



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 3

MÉTODOS CLASICOS

Parte I

Curso 2.026

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

Introducción

Hospital L. Lagomaggiore. Mza.



Autopista Sacatekas. DF. México



ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

Introducción

Nave Bodega Catena Zapata. Mendoza



Puente Río Maule. Chile



GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Introducción

$$GH = I - E$$

GH : Grado de hiperestaticidad.

I : Cantidad de Incógnitas hiperestáticas.

E : Ecuaciones de la estática.

$GH < 0$: Estructura Hipostática

$GH = 0$: Estructura Isostática

$GH > 0$: Estructura Hiperestática

$GH < 0 \rightarrow$ Estructura Inestable

$GH \geq 0 \rightarrow$ Condición necesaria
Estructura Estable

GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Introducción

$$GH = I - E$$

GH : Grado de hiperestaticidad.

I : Cantidad de Incógnitas hiperestáticas.

E : Ecuaciones de la estática.

$$I = V_s + B + 2 A^1 + 3 R + 4 A^2$$

$$E = 3 N + 2 V$$

V_s : Vínculos simples

B : Barras tracción/compresión

A^1 : Articulación de 1° especie

R : Recintos cerrados / Unión rígida

A^2 : Articulación de 2° especie

N : Número Chapas

V : Número Vértices

GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Introducción

$$GH = I - E$$

$$I = V_s + B + 2 A^1 + 3 R + 4 A^2$$

$$E = 3 N + 2 V$$

V_s : Vínculos simples

B : Barras tracción/compresión

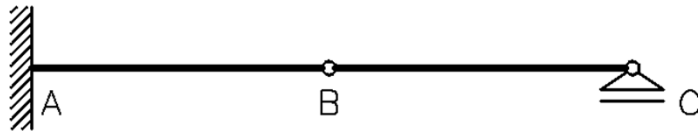
A^1 : Articulación de 1° especie

R : Recintos cerrados / Unión rígida

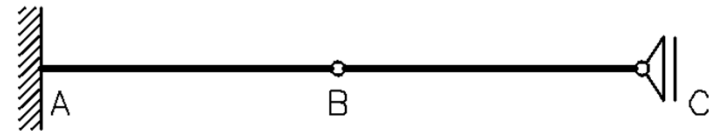
A^2 : Articulación de 2° especie

N : Número Chapas

V : Número Vértices



Inestable



GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Introducción

$$GH = I - E$$

$$I = V_s + B + 2 A^1 + 3 R + 4 A^2$$

V_s : Vínculos simples

B : Barras tracción/compresión

A^1 : Articulación de 1° especie

R : Recintos cerrados / Unión rígida

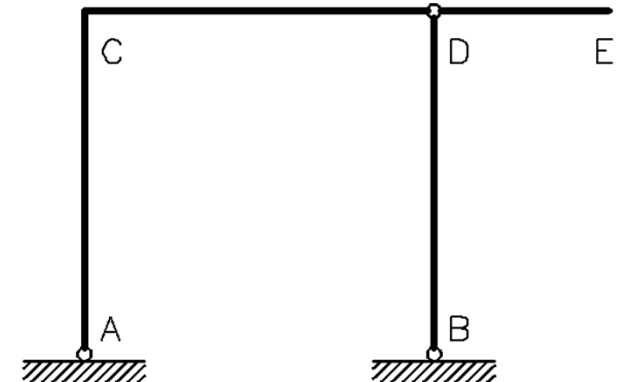
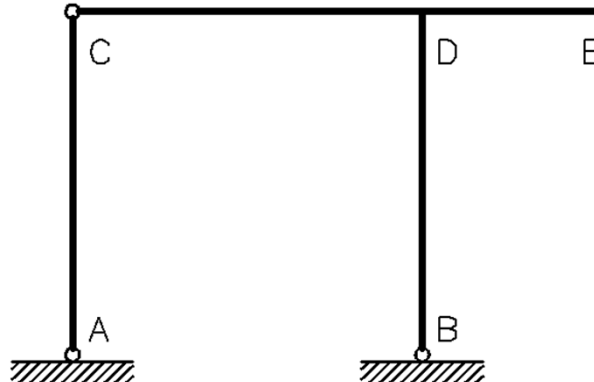
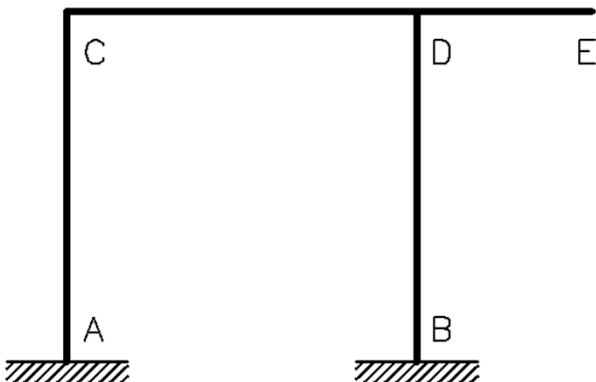
A^2 : Articulación de 2° especie

$$E = 3 N + 2 V$$

N : Número Chapas

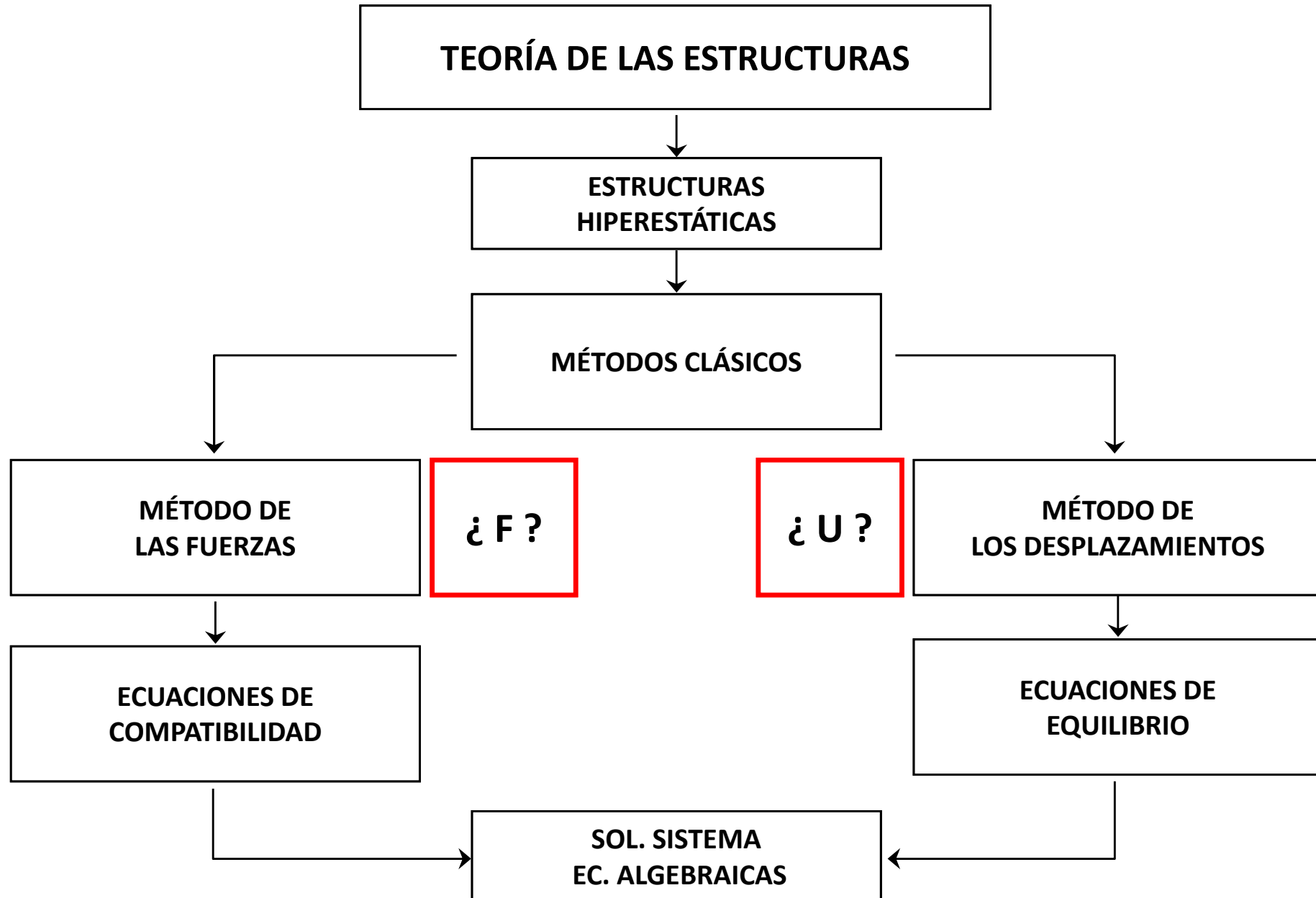
V : Número Vértices

Inestable



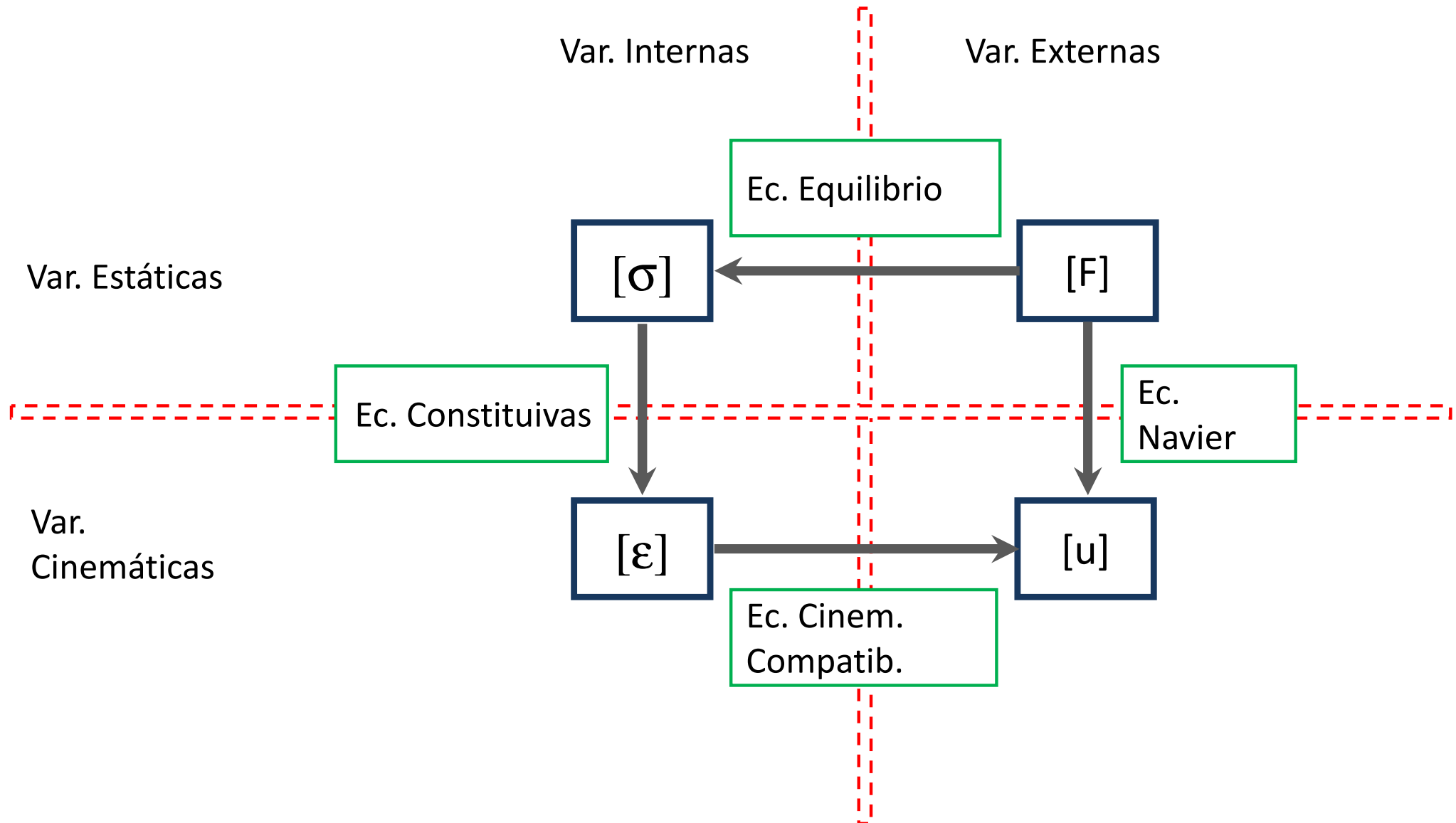
TEORÍA DE LAS ESTRUCTURAS. MÉTODOS CLÁSICOS

