



UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA  
en acción continua...

# ANALISIS ESTRUCTURAL I

## UNIDAD 4

### Métodos Matriciales Método de la Rigidez Directa (MRD)

CURSO 2.026

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

# METODOS CLÁSICOS

## Contenido

- Introducción
- Análisis Estructural
- Métodos Matriciales (MRD)
- Campo de aplicación de los Métodos Matriciales
- Principio de Contragariencia o Dualidad Estático Cinemática (Diag. Tonti)
- Introducción al MRD
- Hipótesis MRD
- Convención de signos
- Desarrollo MRD: Estructuras con Nodos Articulados y Rígidos

# METODOS CLÁSICOS

## Contenido

- Introducción Estructuras 1D, 2D y 3D
- **Análisis Estructural** Sistema físico o Estructura Real  
Modelo Matemático
- Métodos Matriciales (MRD) Discretización
- Campo de aplicación de los Modelos de Análisis  
Resultados
- Principio de Contragariencia o Dualidad Estático Cinemática (Diag. Tonti)
- Introducción al MRD
- Hipótesis MRD
- Convención de signos
- Desarrollo MRD: Estructuras con Nodos Articulados y Rígidos

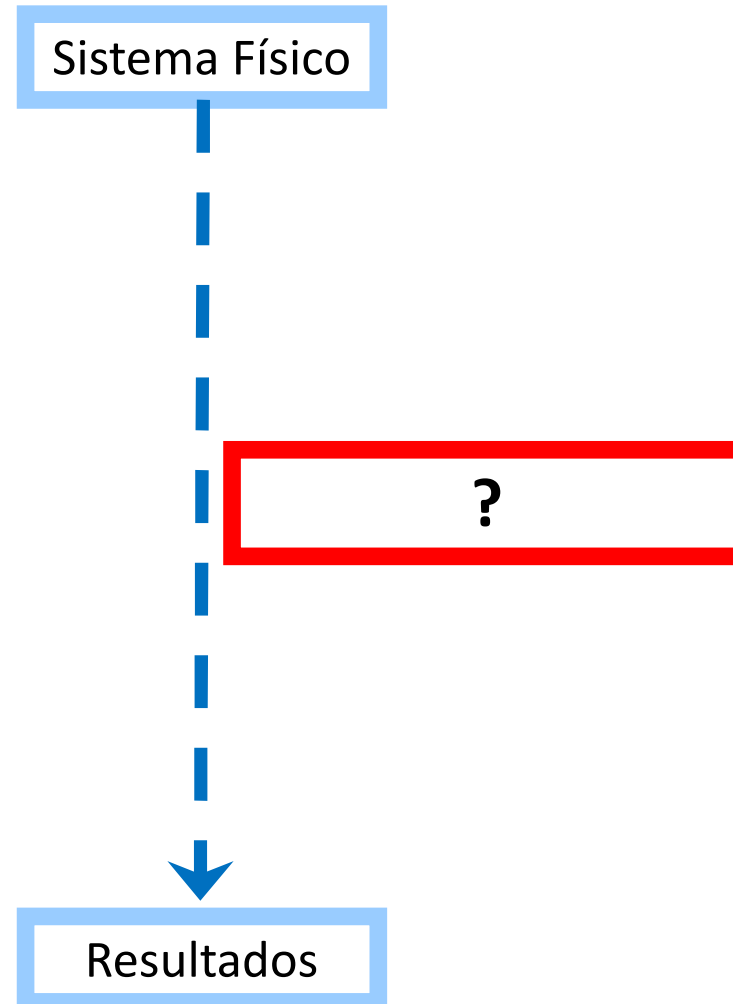
# METODOS CLÁSICOS

## Contenido

- Introducción
- Análisis Estructural
- Métodos Matriciales (MRD)
- Campo de aplicación de los Métodos Matriciales
- Principio de Contragariencia o Dualidad Estático Cinemática (Diag. Tonti)
- Introducción al MRD
- Hipótesis MRD
- Convención de signos
- **Desarrollo MRD:** Estructuras con Nodos Articulados y Rígidos  
Utilizamos conceptos conocidos e introducimos nuevos  
Aplicamos MRD a estructuras de barras dispuestas en 2D y 3D

# ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## Proceso de Análisis



# ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## Proceso de Análisis

Estructura  
Real



# ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## Proceso de Análisis

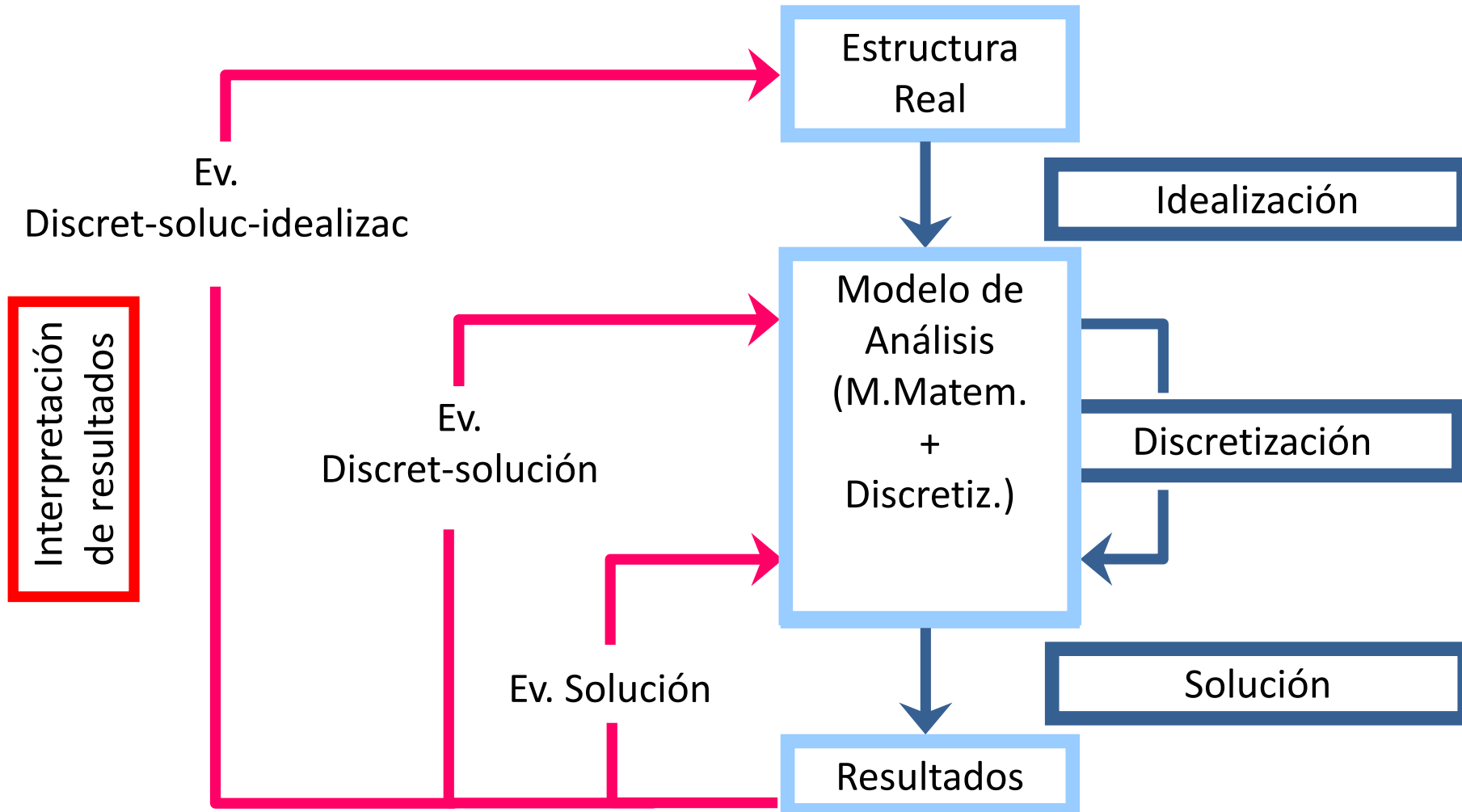
Estructura  
Real





# ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## Proceso de Análisis



**ESTRUCTURA**  
( SISTEMA FÍSICO )

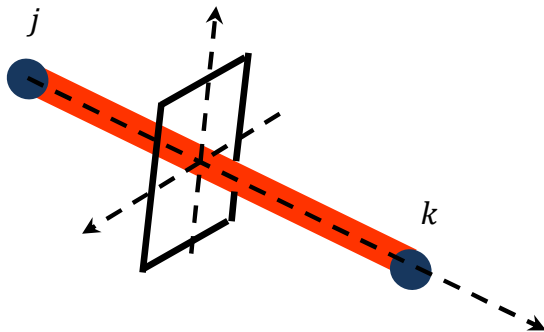
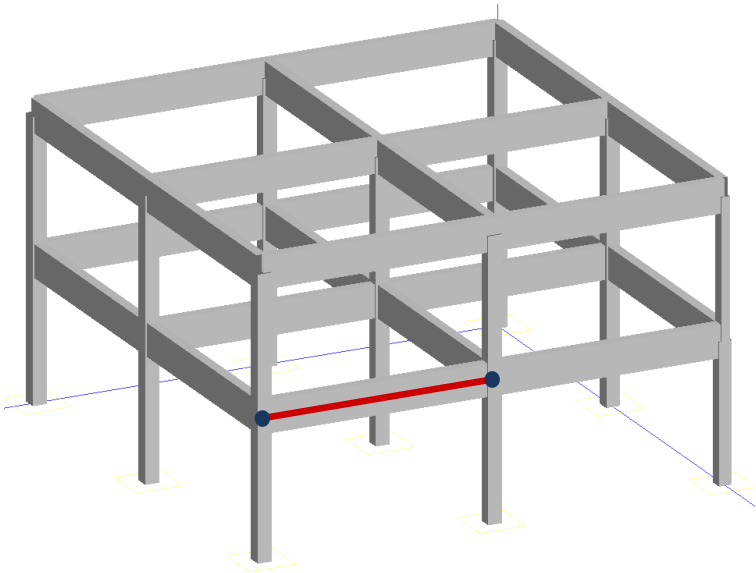
Indep. Tiempo  
Mat. Elásticos  
Mat. Homogéneos  
Mat. Isótropos

Mat. Simples  
Peq. Deformaciones  
Peq. Desplazamientos

# ESTRUCTURA

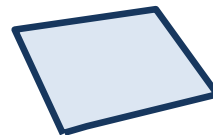
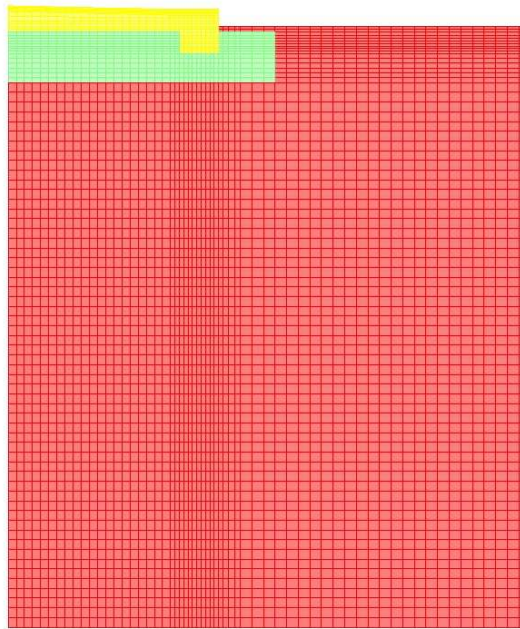
## PROBLEMAS 1D

Reticulados planos y 3D  
V. continuas. Emparrillados  
Pórticos planos y 3D



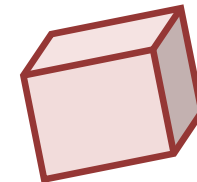
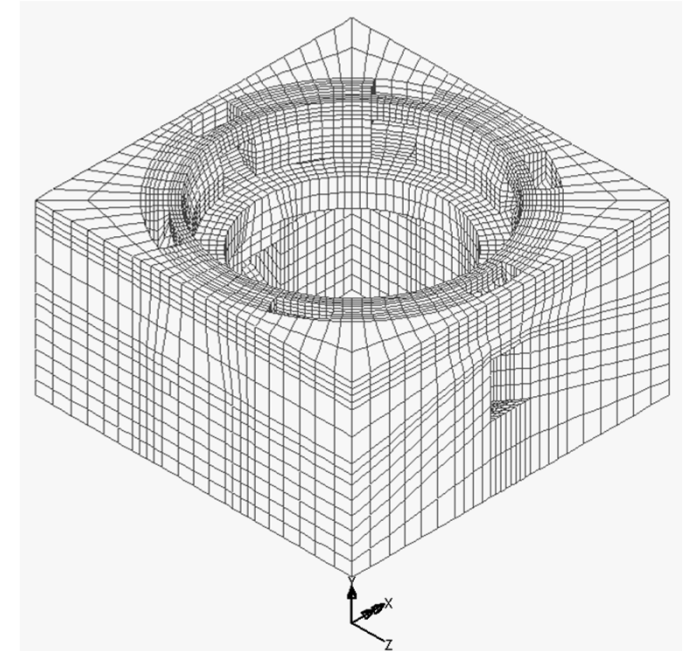
## PROBLEMAS 2D

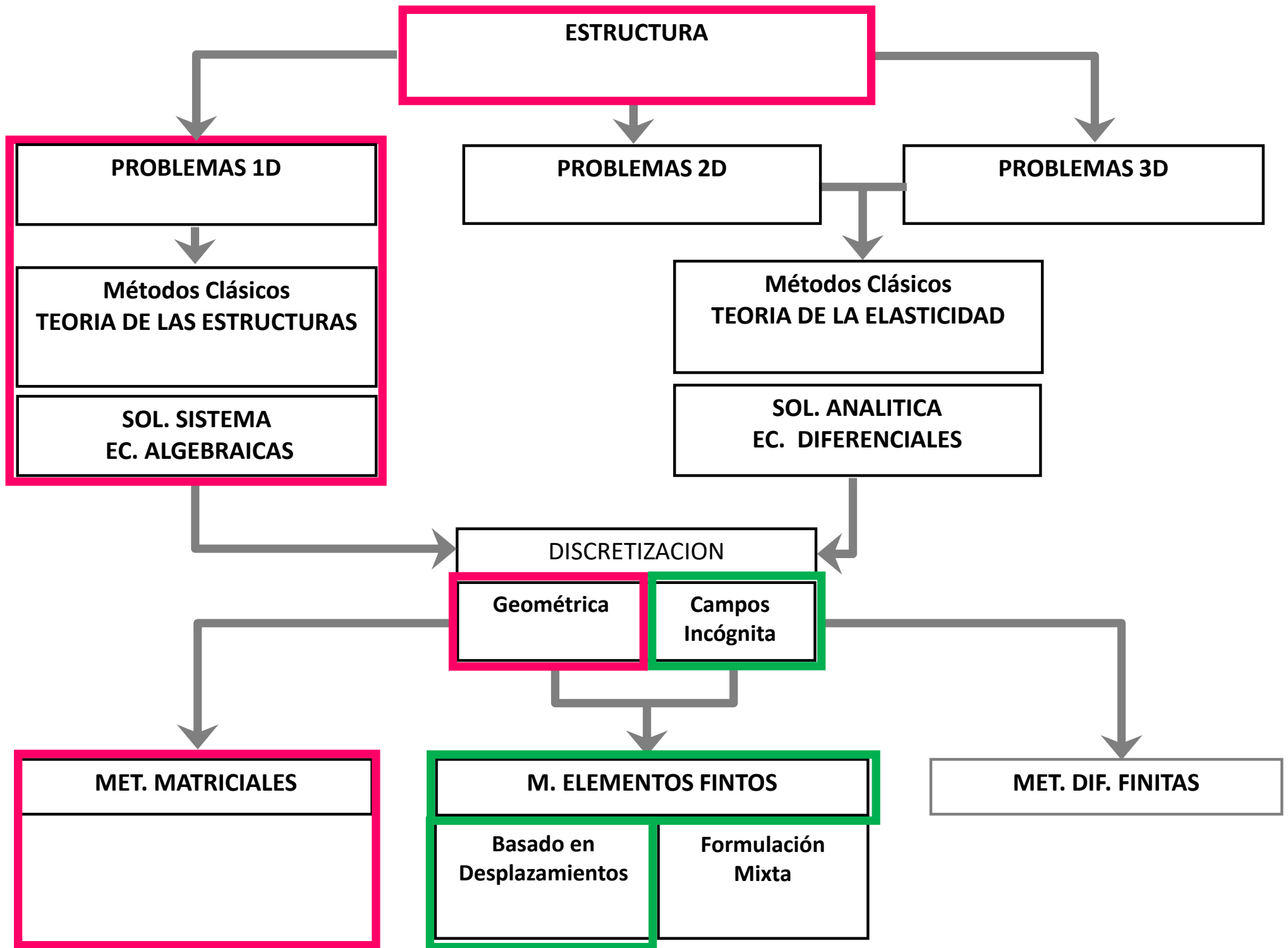
Est. Plano Tensiones  
Est. Plano Deformaciones.  
Axial Simetría.



## PROBLEMAS 3D

Sólidos  
Fluidos (líquidos y gaseosos)  
Propagación Ondas





# MÉTODOS MATRICIALES

## Introducción

Los métodos matriciales tienen su origen en la década de 1940. Levy (1947) publica el método de la Flexibilidad o Fuerzas.

Turner, Clough y Martin (1956) publican el método de la Rigidez o Desplazamientos

Las ideas propuestas y el desarrollo en informática provocan un gran avance en el ámbito del análisis de estructuras de barras.

En nuestros días se considera un tema cerrado desde el punto de vista de la investigación.

# MÉTODOS MATRICIALES

## Introducción

Los métodos matriciales, entre ellos el de la Rigidez Directa, consisten en reemplazar la estructura real por un modelo de análisis discreto, constituido por elementos de propiedades conocidas que pueden ser resumidas en forma de matrices.

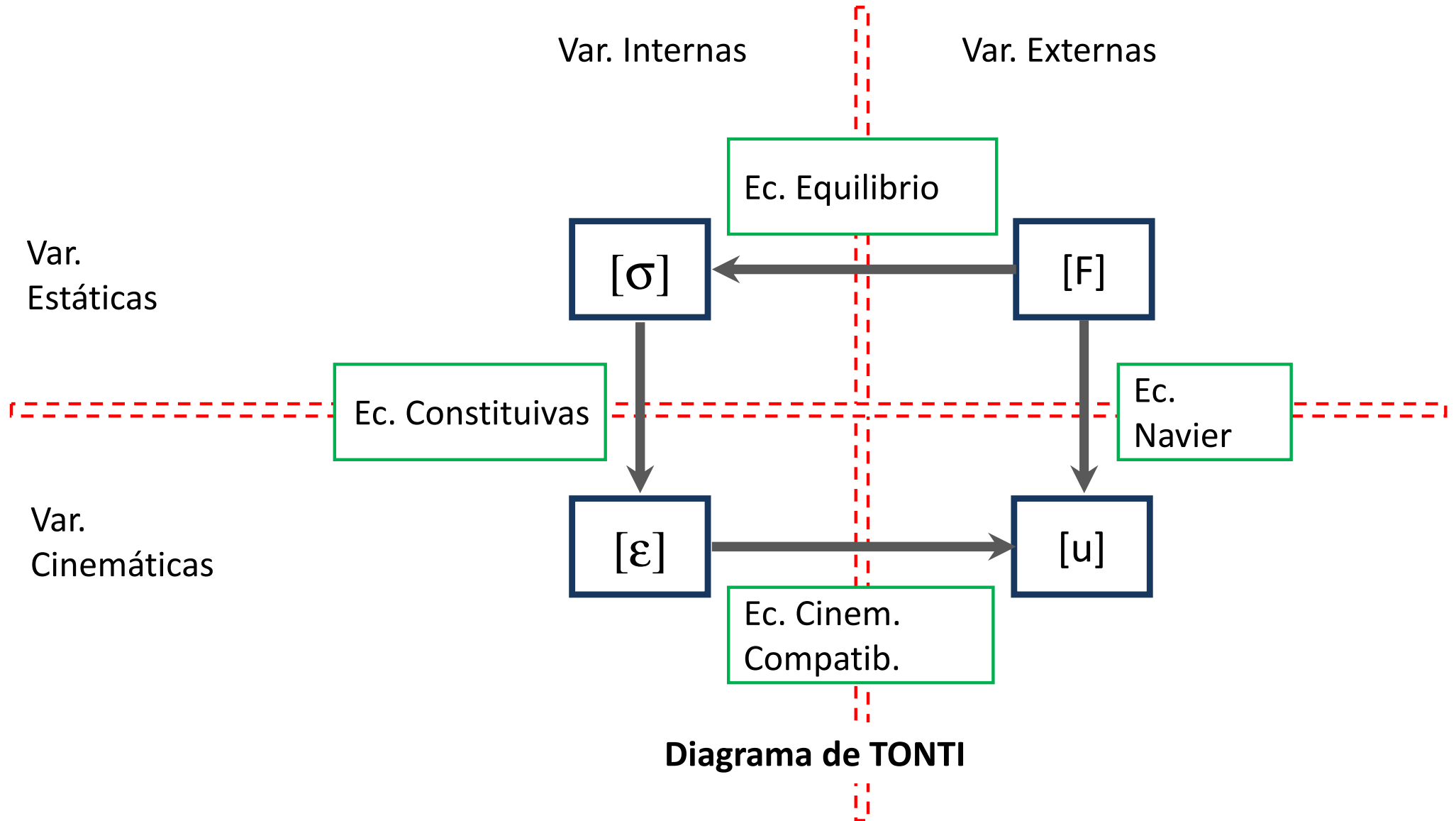
Luego las propiedades de toda la estructura se resumen en una única matriz por ensamblaje de las matrices elementales.

