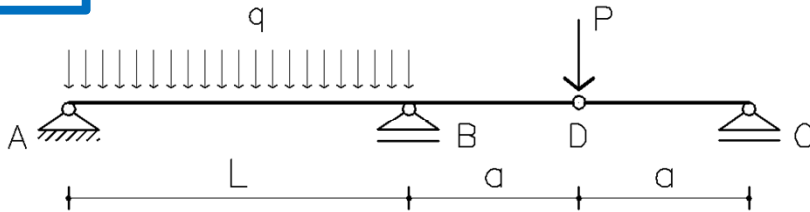
M



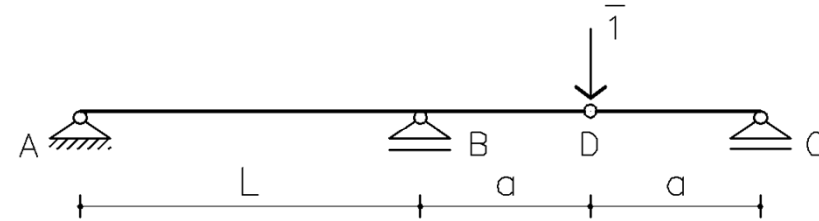
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

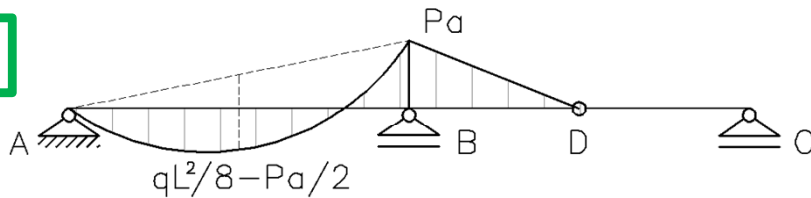
SD



SE

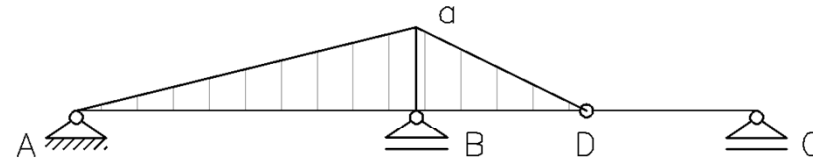


M



Corrimiento

M



$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N} \frac{N}{EA} ds + \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \psi \int \bar{Q} \frac{Q}{GA} ds + \int \bar{N} \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} ds + \int \bar{M} t \frac{M}{GJ} ds$$

$$\sum \bar{P}_i \Delta i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

$$\Delta D = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds$$

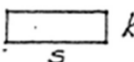
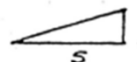
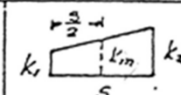
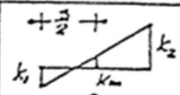
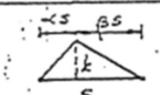
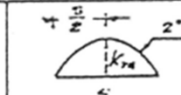
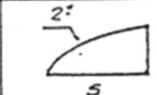
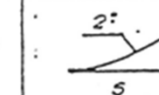
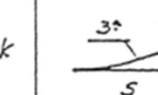
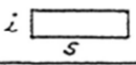
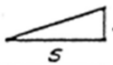
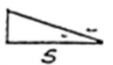
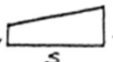
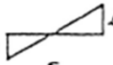
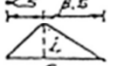
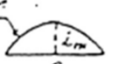
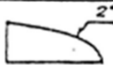
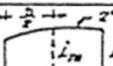
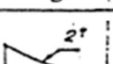
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

	$1' M \bar{M}$	$\frac{1}{2} 1' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} 1' M (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{2}{3} 1' M \bar{M}_m$	$\frac{2}{3} 1' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} 1' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} 1' M \bar{M}$
	$\frac{1}{2} 1' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{3} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} 1' M_B (\bar{M}_A + 2\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} 1' M_B \bar{M}_m$	$\frac{5}{12} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{4} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} 1' (1+\alpha) M_B \bar{M}$
	$\frac{1}{2} 1' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{6} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} 1' M_A (2\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} 1' M_A \bar{M}_m$	$\frac{1}{4} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} 1' (1+\beta) M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{2} 1' (M_A + M_B) \bar{M}$	$\frac{1}{6} 1' (M_A + 2M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} 1' [\bar{M}_A (2M_A + M_B) + \bar{M}_B (2M_B + M_A)]$	$\frac{1}{3} 1' (M_A + M_B) \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} 1' (3M_A + 5M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' (M_A + 3M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} 1' \bar{M} [M_A(1+\beta) + M_B(1+\alpha)]$
	$\frac{2}{3} 1' M_m \bar{M}$	$\frac{1}{3} 1' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} 1' M_m (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{8}{15} 1' M_m \bar{M}_m$	$\frac{7}{15} 1' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} 1' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} 1' (1+\alpha\beta) M_m \bar{M}$
	$\frac{2}{3} 1' M_B \bar{M}$	$\frac{5}{12} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' M_B (3\bar{M}_A + 5\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} 1' M_B \bar{M}_m$	$\frac{8}{15} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{3}{10} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' (5 - \beta - \beta^2) \times M_B \bar{M}$
	$\frac{2}{3} 1' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{4} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' M_A (5\bar{M}_A + 3\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} 1' M_A \bar{M}_m$	$\frac{11}{30} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{2}{15} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' (5 - \alpha - \alpha^2) \times M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{3} 1' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{4} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' M_B (\bar{M}_A + 3\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} 1' M_B \bar{M}_m$	$\frac{3}{10} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} 1' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' (1 + \alpha + \alpha^2) \times M_B \bar{M}$
	$\frac{1}{3} 1' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{12} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' M_A (3\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} 1' M_A \bar{M}_m$	$\frac{2}{15} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{30} 1' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' (1 + \beta + \beta^2) \times M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{2} 1' M \bar{M}$	$\frac{1}{6} 1' (1 + \alpha) \bar{M}_B M$	$\frac{1}{6} 1' M [(1 + \beta) \bar{M}_A + (1 + \alpha) \bar{M}_B]$	$\frac{1}{3} 1' (1 + \alpha\beta) M \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} 1' (5 - \beta - \beta^2) \times M \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} 1' (1 + \alpha + \alpha^2) \times M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} 1' M \bar{M}$

METODO DE LA CARGA UNITARIA

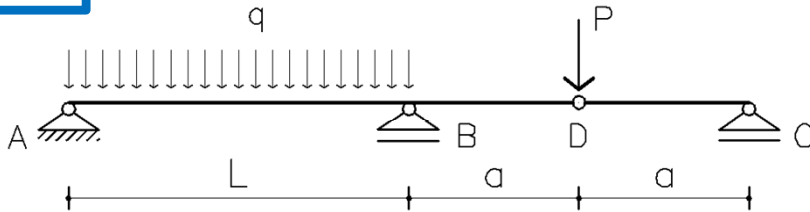
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

											
1		iks	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{2}i(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}i(k_2-k_1)s$	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{2}{3}ik_m s$	$\frac{2}{3}iks$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	1
2		$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{6}i(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}i(2k_2-k_1)s$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)iks$	$\frac{1}{3}ik_m s$	$\frac{5}{12}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{5}iks$	2
3		$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}iks$	$\frac{1}{6}i(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}i(k_2-2k_1)s$	$-\frac{1}{6}(1+\beta)iks$	$\frac{1}{3}ik_m s$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}iks$	$\frac{1}{20}iks$	3
4		$\frac{1}{2}(k_1+k_2)ks$	$\frac{1}{6}(k_1+2k_2)ks$	$\frac{1}{6}(2k_1k_1+k_1k_2+k_2k_1+2k_2k_2)s$	$\frac{1}{6}[(2k_2+k_1)k_2-(k_2+2k_1)k_1]s$	$\frac{1}{6}[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]ks$	$\frac{1}{3}(k_1+k_2)k_m s$	$\frac{1}{12}(3k_1+5k_2)ks$	$\frac{1}{12}(k_1+3k_2)ks$	$\frac{1}{20}(k_1+4k_2)ks$	4
5		$\frac{1}{2}(k_2-k_1)ks$	$\frac{1}{6}(2k_2-k_1)ks$	$\frac{1}{6}[k_2(2k_2+k_1)-(k_2+2k_1)k_1]s$	$\frac{1}{6}[(2k_1-k_2)k_1+(2k_2-k_1)k_2]s$	$\frac{1}{6}[k_2(1+\alpha)-k_1(1+\beta)]ks$	$\frac{1}{3}(k_2-k_1)k_m s$	$\frac{1}{12}(5k_2-3k_1)ks$	$\frac{1}{12}(3k_2-k_1)ks$	$\frac{1}{20}(4k_2-k_1)ks$	5
6		$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)iks$	$\frac{1}{6}i[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]s$	$\frac{1}{6}[k_2(1+\alpha)-k_1(1+\beta)]is$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta)ik_m s$	$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2)iks$	$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2)iks$	$\frac{1}{20}(1+\alpha)(1+\beta)^2iks$	6
7		$\frac{2}{3}ik_m ks$	$\frac{1}{3}ik_m ks$	$\frac{1}{3}ik_m (k_1+k_2)s$	$\frac{1}{3}ik_m (k_2-k_1)s$	$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta)ik_m ks$	$\frac{8}{15}ik_m k_m s$	$\frac{7}{15}ik_m ks$	$\frac{1}{5}ik_m ks$	$\frac{2}{15}iks$	7
8		$\frac{2}{3}iks$	$\frac{5}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+5k_2)s$	$\frac{1}{12}i(5k_2-3k_1)s$	$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2)iks$	$\frac{7}{15}ik_m s$	$\frac{8}{15}iks$	$\frac{3}{10}iks$	$\frac{7}{30}iks$	8
9		$\frac{2}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(5k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-5k_1)s$	$\frac{1}{12}(5-\alpha-\alpha^2)iks$	$\frac{7}{15}ik_m s$	$\frac{11}{30}iks$	$\frac{2}{15}iks$	$\frac{1}{12}iks$	9
10		$\frac{1}{6}(k_1+4k_m+k_2)ks$	$\frac{1}{6}(2k_m+k_2)ks$	$\frac{1}{6}(k_1k_1+4k_1k_m+k_2k_1+4k_2k_m+k_2k_2)s$	$\frac{1}{6}(k_2k_2+4k_2k_m-k_1k_1)s$	$\frac{1}{6}[k_1\beta^2+2k_m(1+\beta)+k_2\alpha^2]ks$	$\frac{1}{15}(k_1+8k_m+k_2)k_m s$	$\frac{1}{60}(k_1+28k_m+11k_2)ks$	$\frac{1}{60}(12k_m+9k_2-k_1)ks$	$\frac{1}{60}[8(k_m+k_2)-k_1]ks$	10
11		$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-k_1)s$	$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2)iks$	$\frac{1}{5}ik_m s$	$\frac{3}{10}iks$	$\frac{1}{5}iks$	$\frac{1}{6}iks$	11
12		$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+k_2)s$	$\frac{1}{12}i(k_2-3k_1)s$	$\frac{1}{12}(1+\beta+\beta^2)iks$	$\frac{1}{5}ik_m s$	$\frac{2}{15}iks$	$\frac{1}{30}iks$	$\frac{1}{60}iks$	12