Introducción



TEORÍA DE LAS ESTRUCTURAS. MÉTODOS CLÁSICOS

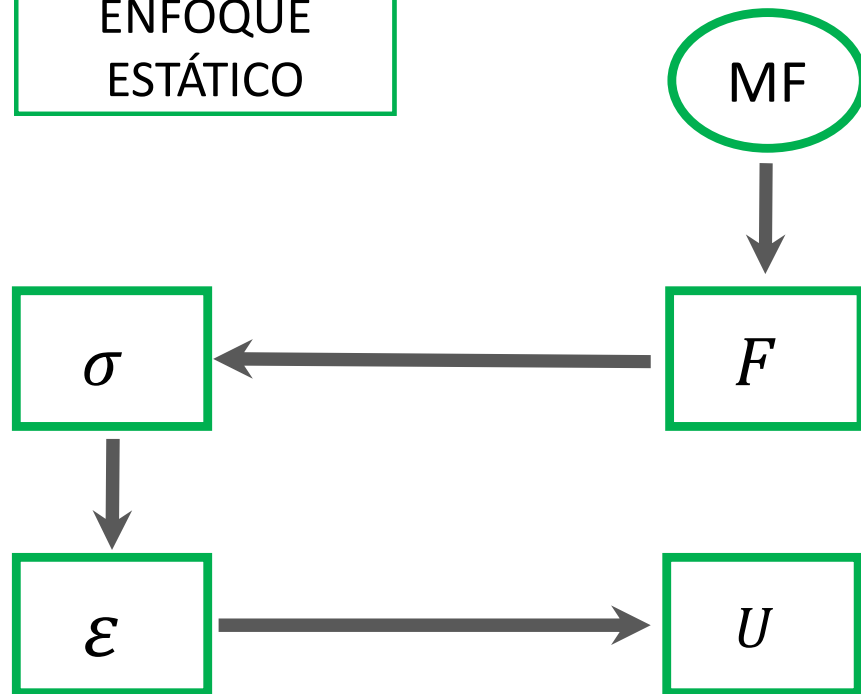
Introducción. Diagrama de Tonti



TEORÍA DE LAS ESTRUCTURAS. MÉTODOS CLÁSICOS

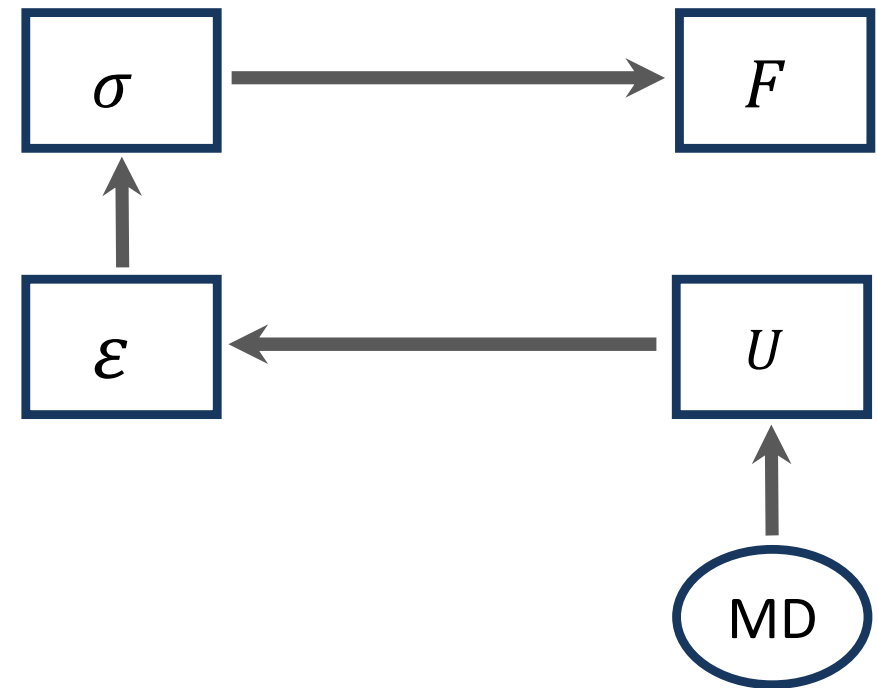
Introducción. Diagrama de TONTI

ENFOQUE
ESTÁTICO



MÉTODO DE LAS FUERZAS

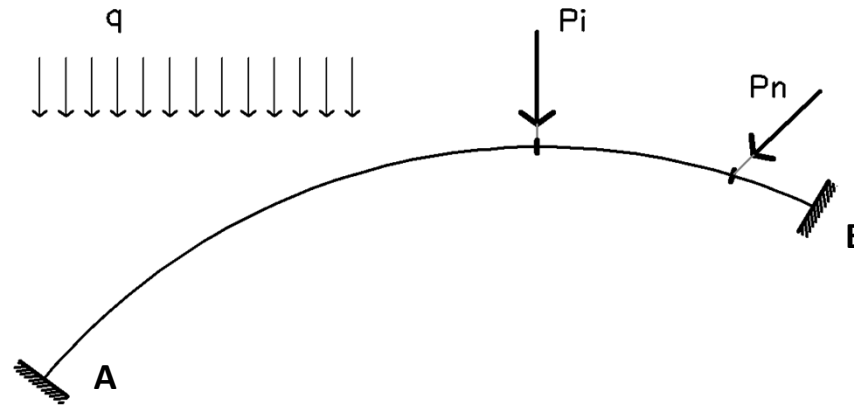
ENFOQUE
CINEMÁTICO



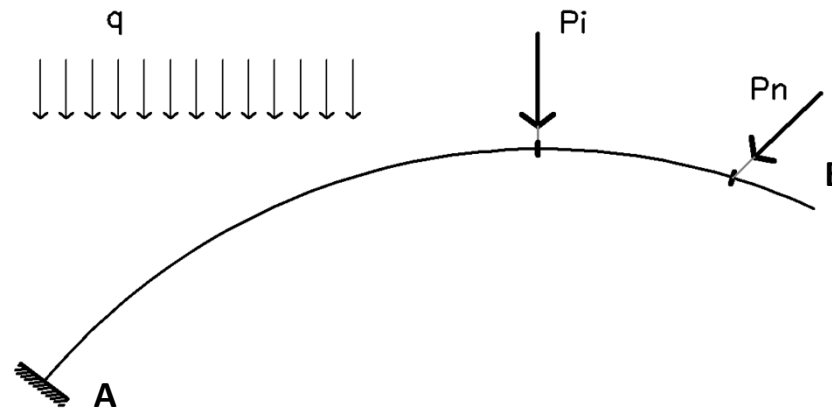
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

MÉTODO DE LAS FUERZAS

Estructura Original



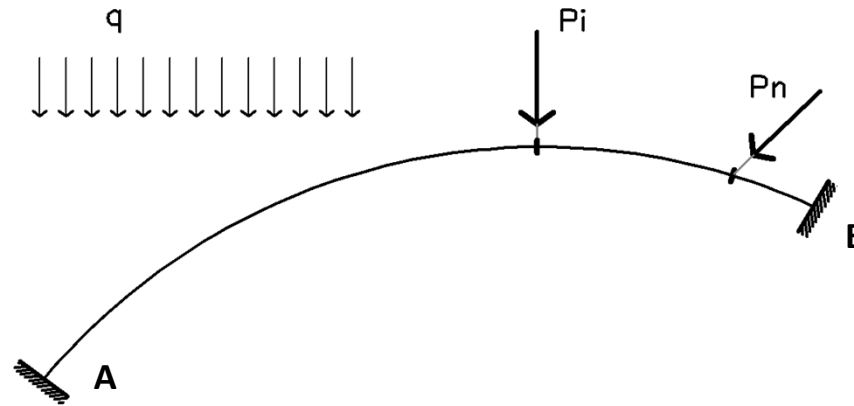
Sistema Fundamental



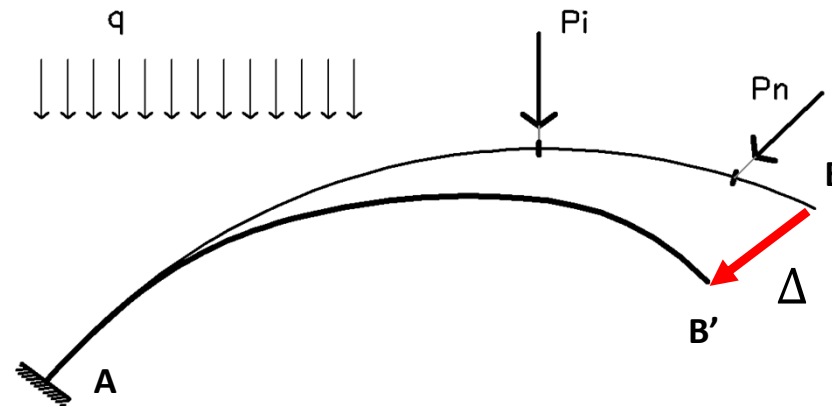
Sistema Fundamental: Se obtiene de la estructura original, eliminando vínculos (int/ext) hasta obtener una estructura isostática estable.

MÉTODO DE LAS FUERZAS

Estructura Original

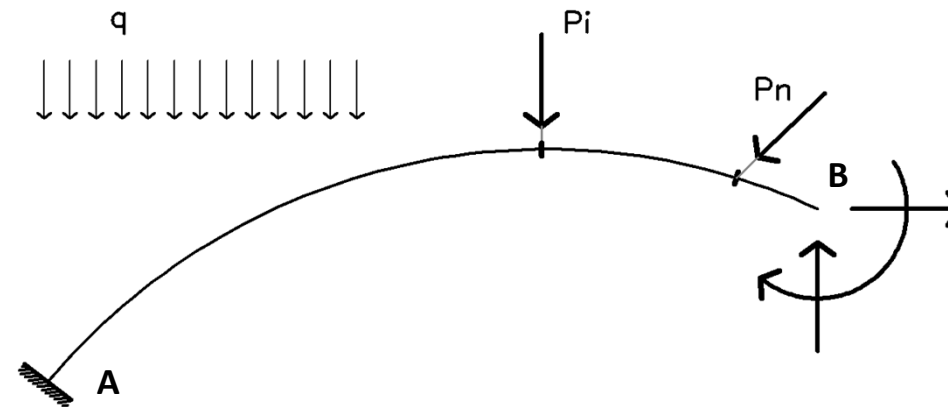
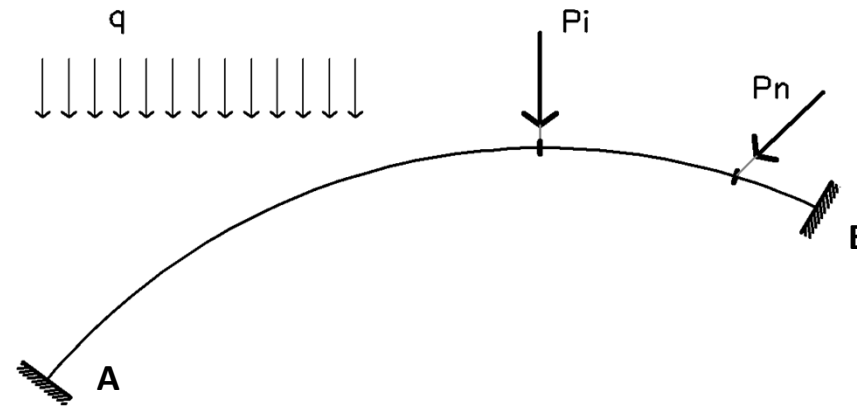


Sistema Fundamental



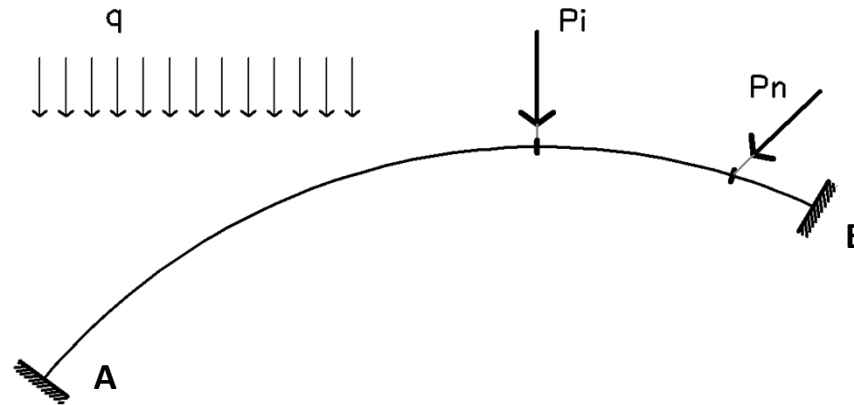
MÉTODO DE LAS FUERZAS

Estructura Original

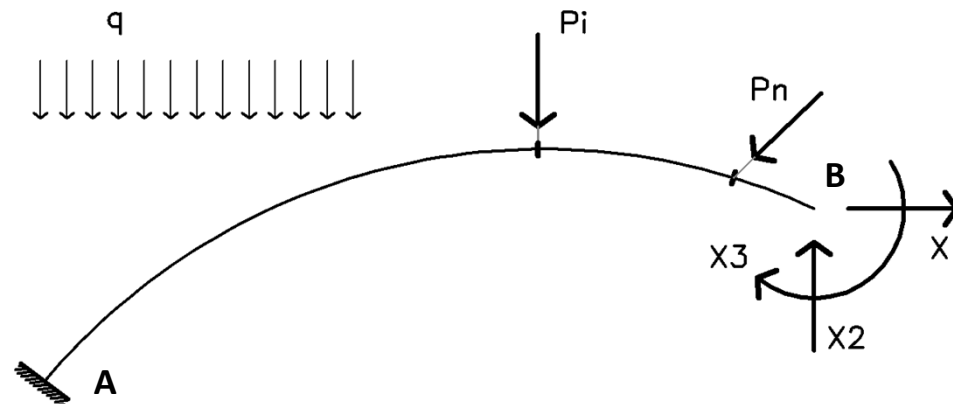


MÉTODO DE LAS FUERZAS

Estructura Original



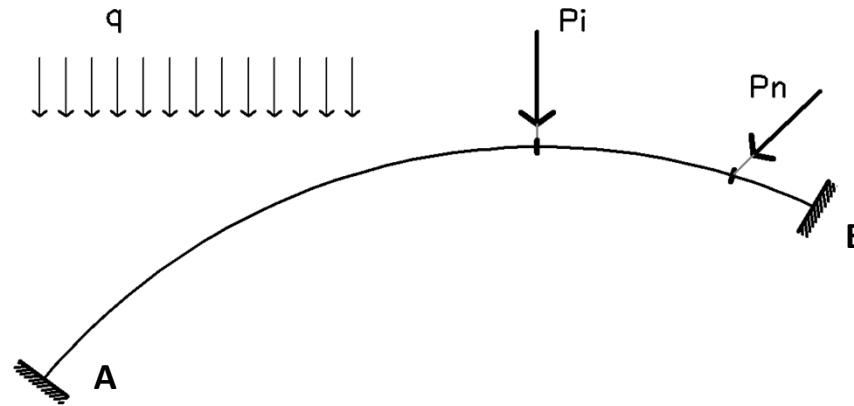
S. Isostático Equivalente



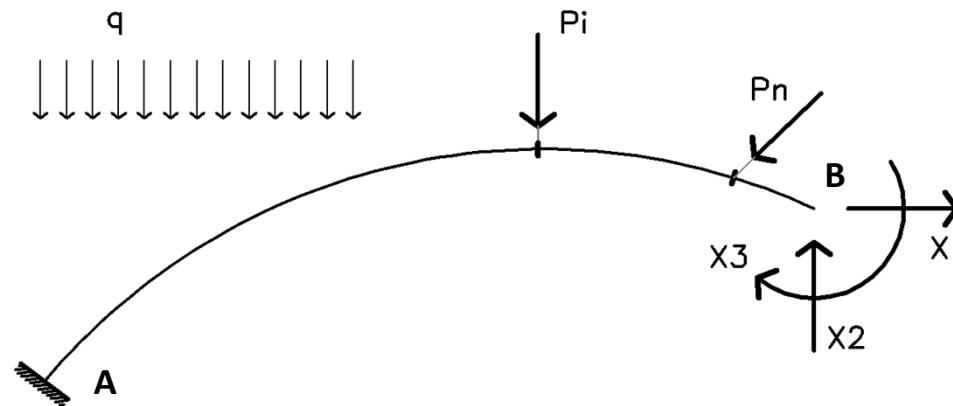
Los valores de las incógnitas X_i deben ser tales que restauren condiciones cinemáticas de la estructura original. Condiciones de Compatibilidad