Para obtener el campo de corrimientos incógnita (lineales y/o angulares) se resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas.

Finalmente, conocidos los corrimientos se pueden calcular esfuerzos internos, reacciones y otras variables de interés.

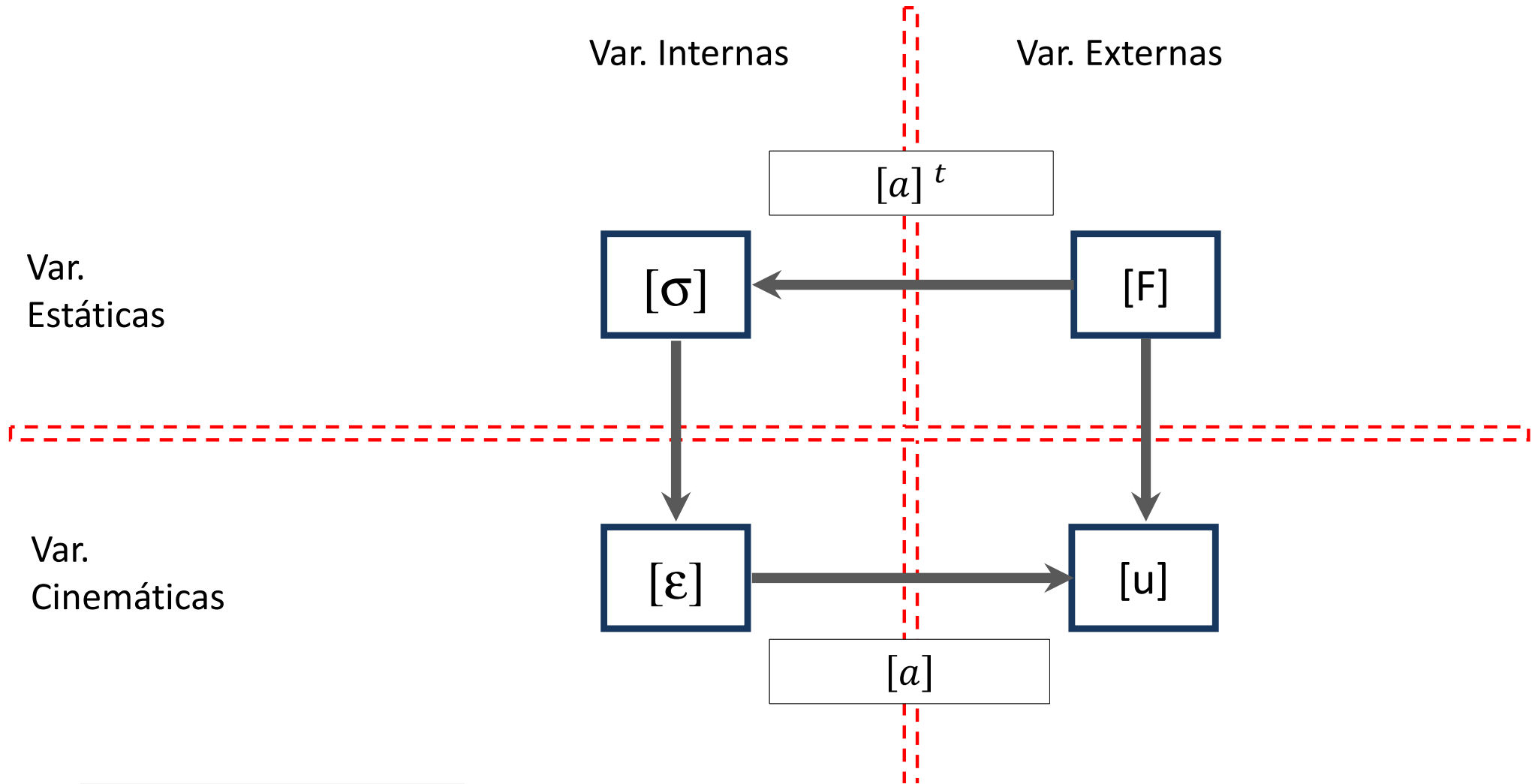
# PPIO. CONGRADIENCIA O DUALIDAD ESTÁTICO CINEMÁTICA

## Introducción



# PPIO. CONGRADIENCIA O DUALIDAD ESTÁTICO CINEMÁTICA

## Enunciado

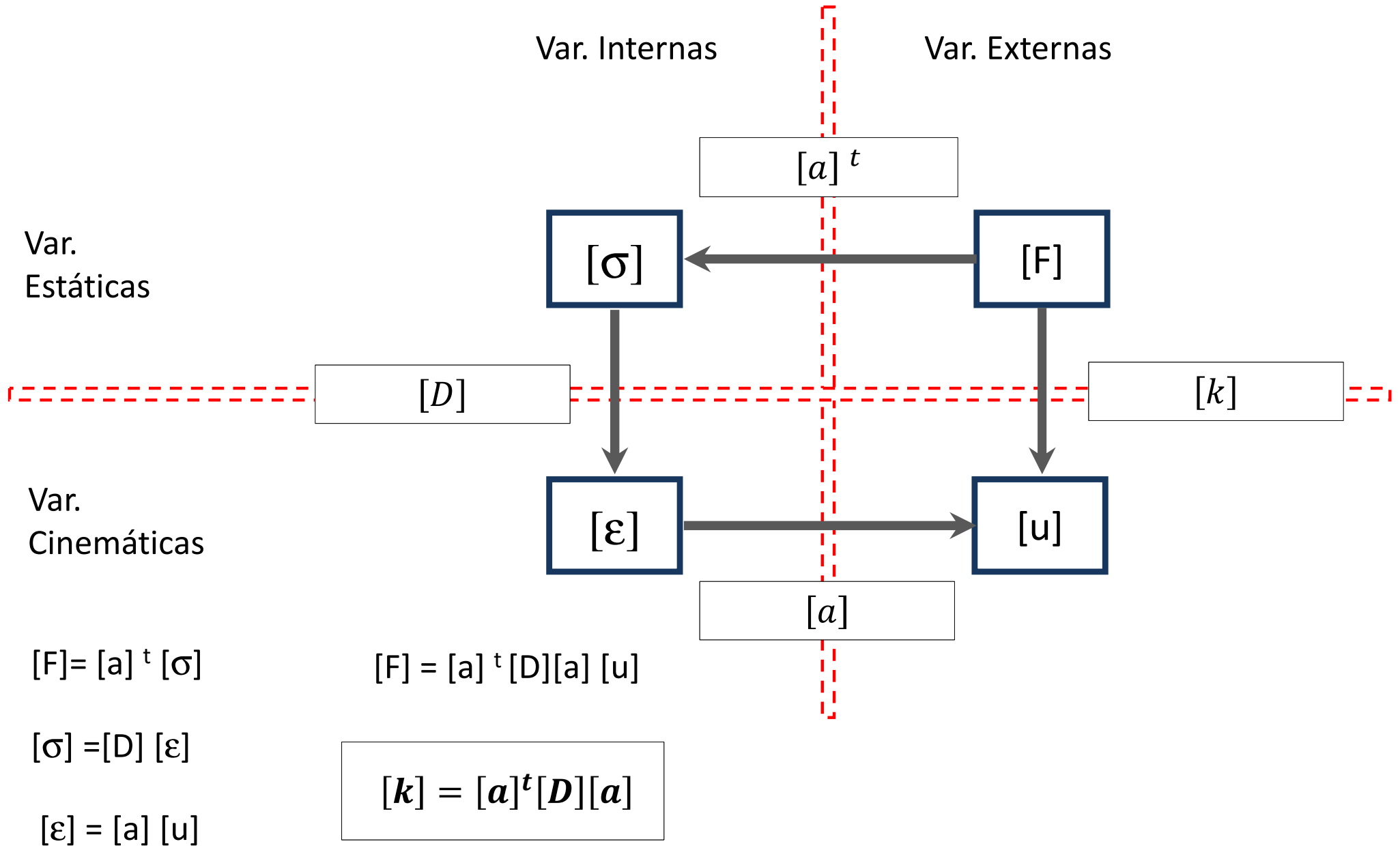


Principio

Si existe una matriz  $[a]^t$  que vincula VEE con VEI  
la misma matriz  $[a]$  vincula VCI con VCE.

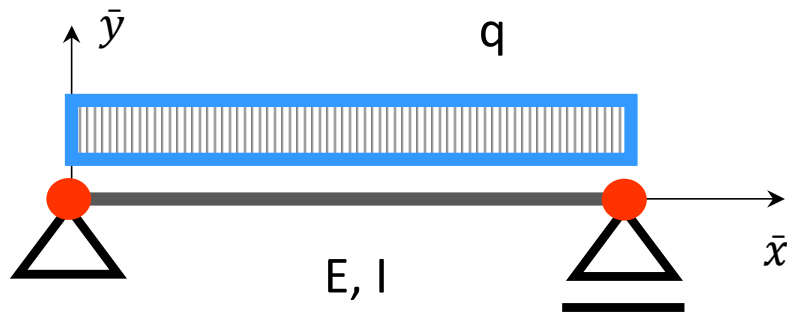
# PPIO. CONGRADIENCIA O DUALIDAD ESTÁTICO CINEMÁTICA

## Enunciado



# PPIO. CONGRADIENCIA O DUALIDAD ESTÁTICO CINEMÁTICA

## Ejemplo



$$[q] = [a]^t [M]$$

$$[M] = [EI] [\chi]$$

$$[\chi] = [a] [\eta]$$

$$q = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} M$$

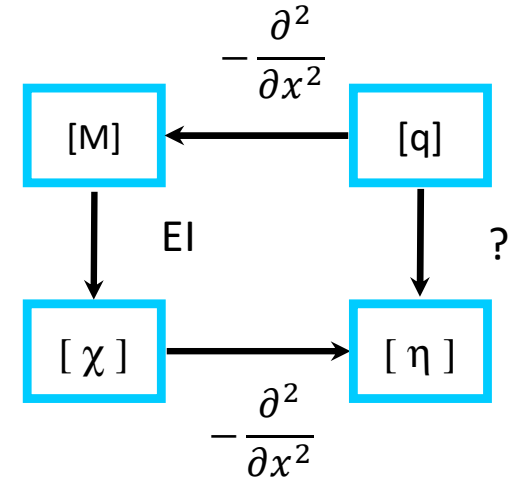
$$q = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \chi$$

$$M = EI \chi$$

$$q = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$$

$$\chi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$$

$$q = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \eta$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Hipótesis

Trabajamos con Pequeñas Deformaciones y Pequeños Desplazamientos.

**Ecuaciones Cinemáticas o Compatibilidad son Lineales**  
**Existe Linealidad Geométrica**

Trabajamos en el ámbito de la Ley de Hooke.

**Ecuaciones Constitutivas son Lineales**  
**Existe Linealidad Mecánica**

Las secciones planas y perpendiculares al eje de la barra antes de la deformación permanecen planas y perpendiculares al eje de la barra deformada.

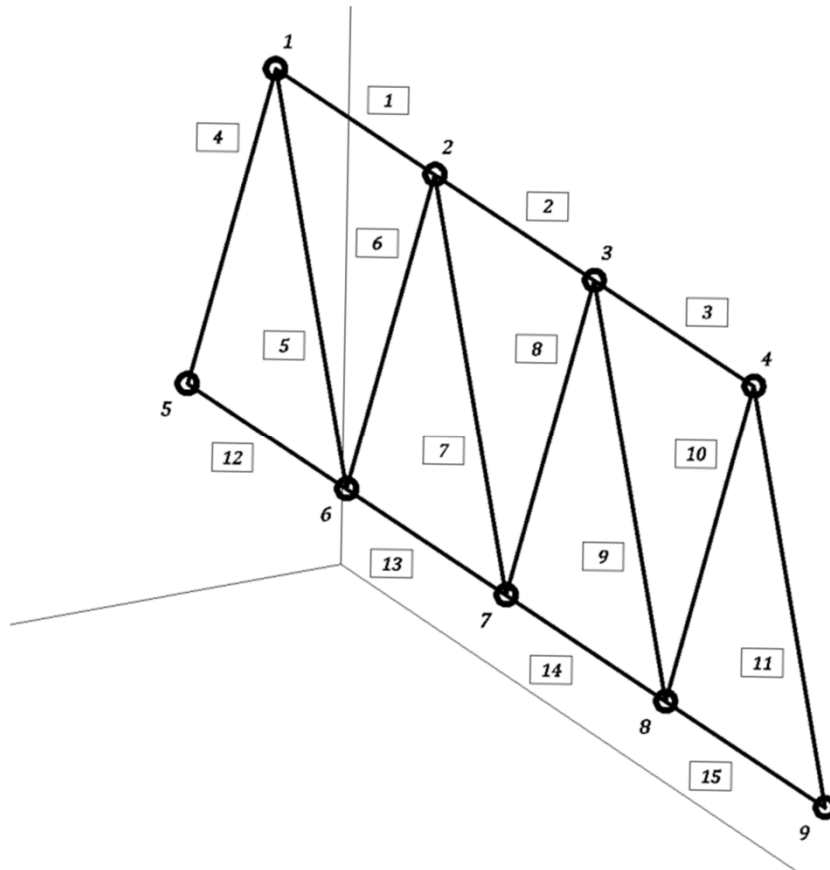
**Elementos de Euler-Bernoulli**

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Discretización

Las estructuras de barras están compuestas por nodos y elementos de barra.

Los nodos constituyen puntos característicos de las estructuras.



Nodos:

- Extremos de barras
- Puntos donde concurren dos o mas barras
- Puntos de aplicación de cargas

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Discretización

Las estructuras de barras están compuestas por nodos y elementos de barra.

Los nodos constituyen puntos característicos de las estructuras.

Los elementos de barra poseen una dimensión preponderante frente a las otras dos. Su posición coincide con el eje definido por el baricentro geométrico de las secciones transversales a lo largo de la barra.

El campo incógnita está constituido por desplazamientos nodales.

La solución se expresa a través de las variables nodales.

Las variables nodales están constituidas por desplazamientos y fuerzas.

Las variables de barra son esfuerzos internos y deformaciones.

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Pasos del Método

- Identificación estructural
- Determinación de la Matriz de Rigidez de Barra
  - Coordenadas Locales
  - Coordenadas Globales
- Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global de la Estructura
- Ensamblaje del Vector de Cargas
- Introducción de las Condiciones de Contorno (apoyos)
- Solución del Sistema de Ecuaciones (obtención de corrimientos)
- Cálculo de Reacciones
- Determinación de Esfuerzos Característicos y Deformaciones

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Identificación Estructural

Identificación de nodos y elementos para el modelo de análisis.

Definición de Sistemas de Coordenadas Locales, uno por barra.

Definición del Sistema de Coordenadas Global, uno para toda la estructura

Identificación de los grados de libertad de la estructura.

### **Grados de Libertad**

Conjunto de corrimientos linealmente independientes necesarios para definir en forma completa la configuración actualizada de la estructura.

Estructuras reticuladas planas:  $GL = 2 n$ , (donde  $n$  es el número de nodos)

Estructuras reticuladas 3D:  $GL = 3 n$

Estructuras pórticos planos:  $GL = 3 n$

Estructuras pórticos 3D:  $GL = 6 n$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Identificación Estructural

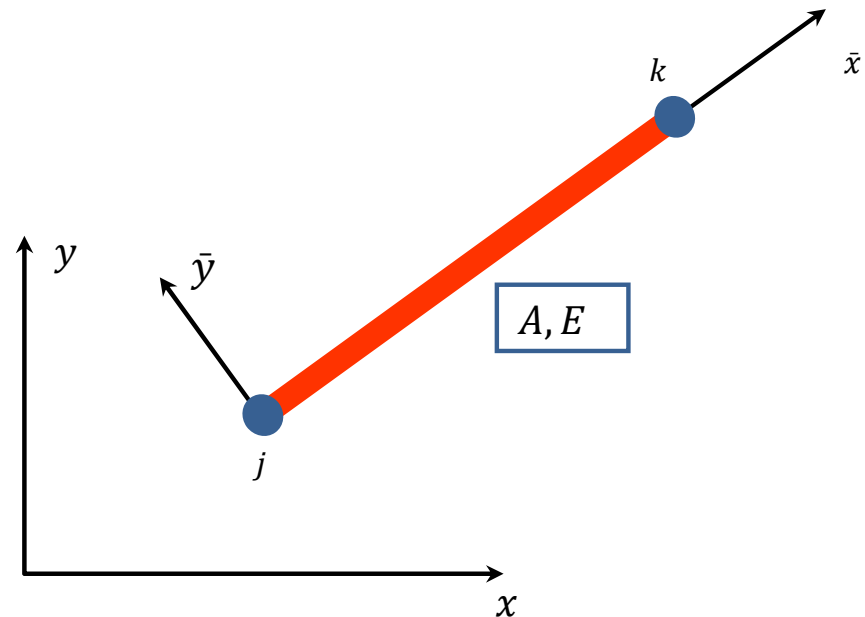
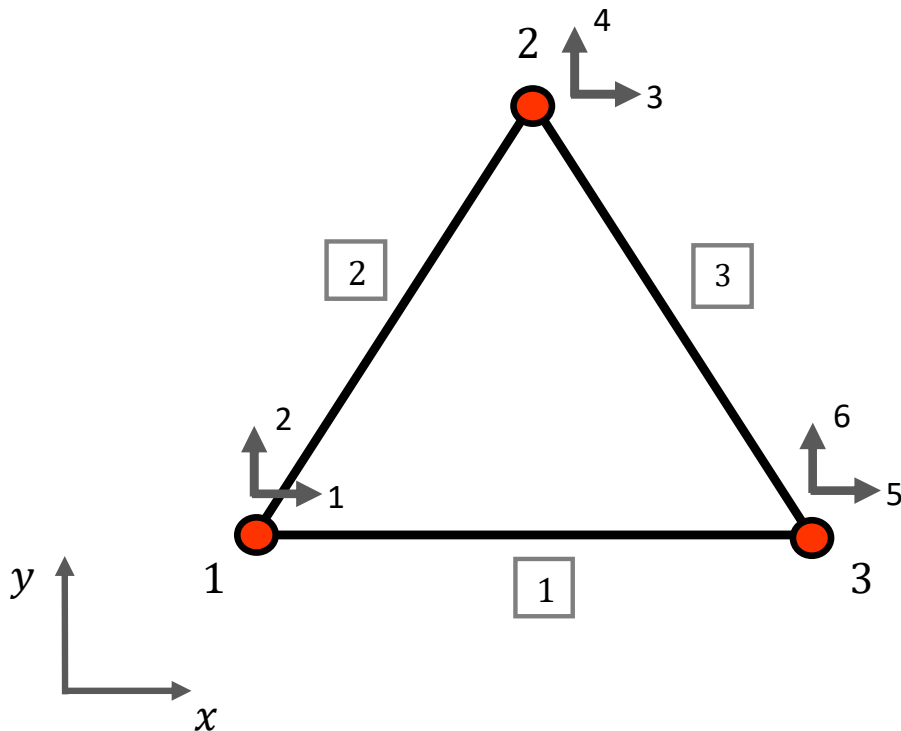
Identificación de nodos y elementos para el modelo de análisis.