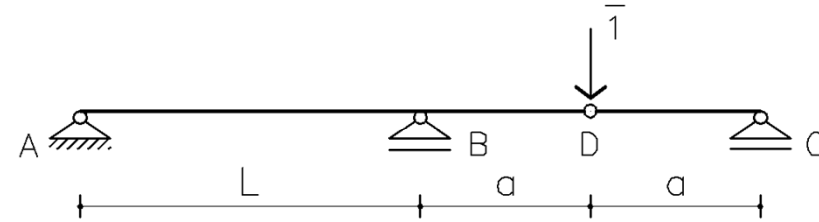
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

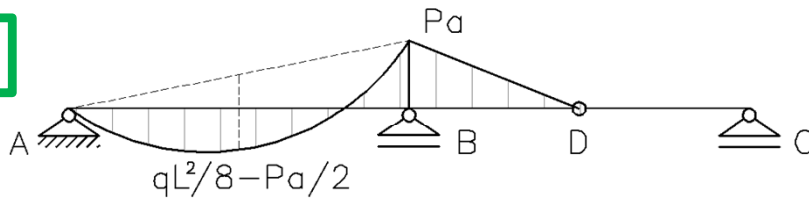
SD



SE

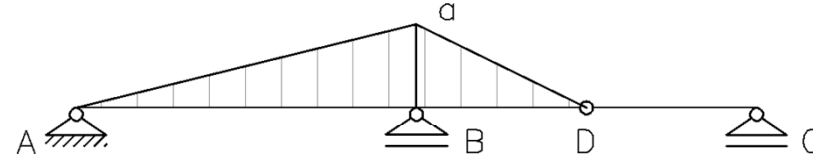


M



Corrimiento

$\bar{M}$



$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N} \frac{N}{EA} ds + \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \psi \int \bar{Q} \frac{Q}{GA} ds + \int \bar{N} \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{Mt}{GJt} ds$$

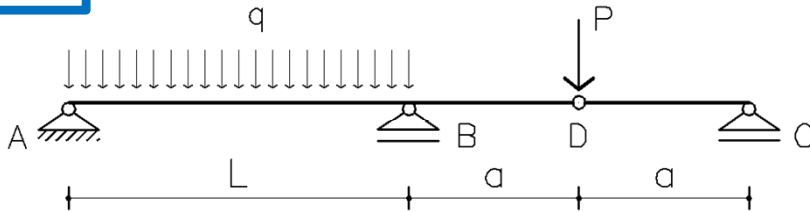
$$\sum \bar{P}_i \Delta i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

$$\Delta D = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds = - \frac{1}{3} \frac{qL^2}{8} a L + \frac{1}{3} Pa a L + \frac{1}{3} Pa a a$$

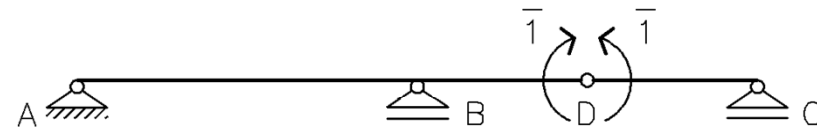
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

SD

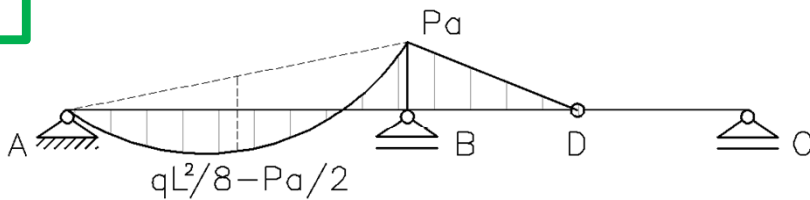


SE

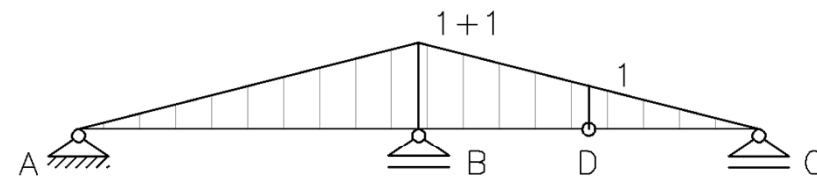


Giro relativo

M



$\bar{M}$



$$\sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

$$\theta_D = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds =$$

$$-\frac{1}{3} \frac{qL^2}{8} 2L$$

+

$$\frac{1}{3} Pa 2L$$

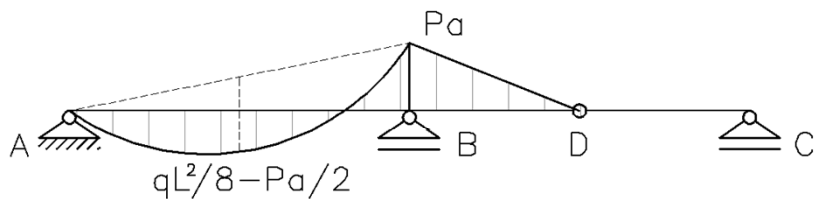
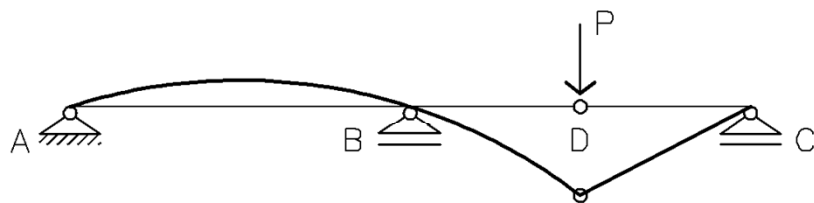
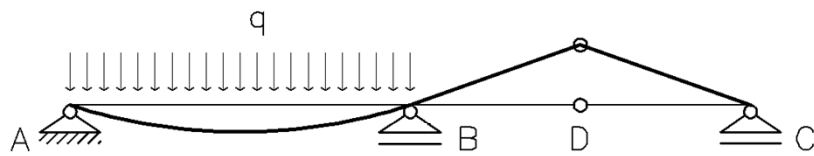
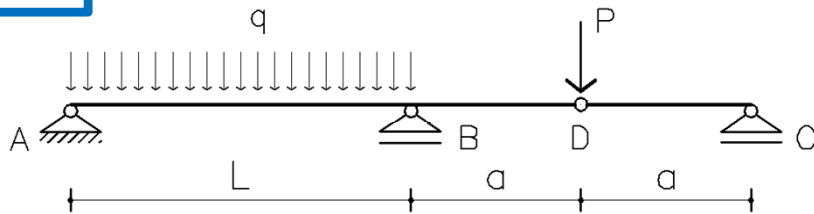
+

$$+\frac{1}{2} Pa 1a$$

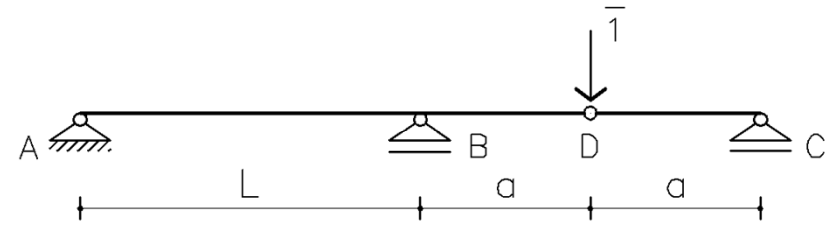
METODO DE LA CARGA UNITARIA

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

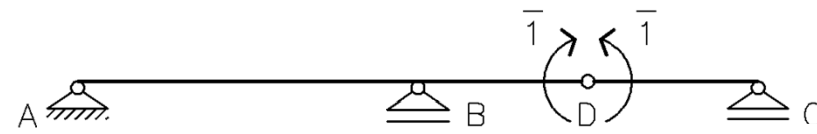
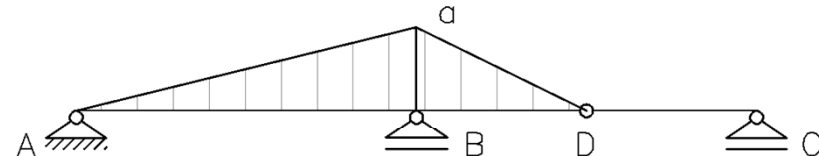
SD