MÉTODO DE LAS FUERZAS

Estructura Original



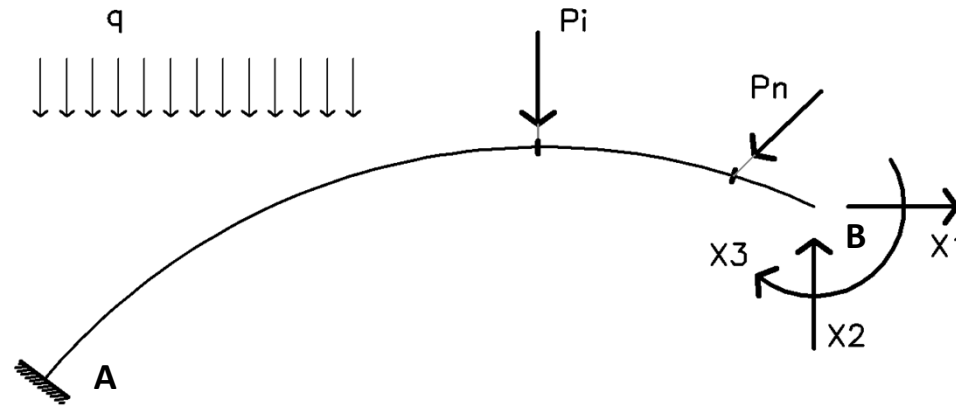
S. Isostático Equivalente



$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_3 = 0$$

MÉTODO DE LAS FUERZAS

**S. Isostático
Equivalente**

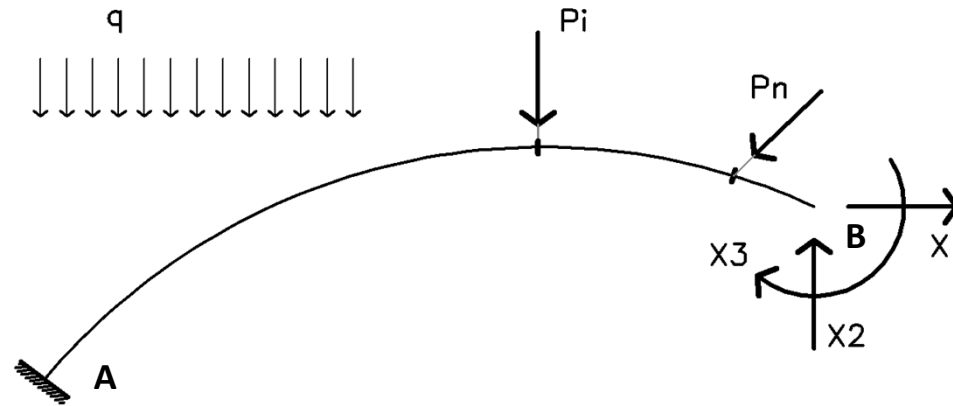


$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_3 = 0$$

¿ Quién ? P_0, X_1, X_2, X_3

MÉTODO DE LAS FUERZAS

**S. Isostático
Equivalente**



$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_3 = 0$$

PIASE

$$\Delta_1 = 0 \rightarrow \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} = 0$$

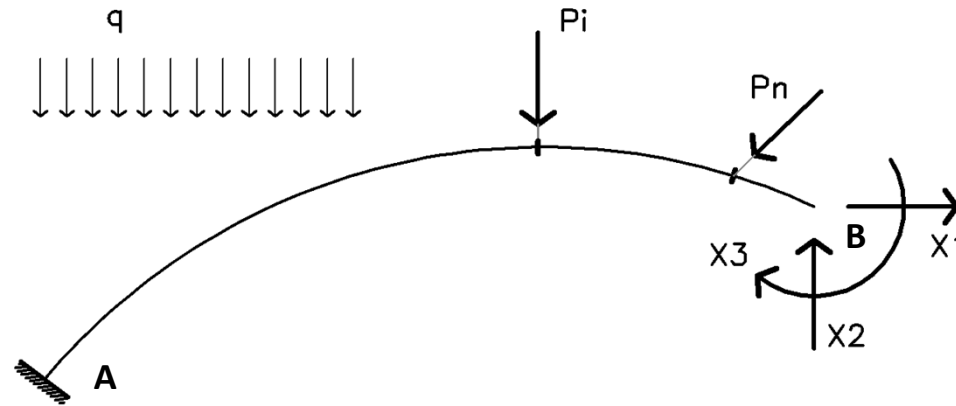
$$\Delta_2 = 0 \rightarrow \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} = 0$$

$$\Delta_3 = 0 \rightarrow \Delta_{30} + \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} = 0$$

Δ_{ij} : Desplazamiento en la dirección de X_i provocado por una acción que actúa en la dirección X_j

MÉTODO DE LAS FUERZAS

**S. Isostático
Equivalente**



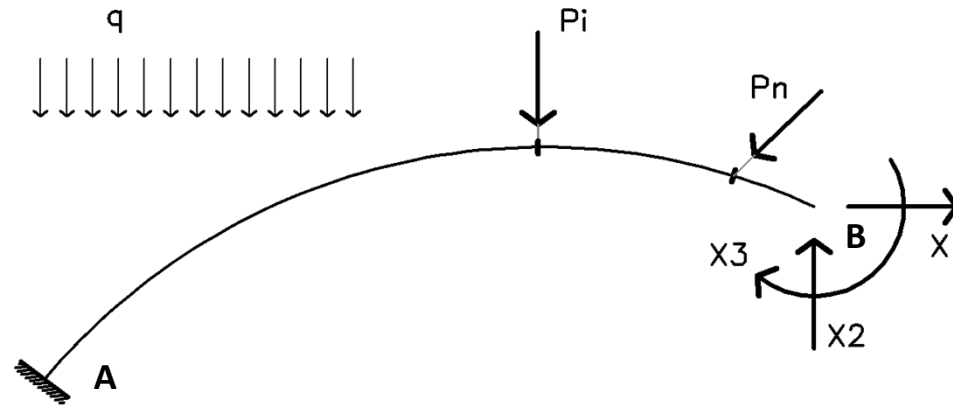
Desplazamientos provocados por P_0 : Δ_{10} ; Δ_{20} ; Δ_{30}

P_0

¿ Donde ?

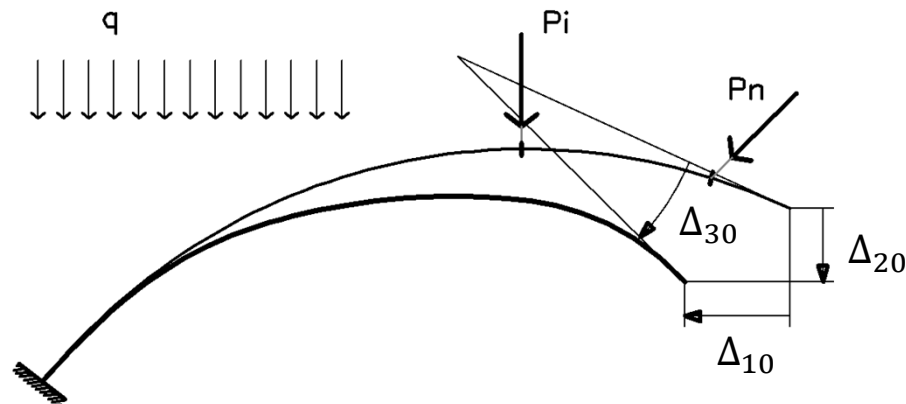
MÉTODO DE LAS FUERZAS

**S. Isostático
Equivalente**



Desplazamientos provocados por P_0 : Δ_{10} ; Δ_{20} ; Δ_{30}

P_0



**Sistema
Fundamental**

MÉTODO DE LAS FUERZAS

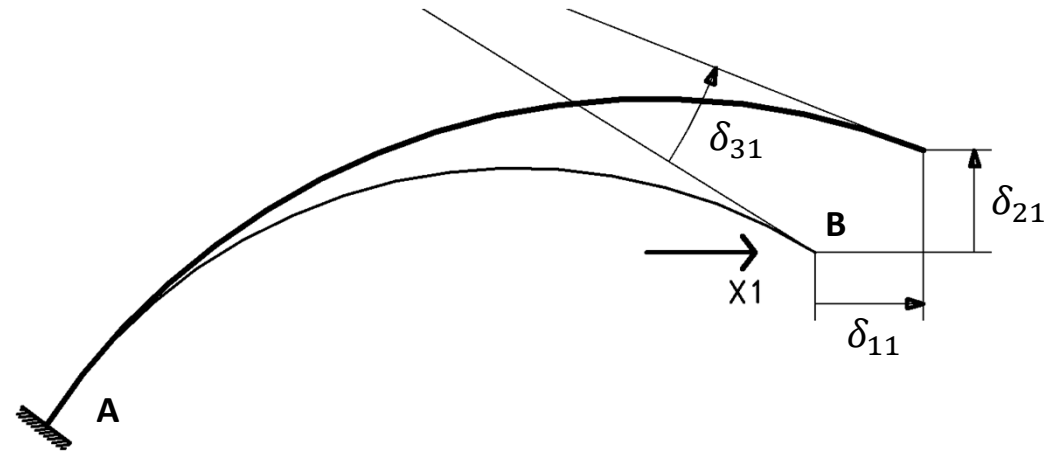
Desplazamientos provocados por X_1 , X_2 , X_3 : Δ_{ij}

$$X_1 = ?; \quad X_2 = ?; \quad X_3 = ?$$

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{P_j}$$

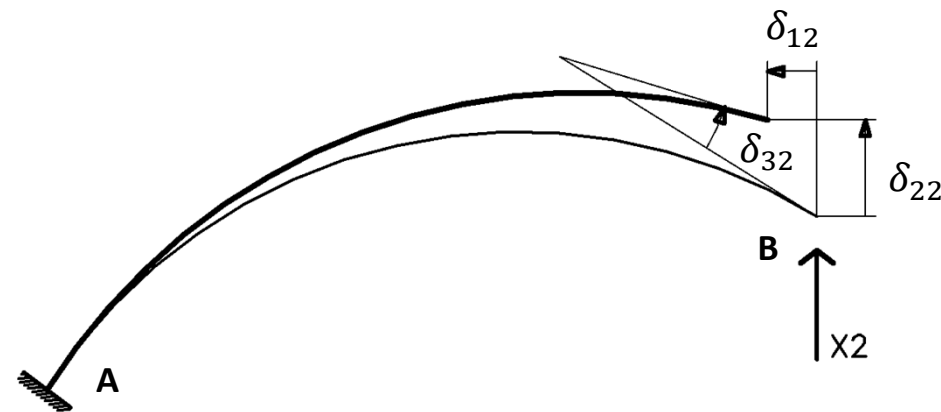
$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} X_j$$

$$X_1 = 1$$



**Sistema
Fundamental**

$$X_2 = 1$$



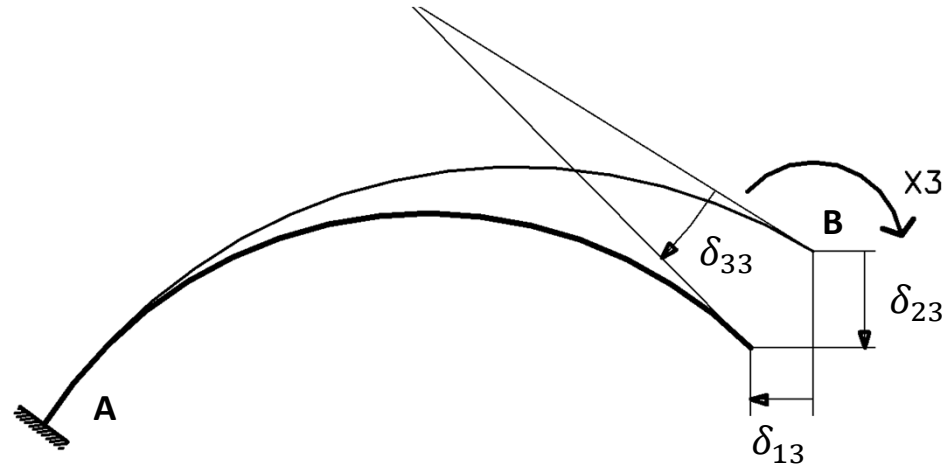
MÉTODO DE LAS FUERZAS

Desplazamientos provocados por X_1 , X_2 , X_3 : Δ_{ij}

$$X_1 = ?; \quad X_2 = ?; \quad X_3 = ?$$

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} X_j$$

$$X_3 = 1$$



**Sistema
Fundamental**

δ_{ij} : Desplazamiento en la dirección de la incógnita X_i provocado por el valor unitario de la incógnita X_j

MÉTODO DE LAS FUERZAS

Ecuaciones de Compatibilidad

$$\Delta_1 = 0 \rightarrow \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} = 0$$

$$\Delta_2 = 0 \rightarrow \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} = 0$$

$$\Delta_3 = 0 \rightarrow \Delta_{30} + \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} = 0$$

Como sabemos que $\Delta_{ij} = \delta_{ij} X_j$

Ecuaciones de Compatibilidad $\rightarrow$ Sistema de Ecuaciones

$$\Delta_1 = 0 \rightarrow \Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\Delta_2 = 0 \rightarrow \Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\Delta_3 = 0 \rightarrow \Delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

MÉTODO DE LAS FUERZAS

Generalización n Incógnitas

$$\Delta_1 = 0 \rightarrow \Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n = 0$$

$$\Delta_2 = 0 \rightarrow \Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + & \cdot & + \cdots + & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array} = 0$$

$$\Delta_n = 0 \rightarrow \Delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n = 0$$

Notación Matricial

$$[\Delta_{i0}] + [\delta_{ij}] [X_j] = 0$$

MÉTODO DE LAS FUERZAS

Generalización n Incógnitas

$$[\Delta_{i0}] + [\delta_{ij}] [X_j] = 0$$

$[\Delta_{i0}]$: Vector de términos independientes.

Desplazamientos en la dirección de las incógnitas, provocados por el sistema de cargas, actuando sobre el sistema fundamental.

$[\delta_{ij}]$: Matriz de Flexibilidad.

Desplazamientos en la dirección de las incógnitas, provocados por los valores unitarios de estas, actuando sucesivamente sobre el sistema fundamental.

- Independiente de las cargas sobre la estructura.
- Depende del material, la geometría y de las condiciones de vínculo del sistema fundamental.
- Es una matriz cuadrada.
- Es una matriz simétrica $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (Teorema de Maxwell)
- En general es diagonal dominante, pero no siempre. $\delta_{ii} > |\delta_{ij}|$
- Es positiva definida. Es inversible.

$[X_j]$: Vector de Incógnitas.

Fuerzas en vínculos externos y/o internos. Reacciones y/o Esfuerzos Internos

APLICACIÓN MÉTODO DE LAS FUERZAS

Pasos

1. Determinar el GH
2. Definir el sistema fundamental. SF
3. Definir las incógnitas. SIE
4. Plantear las ecuaciones de compatibilidad. $\Delta_i = 0$
5. Calcular Δ_{i0} aplicando TTV
6. Calcular δ_{ij} aplicando TTV
7. Resolver el SEL. $[\Delta_{i0}] + [\delta_{ij}] [X_j] = 0$
8. Calcular los diagramas de esfuerzos internos.

APLICACIÓN MÉTODO DE LAS FUERZAS

Cálculo de Esfuerzos Internos

P I A S E

$$M = M_{(0)} + M_{(1)} + M_{(2)} + \cdots + M_{(n)}$$

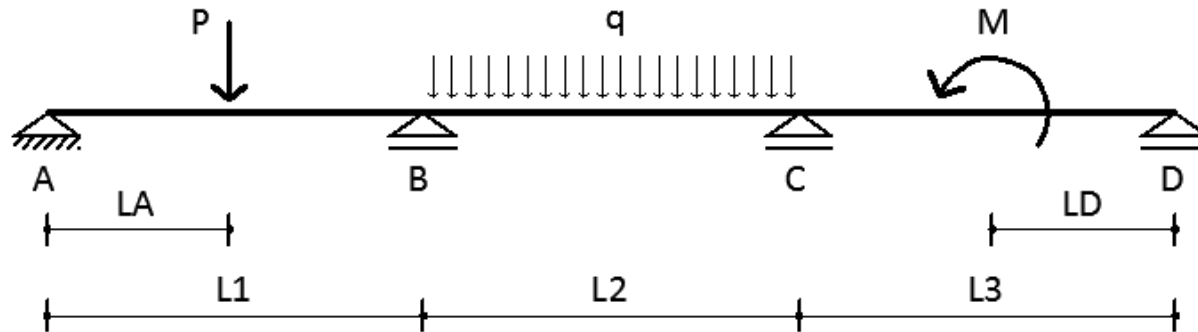
$$M = M_{(0)} + m_{(1)}X_1 + m_{(2)}X_2 + \cdots + m_{(n)}X_n$$

$M_{(0)}$: Momentos (esfuerzos) debidos al sistema P0 actuando sobre el SF.