Definición de Sistemas de Coordenadas Locales, uno por barra.

Definición del Sistema de Coordenadas Global, uno para toda la estructura

Identificación de los grados de libertad de la estructura.

Definición de Conectividades



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Identificación Estructural

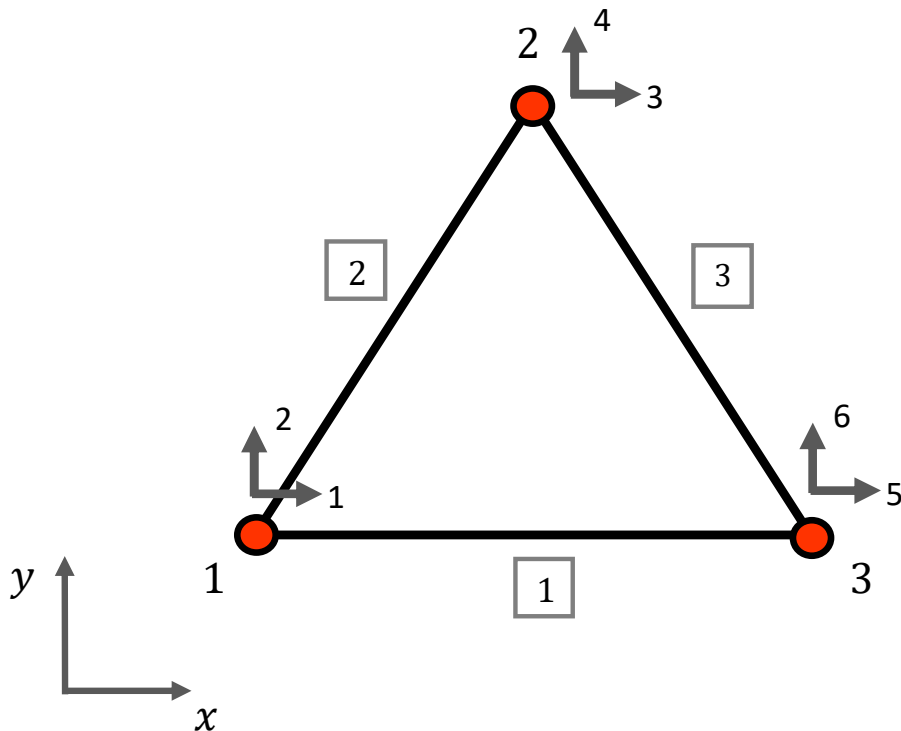
Identificación de nodos y elementos para el modelo de análisis.

Definición de Sistemas de Coordenadas Locales, uno por barra.

Definición del Sistema de Coordenadas Global, uno para toda la estructura

Identificación de los grados de libertad de la estructura.

Definición de Conectividades



Barra	Nodos	
	j	k
1	1	3
2	1	2

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Convención de Signos

### Cantidades de Barras (SCL)

Estructuras de Nodos Articulados:

*Esfuerzos Tracción (+)*

Estructuras de Nodos Rígidos 2D y 3D

*Esfuerzos Tracción (+), Momentos Mano derecha (+)*

### Cantidades Nodales (SCG)

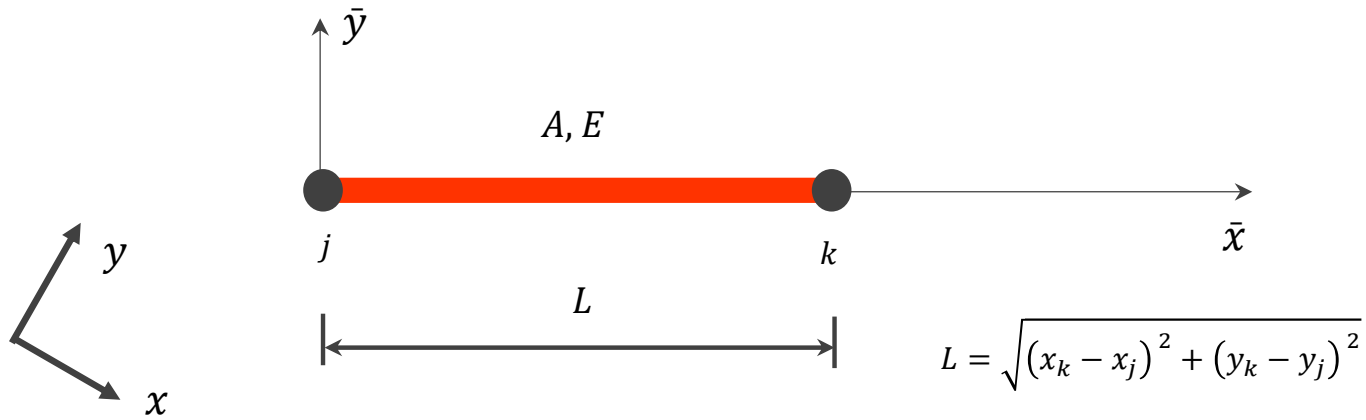
Fuerzas (+) : dirección y sentido coincide con la del semieje global (+)

Corrimientos Lineales (+) dirección y sentido coincide con la del semieje global (+)

Corrimientos Angulares (giros) (+) cuando el vector giro (perp. al plano del giro) coincide con el semieje global (+) (Mano derecha)

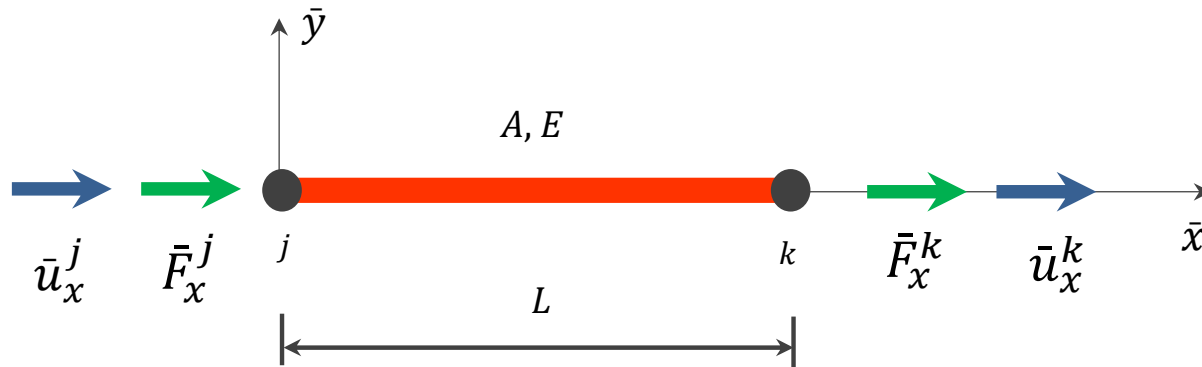
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales

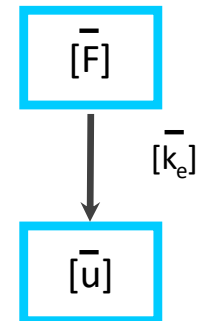


Ec. Constitutivas ( dirección x )

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{\bar{F}_k}{A} = E \frac{\bar{u}_k - \bar{u}_j}{L}$$

$$\bar{F}_k = -\frac{AE}{L}(\bar{u}_j - \bar{u}_k)$$



Equilibrio Local ( dirección x )

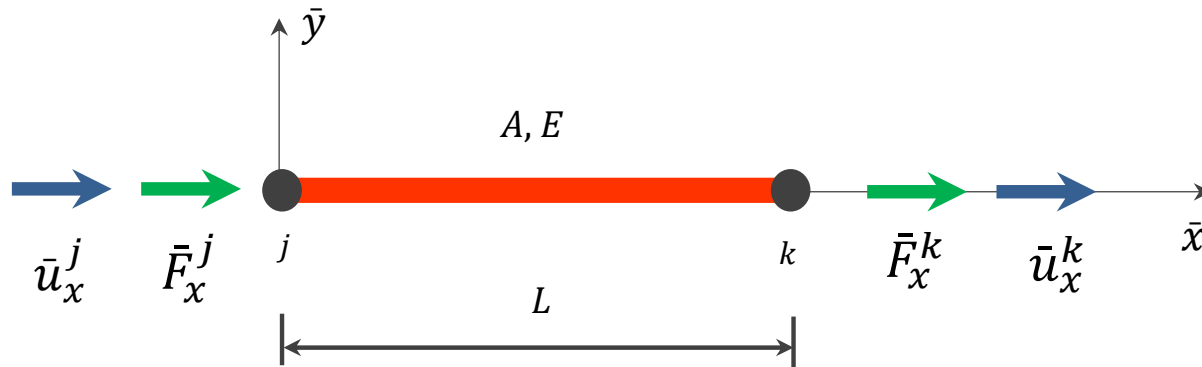
$$\bar{F}_k + \bar{F}_j = 0$$

$$\bar{F}_j = -\bar{F}_k$$

$$\bar{F}_j = \frac{AE}{L}(\bar{u}_j - \bar{u}_k)$$

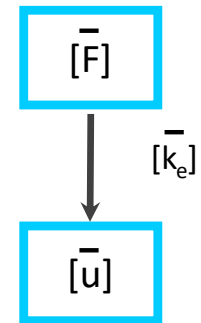
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_x^j \\ \bar{F}_x^k \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_x^k \end{bmatrix}$$



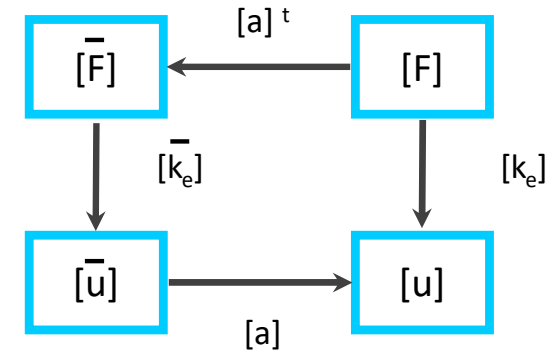
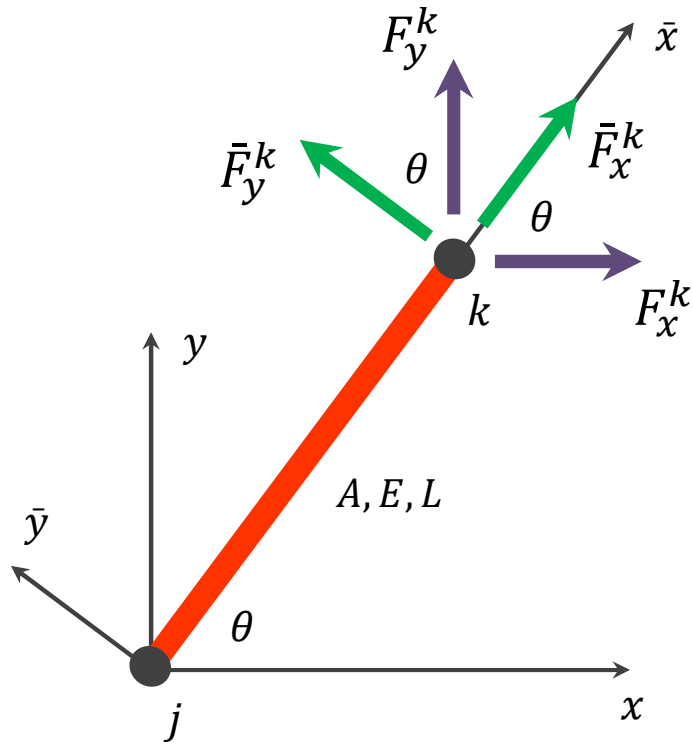
Extendida a las dos direcciones locales

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_x^j \\ \bar{F}_y^j \\ \bar{F}_x^k \\ \bar{F}_y^k \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] \cdot [\bar{u}]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales



Ec. Equilibrio ( nodo k )

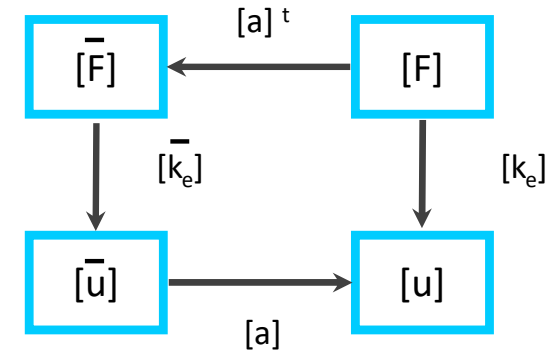
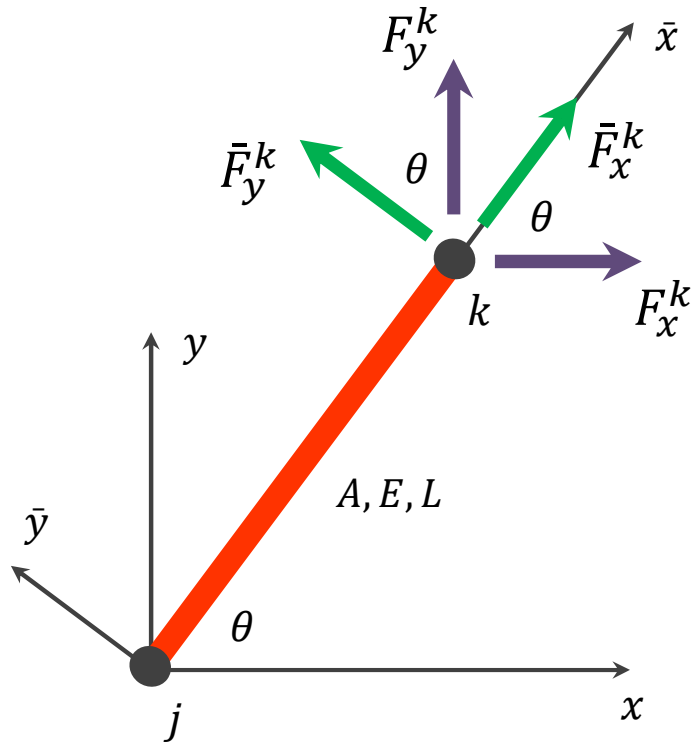
$$F_x^k = \bar{F}_x^k \cos \theta - \bar{F}_y^k \text{sen} \theta$$

$$F_y^k = \bar{F}_x^k \text{sen} \theta + \bar{F}_y^k \cos \theta$$

$$\begin{bmatrix} F_x^k \\ F_y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_x^k \\ \bar{F}_y^k \end{bmatrix}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales



Extendida a los dos Nodos

$$\begin{bmatrix} F_x^j \\ F_y^j \\ F_x^k \\ F_y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_x^j \\ \bar{F}_y^j \\ \bar{F}_x^k \\ \bar{F}_y^k \end{bmatrix}$$

$$[F] = [a]^t [\bar{F}]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

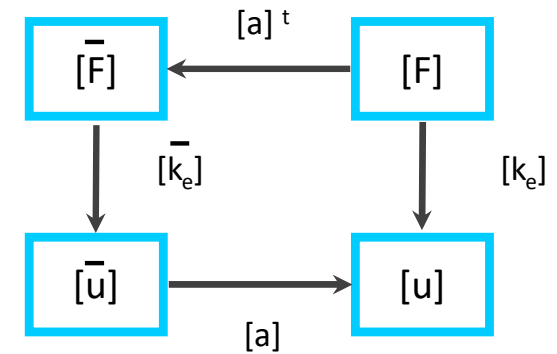
## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Ec. Cinemáticas

$$[\bar{u}] = [a] [u]$$

Reemplazando  $[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [\bar{u}]$

$$[F] = [a]^t [\bar{F}]$$



$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [\bar{u}]$$

Reemplazando  $[\bar{u}] = [a] [u]$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[F] = [k_e][u]$$

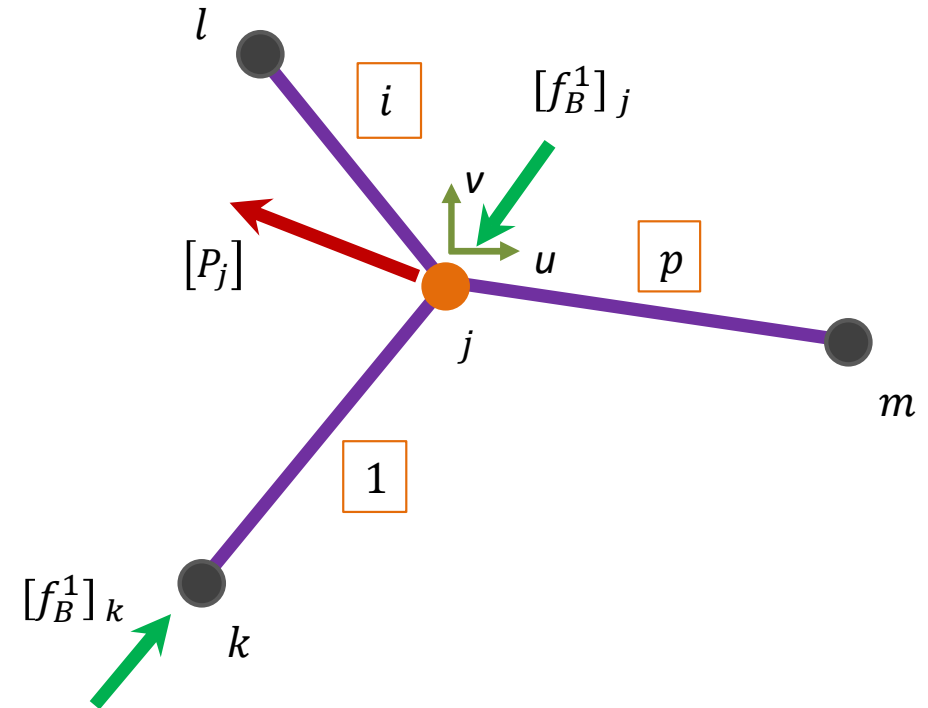
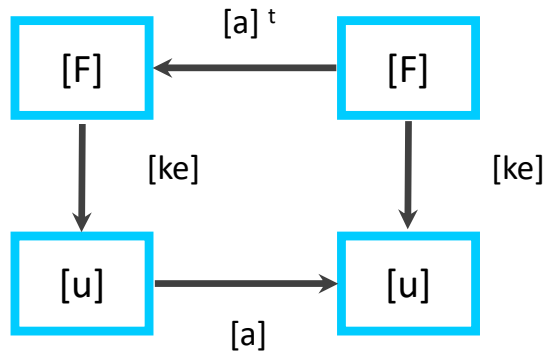
$$[k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Condición de Equilibrio

$$[P_j] = \sum_{i=1}^p [F_j^i]$$



$$\begin{bmatrix} [F_j] \\ [F_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^1] & [k_{jk}^1] \\ [k_{kj}^1] & [k_{kk}^1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [u_j] \\ [u_k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [f_B^1]_j \\ [f_B^1]_k \end{bmatrix}$$