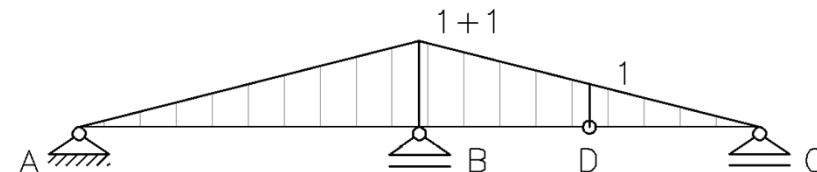
SE



Corrimiento



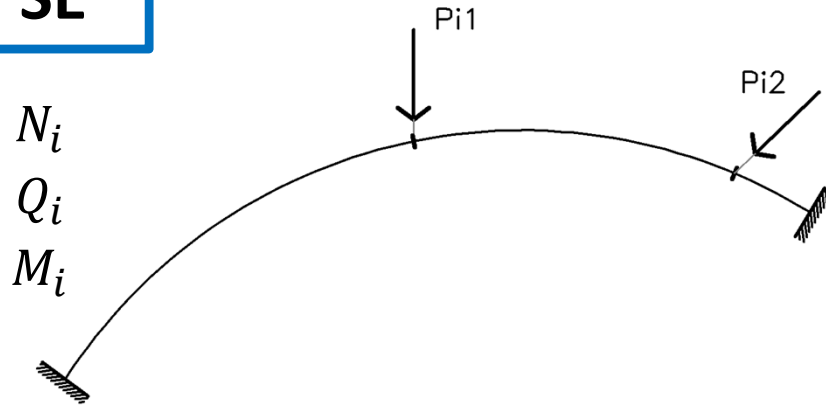
Giro relativo



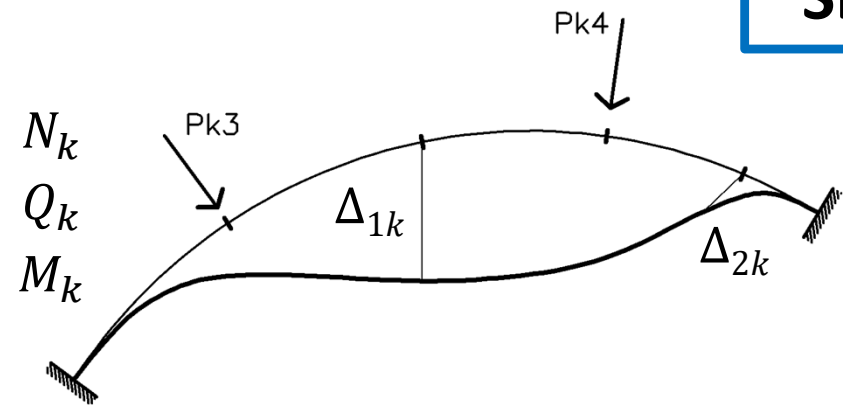
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Betti

SE



SD



$$\sum P_i \Delta_{ik} = \int N_i \frac{N_k}{EA} ds + \int M_i \frac{M_k}{EI} ds + \psi \int Q_i \frac{Q_k}{GA} ds$$

$$\sum P_k \Delta_{ki} = \int N_k \frac{N_i}{EA} ds + \int M_k \frac{M_i}{EI} ds + \psi \int Q_k \frac{Q_i}{GA} ds$$

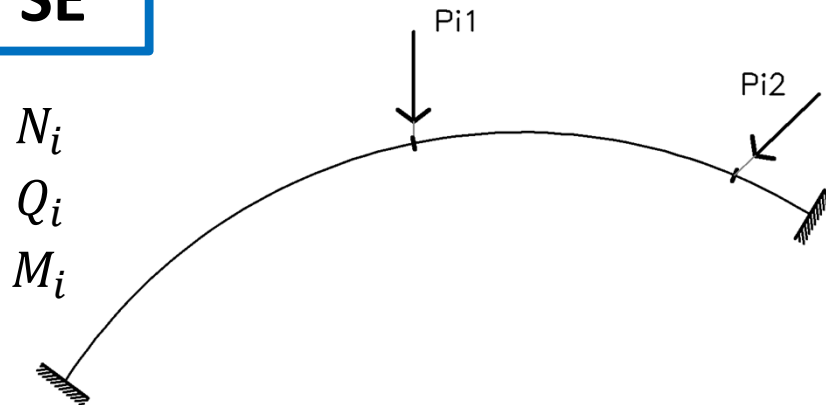
$$\sum P_i \Delta_{ik} = \sum P_k \Delta_{ki}$$

$$W_{ik} = W_{ki}$$

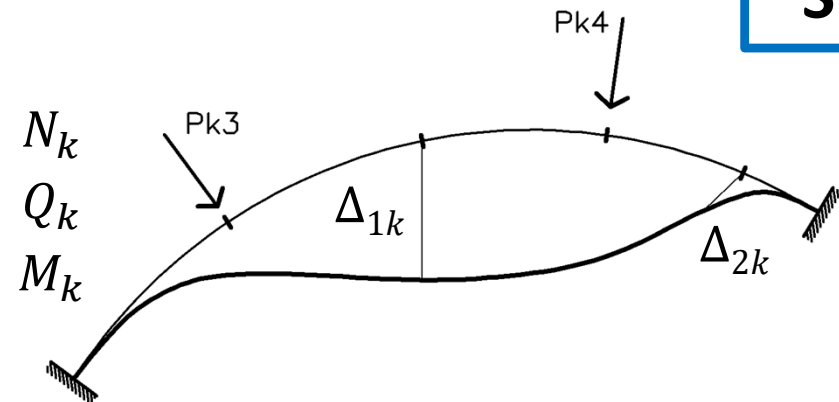
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Betti

SE



SD



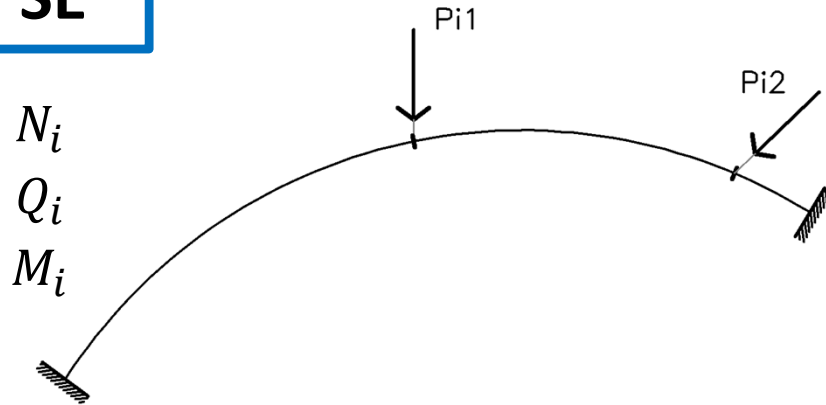
El trabajo virtual de sistema de fuerzas P_i en la deformación virtual debida a otro sistema de fuerzas P_k , es igual el trabajo de P_k en las deformaciones virtuales provocadas por P_i .

$$W_{ik} = W_{ki}$$

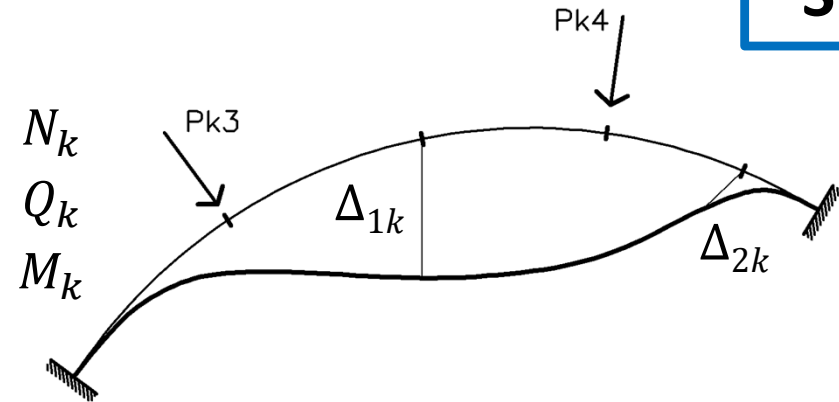
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell

SE



SD



$$\sum P_i \Delta_{ik} = \sum P_k \Delta_{ki}$$

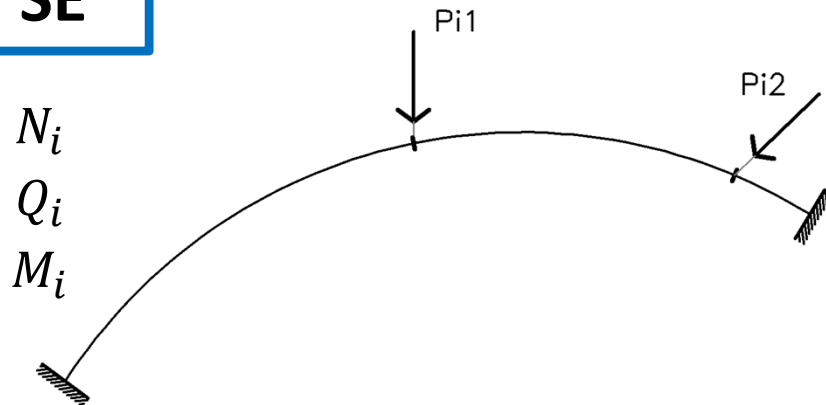
Si P_i es una sola fuerza unitaria y P_k también está formado por una única fuerza unitaria

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

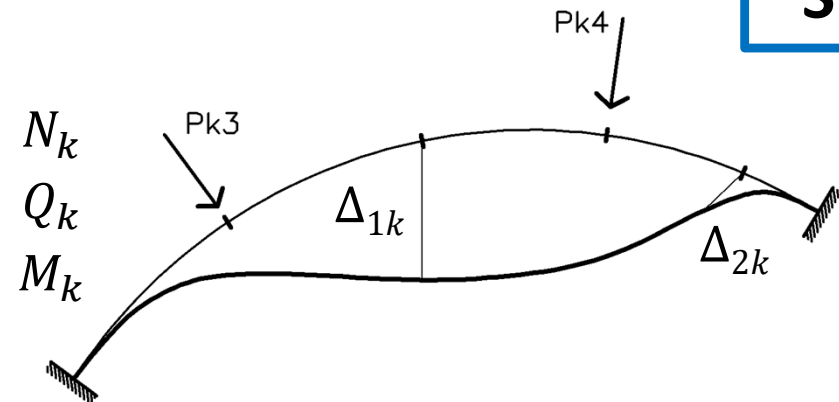
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell

SE



SD



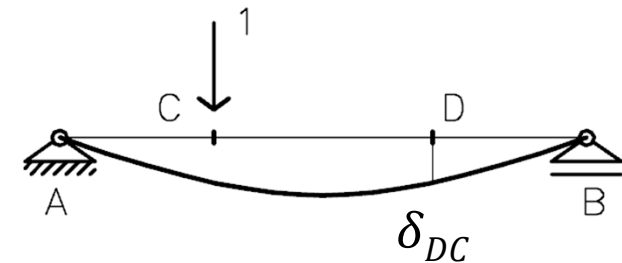
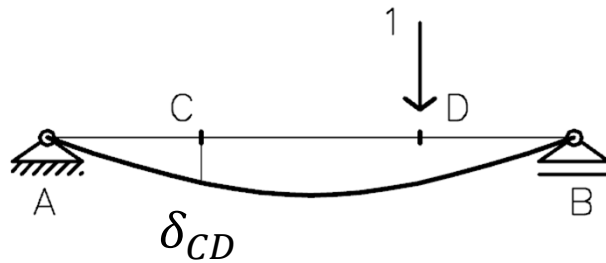
El desplazamiento en la dirección de una acción (fuerza o momento) que actúa en una sección A, debido a una acción unitaria actuando en una sección B, es igual al desplazamiento en B provocado por una acción unitaria actuando en A.