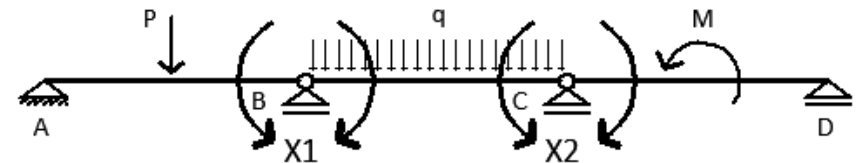
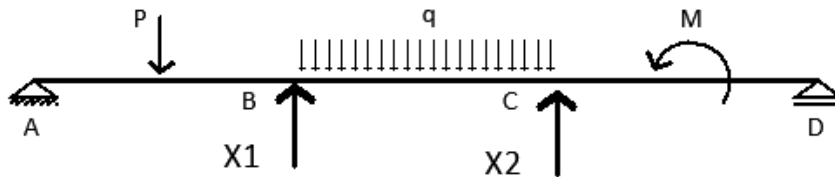
$m_{(i)}$: Momentos (esfuerzos) debidos a los valores unitarios de las incógnitas, actuando sobre el sistema fundamental.

X_i : Valor de la incógnita.

EJEMPLO. VIGA CONTINUA



S I E



$$\Delta 1 = 0; \Delta 2 = 0$$

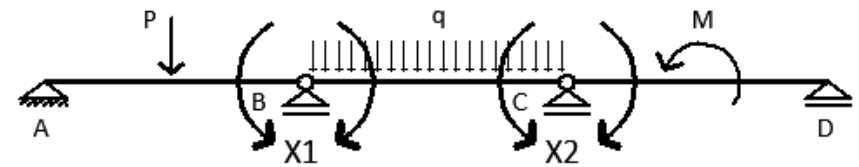
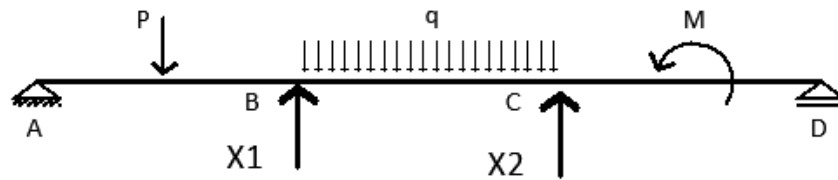
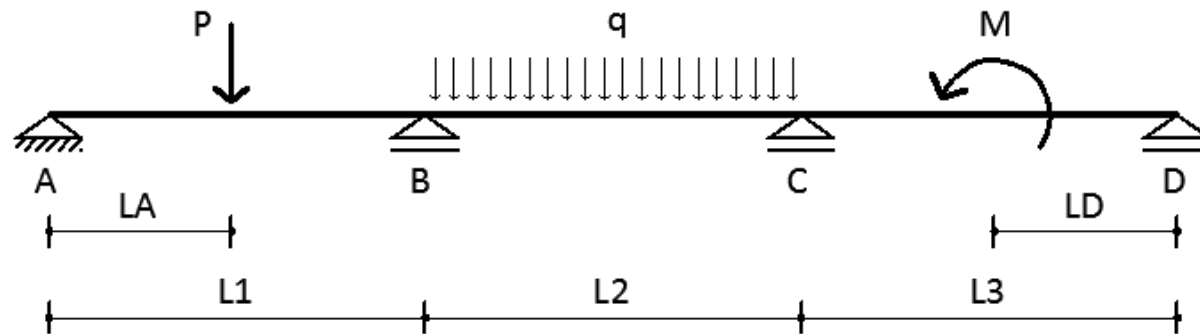
$$\Delta 10 + \Delta 11 + \Delta 12 = 0$$

$$\Delta 10 + \delta 11 X1 + \delta 12 X2 = 0$$

$$\Delta 20 + \Delta 21 + \Delta 22 = 0$$

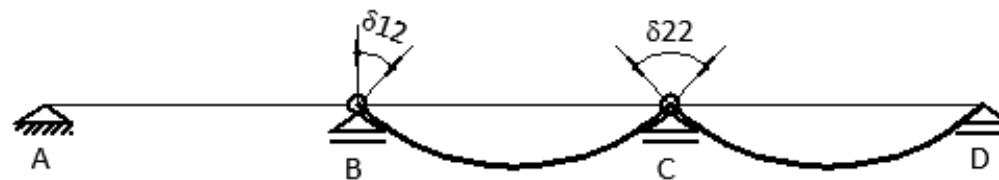
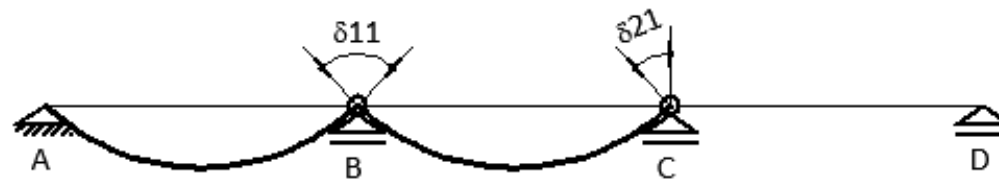
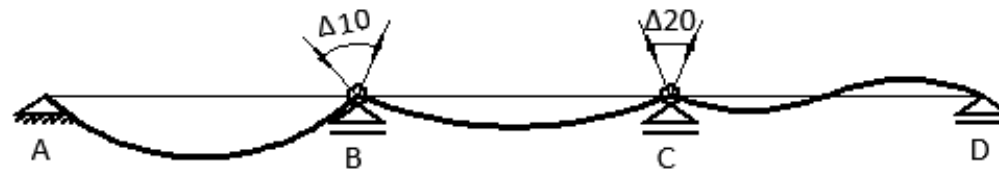
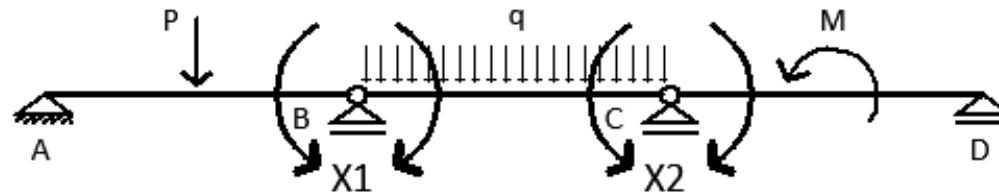
$$\Delta 20 + \delta 21 X1 + \delta 22 X2 = 0$$

EJEMPLO. VIGA CONTINUA



EJEMPLO. VIGA CONTINUA

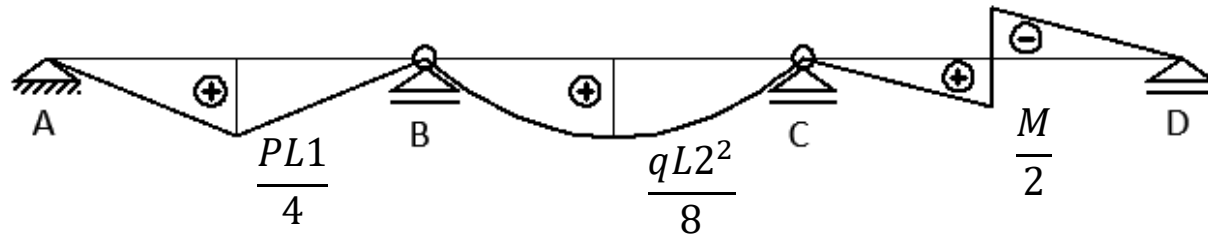
$$\bar{P}\eta = \int_L \bar{N} \left(\frac{N}{EF} + \frac{Ti + Ts}{2} \alpha \right) dx + \int_L \psi \frac{\bar{Q}Q}{GF} dx + \int_L \bar{M} \left(\frac{M}{EJ} + \frac{Ti - Ts}{h} \alpha \right) dx + \int_L \frac{\bar{M}tMt}{GJt} dx$$



EJEMPLO. VIGA CONTINUA

$$\bar{P}\eta = \int_L \bar{N} \left(\frac{N}{EF} + \frac{Ti + Ts}{2} \alpha \right) dx + \int_L \psi \frac{\bar{Q}Q}{GF} dx + \int_L \bar{M} \left(\frac{M}{EJ} + \frac{Ti - Ts}{h} \alpha \right) dx + \int_L \frac{\bar{M}tMt}{GJt} dx$$

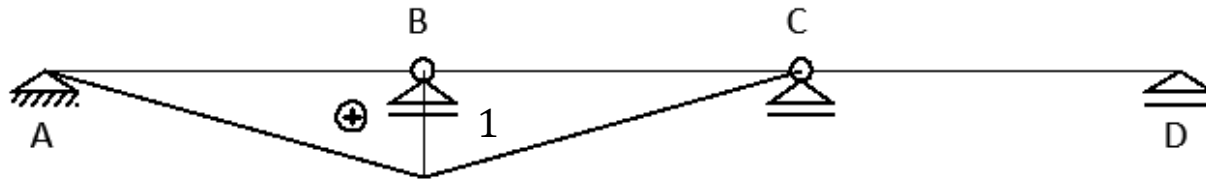
M0



$$\Delta_{10} = \int \frac{\bar{M}_1 M_0}{EJ} dx$$

$$\Delta_{20} = \int \frac{\bar{M}_2 M_0}{EJ} dx$$

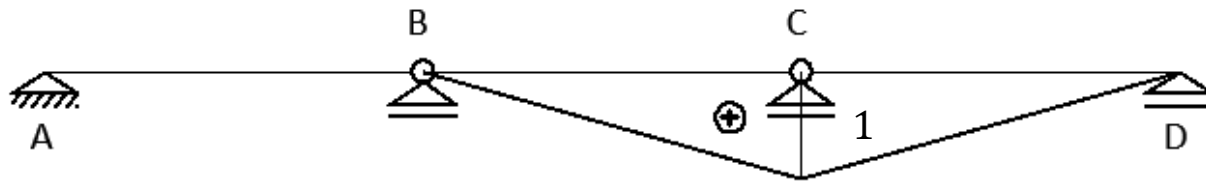
M1
X1=1



$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 M_1}{EJ} dx$$

$$\delta_{12} = \int \frac{\bar{M}_1 M_2}{EJ} dx$$

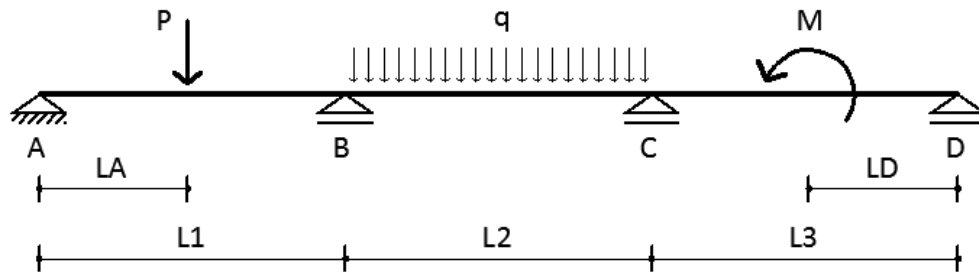
M2
X2=1



$$\delta_{21} = \int \frac{\bar{M}_2 M_1}{EJ} dx$$

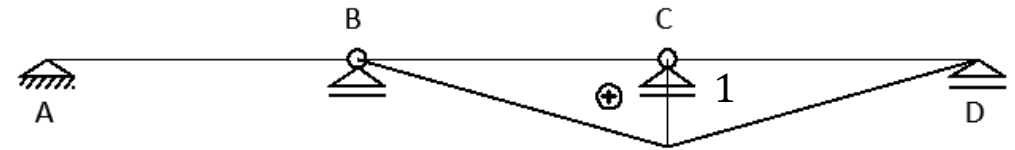
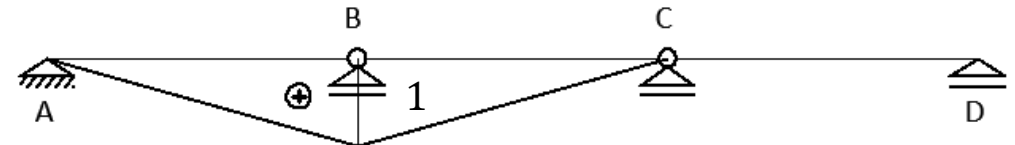
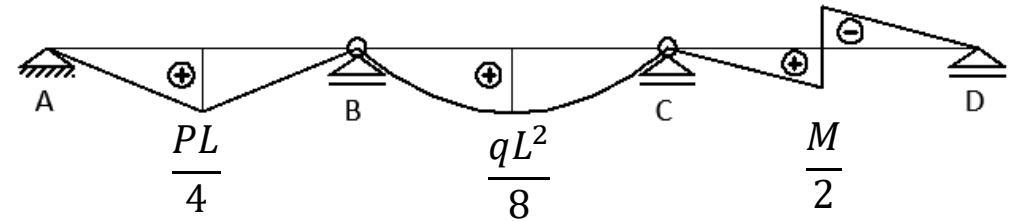
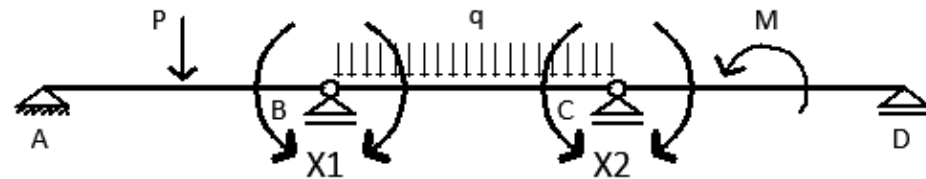
$$\delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2 M_2}{EJ} dx$$

EJEMPLO. VIGA CONTINUA



$$L1=L2=L3= 4.00\text{m}, LA=LD= 2.00\text{m}$$

$$P= 20 \text{ kN}, q= 30 \text{ kN/m}, M= 120 \text{ kNm}$$



$$\Delta_{10} = \frac{1}{4EJ} \frac{PL}{4} 1 L + \frac{1}{3EJ} \left(\frac{qL^2}{8} \right) 1 L = \frac{1}{EJ} (20 + 80) = \frac{100}{EJ}$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{3EJ} \left(\frac{qL^2}{8} \right) 1 L + \frac{1}{12EJ} \frac{M}{2} 1 L = \frac{1}{EJ} (80 + 20) = \frac{100}{EJ}$$