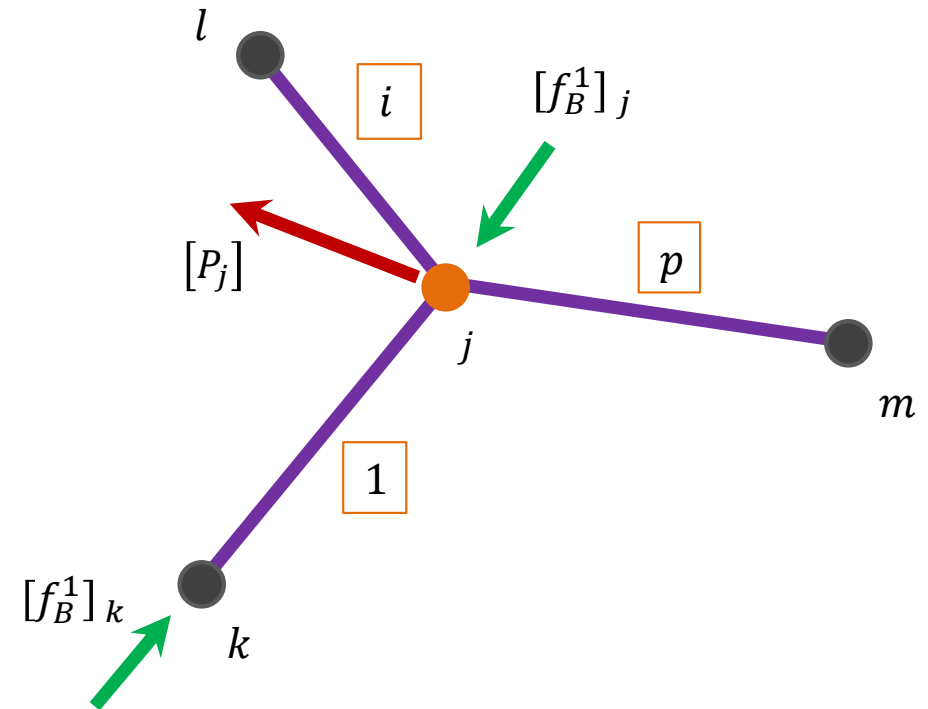
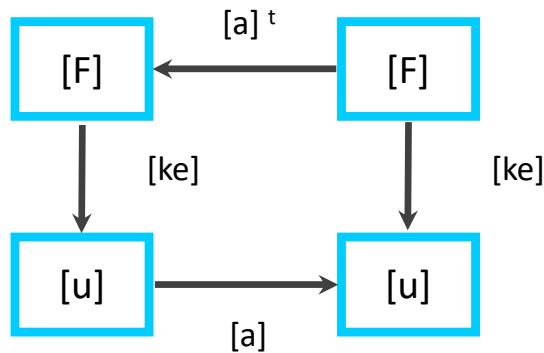
$$[F_j] = [k_{jj}^1] \cdot [u_j] + [k_{jk}^1] \cdot [u_k] + [f_B^1]_j$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Condición de Equilibrio

$$[P_j] = \sum_{i=1}^p [F_j^i]$$



$$\begin{bmatrix} [F_j] \\ [F_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^1] & [k_{jk}^1] \\ [k_{kj}^1] & [k_{kk}^1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [u_j] \\ [u_k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [f_B^1]_j \\ [f_B^1]_k \end{bmatrix}$$

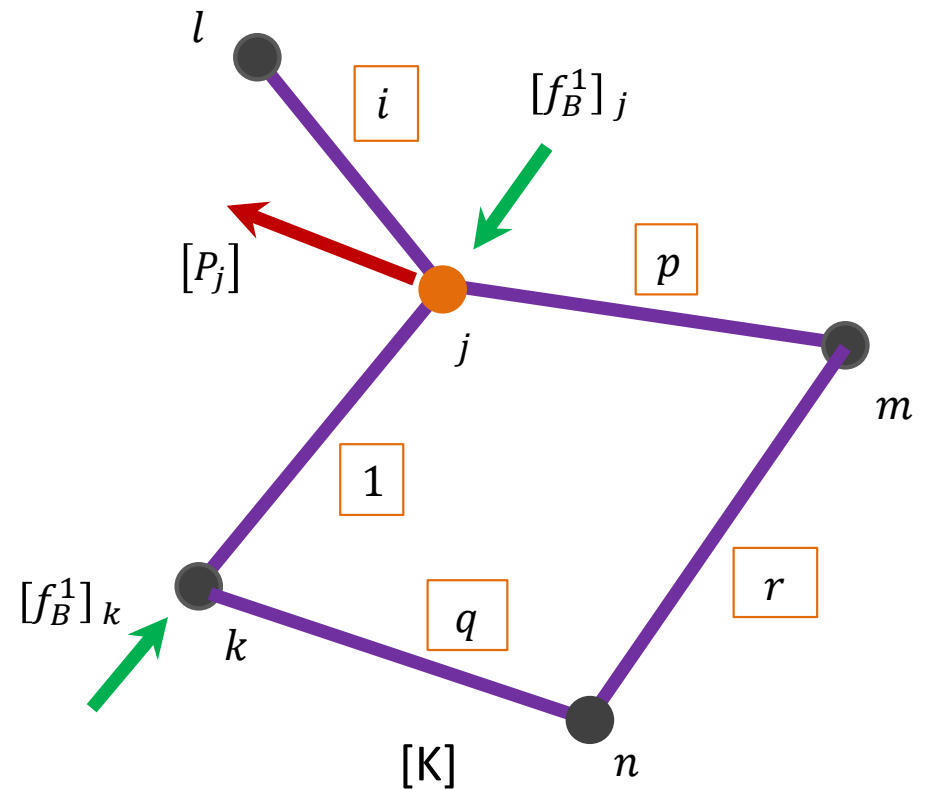
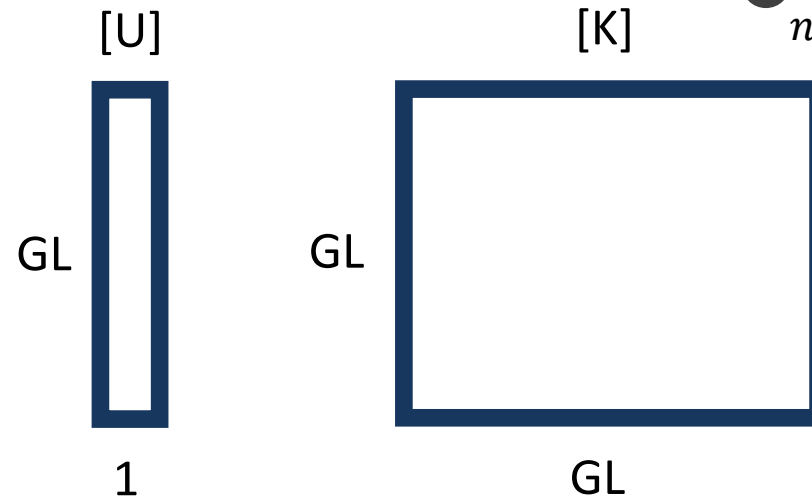
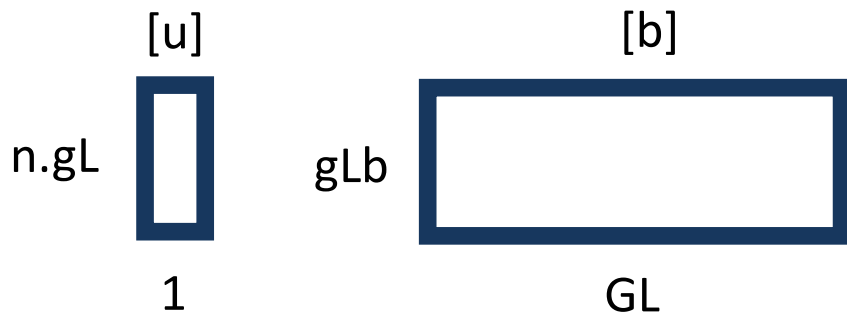
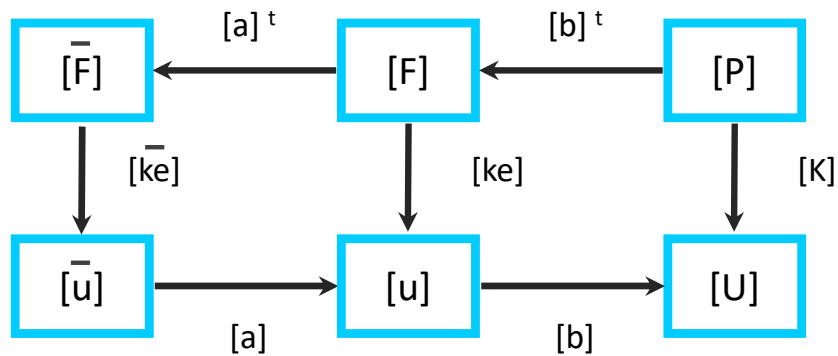
$$[P_j] - \{ [f_B^1]_j + \dots + [f_B^i]_j + \dots + [f_B^p]_j \} = \underbrace{\{ [k_{jj}^1] + \dots + [k_{jj}^i] + \dots + [k_{jj}^p] \}}_{[K_{jj}]} \cdot [u_j] + [k_{jk}^1] \cdot [u_k] + \dots + [k_{jl}^i] \cdot [u_l] + \dots + [k_{jm}^p] \cdot [u_m]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Considerando toda la estructura

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_i] \\ [P_n] \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_i] \\ [u_n] \end{bmatrix}$$

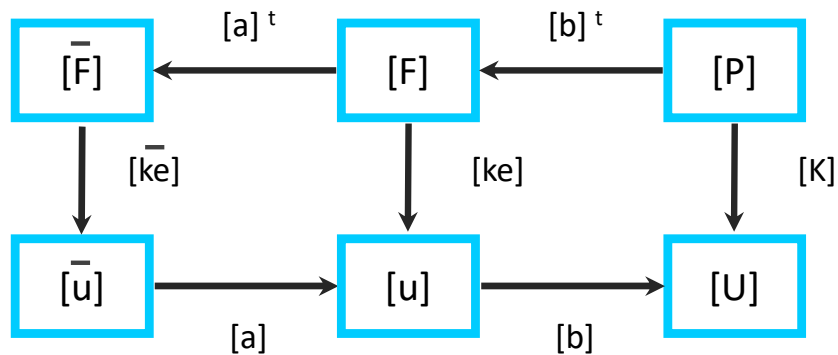


# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Considerando toda la estructura

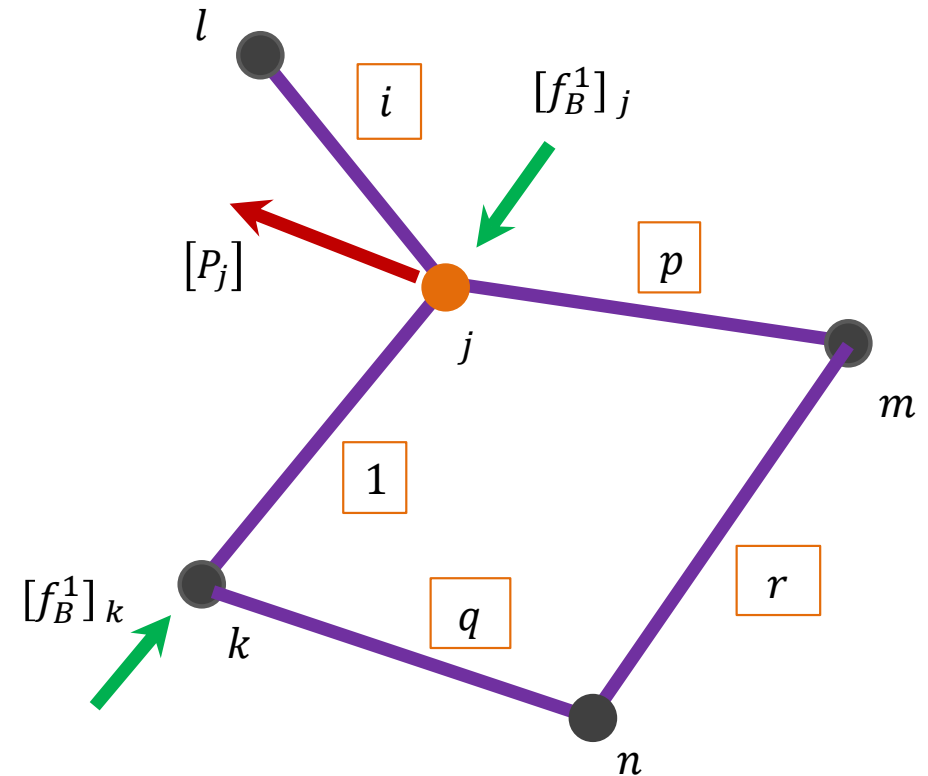
$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_i] \\ [P_n] \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_i] \\ [u_n] \end{bmatrix}$$



$$[k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$

$$[K_e] = [b]^t [k_e] [b] = [b]^t [a]^t [\bar{k}_e] [a] [b]$$

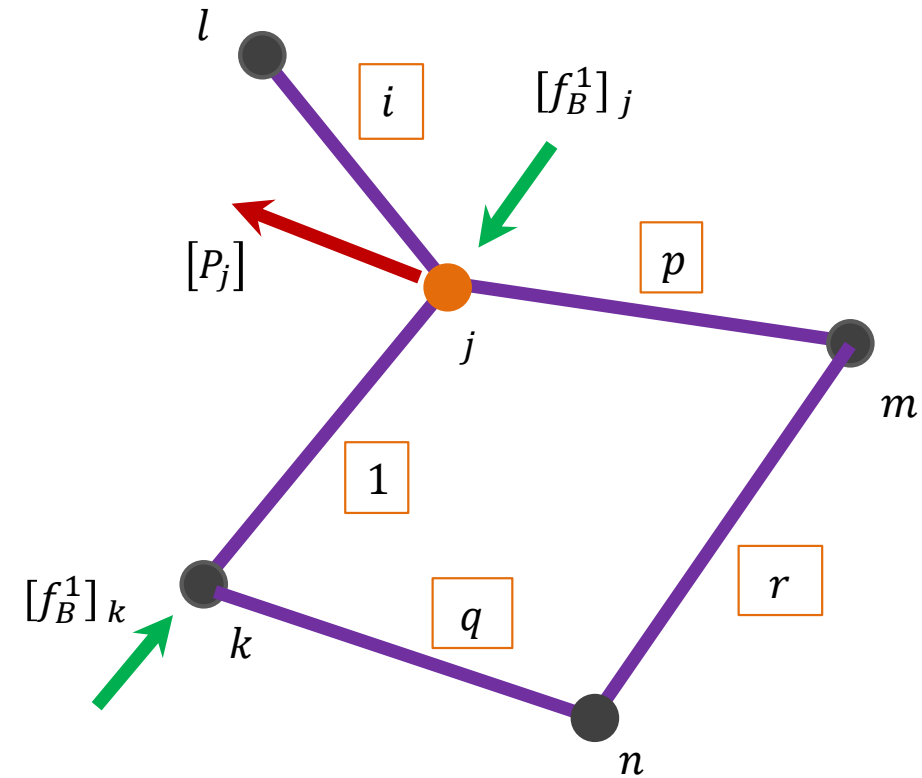
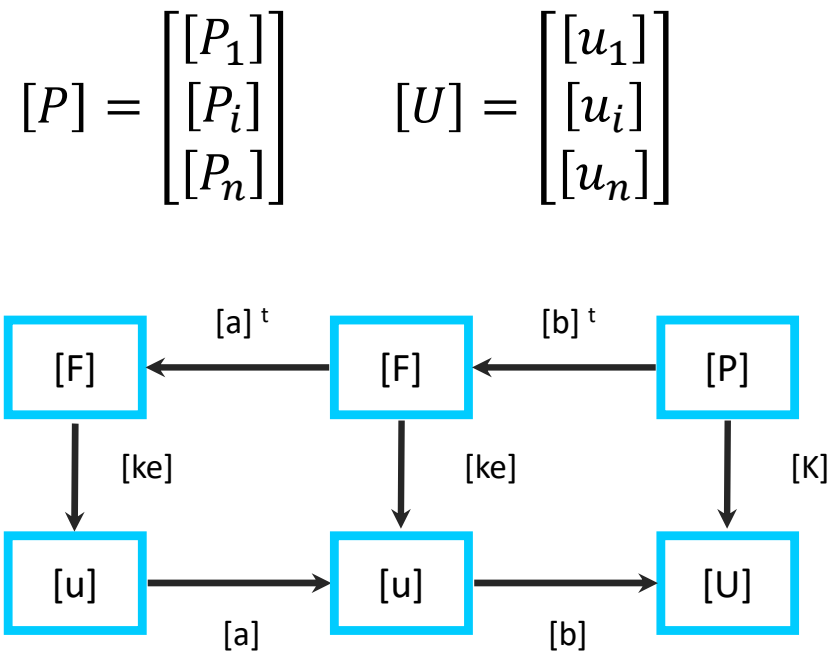
$$[K] = \mathbf{E}_{i=1}^{nb} [k_e]$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Considerando toda la estructura



Condición de Equilibrio Global

$$\begin{bmatrix} [P_1] \\ \vdots \\ [P_j] \\ \vdots \\ [P_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \cdot & [K_{1j}] & \cdot & [K_{1n}] \\ [K_{j1}] & \cdot & [K_{jj}] & \cdot & [K_{jn}] \\ [K_{n1}] & \cdot & [K_{nj}] & \cdot & [K_{nn}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [U_1] \\ \vdots \\ [U_j] \\ \vdots \\ [U_n] \end{bmatrix}$$

$$[P] = [K] [U]$$

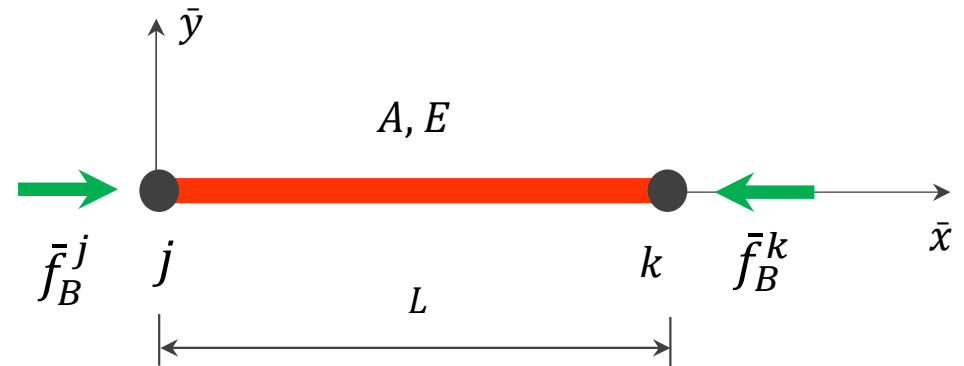
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Estructuras Autodeformadas

Son aquellas sometidas a esfuerzos internos debidos al efecto de la temperatura o por razones constructivas.

$$\frac{\bar{f}_B}{A} = E \varepsilon \quad \varepsilon = \begin{cases} \alpha \Delta t \\ \frac{\Delta l}{L} \end{cases}$$

$$\bar{f}_B = E A \varepsilon$$



Coordenadas Locales

$$[\bar{f}_B] = EA\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

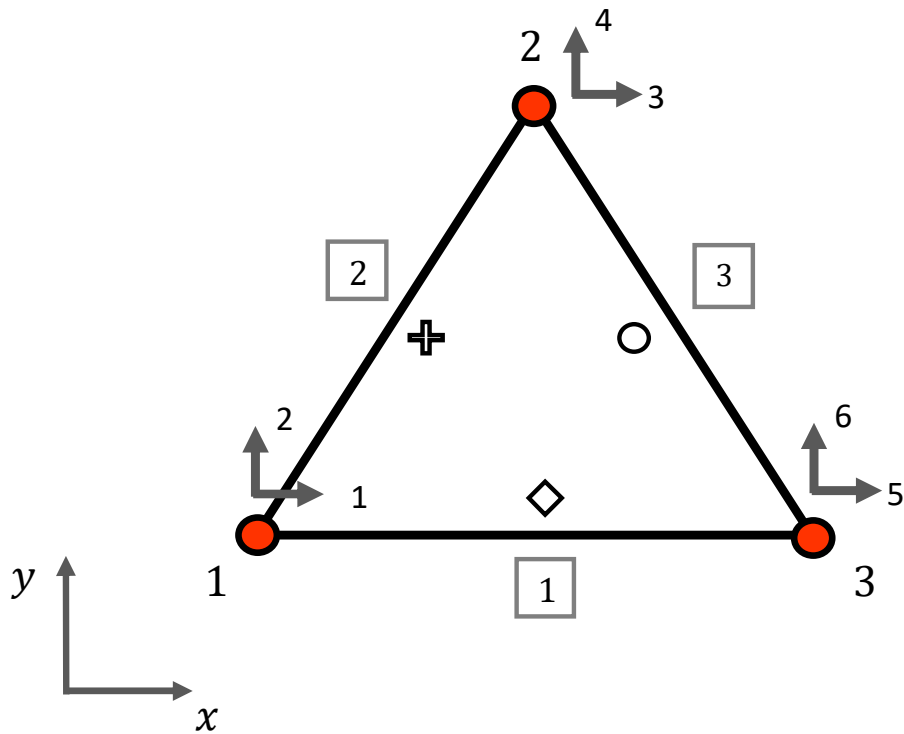
Coordenadas Globales

$$[f_B] = [a]^t [\bar{f}_B] = [a]^t EA\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = EA\varepsilon \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \\ -\cos \theta \\ -\text{sen} \theta \end{bmatrix}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Matriz de Rigidez Global

Esquemáticamente



**K**

	1		2		3	
	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
1	$\diamond$	$\diamond$			$\diamond$	$\diamond$
$u_1$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$		
$u_2$	$\diamond$	$\diamond$			$\diamond$	$\diamond$
$u_3$	$\oplus$	$\oplus$	$\circ$	$\circ$		
2						
$u_4$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\circ$	$\circ$
$u_5$	$\diamond$	$\diamond$	$\circ$	$\circ$	$\diamond$	$\diamond$
3						
$u_6$	$\diamond$	$\diamond$	$\circ$	$\circ$	$\diamond$	$\diamond$

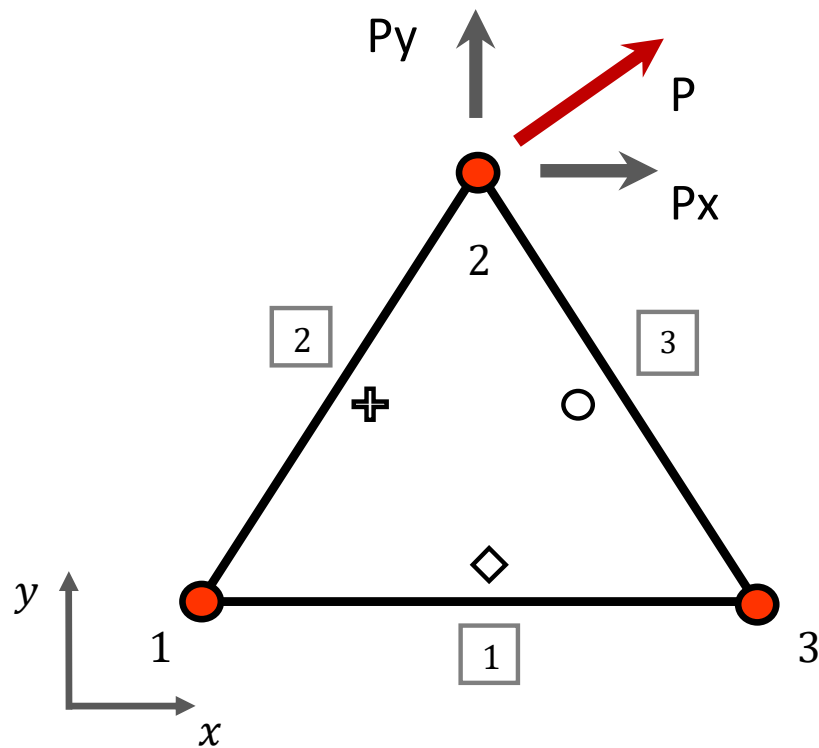
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ensamblaje Vector de Cargas

Consiste en introducir las cargas aplicadas sobre los nodos de la estructura según los grados de libertad en el sistema de referencia global.