También se denomina Teorema de reciprocidad de deformaciones .

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

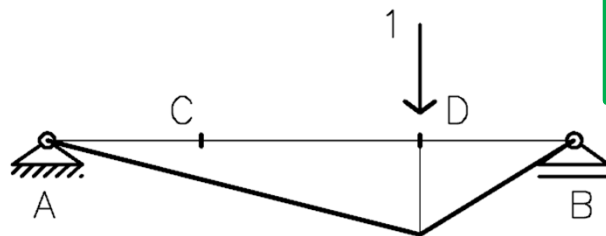
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell. Aplicaciones

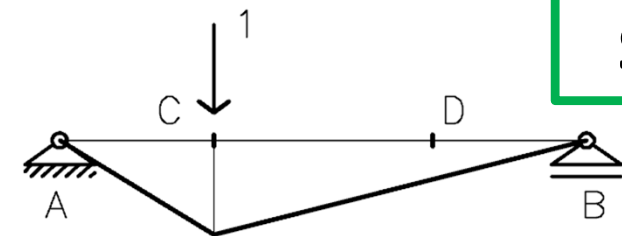


$$\delta_{CD} = \delta_{DC}$$

δ_{CD}

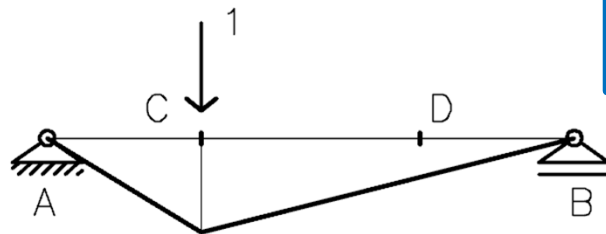


SD

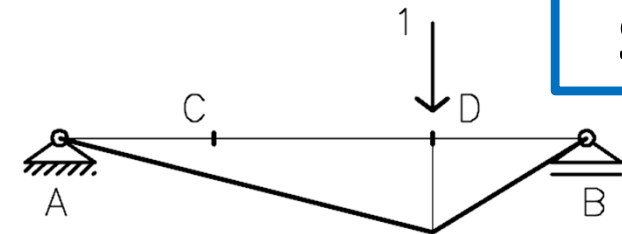


SE

δ_{DC}



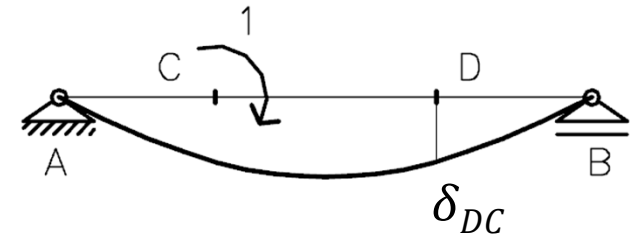
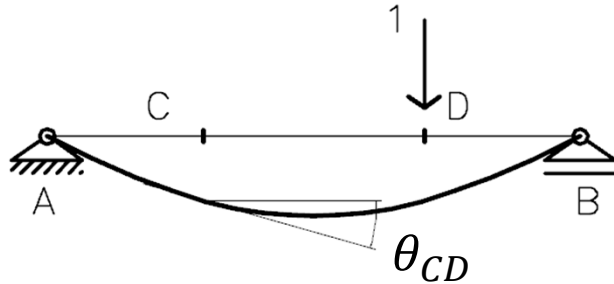
SD



SE

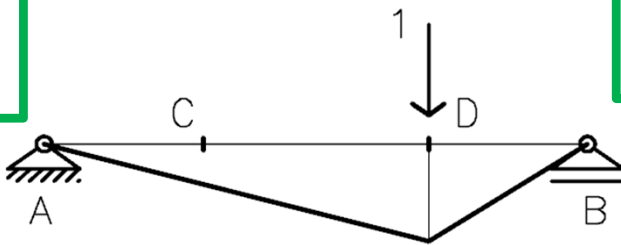
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell. Aplicaciones

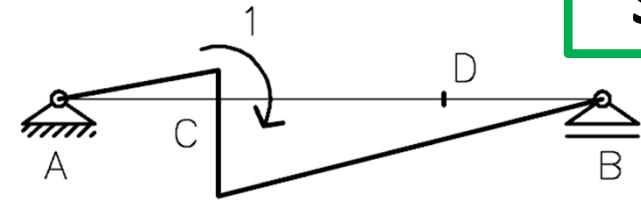


$$\theta_{CD} = \delta_{DC}$$

θ_{CD}

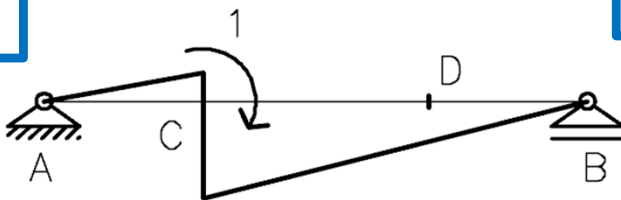


SD

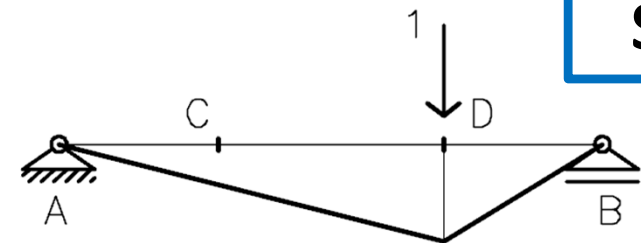


SE

δ_{DC}



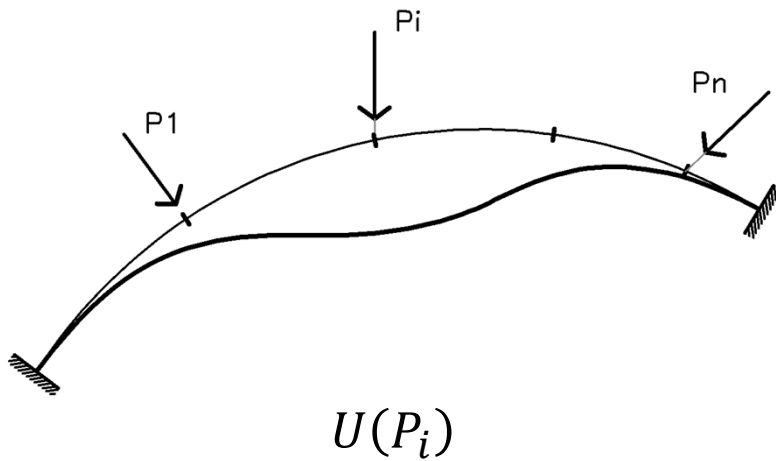
SD



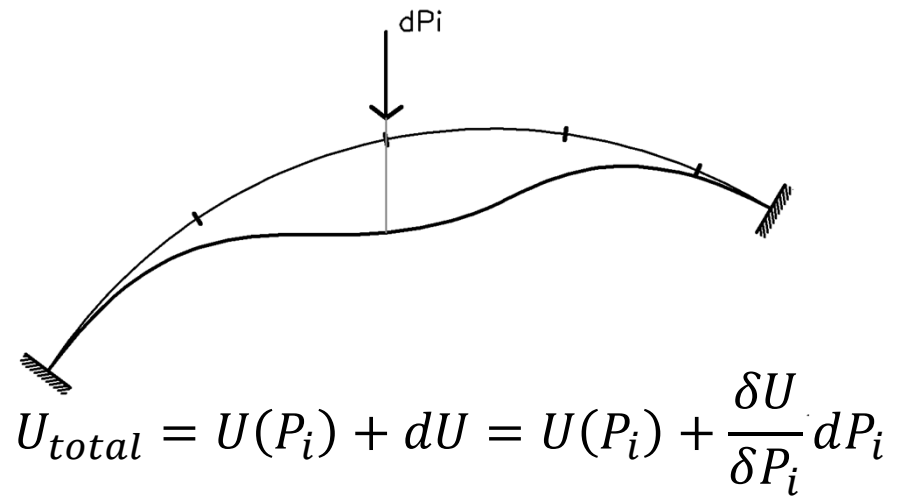
SE

TEOREMAS ENERGETICOS

Teoremas de Castigliano



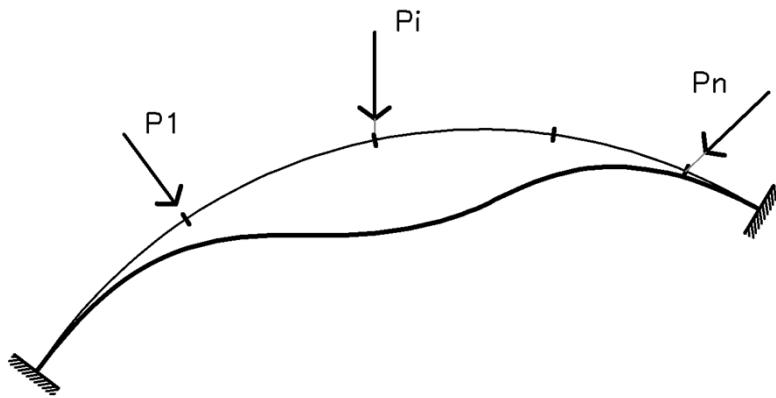
+ dP_i



$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \int \left(\frac{N}{EA} \frac{\delta N}{\delta P_i} + \frac{M}{EI} \frac{\delta M}{\delta P_i} + \psi \frac{Q}{GA} \frac{\delta Q}{\delta P_i} \right) ds$$