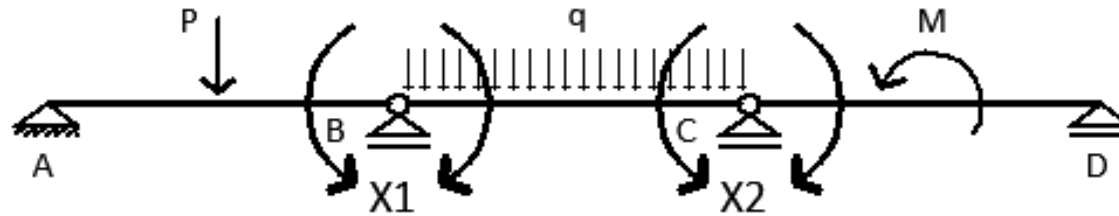
$$\delta_{11} = \frac{1}{3EJ} 1 1 L + \frac{1}{3EJ} 1 1 L = \frac{8}{3EJ}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{6EJ} 1 1 L = \frac{2}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{6EJ} 1 1 L = \frac{2}{3EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3EJ} 1 1 L + \frac{1}{3EJ} 1 1 L = \frac{8}{3EJ}$$

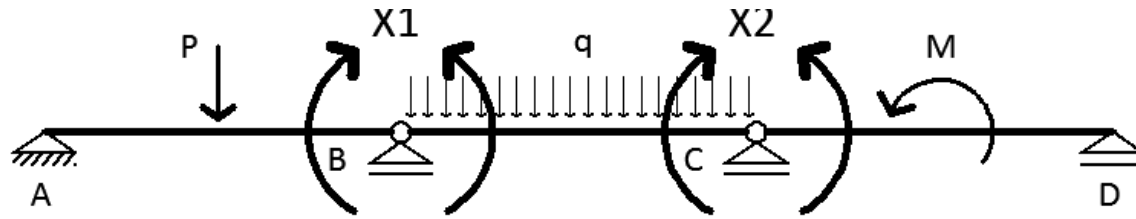
EJEMPLO. VIGA CONTINUA



$$\frac{8}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 = -100 \quad X_1 = -30kNm$$

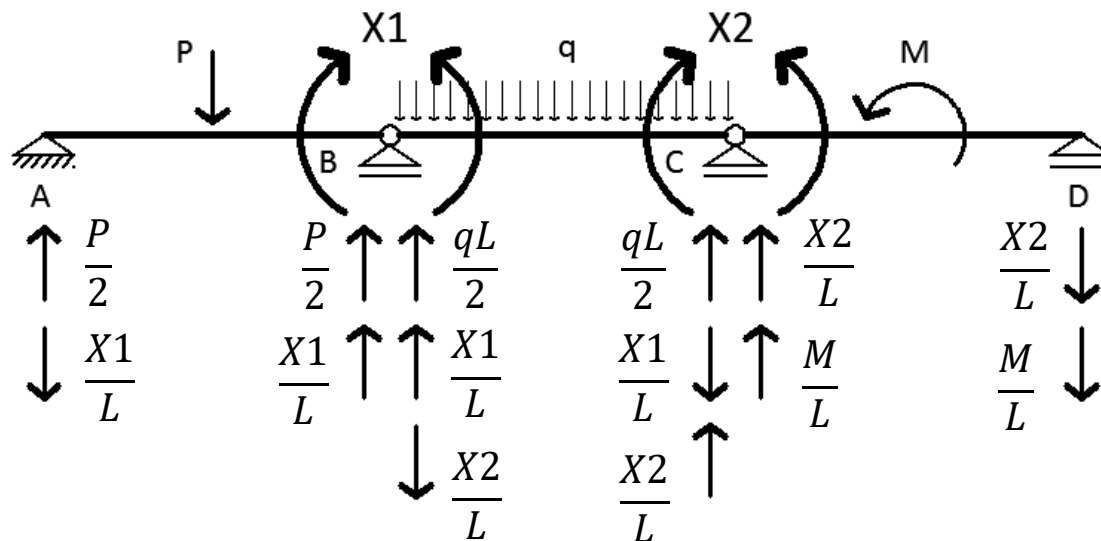
$$\frac{2}{3}X_1 + \frac{8}{3}X_2 = -100 \quad X_2 = -30kNm$$

EJEMPLO. VIGA CONTINUA



$$\frac{8}{3}X1 + \frac{2}{3}X2 = -100 \quad X1 = -30kNm$$

$$\frac{2}{3}X1 + \frac{8}{3}X2 = -100 \quad X2 = -30kNm$$



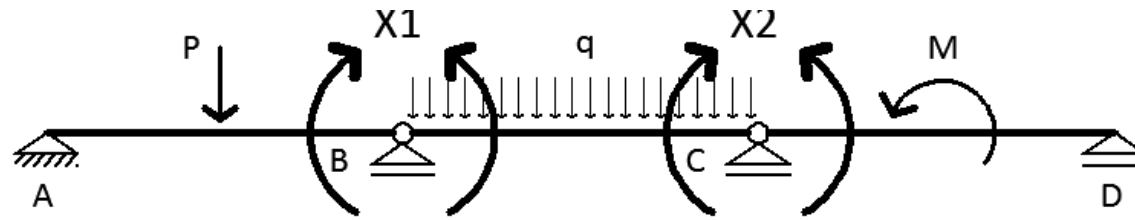
$$RA = 2.50kN (\uparrow)$$

$$RB = 77.50kN (\uparrow)$$

$$RC = 97.50kN (\uparrow)$$

$$RD = 37.50kN (\downarrow)$$

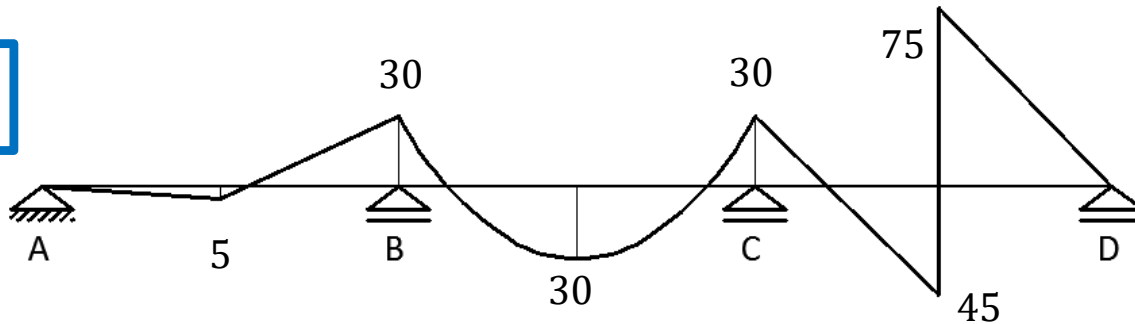
EJEMPLO. VIGA CONTINUA



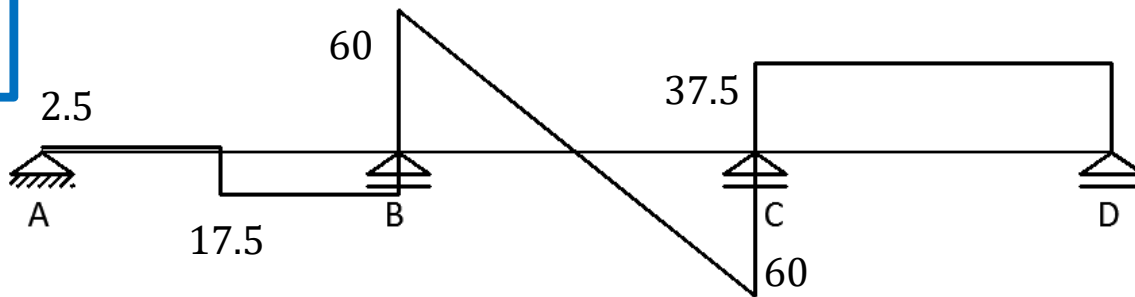
$$X1 = -30kNm$$

$$X2 = -30kNm$$

M



Q



$$RA = 2.50kN (\uparrow)$$

$$RB = 77.50kN (\uparrow)$$

$$RC = 97.50kN (\uparrow)$$

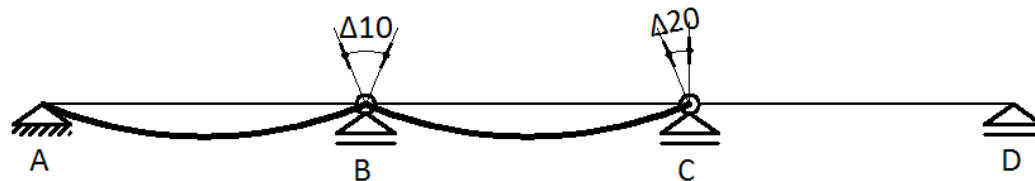
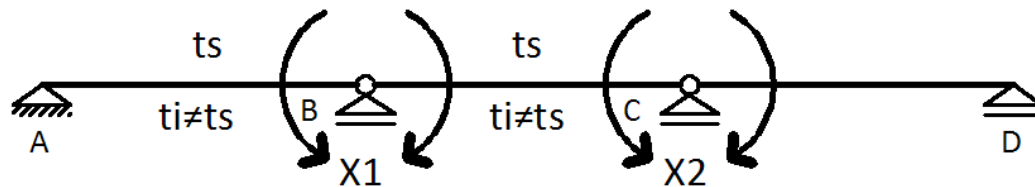
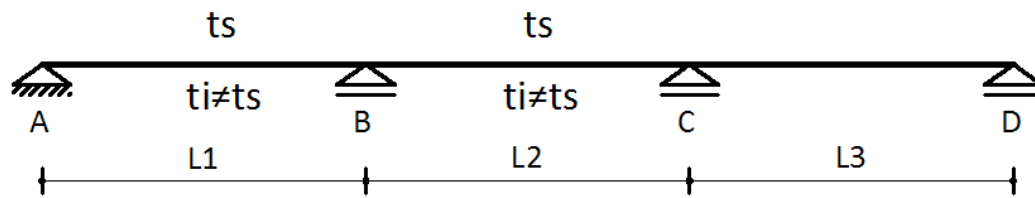
$$RD = 37.50kN (\downarrow)$$

APLICACIÓN MÉTODO DE LAS FUERZAS

Pasos

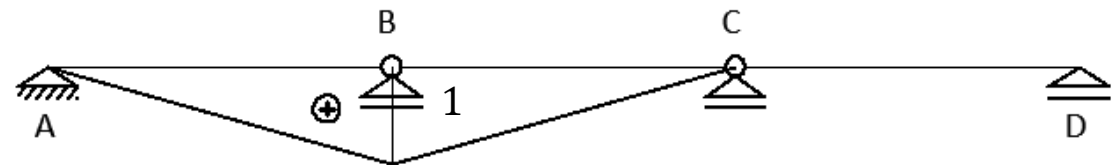
1. Determinar el GH
2. Definir el sistema fundamental. SF
3. Definir las incógnitas. SIE
4. Plantear las ecuaciones de compatibilidad. $\Delta_i = 0$
5. Calcular Δ_{i0} aplicando TTV
6. Calcular δ_{ij} aplicando TTV
7. Resolver el SEL. $[\Delta_{i0}] + [\delta_{ij}] [X_j] = 0$
8. Calcular los diagramas de esfuerzos internos.

VARIACIÓN DE TEMPERATURA



$$\bar{M} \theta = \int_L \bar{N} \left(\frac{N}{EF} + \frac{t_i + t_s}{2} \alpha \right) dx + \int_L \psi \frac{\bar{Q} Q}{GF} dx + \int_L \bar{M} \left(\frac{M}{EJ} + \frac{t_i - t_s}{h} \alpha \right) dx$$

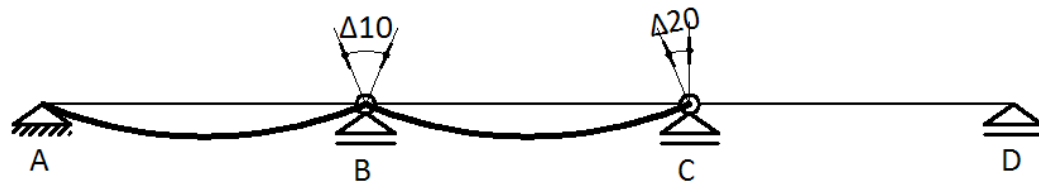
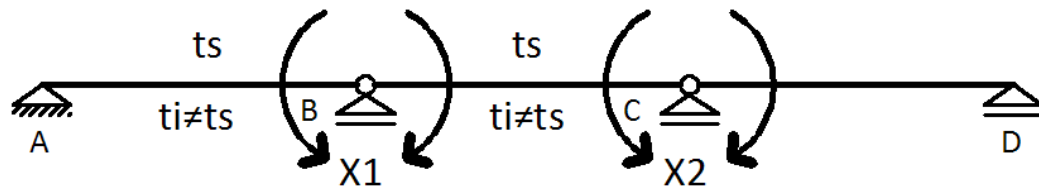
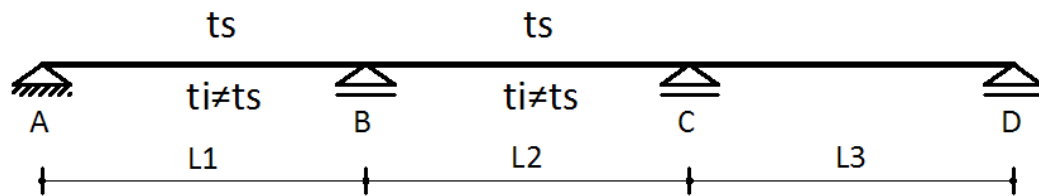
$$\bar{M} \theta = \int_L \bar{M} \left(\frac{t_i - t_s}{h} \alpha \right) dx$$



$$\Delta_{10} = \int_{L_1} \frac{x}{L_1} \nabla t \alpha dx + \int_{L_2} \left(1 - \frac{x}{L_2} \right) \nabla t \alpha dx$$

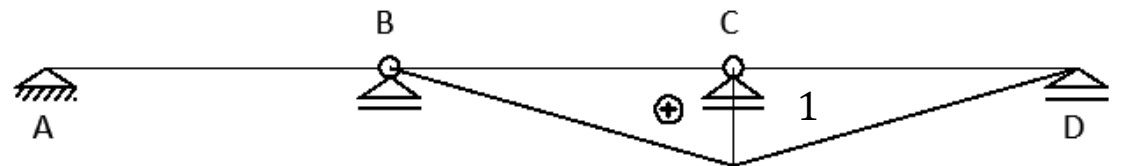
$$\Delta_{20} = \int_{L_2} \frac{x}{L_2} \nabla t \alpha dx$$

VARIACIÓN DE TEMPERATURA



$$\bar{M} \quad \theta = \int_L \bar{N} \left(\frac{N}{EF} + \frac{t_i + t_s}{2} \alpha \right) dx + \int_L \psi \frac{\bar{Q} Q}{GF} dx + \int_L \bar{M} \left(\frac{M}{EJ} + \frac{t_i - t_s}{h} \alpha \right) dx$$