Si las cargas tienen direcciones distintas de las del sistema global de referencia se debe aplicar la transformación de coordenadas  $[a]^t$ .

Si las cargas están aplicadas sobre las barras se deben transformar en acciones nodales equivalentes.



$$[P] = \begin{array}{c} P_x \\ 1 \\ P_y \\ \hline P_x \\ 2 \\ P_y \\ \hline P_x \\ 3 \\ P_y \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline P_x \\ \hline P_y \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Condiciones de Contorno

Las condiciones de contorno se expresan en términos de corrimientos nodales conocidos, pueden ser traslaciones y/o rotaciones. Por ello se las denomina condiciones de contorno cinemáticas.

Si los valores prescritos de los corrimientos nodales son nulos, las condiciones de contorno se denominan HOMOGENEAS. Caso de apoyos

Si los valores prescritos de los corrimientos nodales son distintos de cero, las condiciones de contorno se denominan INHOMOGENEAS. Caso de corrimientos impuestos

$$U = \begin{cases} \text{Conocidos} & \begin{cases} = 0 & \text{Apoyos} & \text{Cond. Homogéneas} \\ \neq 0 & \text{Corrim. impuestos (desc. ap.)} & \text{Cond. Inhomogéneas} \end{cases} \\ \text{Incognitas} & \end{cases}$$

Corrimientos conocidos  $[U_f]$

Corrimientos incognita  $[U_l]$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Condiciones de Contorno

De la ecuación de equilibrio global

$$[P] = [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} [P_l] \\ [P_f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lf}] \\ [K_{fl}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_l] \\ [U_f] \end{bmatrix}$$

Incognitas

-----  
Apoyos o Corr. impuestos

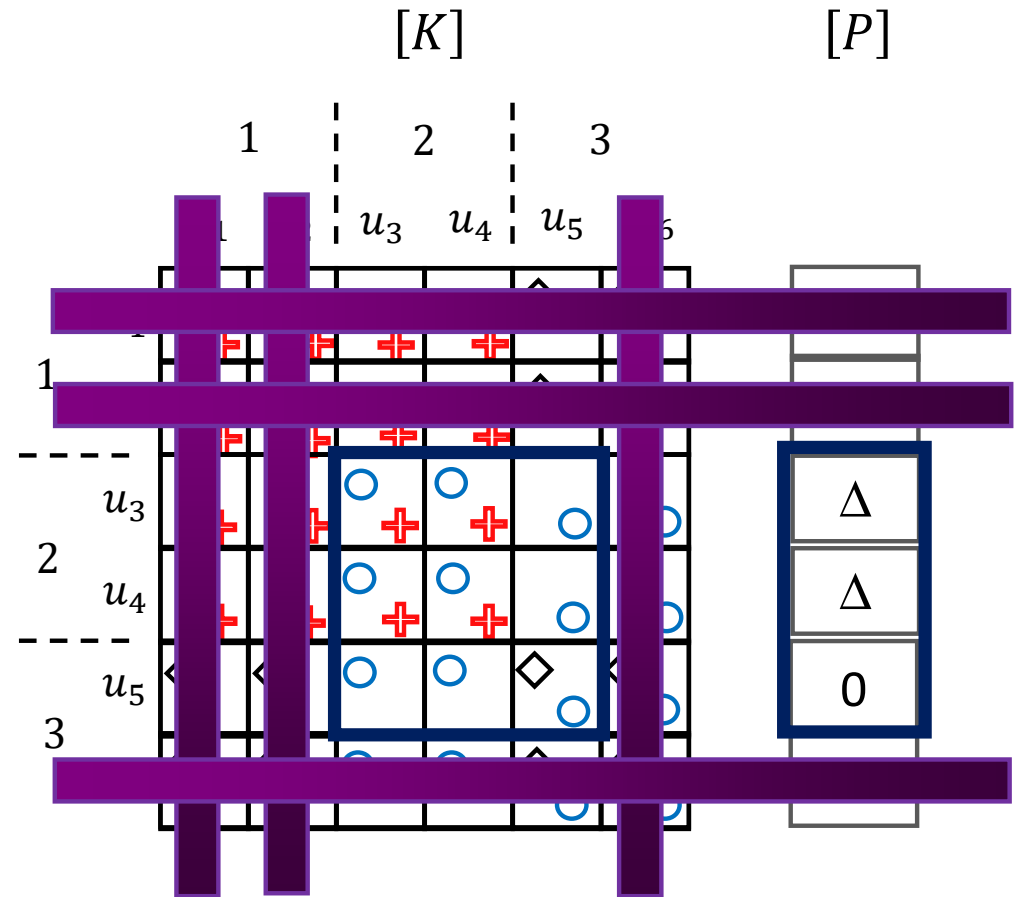
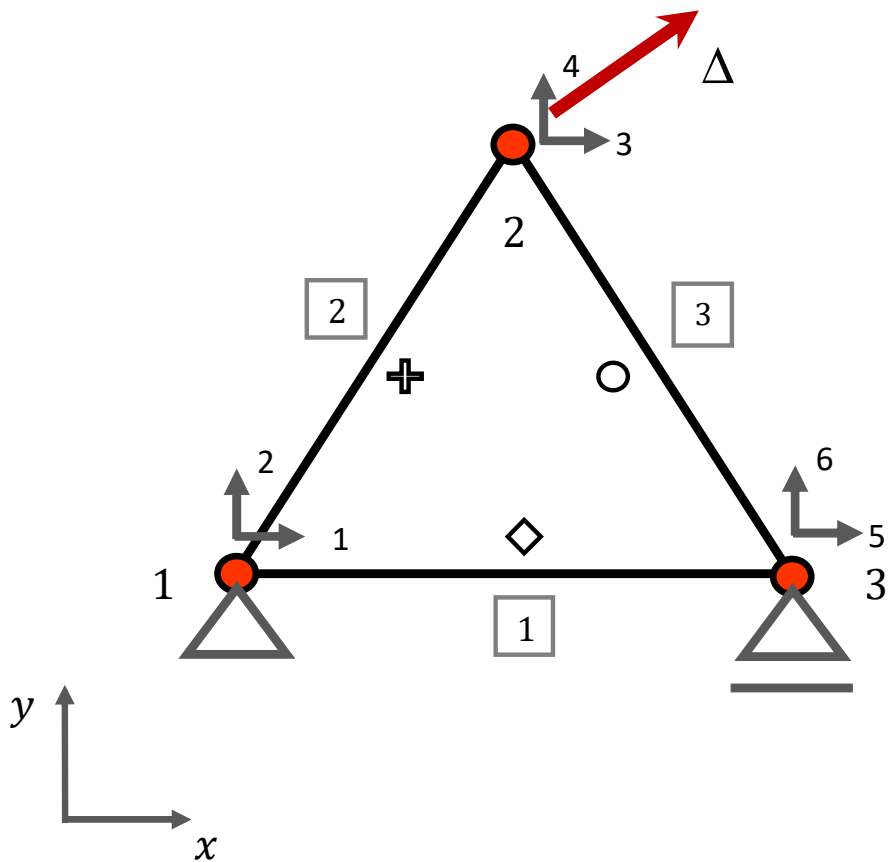
$$[P_l] = [K_{ll}] [U_l] + [K_{lf}] [U_f] \Rightarrow [U_l]$$

$$[P_f] = [K_{fl}] [U_l] + [K_{ff}] [U_f]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Condiciones de Contorno

Esquemáticamente



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Cálculo de Reacciones

Con los corrimientos incógnita

$$[P_f] = [K_{fl}] [U_l] + [K_{ff}] [U_f]$$

Otra forma. Con las condiciones de Contorno

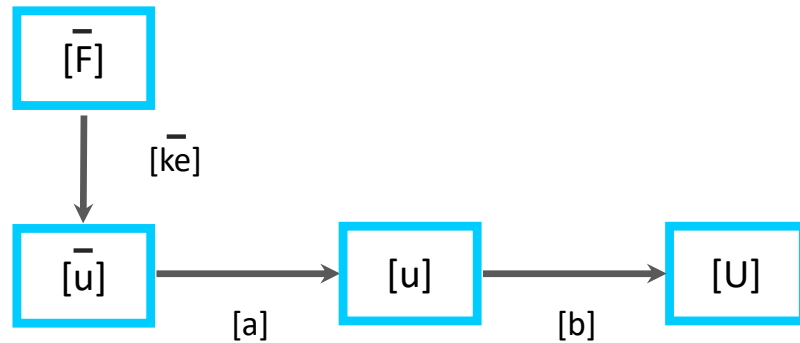
$$[U_l] = [K_{cc}]^{-1} [P_{cc}]$$

$$[P_f] = [K][U] - [P]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Cálculo de Esfuerzos Internos

D.E.C.



$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [\bar{u}]$$

$$[\bar{u}] = [a] [u]$$

$$[u] = [b] \cdot [U]$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [a] [b] [U]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ejemplos

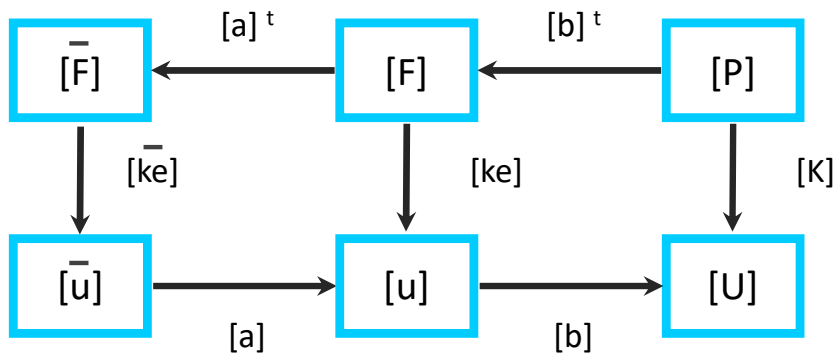
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Pasos del Método

- Identificación estructural
- Determinación de la Matriz de Rigidez de Barra
  - Coordenadas Locales
  - Coordenadas Globales
- Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global de la Estructura
- Ensamblaje del Vector de Cargas
- Introducción de las Condiciones de Contorno (apoyos)
- Solución del Sistema de Ecuaciones (obtención de corrimientos)
- Cálculo de Reacciones
- Determinación de Esfuerzos Característicos y Deformaciones

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## MRD. DEC



$$[k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$

$$[K_e] = [b]^t [k_e] [b] = [b]^t [a]^t [\bar{k}_e] [a] [b]$$

$$[K] = \mathbf{E}_{i=1}^{nb} [K_e]$$

$$[P] = [K] [U]$$

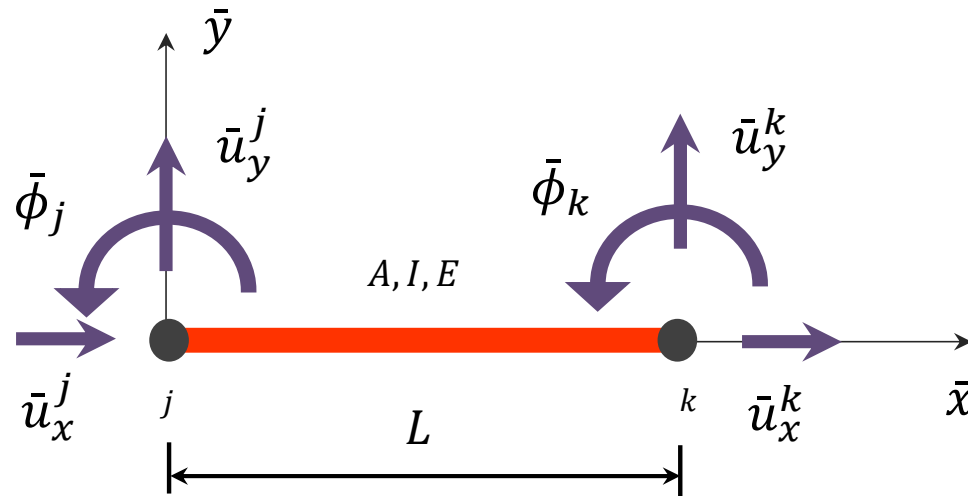
$$[P_l] = [K_{ll}] [U_l] + [K_{lf}] [U_f] \Rightarrow [U_l]$$

$$[P_f] = [K_{fl}] [U_l] + [K_{ff}] [U_f]$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [a] [b] [U]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Estructuras de Nodos Rígidos



No deducimos la matriz de rigidez en coordenadas locales

Utilizamos las expresiones conocidas

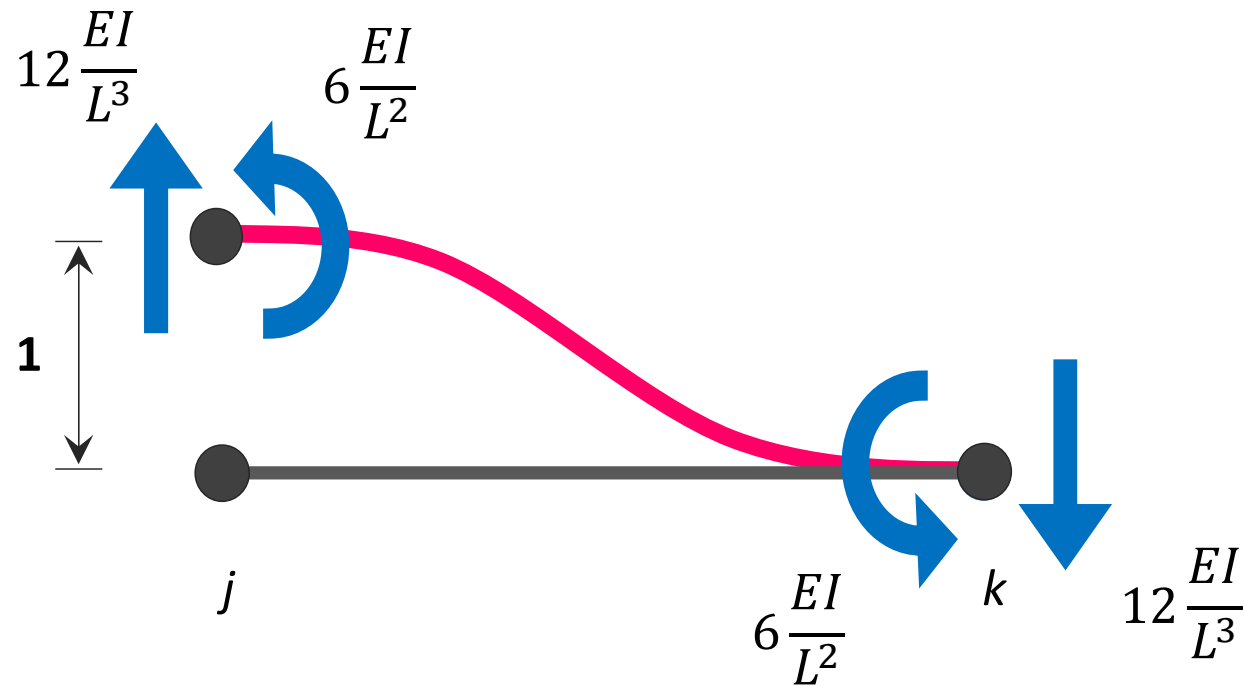
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

Matriz de rigidez de Barra en Coordenadas Locales. (NR)

$$[\bar{k}_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{\phi}_j \\ \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \\ \bar{\phi}_k \end{matrix}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

Matriz de rigidez de Barra en Coordenadas Locales. (NR)



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Influencia de la Deformación por Corte

$$4 \frac{EI}{L} \Rightarrow 2 \frac{EJ}{L} \left( \frac{2 + \beta}{1 + 2\beta} \right)$$

$$12 \frac{EI}{L^3} \Rightarrow 12 \frac{EI}{L^3} \left( \frac{1}{1 + 2\beta} \right)$$

$$2 \frac{EI}{L} \Rightarrow 2 \frac{EI}{L} \left( \frac{1 - \beta}{1 + 2\beta} \right)$$

$$6 \frac{EI}{L^2} \Rightarrow 6 \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{1 + 2\beta} \right)$$

$$\beta = 6\chi \frac{EI}{GAL^2}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de rigidez de Barra en Coordenadas Globales. (NR)

Las componentes de corrimientos en el SL en función de las correspondientes al SG

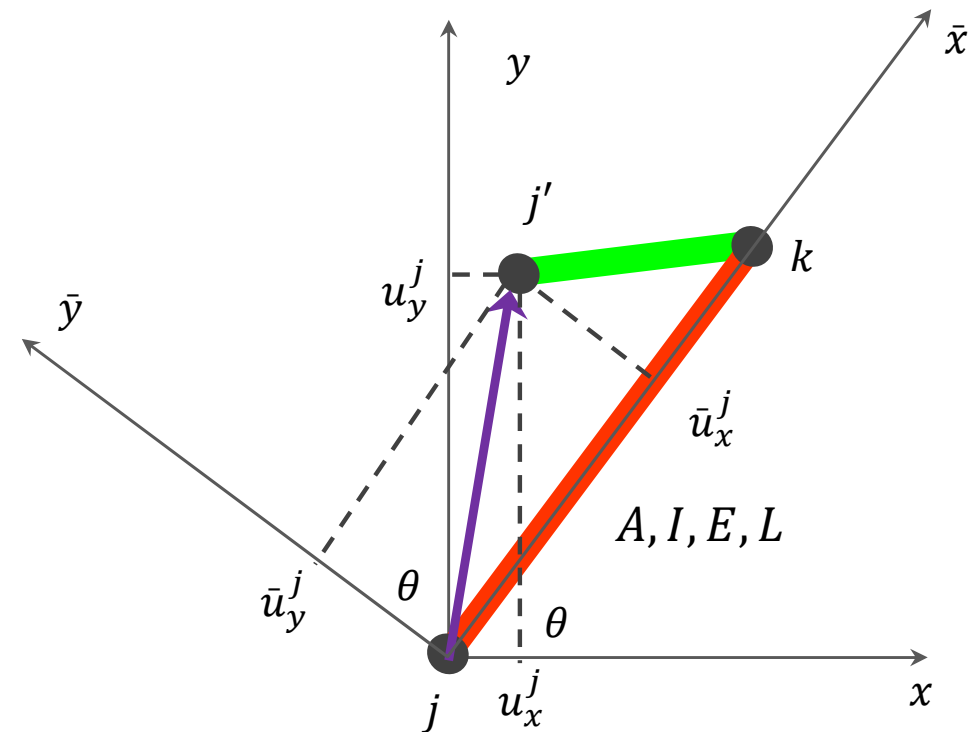
$$\bar{u}_x^j = u_x^j \cos \theta + u_y^j \operatorname{sen} \theta$$

$$\bar{u}_y^j = u_x^j (-\operatorname{sen} \theta) + u_y^j \cos \theta$$

$$\bar{\phi}_j = \phi_j$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{\phi}_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x^j \\ u_y^j \\ \phi_x^j \end{bmatrix}$$