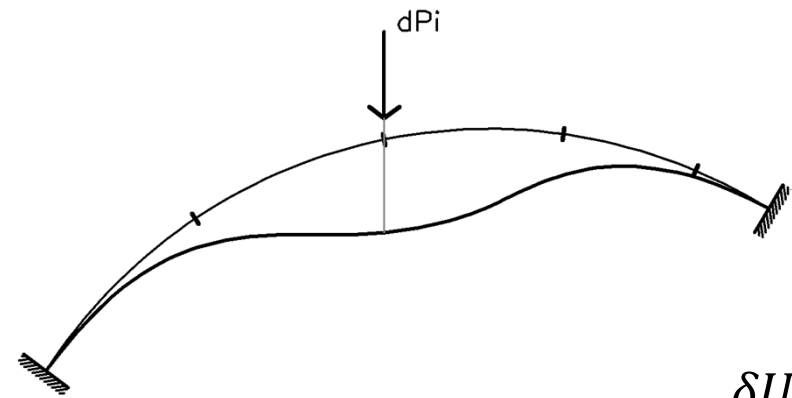
TEOREMAS ENERGETICOS

Teoremas de Castigliano

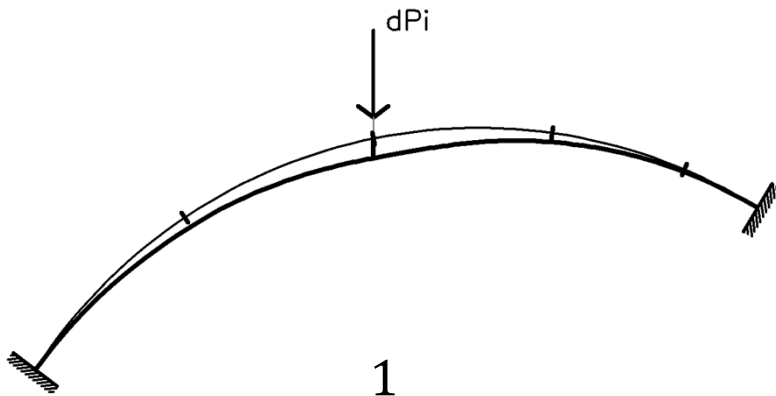


$$U(P_i)$$

$$+ dP_i$$

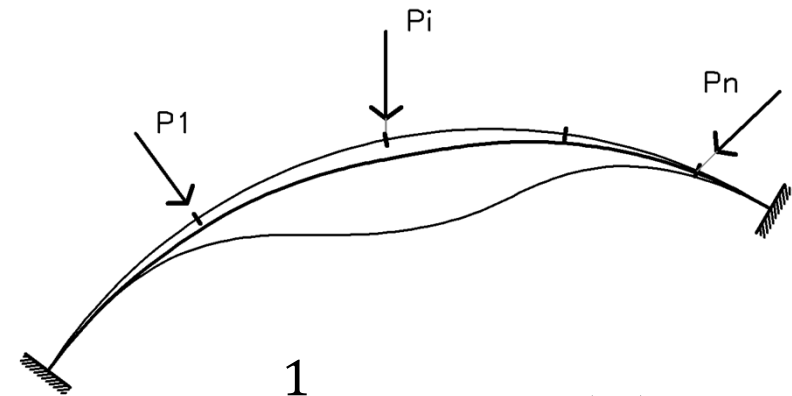


$$U_{total} = U(P_i) + dU = U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i$$



$$U = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i$$

$$+ (P_1 \dots P_n)$$



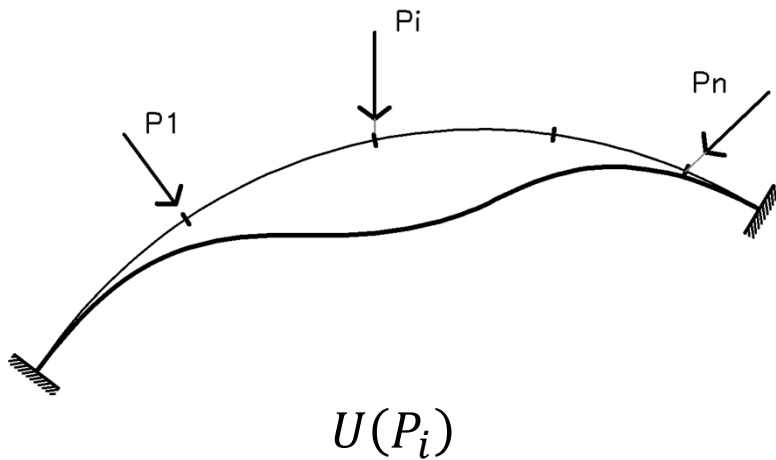
$$U_{total} = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i + U(P_i) + dP_i \delta_i$$

$$U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i + U(P_i) + dP_i \delta_i$$

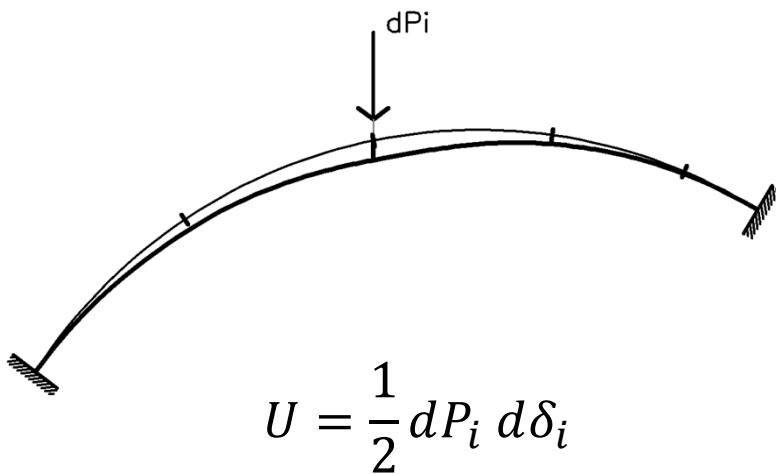
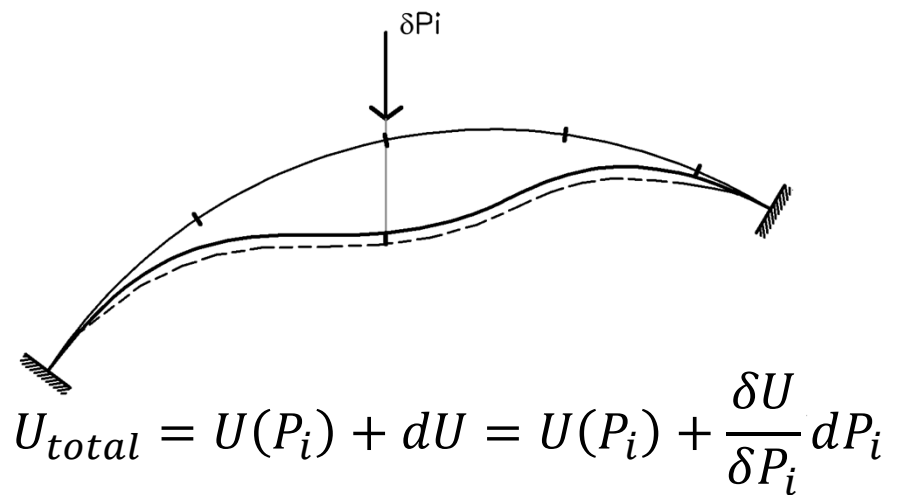
$$\frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i = dP_i \delta_i$$

TEOREMAS ENERGETICOS

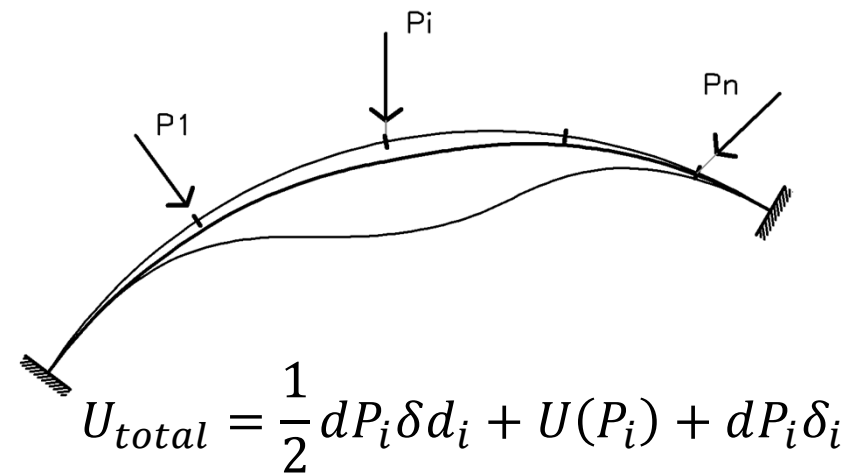
Teoremas de Castigliano



$$+ dP_i$$



$$+ (P_1 \dots P_n)$$



$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \delta_i$$

TEOREMAS ENERGETICOS

1° Teorema de Castigliano

La derivada de la energía de deformación de una estructura (sobre la que actúan n cargas) respecto de cualquier desplazamiento es igual a la carga que actúa en la dirección de ese desplazamiento.

$$\frac{\delta U}{\delta d_i} = P_i$$

$$U = U(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

2° Teorema de Castigliano

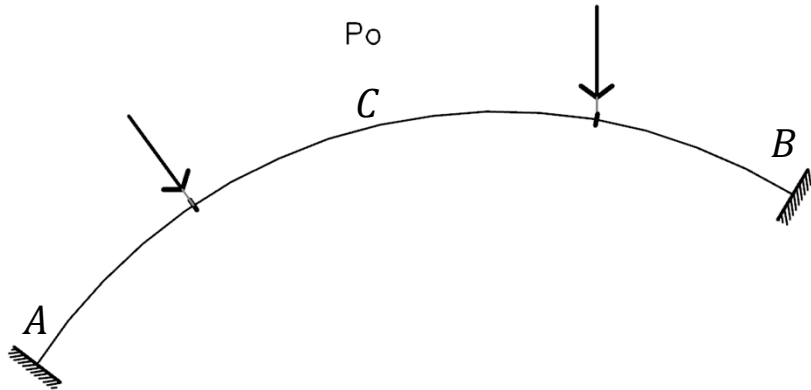
La derivada de la energía de deformación de una estructura (sobre la que actúan n cargas) respecto de cualquier carga es igual al desplazamiento en la dirección de esa carga.