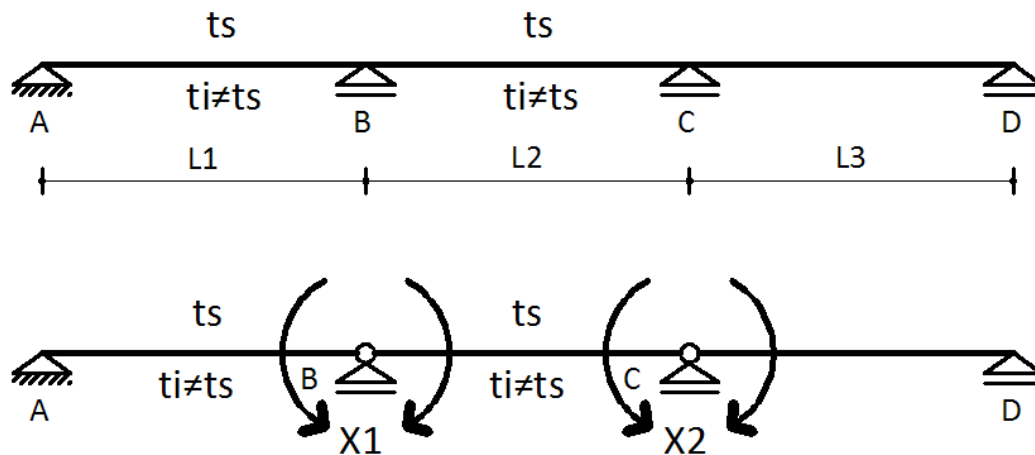
$$\bar{M} \quad \theta = \int_L \bar{M} \left(\frac{t_i - t_s}{h} \alpha \right) dx$$



$$\Delta_{10} = \int_{L_1} \frac{x}{L_1} \nabla t \alpha dx + \int_{L_2} \left(1 - \frac{x}{L_2} \right) \nabla t \alpha dx$$

$$\Delta_{20} = \int_{L_2} \frac{x}{L_2} \nabla t \alpha dx$$

VARIACIÓN DE TEMPERATURA



$L_1 = L_2 = L_3 = 4.00\text{m}$
 $h = 0.50\text{m}, b = 0.20\text{m}$
 $J = 2.083 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
 $t_s = 50^\circ\text{C}$
 $t_i = 20^\circ\text{C}$
 $\alpha = 1.5 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$
 $E = 20000 \text{ MPa}$

$$\nabla t = \frac{20 - 50^\circ\text{C}}{0.5 \text{ m}} = -60 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}$$

$$\Delta_{10} = \int_L \frac{x}{L} \nabla t \alpha dx + \int_L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \nabla t \alpha dx = \alpha \nabla t \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) = \alpha \nabla t L = -0.0036$$

$$\Delta_{20} = \int_L \frac{x}{L} \nabla t \alpha dx = \alpha \nabla t \frac{L}{2} = -0.0018$$

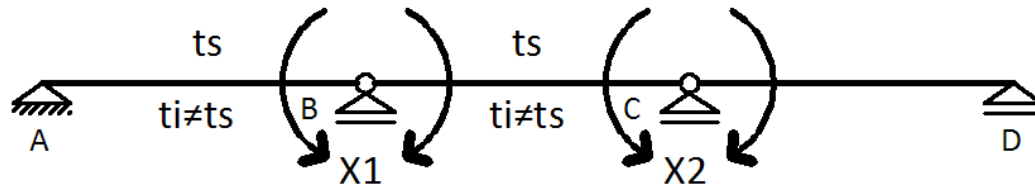
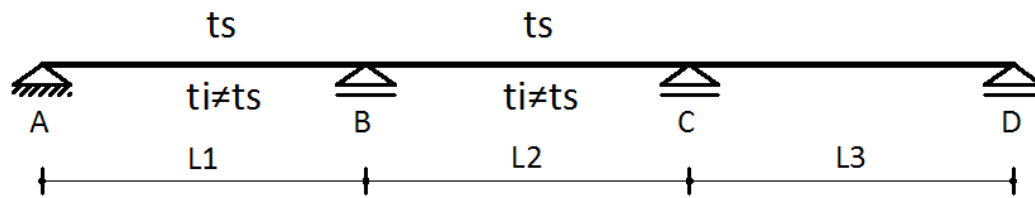
$$\delta_{11} = \frac{1}{3EJ} \int_0^L \int_0^L 1 \cdot 1 \cdot L = \frac{8}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{6EJ} \int_0^L \int_0^L 1 \cdot 1 \cdot L = \frac{2}{3EJ}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{6EJ} \int_0^L \int_0^L 1 \cdot 1 \cdot L = \frac{2}{3EJ}$$

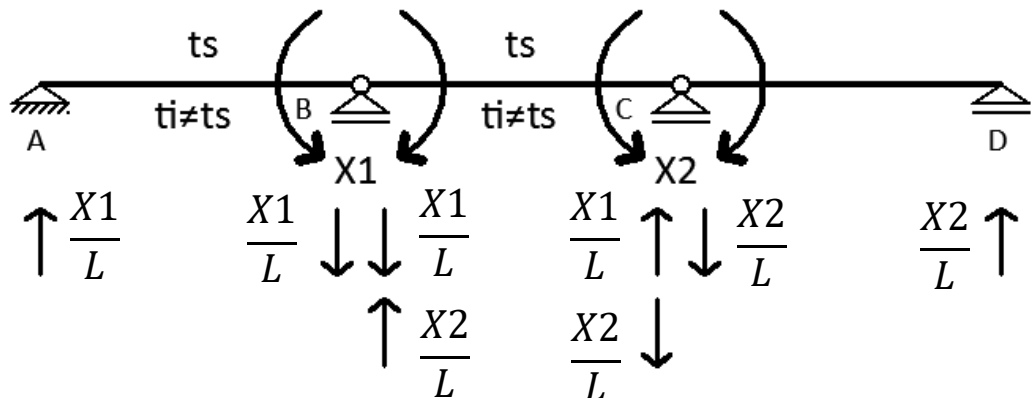
$$\delta_{22} = \frac{1}{3EJ} \int_0^L \int_0^L 1 \cdot 1 \cdot L + \frac{1}{3EJ} \int_0^L \int_0^L 1 \cdot 1 \cdot L = \frac{8}{3EJ}$$

VARIACIÓN DE TEMPERATURA



$$\frac{8}{3EJ}X1 + \frac{2}{3EJ}X2 = 0.0036$$

$$\frac{2}{3EJ}X1 + \frac{8}{3EJ}X2 = 0.0018$$



$$L1=L2=L3= 4.00m$$

$$h= 0.50m, b=0.20m$$

$$J= 2.083 \times 10^{-3} m^4$$

$$ts= 50 \text{ } ^\circ C$$

$$ti= 20 \text{ } ^\circ C$$

$$\alpha= 1.5 \times 10^{-5} 1/^\circ C$$

$$E= 20000 \text{ MPa}$$

$$X1 = 55.12 kNm$$

$$X2 = 15.75 kNm$$

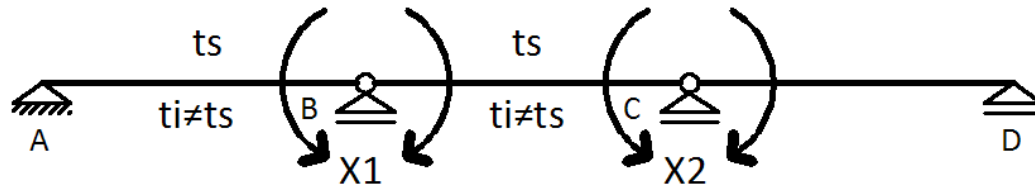
$$RA = 13.78 kN (\uparrow)$$

$$RB = 26.63 kN (\downarrow)$$

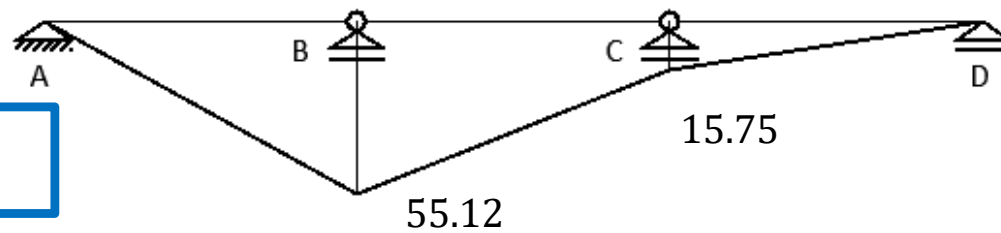
$$RC = 5.91 kN (\uparrow)$$

$$RD = 3.94 kN (\uparrow)$$

VARIACIÓN DE TEMPERATURA



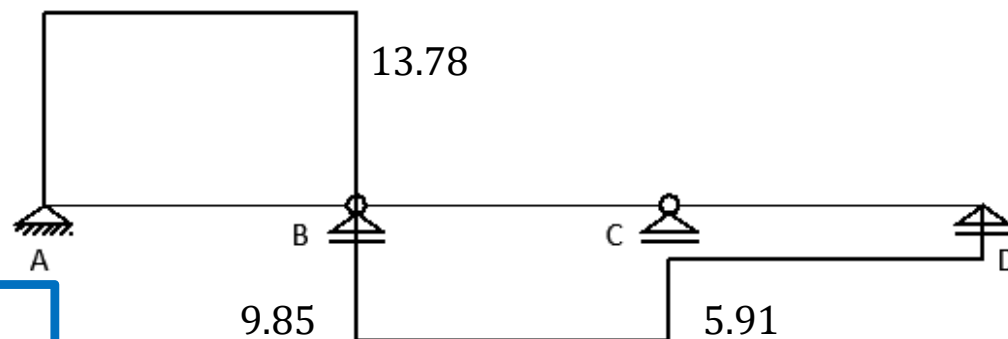
M



$$X1 = 55.12 \text{ kNm}$$

$$X2 = 15.75 \text{ kNm}$$

Q



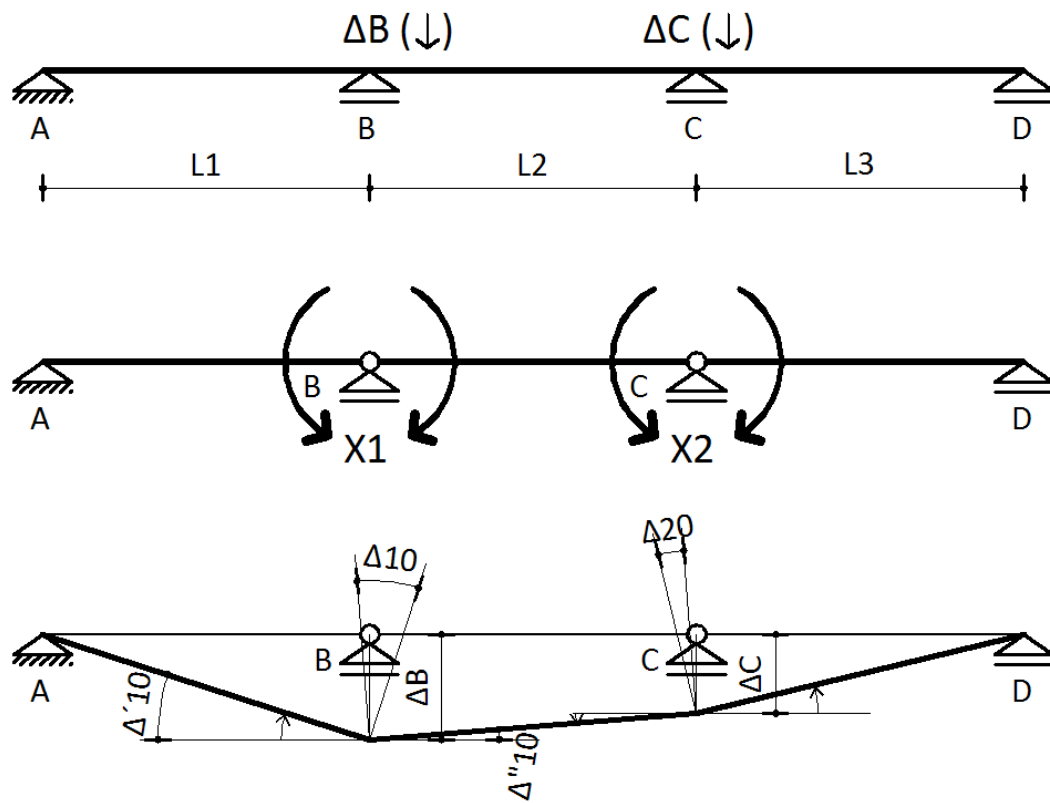
$$RA = 13.78 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$RB = 23.63 \text{ kN } (\downarrow)$$

$$RC = 5.91 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$RD = 3.94 \text{ kN } (\uparrow)$$

DESCENSO DE APOYOS



$$\Delta 10 = \Delta'10 + \Delta''10 = -\left(\frac{\Delta B}{L1} + \frac{\Delta B - \Delta C}{L2}\right)$$

$$\Delta 20 = +\left(\frac{\Delta B - \Delta C}{L2} - \frac{\Delta C}{L3}\right)$$

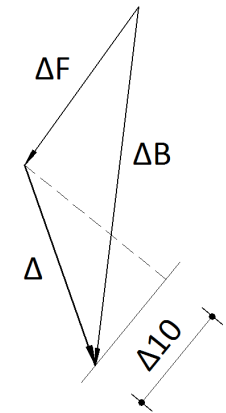
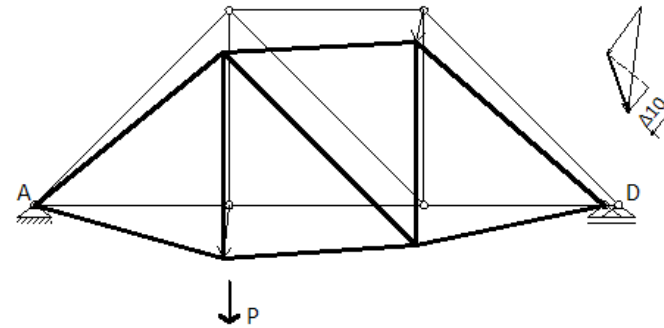
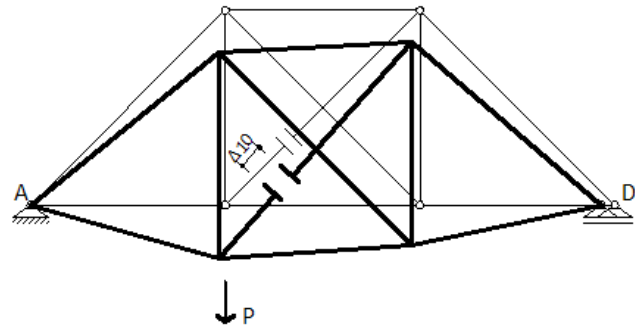
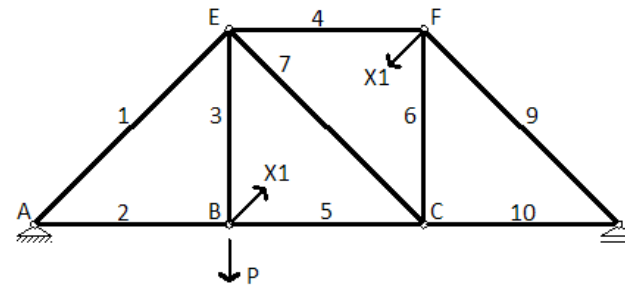
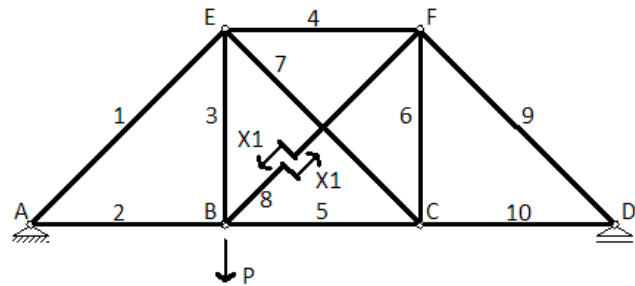
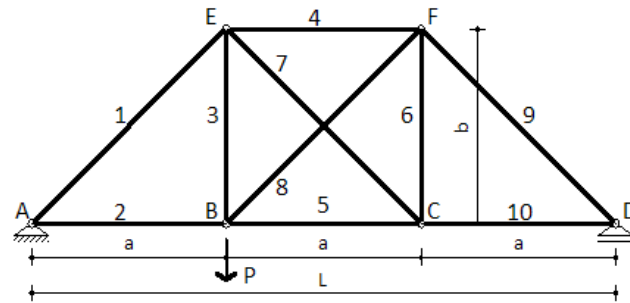
$$\delta 11 = \frac{8}{3EJ}$$