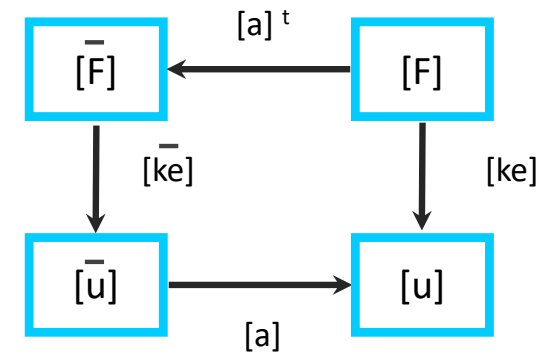
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de rigidez de Barra en Coordenadas Globales. (NR)

Ecuación de Compatibilidad o Cinemática

$$[\bar{u}] = [a] [u]$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Aplicando las relaciones conocidas

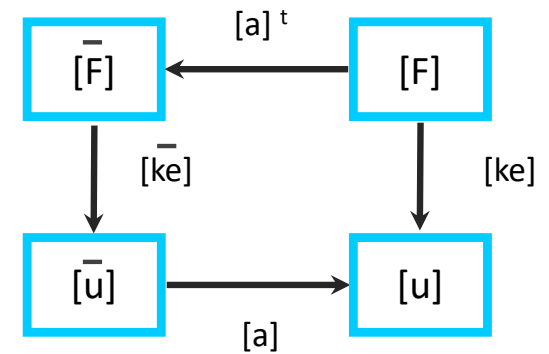
$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [\bar{u}] \quad [F] = [a]^t [\bar{F}] \quad [\bar{u}] = [a] [u]$$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [\bar{u}]$$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[F] = [k_e][u]$$

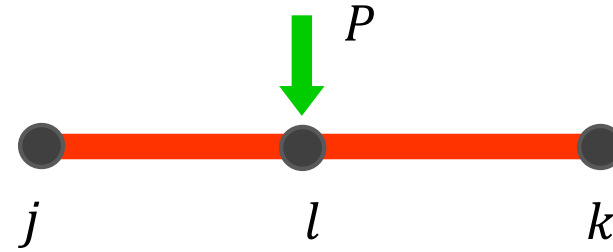
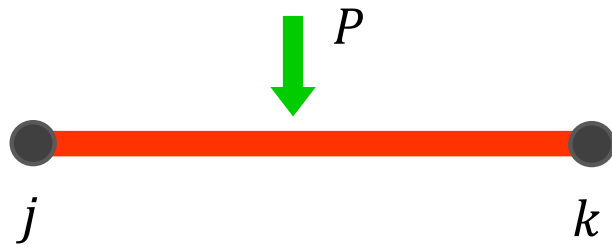
$$[k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$



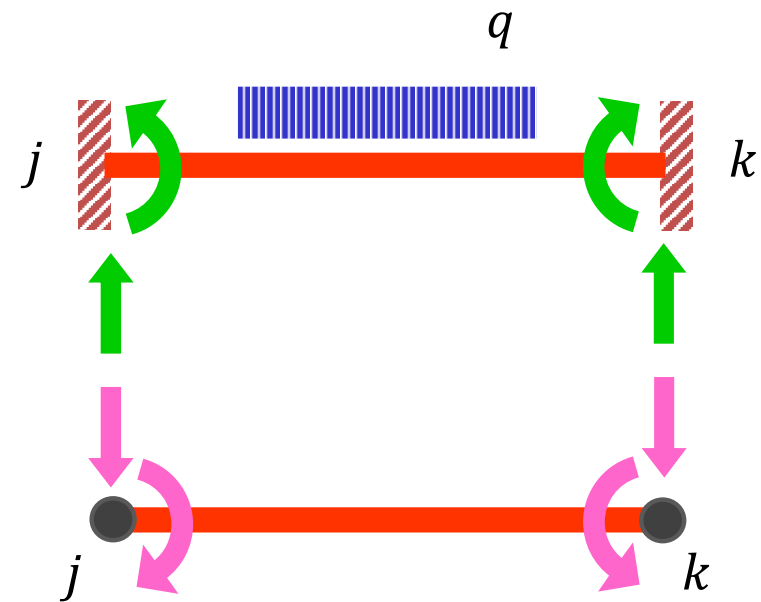
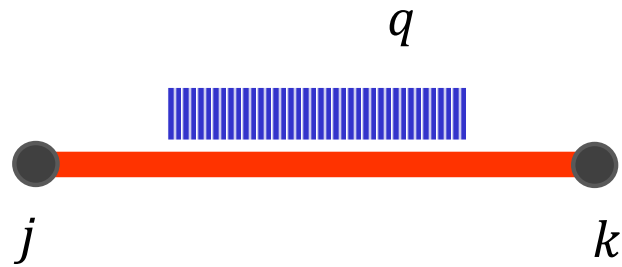
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Cargas Sobre Barras

### Cargas Puntuales



### Cargas Distribuidas



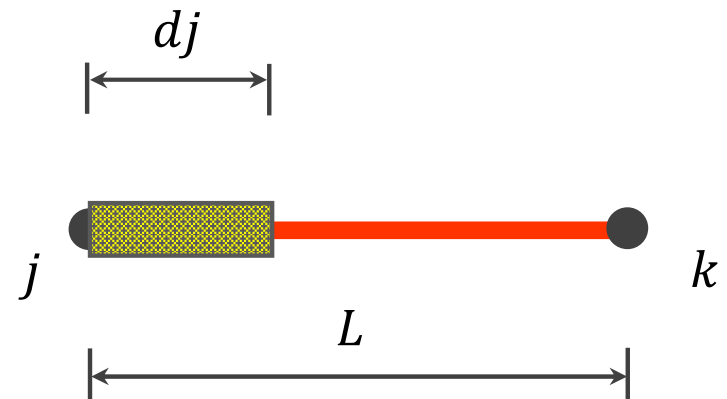
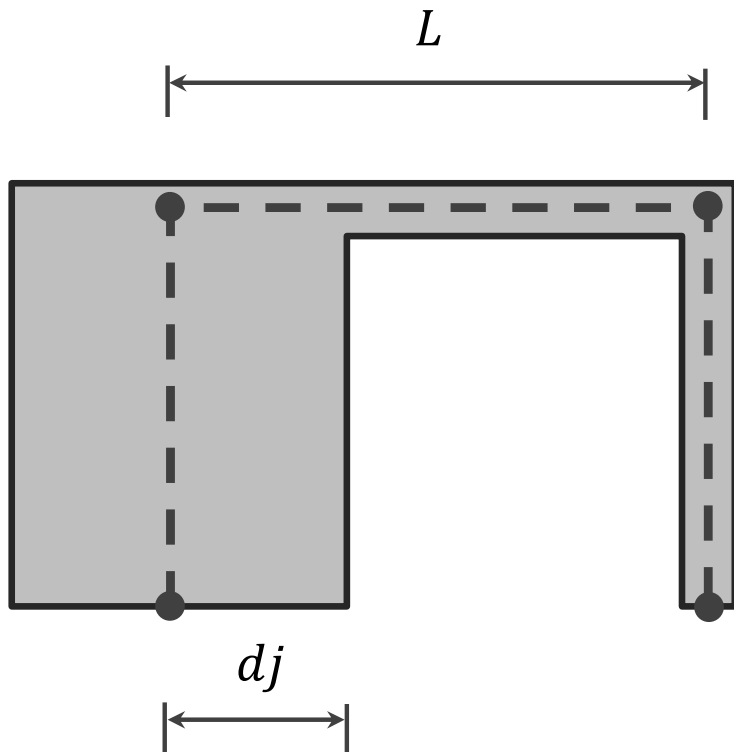
Quando transformamos cargas en barras a cargas nodales debemos restar esas cargas nodales de los esfuerzos calculados en esas barras

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Barras con Extremos Infinitamente Rígidos

En algunas estructuras aparecen barras que se encuentran adyacentes a otras con propiedades geométricas muy distintas.

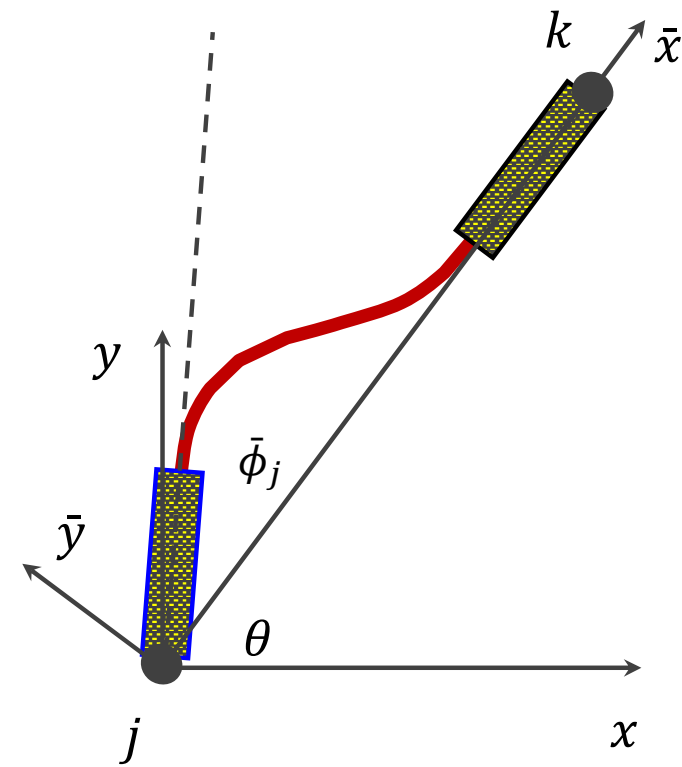
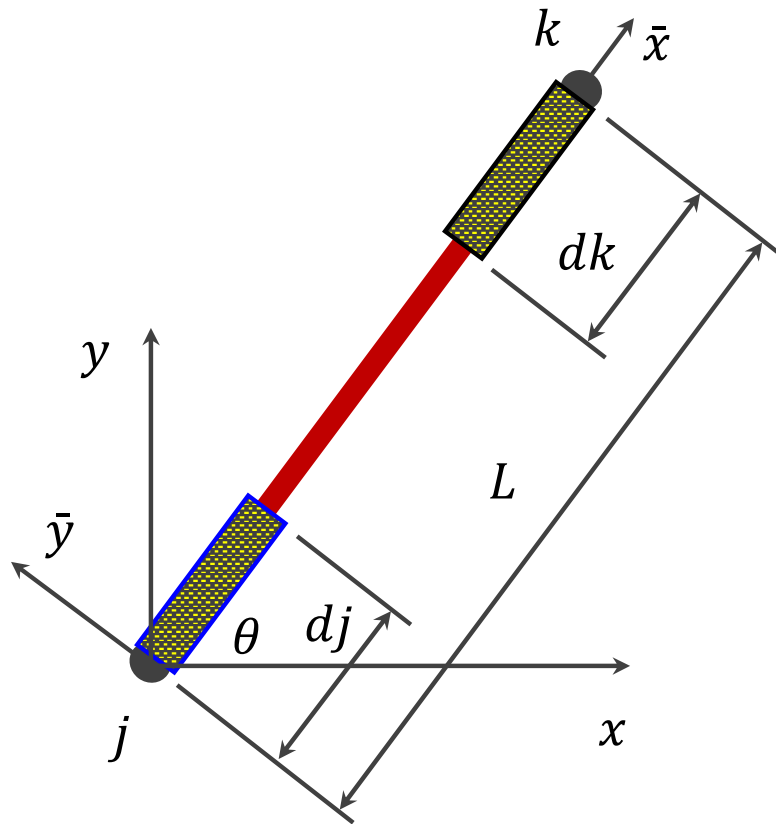
En estos casos puede ser conveniente considerar los extremos de las barras como infinitamente rígidos.



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Barras con Extremos Infinitamente Rígidos

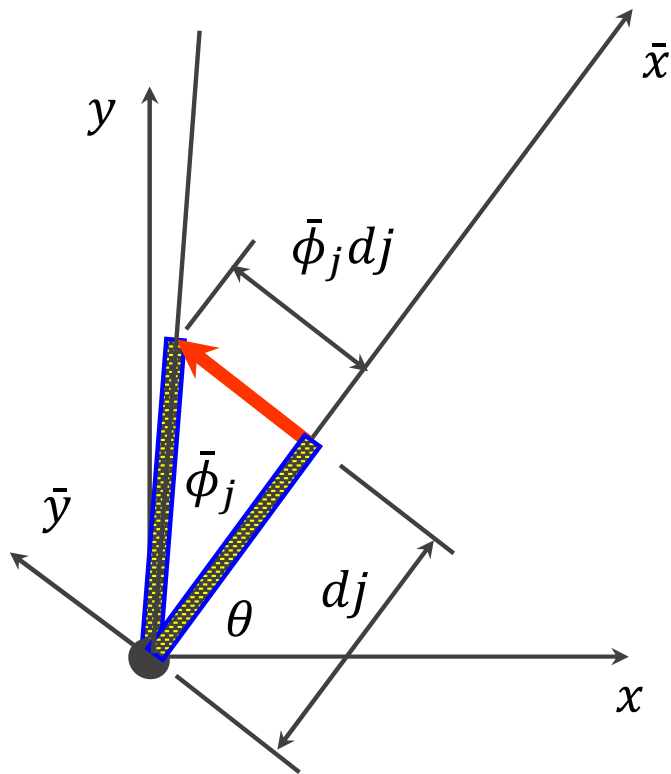
Geometría y Cinemática



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Barras con Extremos Infinitamente Rígidos

### Geometría y Cinemática



$$\bar{u}_x^j = u_x^j \cos \theta + u_y^j \text{sen} \theta$$

$$\bar{u}_y^j = u_x^j (-\text{sen} \theta) + u_y^j \cos \theta + \bar{\phi}_j dj$$

$$\bar{\phi}_j = \phi_j$$

$$[\bar{u}] = [a] [u]$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Propiedades de la Matriz de Rigidez

- Físicamente representa las fuerzas necesarias para crear un campo de desplazamientos específico.
- En virtud del Teorema de Maxwell-Betti, la matriz de rigidez es simétrica

$$K_{ij} = K_{ji}$$

- La matriz de rigidez es, además, positiva definida

Sea  $[X]$  un autovector de  $[A]$ , entonces  $[A]$  es positiva definida si:

$$[X]^t [A] [X] > 0$$

Esta propiedad implica que si logramos el equilibrio del sistema este será estable.

Recordar la condición de estabilidad del equilibrio:  $\frac{d^2\pi}{d u^2} = K > 0$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Error en la Solución

Ecuación de Equilibrio Global

$$[K] [U] = [P]$$

$$[K] [U + \Delta U] = [P + \Delta P]$$

$$[K] [\Delta U] = [\Delta P]$$

$$[\Delta U] = [K]^{-1} [\Delta P]$$

## Desigualdad de Schwarz

$$\frac{1}{\|U\|} \leq \frac{\|K\|}{\|P\|}$$

$$\|\Delta U\| \leq \|K^{-1}\| \cdot \|\Delta P\|$$

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \leq \|K\| \cdot \|K^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta P\|}{\|P\|}$$

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \leq \text{Cond}(K) \cdot \frac{\|\Delta P\|}{\|P\|}$$

## Número de Condición

$$\text{Cond}(K) \cong \frac{X_{\max}}{X_{\min}}$$

El error en la solución depende del número de condición de la matriz de rigidez.  
Un número de condición grande amplifica el error en la solución

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Error en la Solución

Ejemplo estructura mal condicionada

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Ejercicios

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Estructuras con Comportamiento No-Lineal

### No Linealidad Mecánica o del Material

La relación tensión-deformación del material es no lineal.

Depende del nivel de deformación según las cargas o historia de cargas aplicadas a la estructura.

- Elasticidad no lineal
- Plasticidad
- Hiperelasticidad
- Visco elasticidad

### No Linealidad Geométrica

Cambia la geometría de la estructura a medida que adquiere su configuración actualizada.

Las cargas pueden cambiar de dirección y su punto de aplicación se desplaza.

Se debe considerar cuando los desplazamientos son mayores a  $L/20$

- Grandes desplazamientos con pequeñas deformaciones
- Grandes desplazamientos con grandes deformaciones

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Rigidización Tensional. Inestabilidad

El estado tensional provocado por las acciones externas produce cambios en la rigidez de las barras, disminuyendo o aumentándola.

Este efecto es importante en estructuras con barras esbeltas, donde la disminución de rigidez puede provocar fenómenos de inestabilidad, pe. pandeo.

Para tener en cuenta la rigidización tensional en el análisis de una estructura se utiliza la matriz de rigidez geométrica.

La matriz de rigidez geométrica agrega rigidez adicional a matriz de rigidez mecánica de la barra.

Al incluir la rigidez geométrica, el análisis deja de ser lineal y la solución del sistema se obtendrá de un proceso iterativo, con por lo menos dos pasos.

El estado tensional en cada elemento se determina con un primer paso (sin considerar la rigidez geométrica)

En el segundo paso se incluye la rigidez geométrica a partir de las tensiones (esfuerzos) calculadas en el primero.

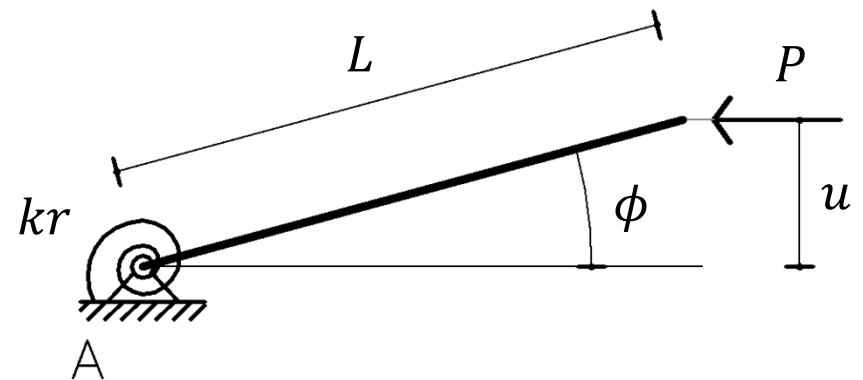
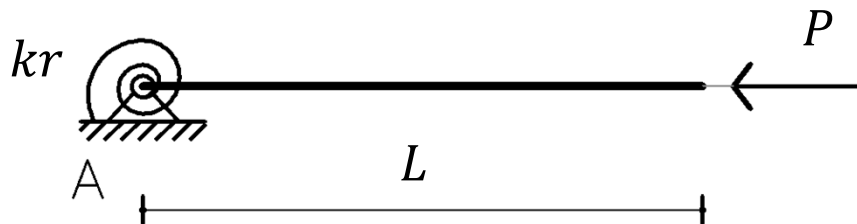
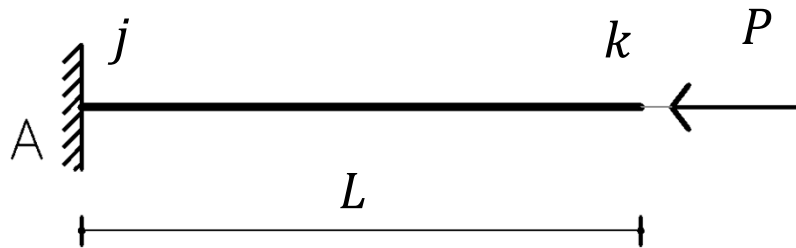
Para mayor precisión se debe iterar hasta la convergencia con un error predefinido.