$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \delta_i$$

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

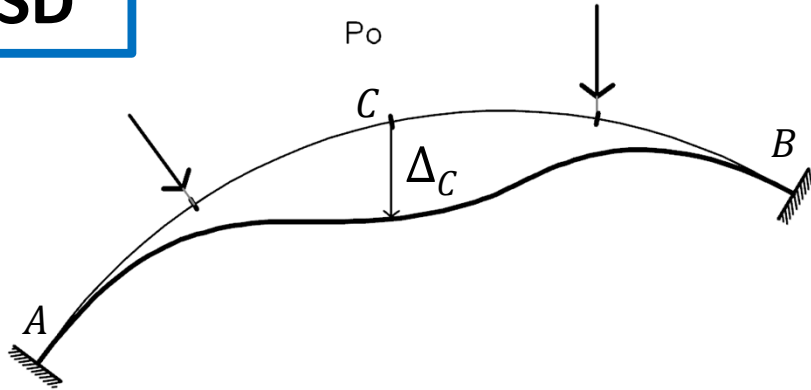


$$\Delta_C^v ?$$

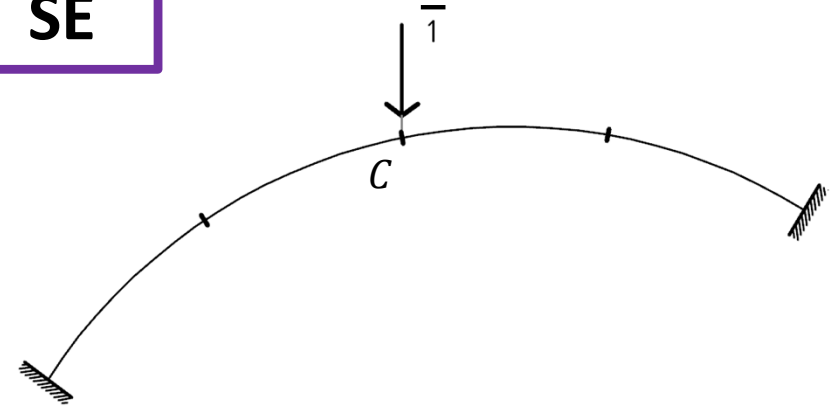
TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

SD



SE



$$\sum \bar{P}_i \Delta_i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

$$\Delta_C = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

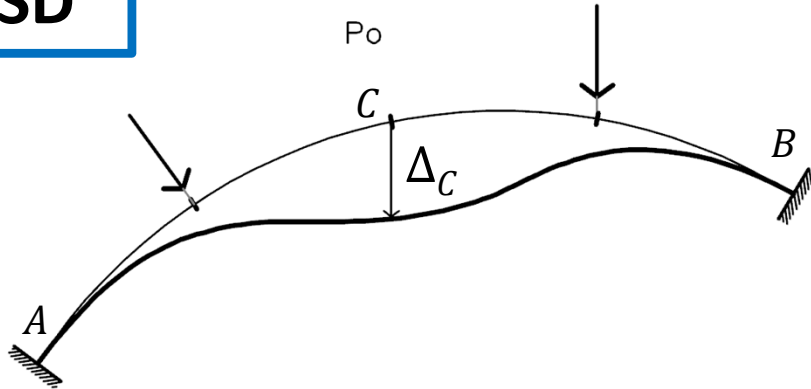
$\bar{M}$ es una ordenada genérica del diagrama de momentos del SE en el hiperestático

M es una ordenada genérica del diagrama de momentos del SD en el hiperestático

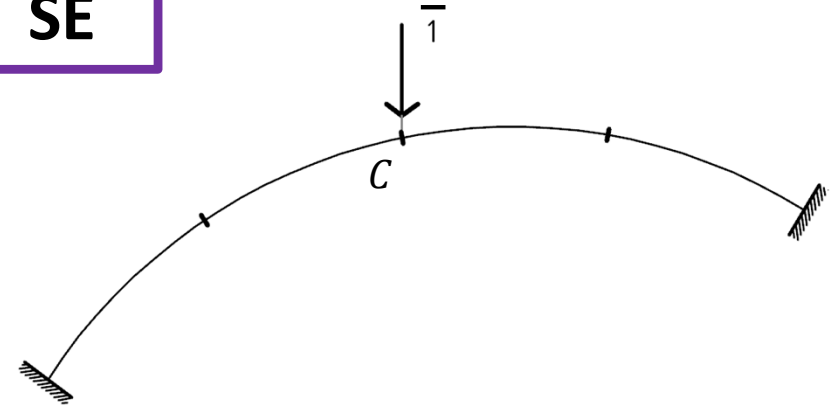
TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

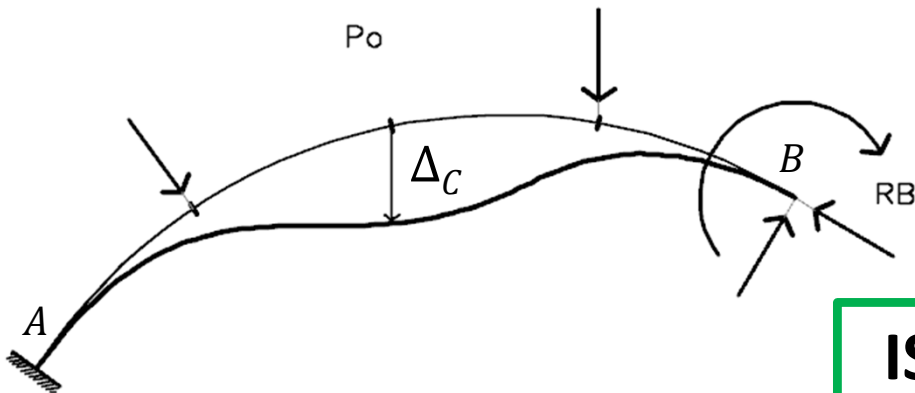
SD



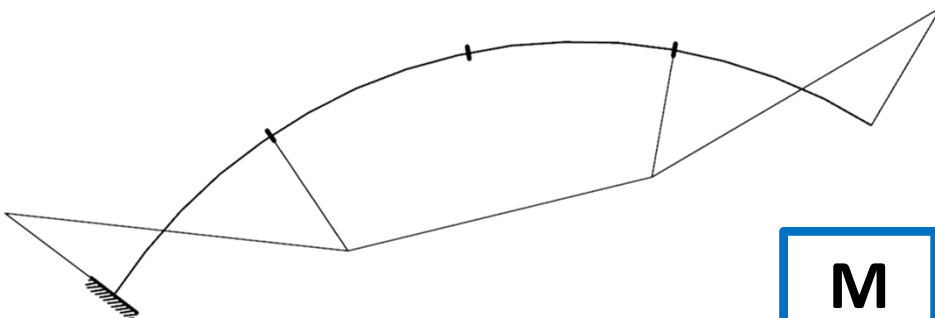
SE



HIP



ISO

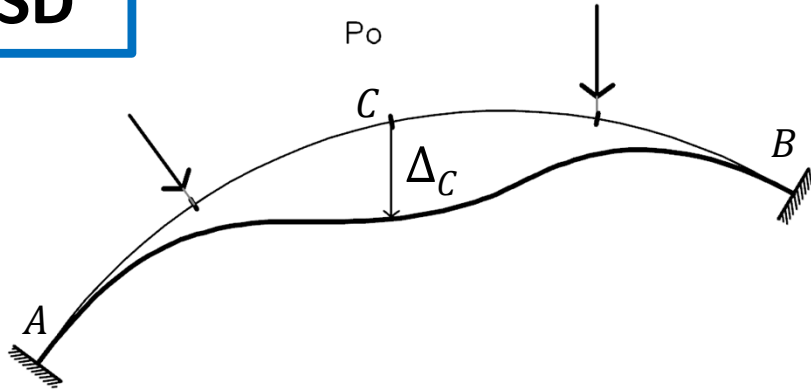


M

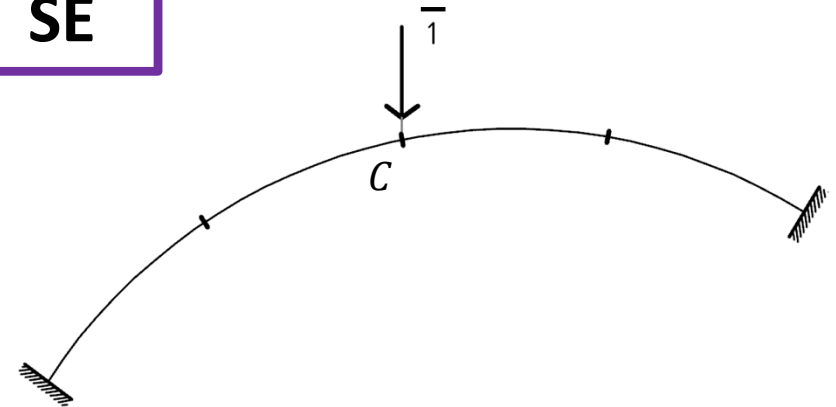
TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