$$\delta 12 = \frac{2}{3EJ}$$

$$\delta 21 = \frac{2}{3EJ}$$

$$\delta 22 = \frac{8}{3EJ}$$

RETICULADOS



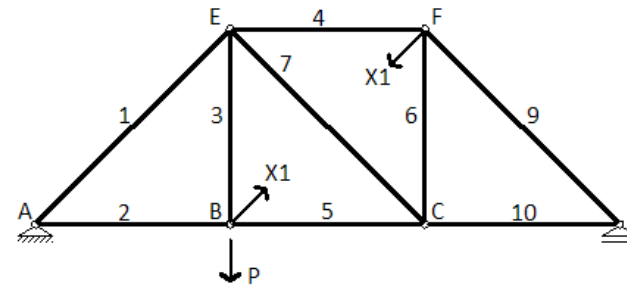
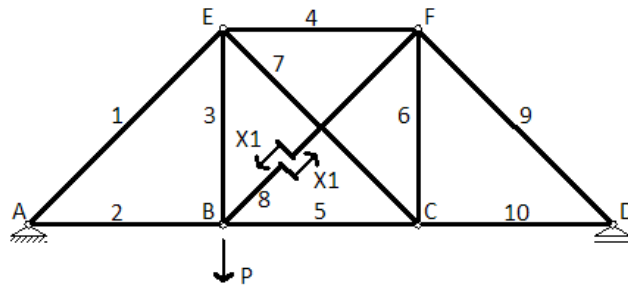
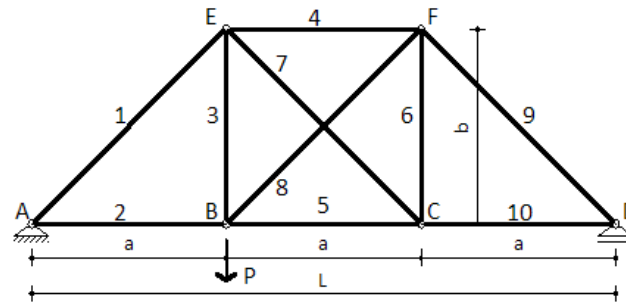
$$\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$$

$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\Delta_{10} + \Delta_{11} = X_1 L / (EA)$$

$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 = X_1 L / (EA)$$

RETICULADOS



$$\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$$

$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\Delta_{k0} = \sum \frac{S_{ik} S_{i0}}{EA_i} L_i$$

Barras

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, n \\ k &= j = 1, \dots, h \end{aligned}$$

Incógnitas

$$S_i = S_{i0} + S_{i1} X_1 + \dots + S_{in} X_n$$

$$\Delta_{10} + \Delta_{11} = -X_1 L / (EA)$$

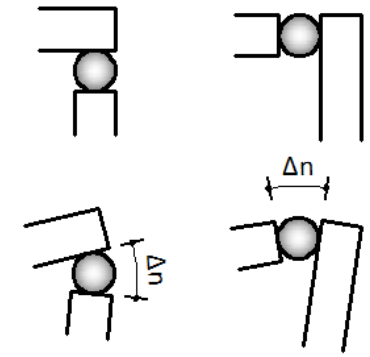
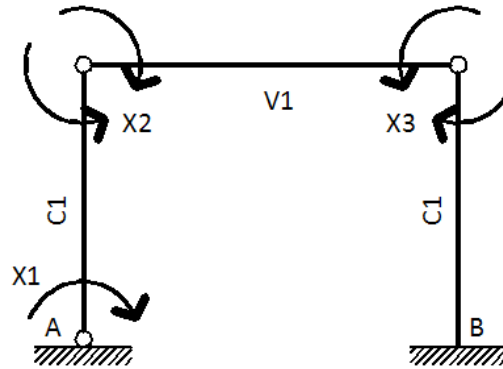
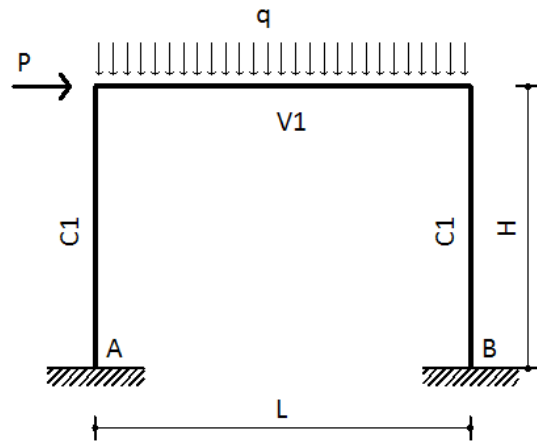
$$\Delta_{10} + [\delta_{11} + L / (EA)] X_1 = 0$$

$$\delta_{kj} = \sum \frac{S_{ik} S_{ij}}{EA_i} L_i \quad \delta_{kk} = \sum \frac{S_{ik}^2}{EA_i} L_i$$

Temperatura

$$\Delta_{kt} = \alpha \Delta t \sum S_{ik} L_i$$

PÓRTICOS

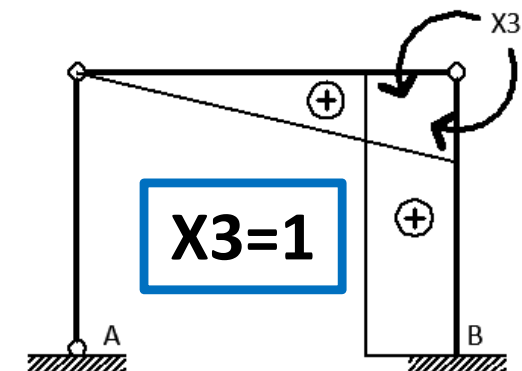
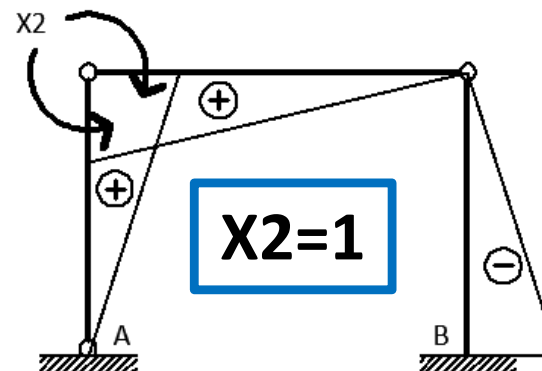
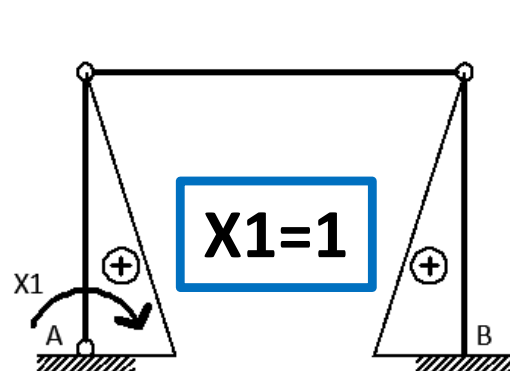
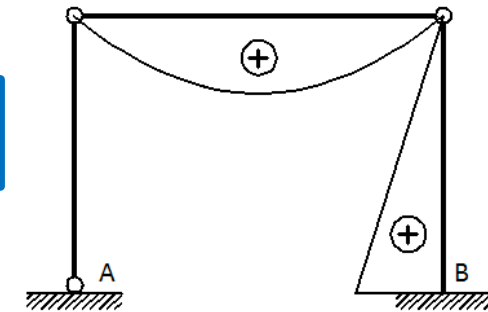


$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 = 0$$

$$\Delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 = 0$$

$$\Delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 = 0$$

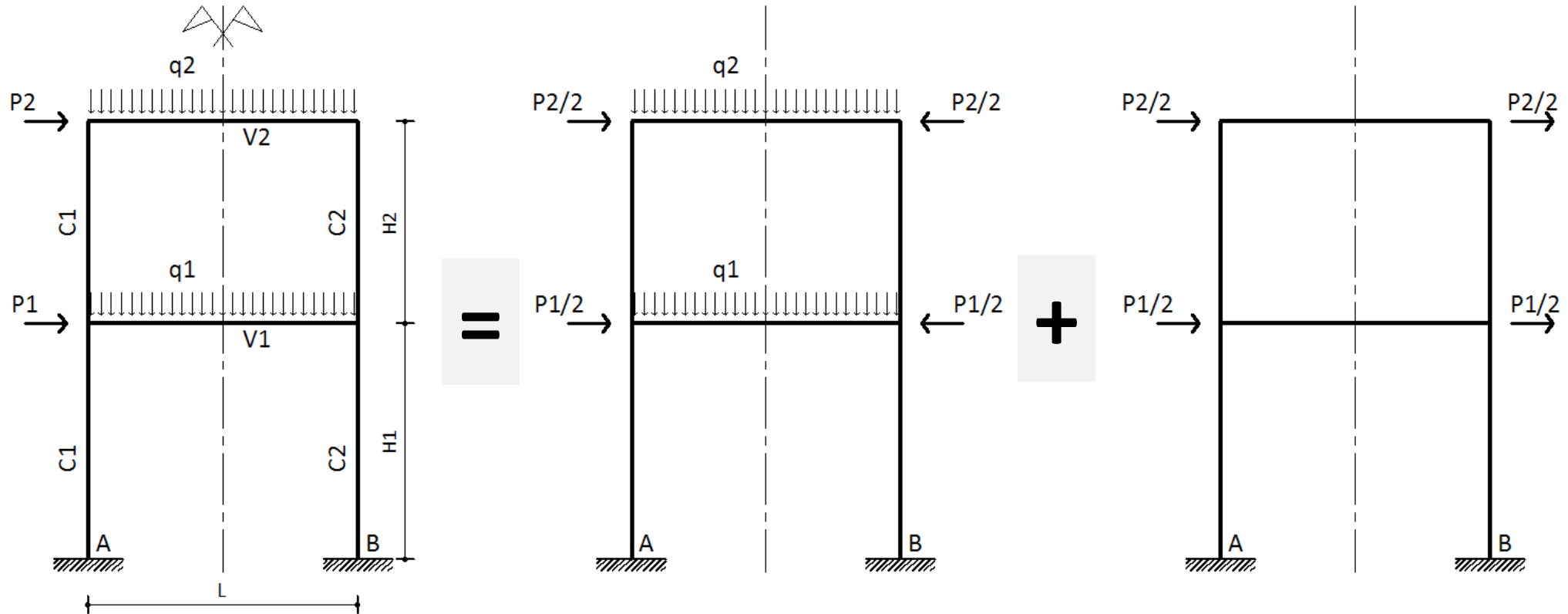
P0



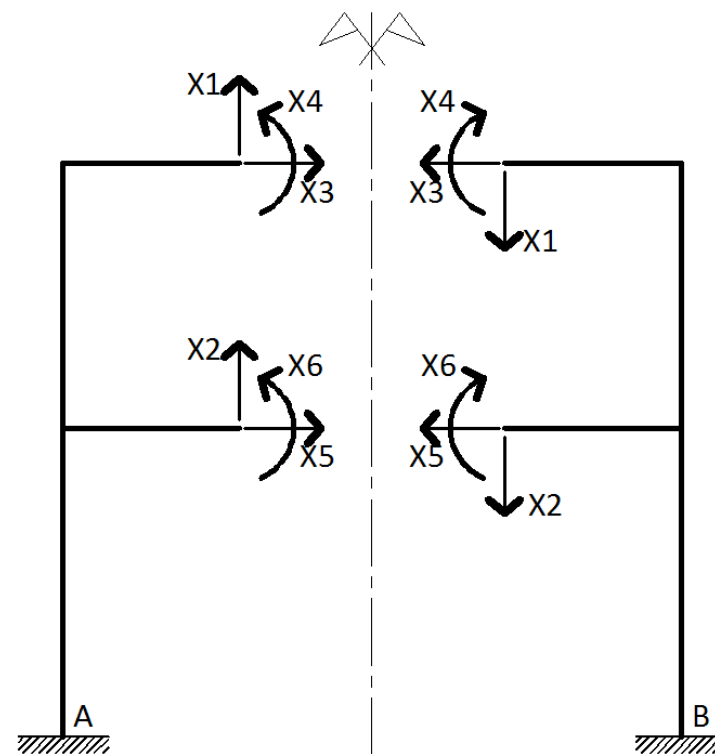
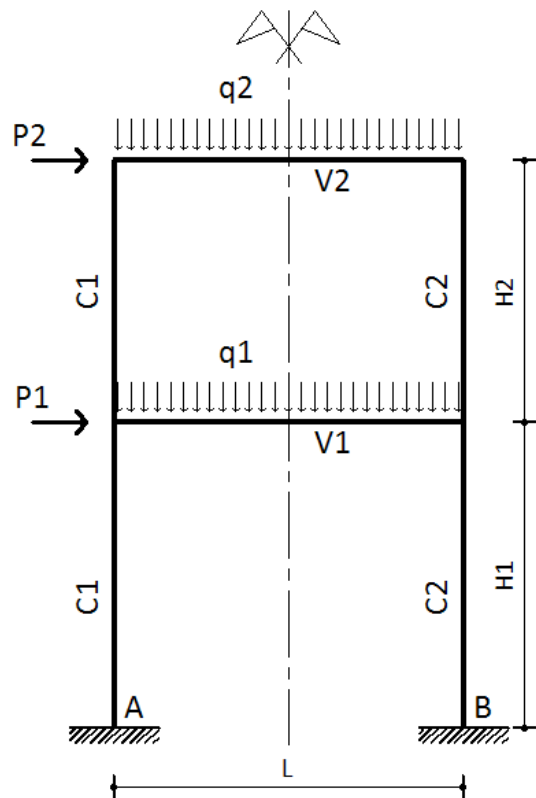
PÓRTICOS. SIMETRÍA y ANTISIMETRÍA

Simétrica

Antisimétrica



PÓRTICOS. SIMETRÍA y ANTISIMETRÍA



En una estructura simétrica con cargas simétricas los desplazamientos relativos antisimétricos en el plano de simetría son nulos.