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

Cuando no existe no linealidad geométrica, las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración original (estructura no deformada)

Cuando los desplazamientos dejan de ser pequeños el equilibrio deben plantearse en la configuración actualizada



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

Cuando no existe no linealidad geométrica, las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración original (estructura no deformada)

Cuando los desplazamientos dejan de ser pequeños el equilibrio deben plantearse en la configuración actualizada

$$u = L \sin \phi$$

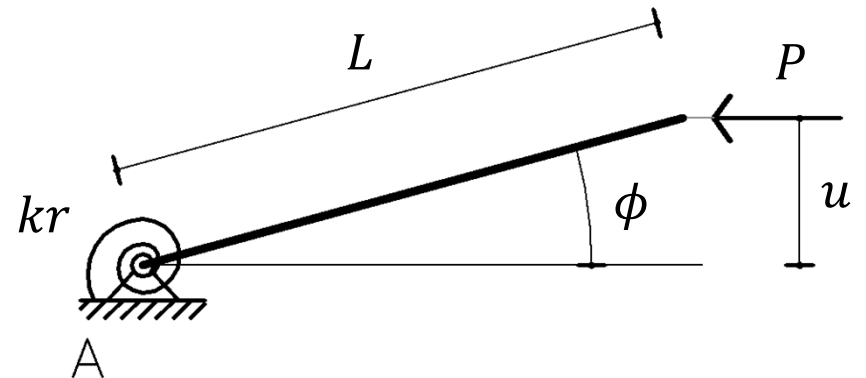
$$P u = P L \sin \phi$$

Condición de equilibrio

$$P L \sin \phi - kr \phi = 0$$

$$P = \frac{kr \phi}{L \sin \phi}$$

La relación  $P - \phi$  es no lineal



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

Cuando no existe no linealidad geométrica, las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración original (estructura no deformada)

Cuando los desplazamientos dejan de ser pequeños el equilibrio deben plantearse en la configuración actualizada

$$u = L \sin \phi$$

$$P u = P L \sin \phi$$

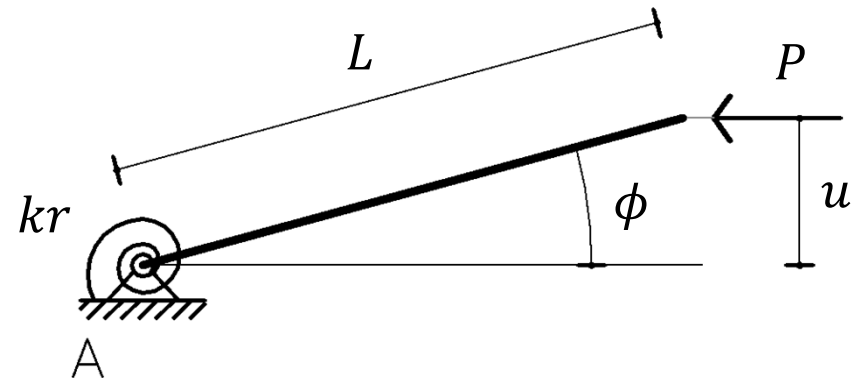
Condición de equilibrio

$$P L \sin \phi - kr \phi = 0$$

$$P = \frac{kr \phi}{L \sin \phi}$$

Si  $\phi$  es pequeño  $\sin \phi \cong \phi$

$$P_{cr} = \frac{kr}{L}$$



$P_{cr}$  Es la máxima carga para al cual el sistema permanece en equilibrio estable.

Un pequeño incremento de  $P$  por encima del valor  $P_{cr}$  provoca grandes incrementos de  $u$ , y la estructura se vuelve inestable.

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

La inestabilidad de barras esbeltas sometidas a compresión se denomina pandeo. Cuando la carga de compresión está por debajo de su valor crítico la barra presenta una curvatura que es proporcional a la carga.

La curvatura de la barra aumenta rápidamente con pequeños aumentos de la carga por encima de su valor crítico.

$$M(x) = P(u - y)$$

Condición de equilibrio

$$P(u - y) - EI \chi = 0$$

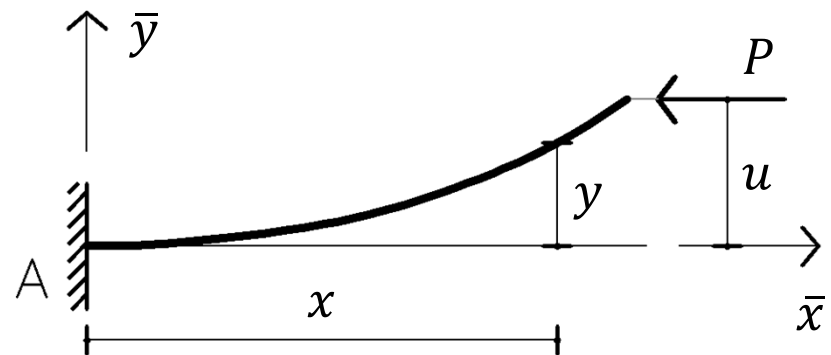
$$P(u - y) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$P u - P y = EI y''$$

$$\frac{P}{EI} u - \frac{P}{EI} y = y''$$

$$a^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y'' + a^2 y = a^2 u$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

La inestabilidad de barras esbeltas sometidas a compresión se denomina pandeo. Cuando la carga de compresión está por debajo de su valor crítico la barra presenta una curvatura que es proporcional a la carga.

La curvatura de la barra aumenta rápidamente con pequeños aumentos de la carga por encima de su valor crítico.

$$y'' + a^2 y = a^2 u \quad a^2 = \frac{P}{EI}$$

Las soluciones son la suma Part + Homog

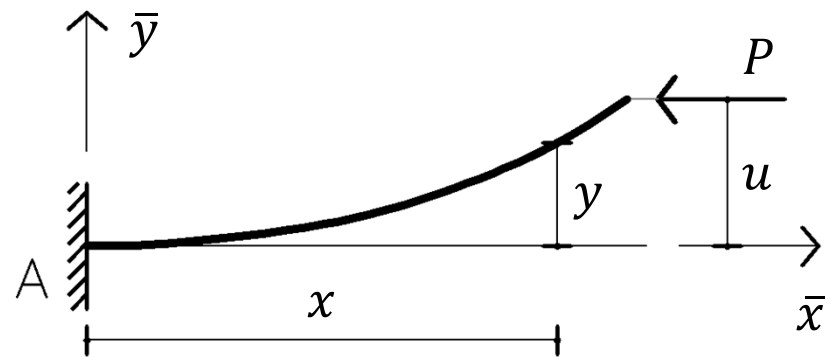
$$y = y^H + y^P$$

$$y^H = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax$$

$$y^P = u$$

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax + u$$

Las ctes  $c_1$  y  $c_2$  dependen de las Cond. de Contorno



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

La inestabilidad de barras esbeltas sometidas a compresión se denomina pandeo. Cuando la carga de compresión está por debajo de su valor crítico la barra presenta una curvatura que es proporcional a la carga.

La curvatura de la barra aumenta rápidamente con pequeños aumentos de la carga por encima de su valor crítico.

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax + u$$

Condiciones de Contorno

$$\text{En } x = 0, y = 0 \Rightarrow c_1 = -u$$

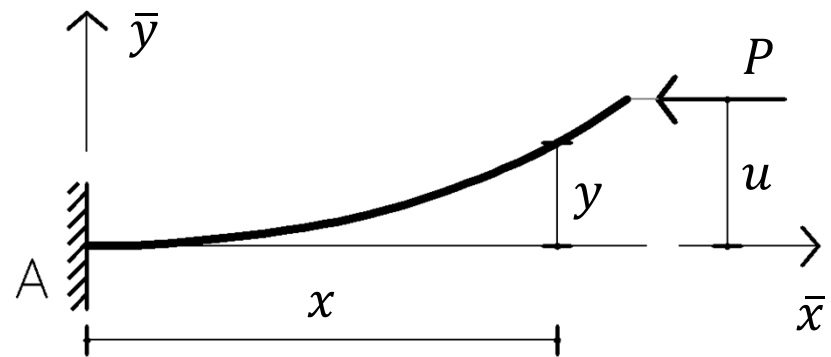
$$y' = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y = u (1 - \cos ax)$$

Como

$$\text{En } x = L, y = u \Rightarrow \cos aL = 0 \Rightarrow aL = \pi \frac{2n+1}{2}$$

$$P_{cr} \text{ cdo } aL \text{ es mínimo con } n = 0 \Rightarrow aL = \frac{\pi}{2}$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

La inestabilidad de barras esbeltas sometidas a compresión se denomina pandeo. Cuando la carga de compresión está por debajo de su valor crítico la barra presenta una curvatura que es proporcional a la carga.

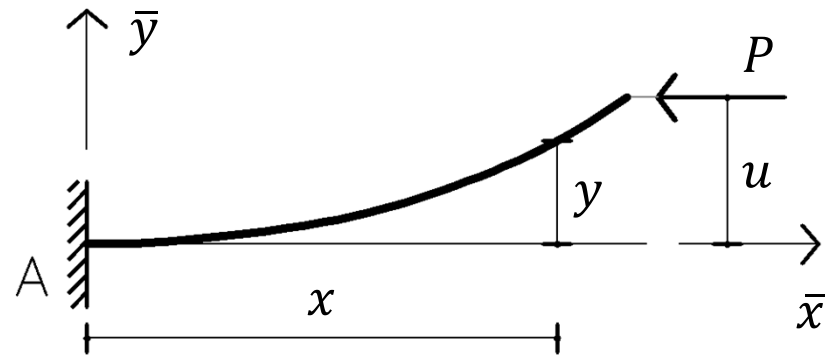
La curvatura de la barra aumenta rápidamente con pequeños aumentos de la carga por encima de su valor crítico.

$P \equiv P_{cr}$  cdo  $aL$  es mínimo

con  $n = 0 \Rightarrow aL = \frac{\pi}{2}$

$$a^2 = \frac{P}{EI}$$

$$a^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

La carga crítica que provoca la inestabilidad del elemento depende de sus dimensiones y del módulo de Young y no de la resistencia del material.

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Inestabilidad

Otras condiciones de contorno

Empotrada - Libre

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}$$

Empotrada - Empotrada

$$P_{cr} = \frac{4 \pi^2 EI}{L^2}$$

Articulada - Articulada

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Empotrada - Articulada

$$P_{cr} \cong 2.04 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Modelo de Euler-Bernuolli de 2° Orden

Considerando un elemento  $dx$  de la barra

Equilibrio de momentos en  $b$

$$Vdx + Ndy + M - \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0$$

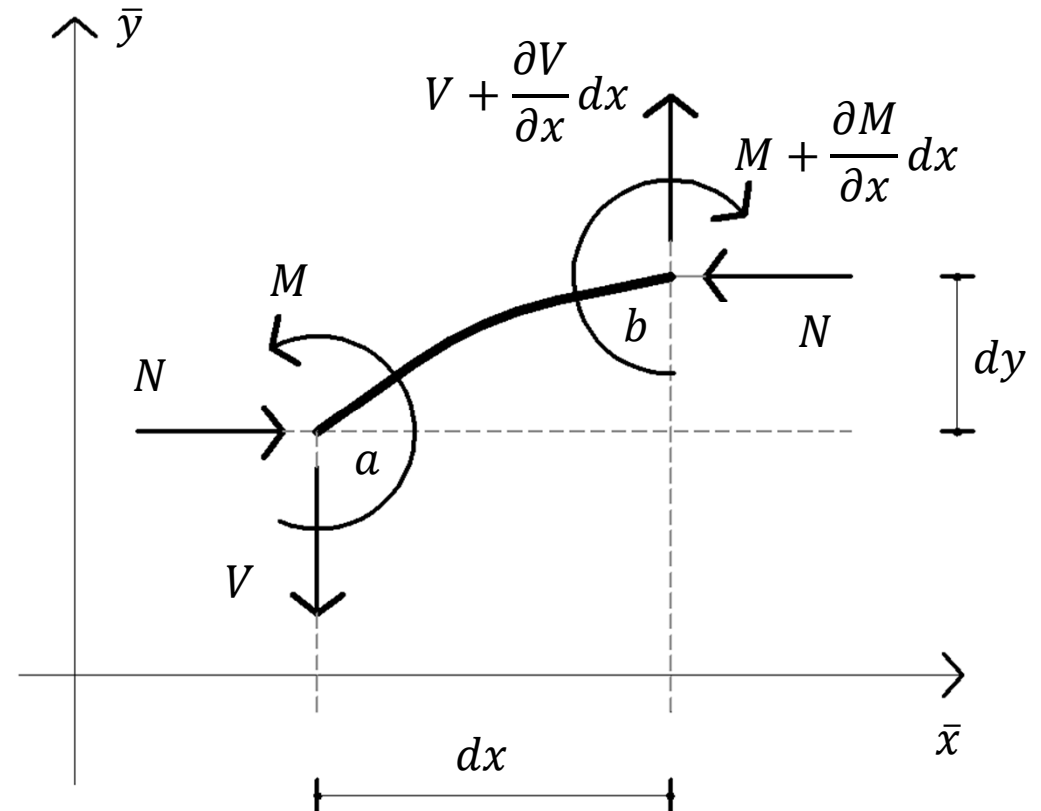
$$V = \frac{\partial M}{\partial x} - N \frac{dy}{dx}$$

Equilibrio en dirección  $y$

$$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - N \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Modelo de Euler-Bernuolli de 2° Orden

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - N \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

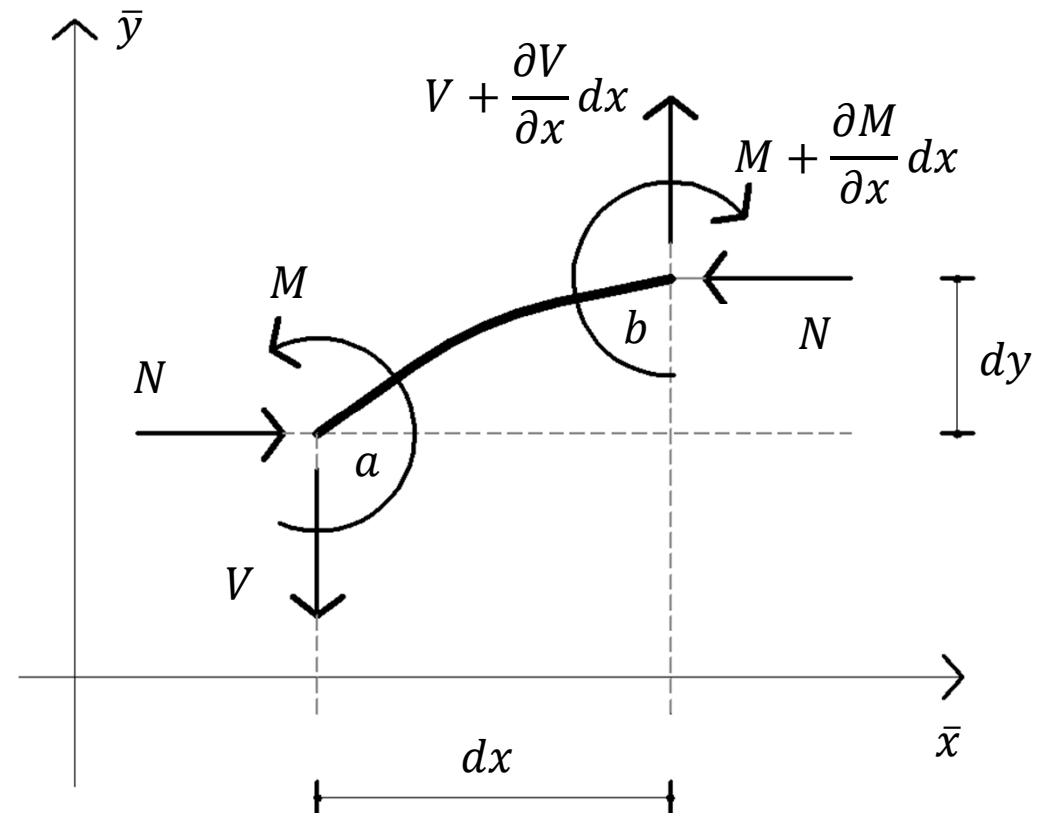
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \chi = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$a^2 = \frac{P}{EI} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{N}{EI}$$

Ecuación es valida para todos los tipos de apoyo

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Modelo de Euler-Bernuolli de 2° Orden

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Solución general (part+homg)

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sen ax + c_3 + c_4 x$$

Con las condiciones de contorno de la barra con nodos extremos  $j, k$

En  $x = 0$  y  $x = L$

$$c_1 = \frac{1}{\Lambda} \left[ (-1 + \cos aL)(u_k - u_j - \phi_j L) + \frac{1}{a} (aL - \sin aL)(\phi_k - \phi_j) \right]$$

$$c_2 = \frac{1}{\Lambda} \left[ \sin aL (u_k - u_j - \phi_j L) + \frac{1}{a} (1 + \cos aL)(\phi_k - \phi_j) \right]$$

$$c_3 = u_j - c_1$$

$$\Lambda = 2(1 - \cos aL) - aL \sin aL$$

$$c_4 = \phi_j - ac_2$$

$$u_j \equiv \bar{u}_y^j$$

$$u_k \equiv \bar{u}_y^k$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Modelo de Euler-Bernuolli de 2° Orden

Momento flector en  $j, k$ . ( $M = EIy''$ )

$$M_j = C_1 \frac{EI}{L^2} (u_j - u_k) + \frac{EI}{L} (C_2 \phi_j + C_3 \phi_k)$$

$$M_k = C_1 \frac{EI}{L^2} (u_j - u_k) + \frac{EI}{L} (C_3 \phi_j + C_2 \phi_k)$$

$$u_j \equiv \bar{u}_y^j$$

$$u_k \equiv \bar{u}_y^k$$

Esfuerzo de corte en  $j, k$ . ( $V = -EIy'''$ )

$$V_j = C_4 \frac{EI}{L^3} (u_j - u_k) + C_1 \frac{EI}{L^2} (\phi_j + \phi_k)$$

$$V_k = C_4 \frac{EI}{L^3} (u_k - u_j) - C_1 \frac{EI}{L^2} (\phi_j + \phi_k)$$

Las funciones  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  se denominan funciones de estabilidad

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Modelo de Euler-Bernuolli de 2° Orden

### Funciones de estabilidad

$$C_1 = \frac{a^2 L^2 (1 - \cos aL)}{\Lambda}$$

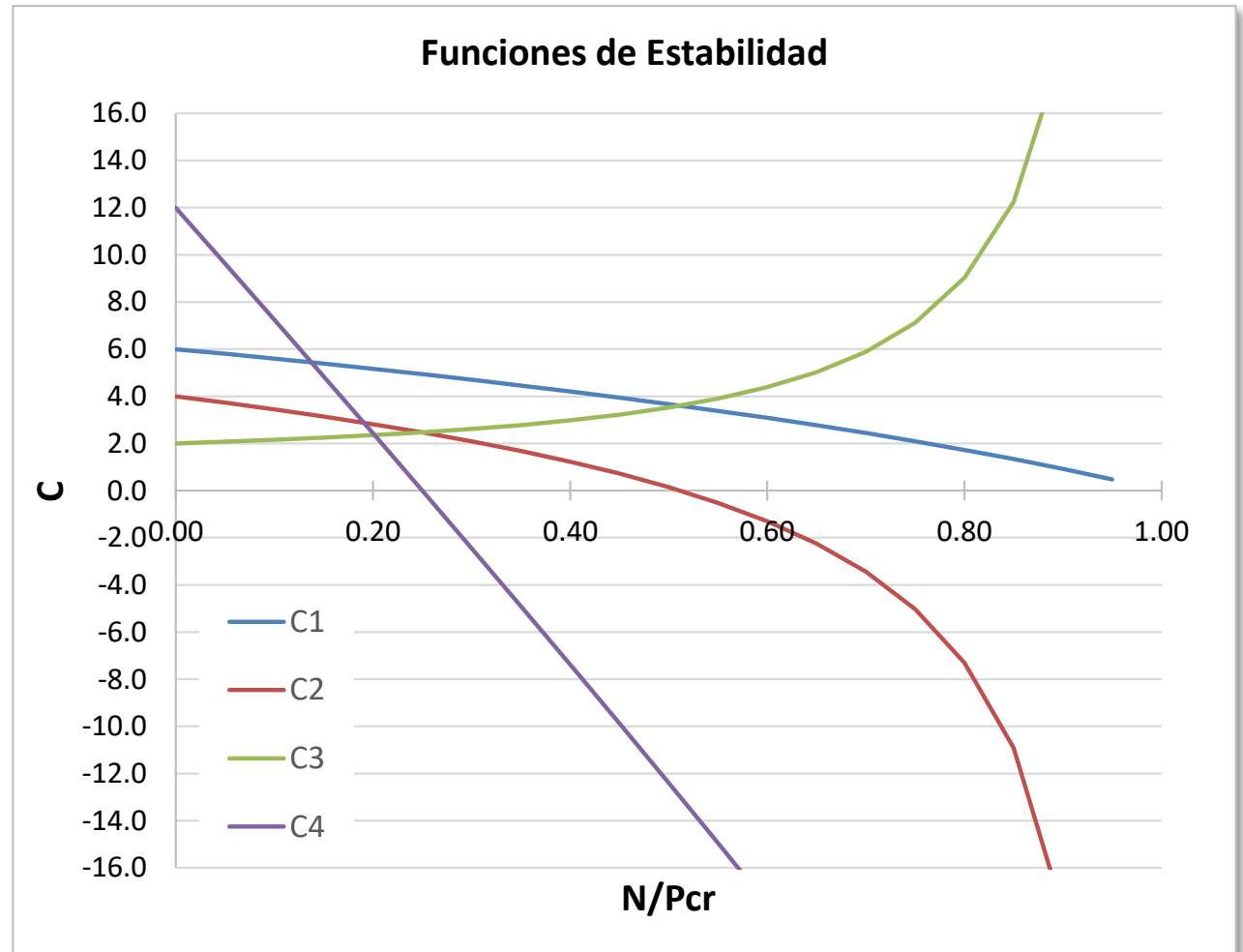
$$C_2 = \frac{aL \sin aL - a^2 L^2 \cos aL}{\Lambda}$$

$$C_3 = \frac{a^2 L^2 - aL \sin aL}{\Lambda}$$

$$C_4 = \frac{a^3 L^3 \sin aL}{\Lambda}$$

$$\Lambda = 2(1 - \cos aL) - aL \sin aL$$

$$a^2 = \frac{N}{EI}$$



Definen la disminución de rigidez a flexión cuando una barra esta solicitada por un esfuerzo normal de compresión