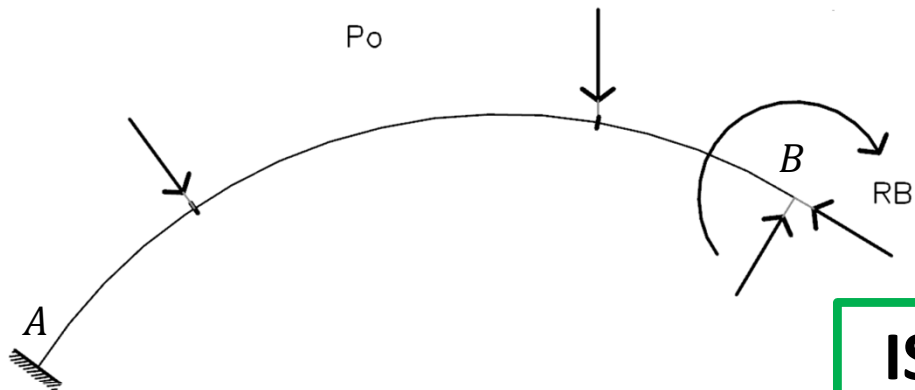
SD



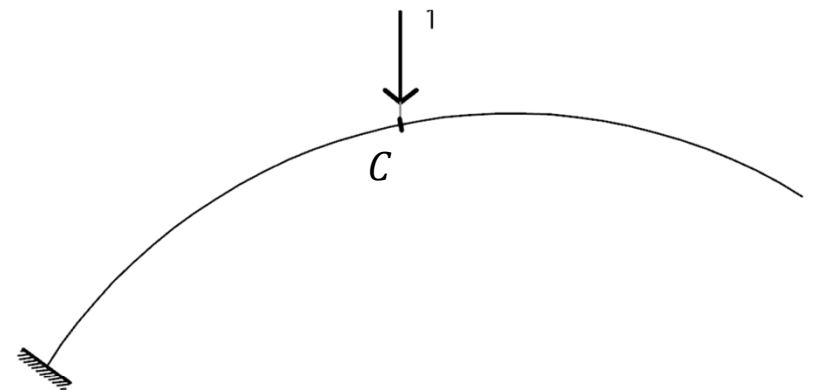
SE



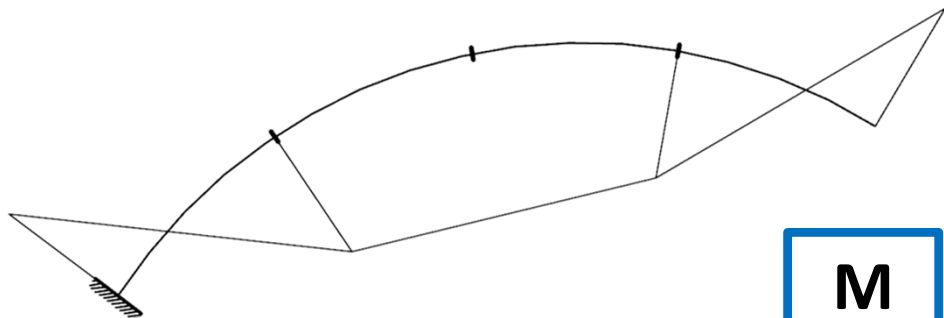
HIP



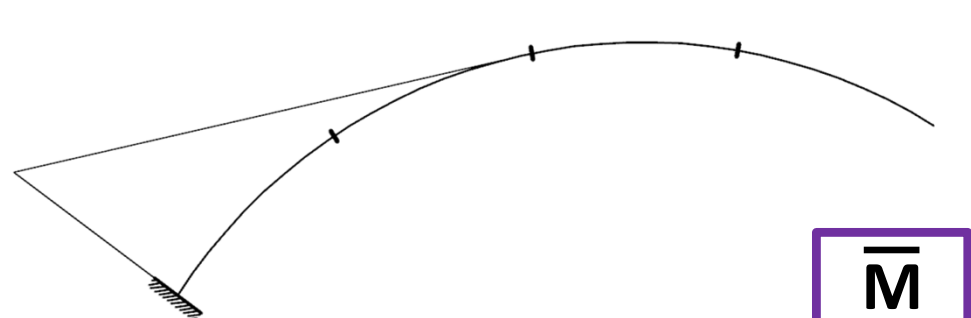
ISO



M



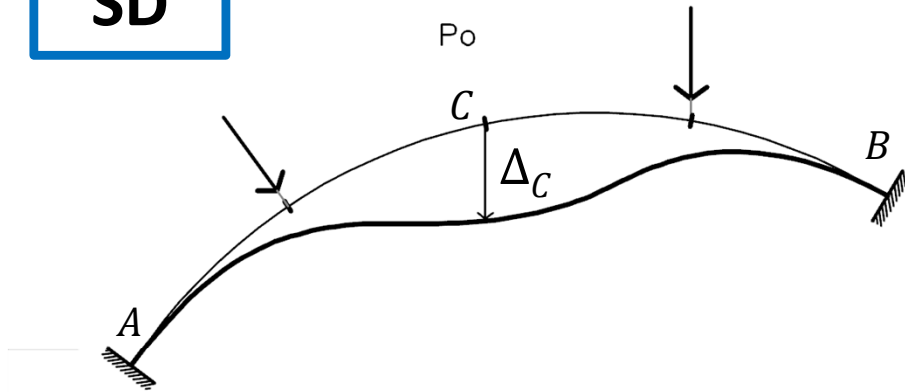
$\bar{M}$



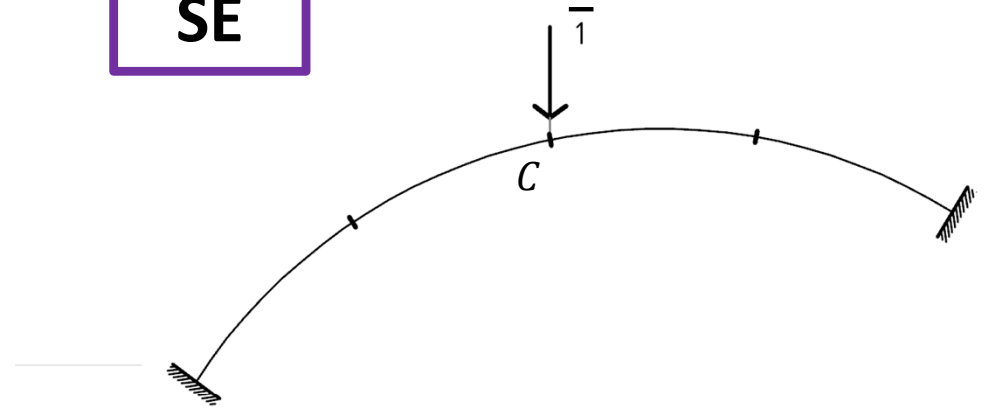
TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

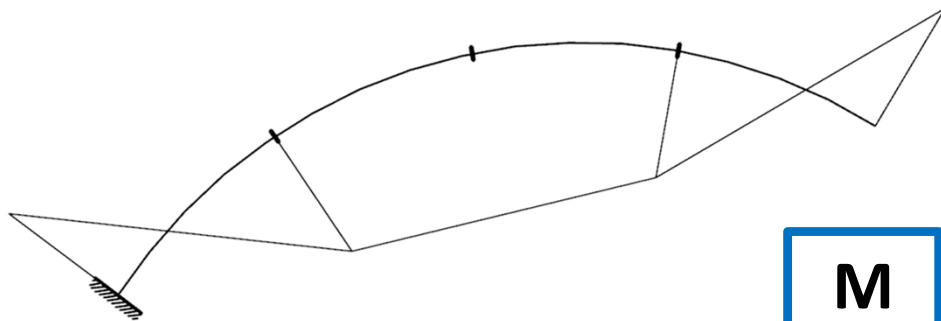
SD



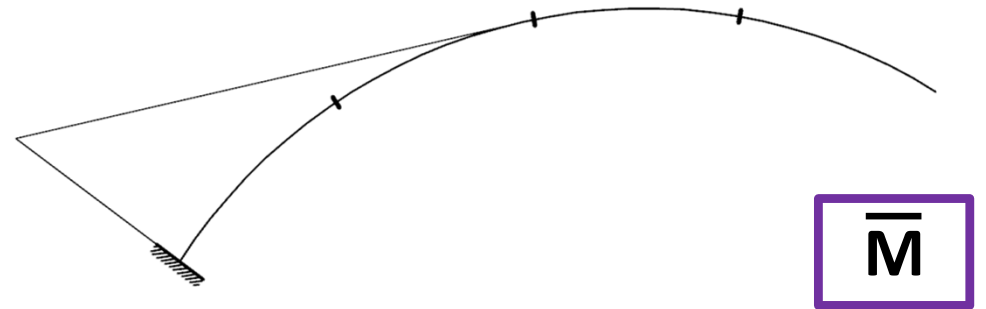
SE



M



M-bar



$$\Delta_C = \int \overline{M^{(Hip)}} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds$$

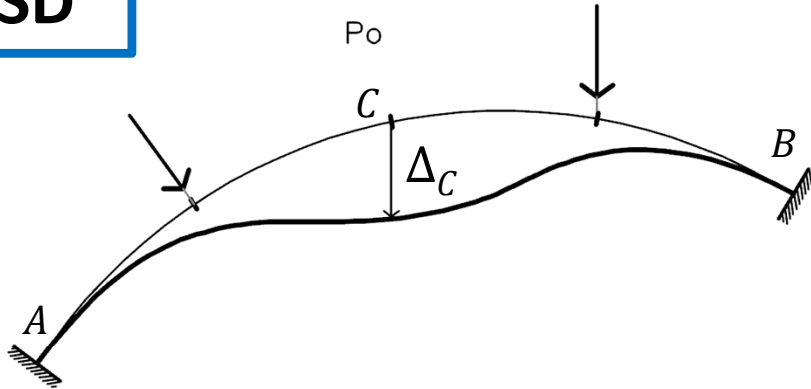
$$\Delta_C = \int \overline{M^{(Iso)}} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds$$

$$\Delta_C = \int \overline{M^{(Hip)}} \frac{M^{(Iso)}}{EI} ds$$

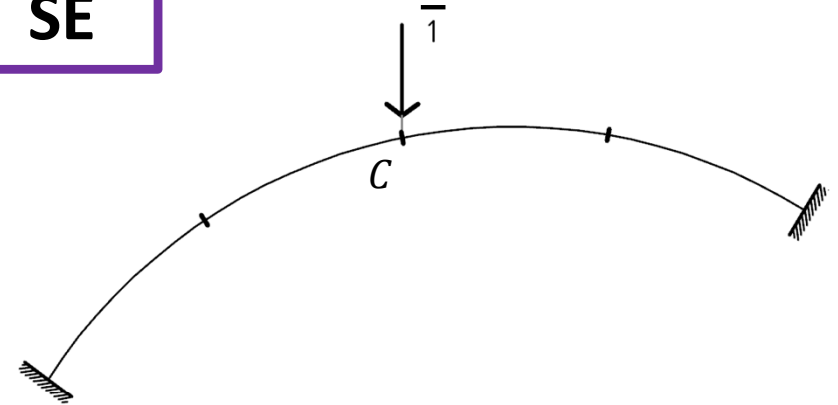
TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