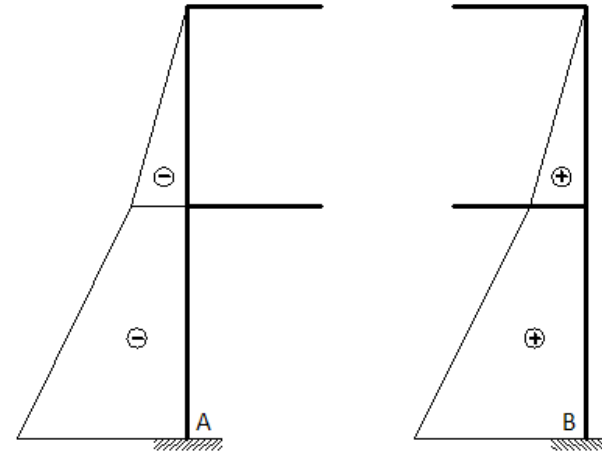
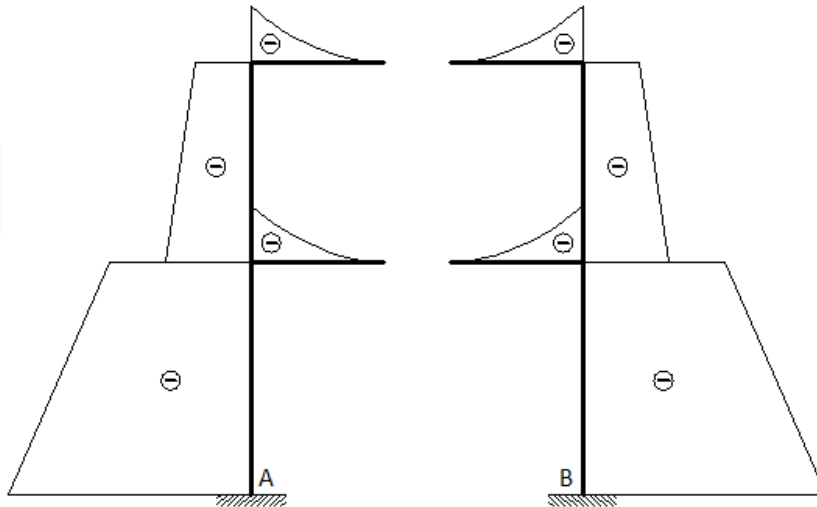
En una estructura simétrica con cargas simétricas las incógnitas antisimétricas en el plano de simetría son nulas.

PÓRTICOS. SIMETRÍA y ANTISIMETRÍA

Simétrica

Antisimétrica

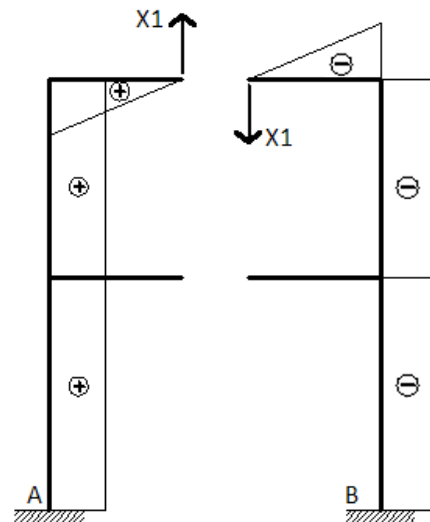
P0



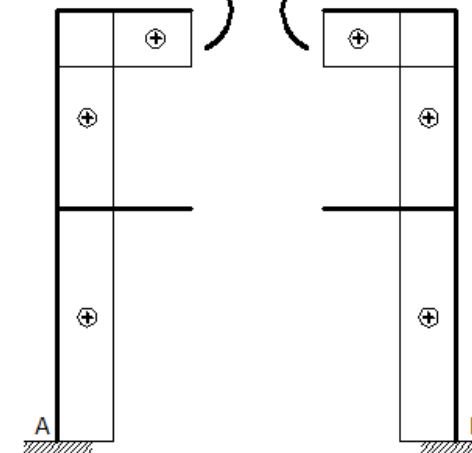
Antisimétrica

Simétrica

X1



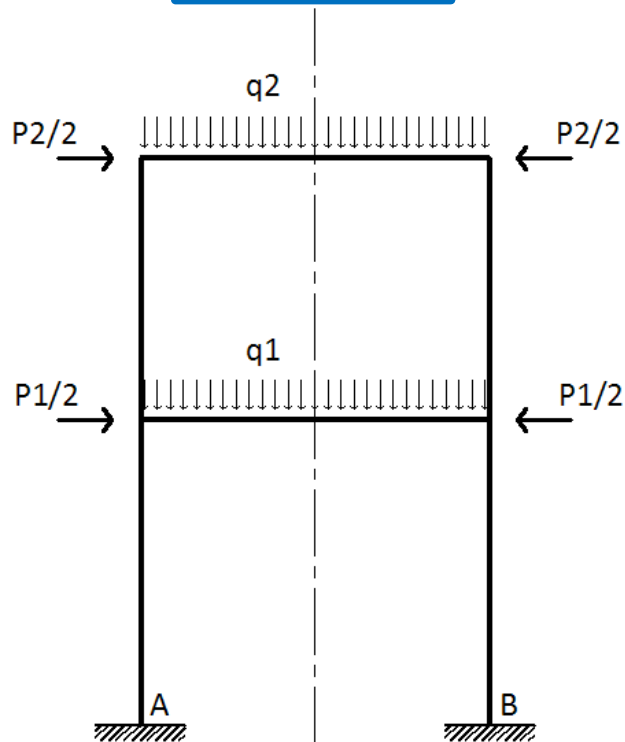
X4



X4

PÓRTICOS. SIMETRÍA y ANTISIMETRÍA

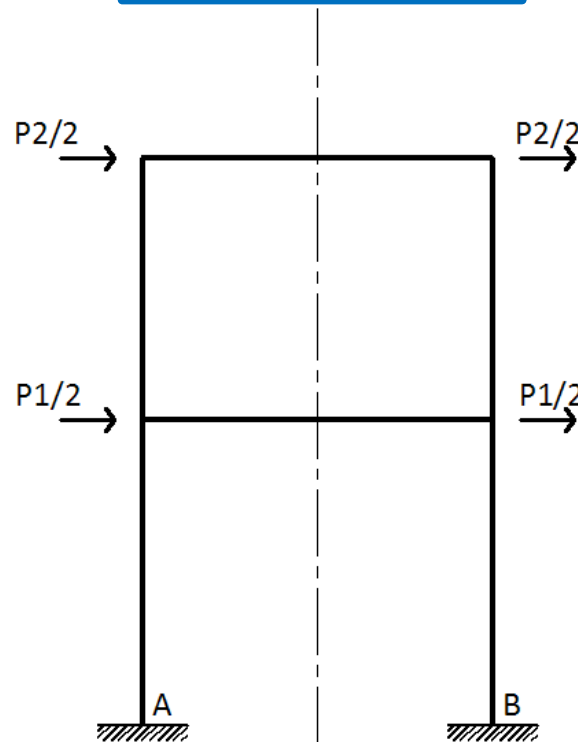
Simétrica



$$\Delta_{10} = \Delta_{20} = 0$$

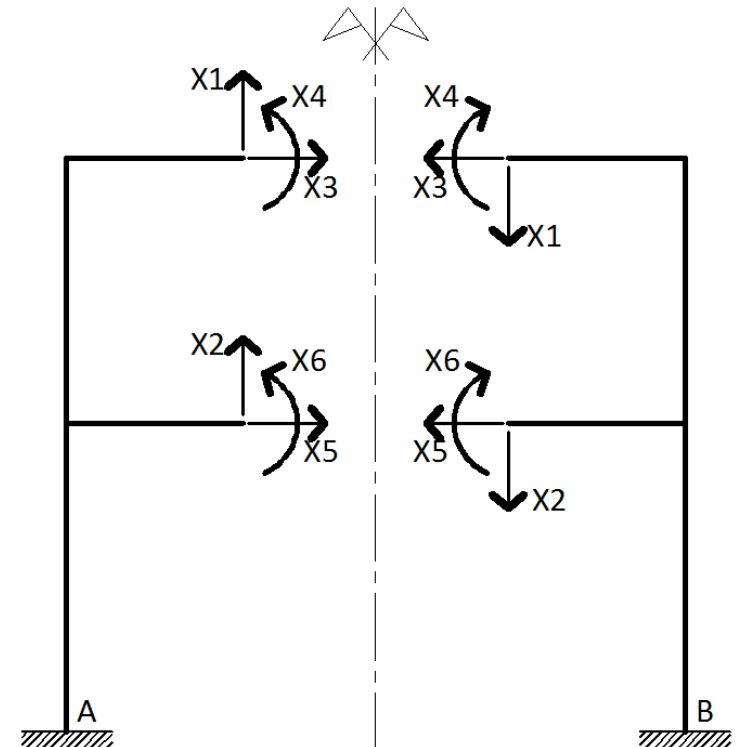
$$\Delta_{30}, \dots, \Delta_{60} \neq 0$$

Antisimétrica



$$\Delta_{10}, \Delta_{20} \neq 0$$

$$\Delta_{30} = \dots = \Delta_{60} = 0$$



$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22} \neq 0$$

$$\delta_{13}, \dots, \delta_{16} = 0$$

$$\delta_{23}, \dots, \delta_{26} = 0$$

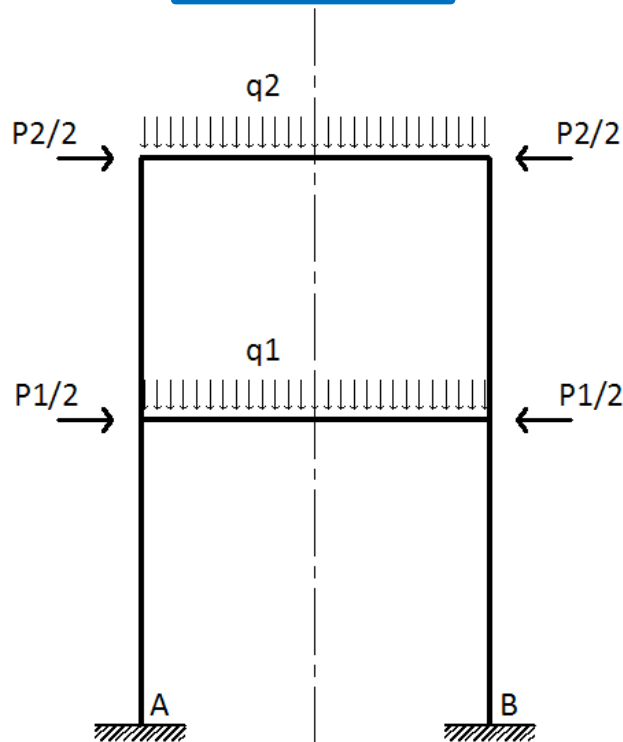
$$\delta_{33}, \dots, \delta_{36} \neq 0$$

$$\vdots, \dots, \vdots \neq 0$$

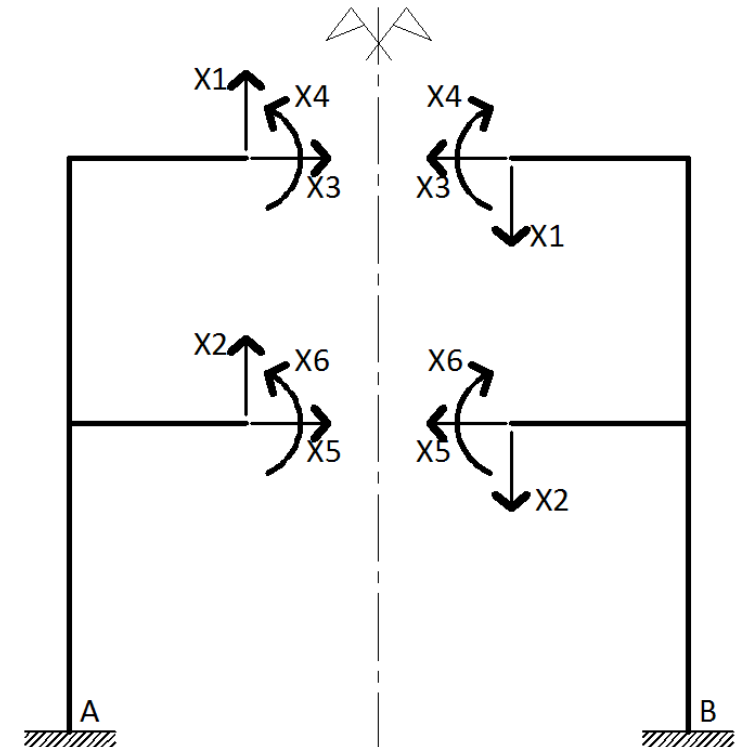
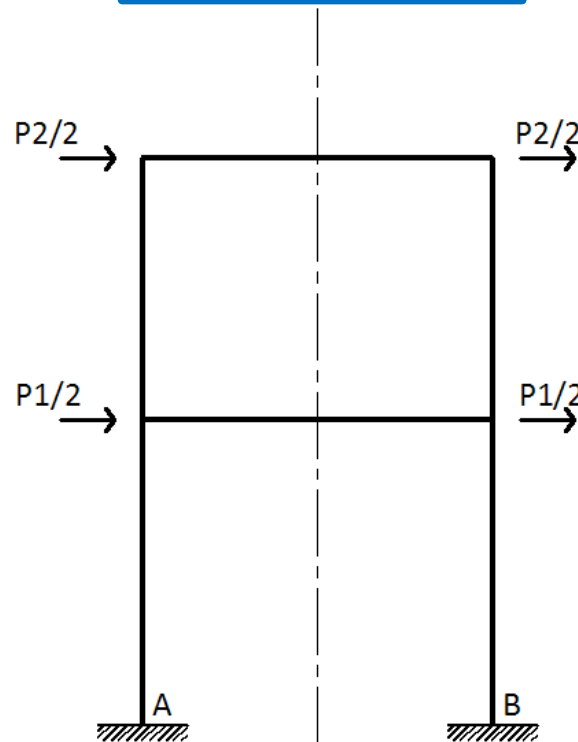
$$\delta_{63}, \dots, \delta_{66} \neq 0$$

PÓRTICOS. SIMETRÍA y ANTISIMETRÍA

Simétrica



Antisimétrica



$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

$$\Delta_{30} + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 + \delta_{36}X_6 = 0$$

$$\Delta_{40} + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \delta_{46}X_6 = 0$$

$$\Delta_{50} + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 = 0$$

$$\Delta_{60} + \delta_{63}X_3 + \delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 = 0$$

BIBLIOGRAFÍA

- Cervera, Miguel y Blanco, Elena. “Mecánica de estructuras libro 2. Métodos de análisis”. UPC 2002. ISBN 84-8301-635-4. ISBN Obra completa 84-8301-623-0.
- Belluzzi, Odone. “Ciencia de la Construcción” T I, Ed. Aguilar, 1977. ISBN 84-03-20174-5
- Segerer, C. “Método de la Fuerzas”. Apuntes de clase, Facultad de Ingeniería. UNC. 2001.
- Cudmani, R. “Teoría y Práctica de las Estructuras de Barra” EDUNT. 2007. ISBN 978-987-1366-03-3