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra de 2° Orden

$$M_j = C_1 \frac{EI}{L^2} (u_j - u_k) + \frac{EI}{L} (C_2 \phi_j + C_3 \phi_k)$$

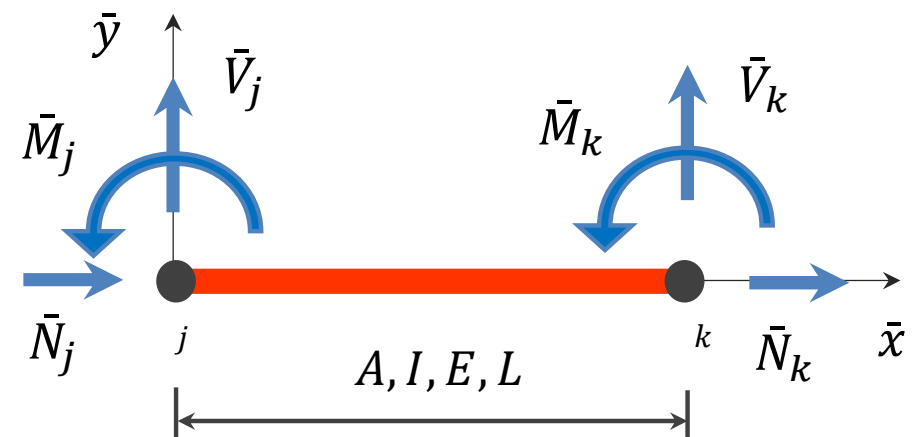
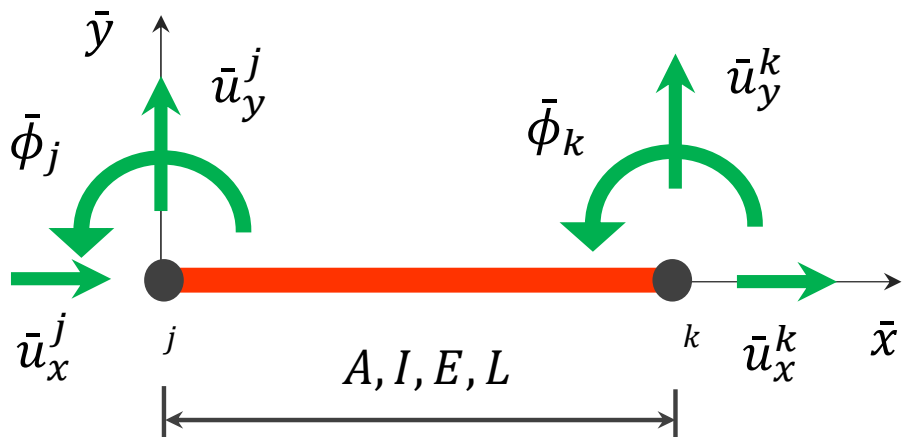
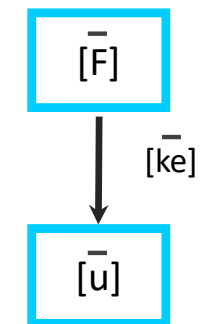
$$M_k = C_1 \frac{EI}{L^2} (u_j - u_k) + \frac{EI}{L} (C_3 \phi_j + C_2 \phi_k)$$

$$V_j = C_4 \frac{EI}{L^3} (u_j - u_k) + C_1 \frac{EI}{L^2} (\phi_j + \phi_k)$$

$$V_k = C_4 \frac{EI}{L^3} (u_k - u_j) - C_1 \frac{EI}{L^2} (\phi_j + \phi_k)$$

$$u_j \equiv \bar{u}_y^j$$

$$u_k \equiv \bar{u}_y^k$$

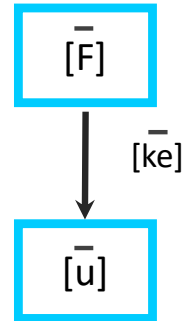


# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra de 2° Orden

$$V_j = C_4 \frac{EI}{L^3} (u_j - u_k) + C_1 \frac{EI}{L^2} (\phi_j + \phi_k) \quad M_j = C_1 \frac{EI}{L^2} (u_j - u_k) + \frac{EI}{L} (C_2 \phi_j + C_3 \phi_k)$$

$$V_k = C_4 \frac{EI}{L^3} (u_k - u_j) - C_1 \frac{EI}{L^2} (\phi_j + \phi_k) \quad M_k = C_1 \frac{EI}{L^2} (u_j - u_k) + \frac{EI}{L} (C_3 \phi_j + C_2 \phi_k)$$



$$[\bar{k}_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{\phi}_j \\ \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \\ \bar{\phi}_k \end{matrix}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra de 2° Orden

$$[\bar{k}_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

Linealizando las funciones de estabilidad en torno a  $N = 0$

Cuando  $N \rightarrow 0 \Rightarrow C_1 \rightarrow 6, C_2 \rightarrow 4, C_3 \rightarrow 2$  y  $C_4 \rightarrow 12 \Rightarrow [\bar{k}_e] \equiv [\bar{k}_e^M]$

Se puede expresar  $[\bar{k}_e] = [\bar{k}_e^M] + N [\bar{k}_e^G]$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez Geométrica

$$N [\bar{k}_e^G] = [\bar{k}_e] - [\bar{k}_e^M]$$

$$[\bar{k}_e^G] = \begin{array}{cccccc} & \bar{u}_x^j & \bar{u}_y^j & \bar{\phi}_j & \bar{u}_x^k & \bar{u}_y^k & \bar{\phi}_k & \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \bar{u}_x^j \\ \bar{u}_y^j \\ \bar{\phi}_j \\ \bar{u}_x^k \\ \bar{u}_y^k \\ \bar{\phi}_k \end{array} \end{array}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Pandeo Global de la Estructura

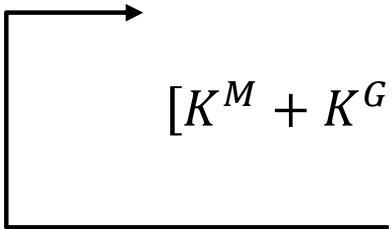
Cuando estudiamos una estructura completa la carga crítica produce el pandeo global.

La matriz de rigidez global se obtiene de la forma usual. Pero con la teoría de 2° orden es necesario conocer el esfuerzo axial en cada barra previamente al cálculo de las matrices de rigidez de barra.

Una forma de aproximar el esfuerzo normal en cada barra es resolver el problema suponiendo que el esfuerzo normal es nulo en todas las barras. Luego con los resultados obtenidos calcular las matrices de rigidez geométrica para incluir los efectos de 2° orden.

Se transforma en un proceso iterativo, hasta que el esfuerzo axial y los desplazamientos del paso actual converjan con los del paso anterior.

$$[K^M][U] = [P] \quad \rightarrow \quad [\bar{F}_e] \quad \rightarrow \quad [K^G] \quad \quad [k_e^G] = [a]^T N [\bar{k}_e^G] [a]$$


$$[K^M + K^G][U] = [P] \quad \rightarrow \quad [\bar{F}_e] \quad \rightarrow \quad [K^G] \quad \quad [K^G] = \mathbf{E}_{e=1}^n [k_e^G]$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Pandeo Global de la Estructura

El pandeo global es un estado limite último, en el que la estructura pierde la capacidad portante.

El objetivo del cálculo es determinar el margen de seguridad que hay frente al pandeo global, para un determinado estado de carga.

Se pretende determinar el factor  $\Gamma$  por el que hay que multiplicar esas cargas para provocar la inestabilidad del sistema estructural.

$$[K^M + \Gamma K^G][U] = [\Gamma P]$$

El factor  $\Gamma$  es el que provoca desplazamientos muy grandes para un pequeño cambio de la las cardas  $\delta P$ .

En términos algebraicos,  $\Gamma$  es tal que provoca la singularidad de la matriz de rigidez.

$$|K^M + \Gamma K^G| = 0$$

Que es un problema de valores propios.

Los autovalores representan los valores de  $\Gamma$  que provocan el pandeo global de la estructura.

El menor valor  $\Gamma$  es el factor de pandeo crítico  $\Gamma_{cr}$ .

Su autovector asociado representa la forma o modo en la que pandea la estructura.

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Estructuras Ensambladas en 3D

Valen las hipótesis introducidas para estructuras planas

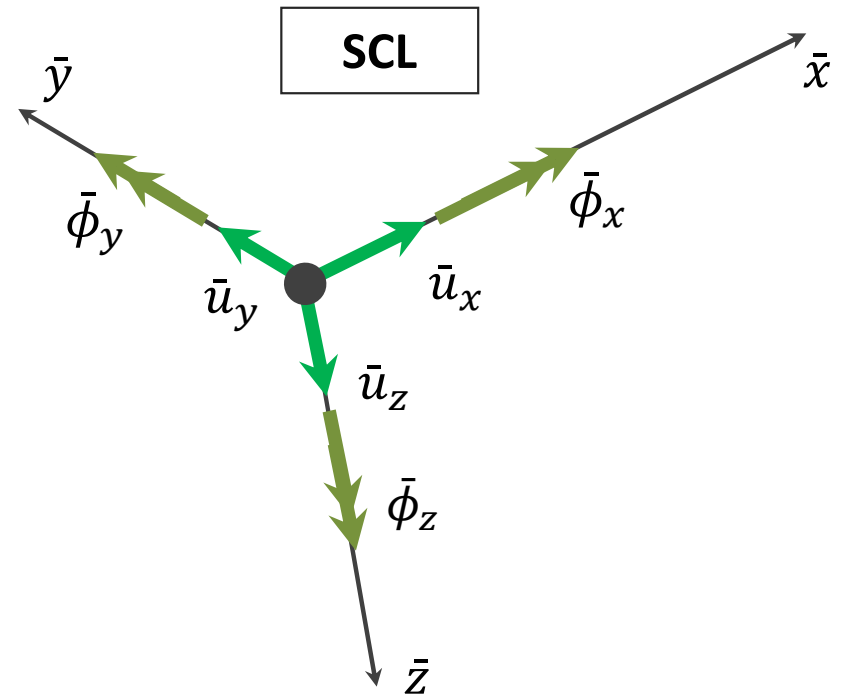
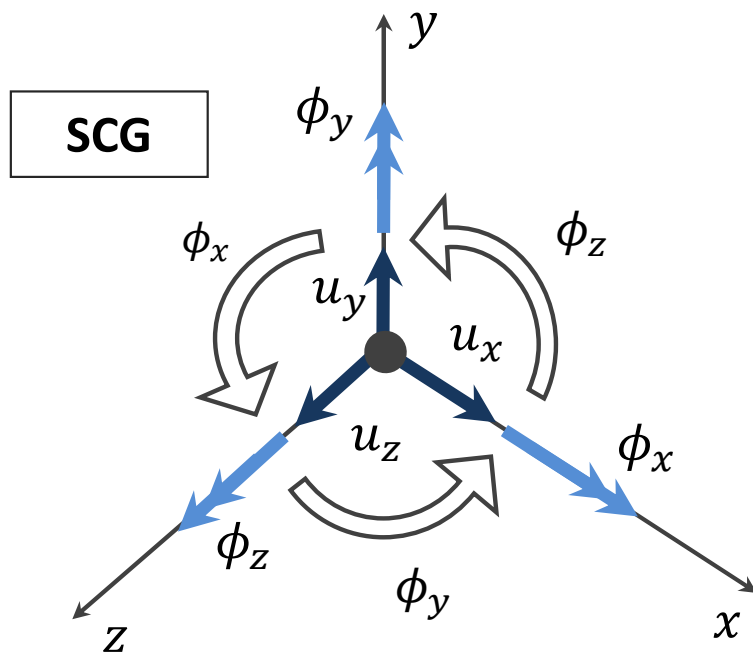
El método consta de los mismos pasos que en el caso de estructuras planas

Cada nodo en el espacio tiene 6 grados de libertad

Los giros positivos siguen la regla de la mano derecha

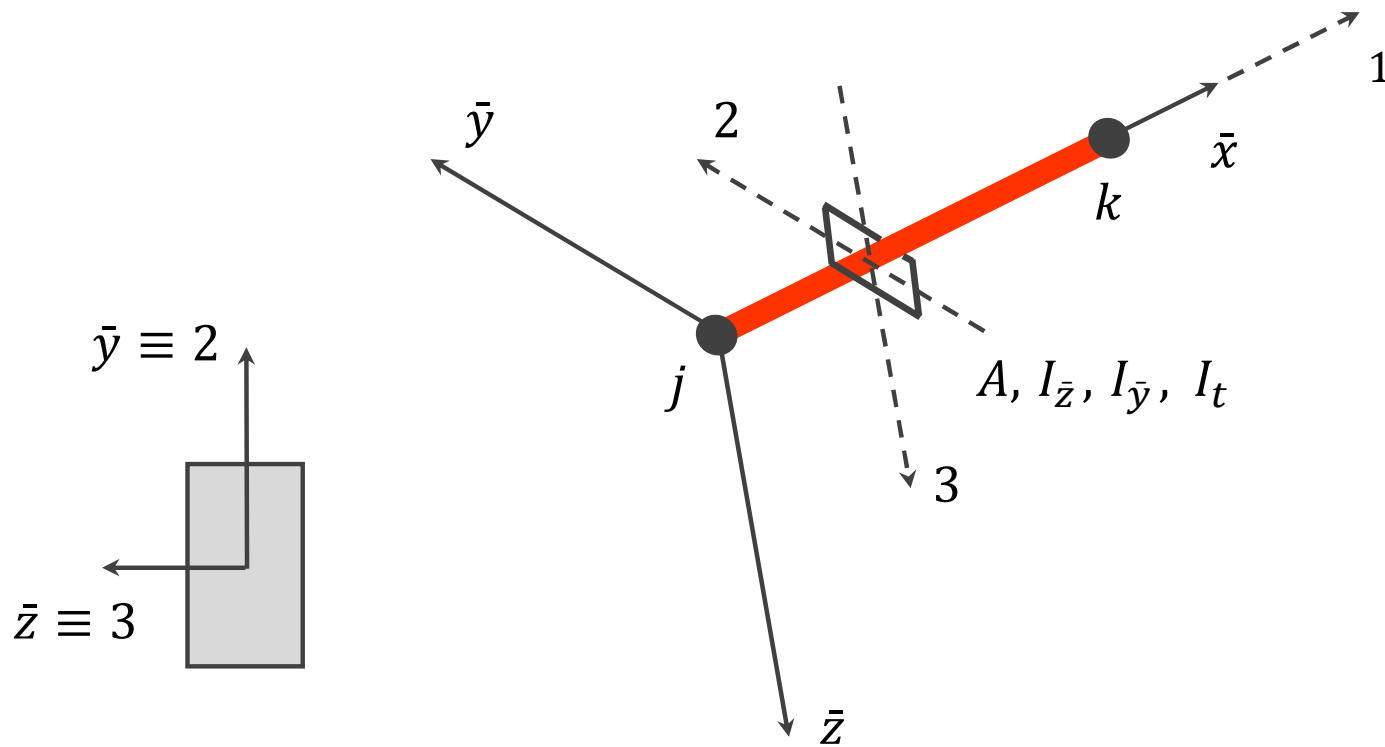
# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Variables Cinemáticas Internas y Externas



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales

$$[\bar{k}_e] = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_x^j \\
 0 & 12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & \bar{u}_y^j \\
 0 & 0 & 12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & \bar{u}_z^j \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & \bar{\phi}_x^j \\
 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 & \bar{\phi}_y^j \\
 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} & \bar{\phi}_z^j \\
 \hline
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_x^k \\
 0 & -12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & \bar{u}_y^k \\
 0 & 0 & -12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 12\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & \bar{u}_z^k \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & \bar{\phi}_x^k \\
 0 & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_{\bar{y}}}{L^2} & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{y}}}{L} & 0 & \bar{\phi}_y^k \\
 0 & 6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} & 0 & -6\frac{EJ_{\bar{z}}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EJ_{\bar{z}}}{L} & \bar{\phi}_z^k
 \end{bmatrix}$$

# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Ecuación de Compatibilidad o Cinemática

$$[\bar{u}] = [a] [u]$$

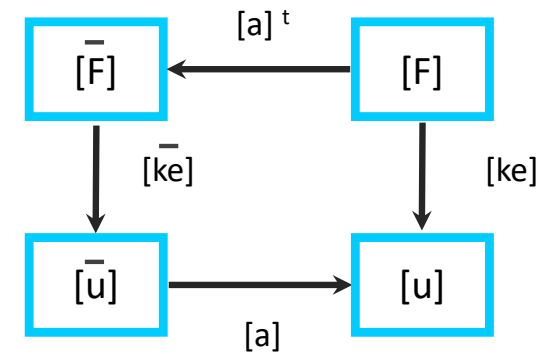
$$[\bar{u}] = [\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z \quad \bar{\phi}_x \quad \bar{\phi}_y \quad \bar{\phi}_z]^t$$

$$[u] = [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^t$$

$$[a] = \begin{bmatrix} L_j & 0 \\ 0 & L_k \end{bmatrix} \quad [L_j] = \begin{bmatrix} \lambda_j^u & 0 \\ 0 & \lambda_j^\phi \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_j^u] = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_j^\phi] = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix}$$



# MÉTODO DE LA RIGIDEZ DIRECTA

## Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Globales

Aplicando las relaciones conocidas

$$[\bar{F}] = [\bar{k}_e] [\bar{u}] \qquad [F] = [a]^t [\bar{F}] \qquad [\bar{u}] = [a] [u]$$

$$[F] = [a]^t [\bar{k}_e] [\bar{u}] \qquad [F] = [a]^t [\bar{k}_e] [a] [u]$$

$$[F] = [k_e] [u] \qquad [k_e] = [a]^t [\bar{k}_e] [a]$$

Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global de la Estructura

Ensamblaje del Vector de Cargas

Introducción de las Condiciones de Contorno

Solución del Sistema de Ecuaciones (obtención de corrimientos)

Cálculo de Reacciones

Determinación de Deformaciones y Esfuerzos

# BIBLIOGRAFÍA

- Argüelles Alvarez. “Cálculo de Estructuras. Programación. Tomo 3”. ISBN 84-6004-189-1.
- Chen, W.F. y Lui E.M. “Structural Stability. Theory and Implementation”, Elsevier, 1987. ISBN 0-444-01119-6
- Villoldo Lozano, M. “Pandeo lineal y no lineal de estructuras de vigas”, Universidad Politécnica de Madrid, 2021.
- Cudmani, R. “Teoría y Práctica de las Estructuras de Barra” EDUNT. 2007. ISBN 978-987-1366-03-3