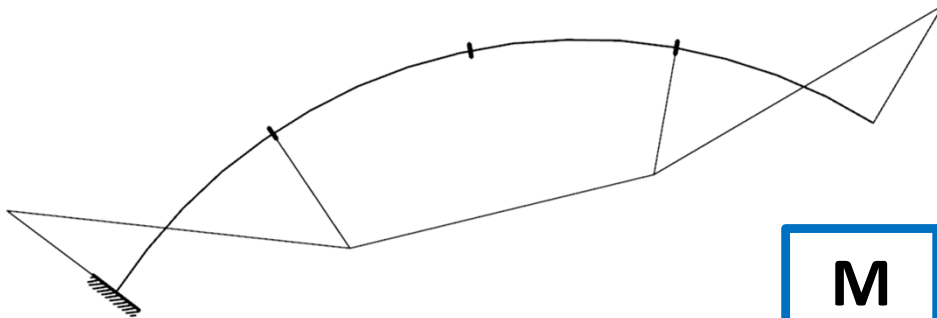
SD



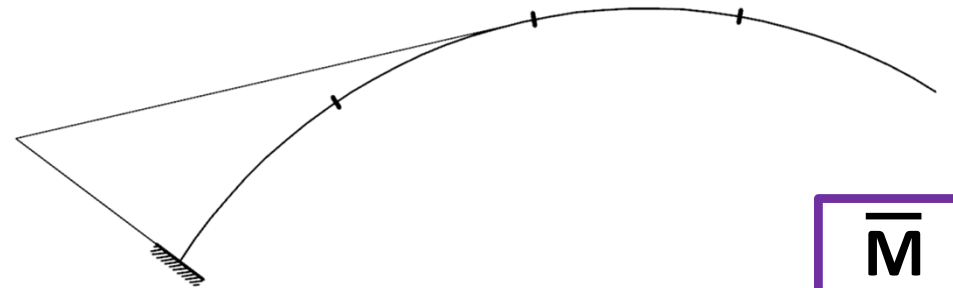
SE



M



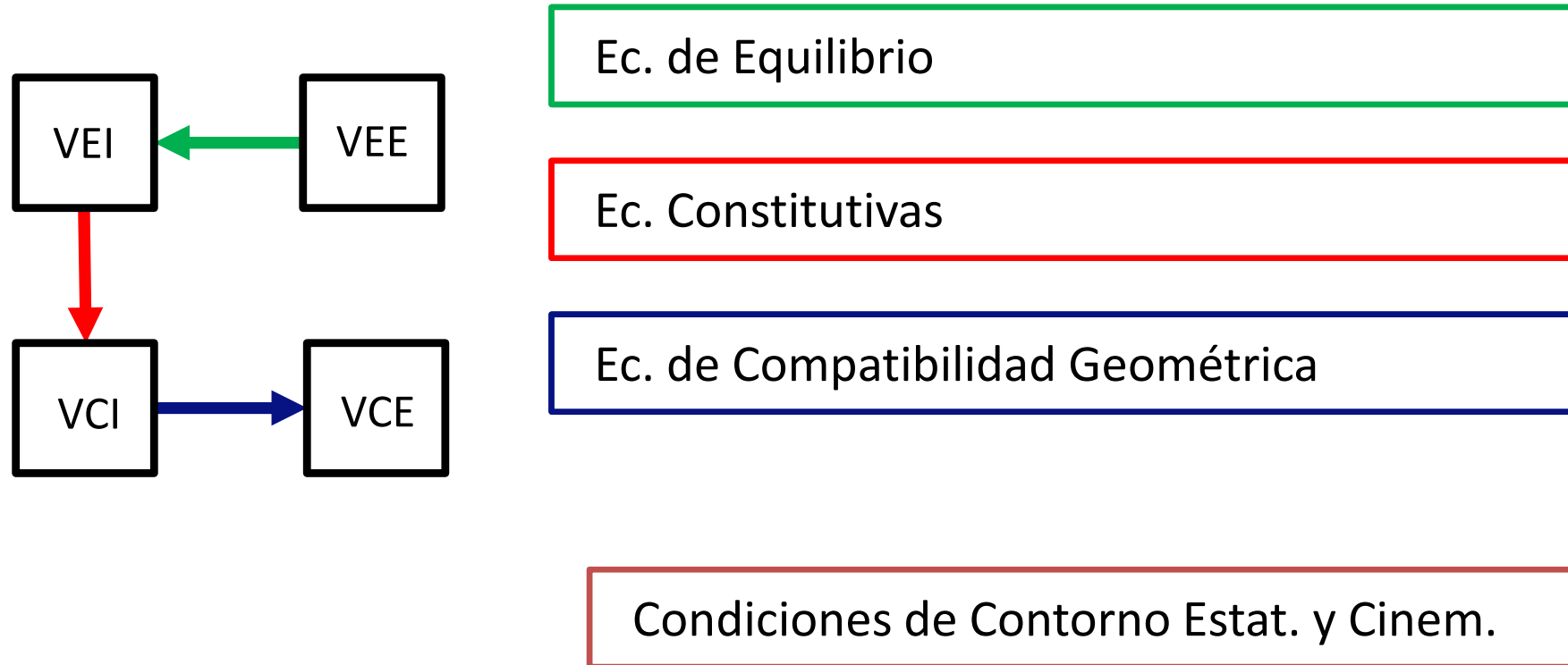
M-bar



$$\Delta_C = \int \overline{M}^{(Hip)} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds = \int \overline{M}^{(Iso)} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds = \int \overline{M}^{(Hip)} \frac{M^{(Iso)}}{EI} ds$$

POTENCIAL TOTAL

La Teoría de las Estructuras tiene un conjunto de ecuaciones que la gobiernan:



Para relacionarlas se usa una función de funciones o funcional.

En Ingeniería Estructural el funcional más usado es el **Potencial Total**.

POTENCIAL TOTAL

Definición

$$\pi = U + W$$

U : Energía deformación interna

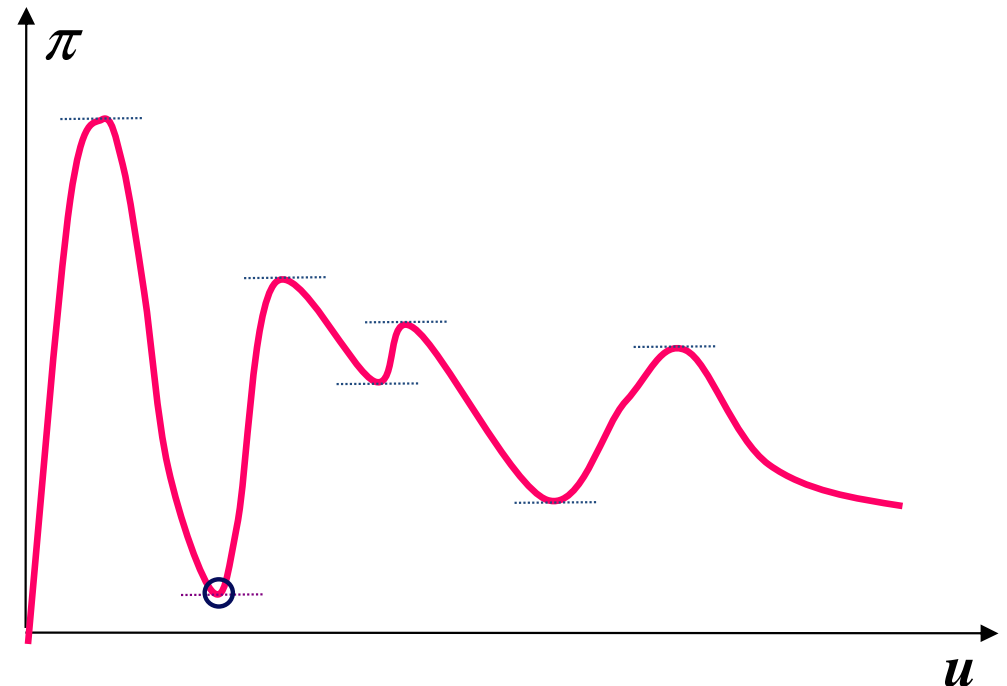
W : Trabajo acciones externas

La potencial total es un escalar que caracteriza a toda la estructura.
Representa la energía total en la estructura.

$$\pi = f(\mathbf{u})$$

De todas las configuraciones deformadas, nos interesan las de equilibrio.

Interesa la estacionalidad de la energía potencial total respecto de variaciones pequeñas y admisibles de los desplazamientos



El equilibrio debe ser estable, el punto estacionario debe ser un mínimo.

MINIMIZACIÓN POTENCIAL TOTAL

ESTACIONALIDAD DEL POTENCIAL TOTAL

$$\pi = U + W$$

U : Energía deformación interna

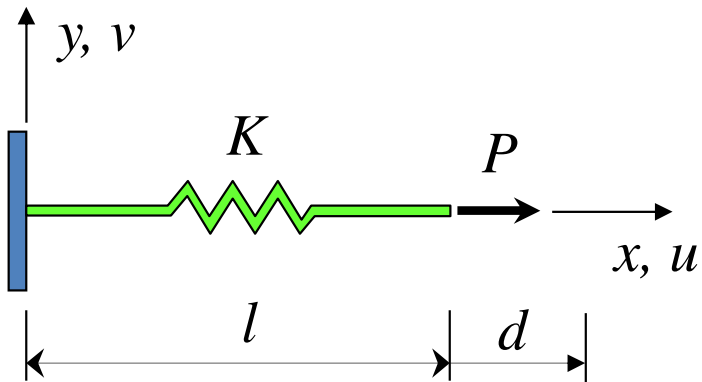
W : Trabajo acciones externas

Principio de Estacionalidad de la Energía Potencial

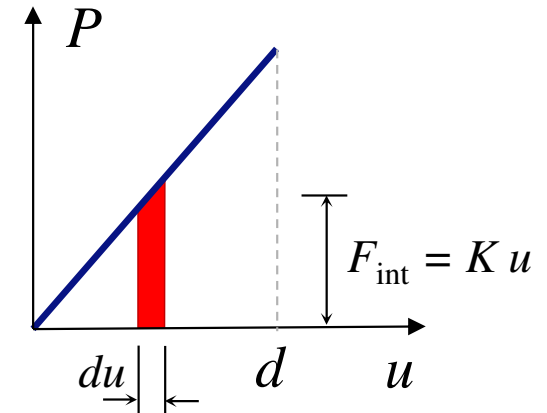
De todas las configuraciones admisibles de un sistema conservativo, aquellas que satisfacen el equilibrio hacen la energía potencial estacionaria.

MPT. Ejemplos: Sistemas un grado de libertad

Estructura



P - u



Energía Interna

$$U = \int_0^d F_{\text{int}} du = \int_0^d K u du$$

$$U = \frac{1}{2} K d^2 \quad U = \frac{1}{2} K u^2$$

Energía Externa

$$W = \int_0^d F_{\text{ext}} du = \int_0^d P du$$

$$W = P d$$

$$W = P u$$

MPT. Ejemplos: Sistemas de un grado de libertad

Potencial Total

$$\pi = \frac{1}{2}Ku^2 + Pu$$

Condición de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{du} = Ku + P = 0$$

$$Ku + P = 0$$

$$(Ku + P) \delta u = 0 \quad \text{T. T. V.}$$

Desp. de Equilibrio

$$D_{eq} = \frac{-P}{K}$$

Cond. de Estabilidad del eq.

$$\frac{d^2\pi}{d u^2} = K > 0$$

MPT. Ejemplos: Sistemas de n grados de libertad

Potencial Total

$$\pi = \pi(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Condición de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{U}} = \phi$$

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \pi}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \pi}{\partial u_n} du_n = \phi$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial u_i} du_i = \phi$$

Desp. de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{U}} = \phi \Rightarrow \mathbf{D}_{eq}$$

Cond. de Estabilidad del Equilibrio

$$\frac{d^2\pi}{d\mathbf{U}^2} = \mathbf{K} > \phi$$