



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 5

Métodos Matriciales

Casos Especiales

CURSO 2.026

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

CASOS ESPECIALES (MRD)

Contenido

- Nodos Elásticos. (Extremos Flexibles)
- Apoyos Elásticos
- Constricciones Cinemáticas (Diafragma Rígido)
- Desplazamientos Impuestos
- Aplicaciones

BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES (NODOS ELÁSTICOS)

Uniones

Debido a los distintos tipo de uniones utilizadas en las construcciones puede resultar apropiado dejar de lado las hipótesis adoptadas sobre la unión nodo - barra infinitamente rígida.



BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES (NODOS ELÁSTICOS)

Uniones

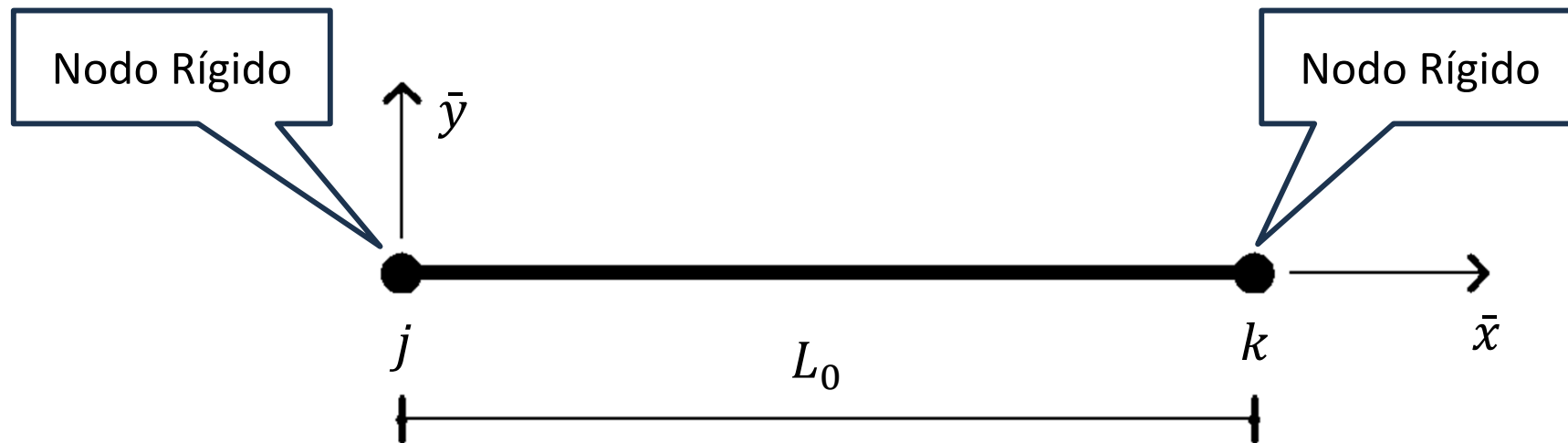
Debido a los distintos tipo de uniones utilizadas en las construcciones puede resultar apropiado dejar de lado las hipótesis adoptadas sobre la unión nodo - barra infinitamente rígida.



BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Barra de Euler-Bernoulli

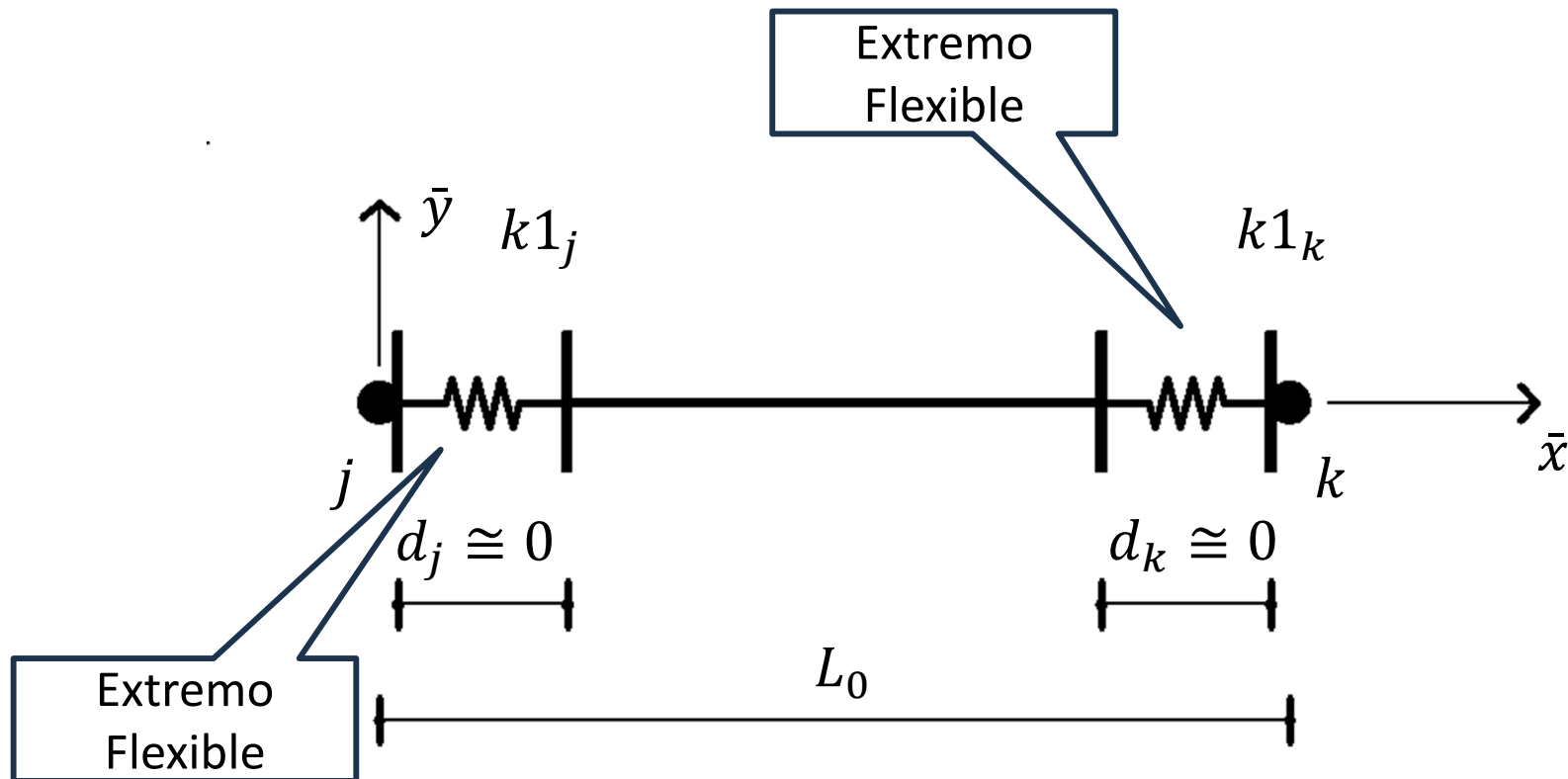
Debido a los distintos tipo de uniones utilizadas en las construcciones puede resultar apropiado dejar de lado las hipótesis adoptadas sobre la unión nodo - barra infinitamente rígida.



BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Dirección \bar{x}

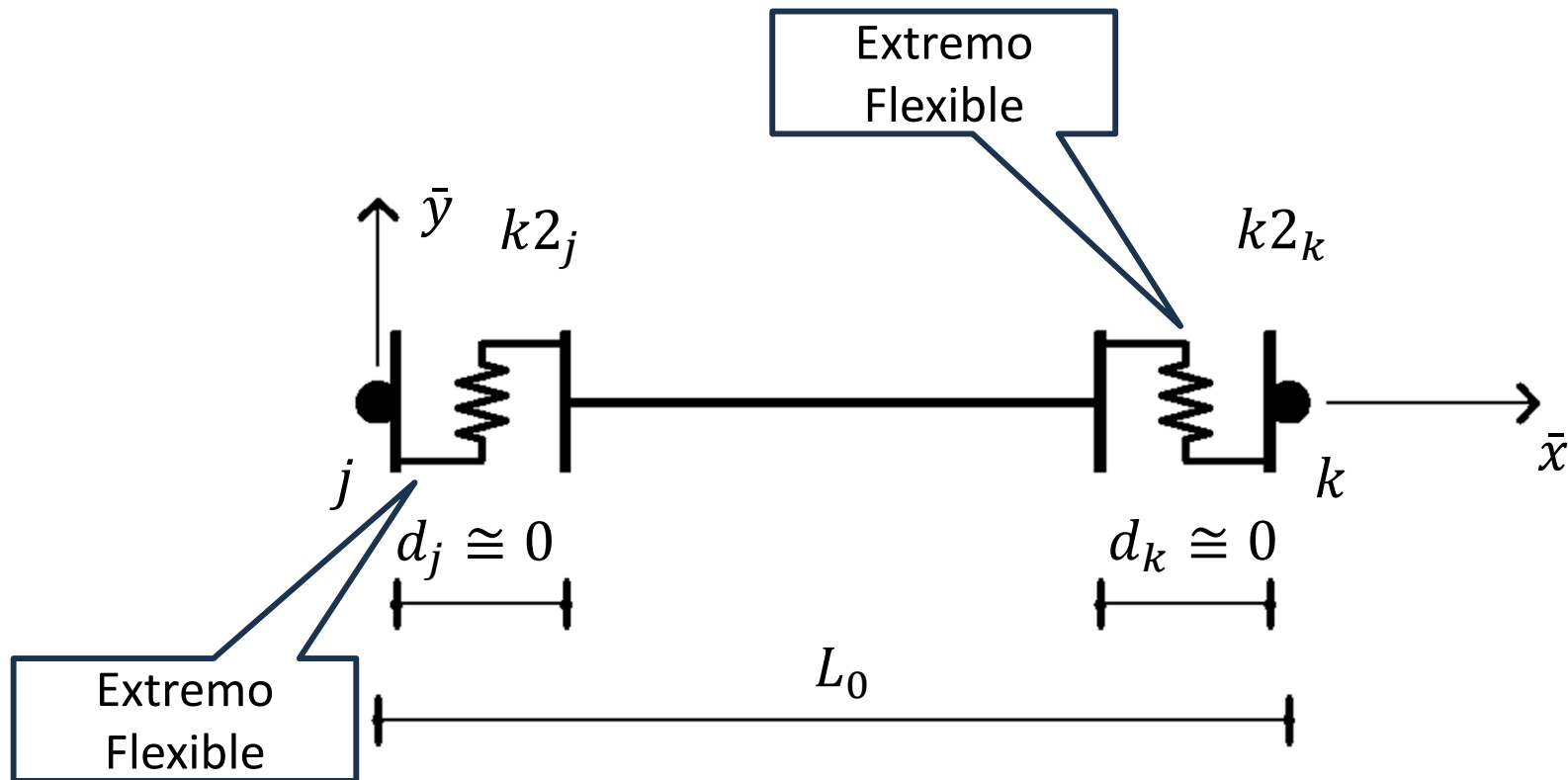
Extremos flexible en la dirección \bar{x}



BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Dirección \bar{y}

Extremos flexible en la dirección \bar{y}



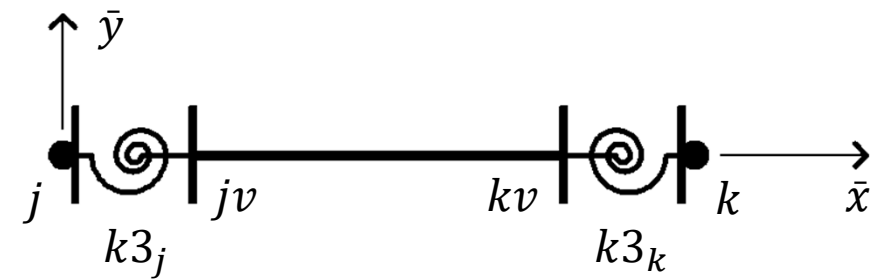
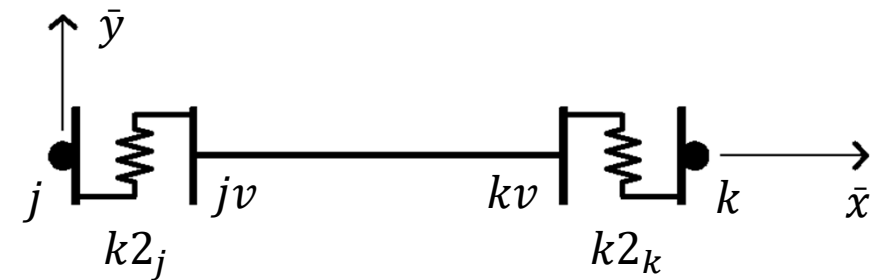
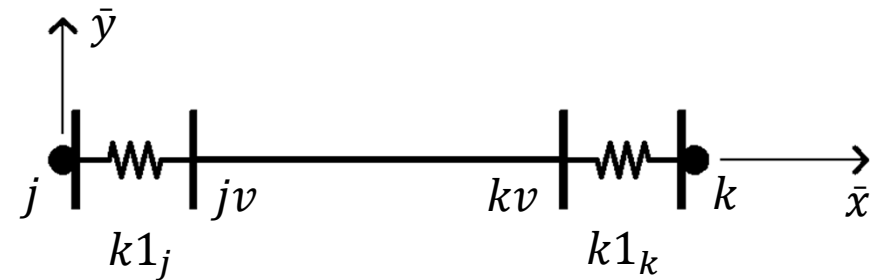
BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Rigidez de los Extremos

Considerando que las rigideces de los extremos de la barra están desacopladas entre sí, y los nodos virtuales en j y k .

$$[\bar{k}e_j] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & j & & jv & & \\ \hline k1_j & 0 & 0 & -k1_j & 0 & 0 \\ 0 & k2_j & 0 & 0 & -k2_j & 0 \\ 0 & 0 & k3_j & 0 & 0 & -k3_j \\ \hline -k1_j & 0 & 0 & k1_j & 0 & 0 \\ 0 & -k2_j & 0 & 0 & k2_j & 0 \\ 0 & 0 & -k3_j & 0 & 0 & k3_j \end{array} \begin{array}{l} j \\ \\ \\ jv \\ \\ \end{array} \end{array}$$

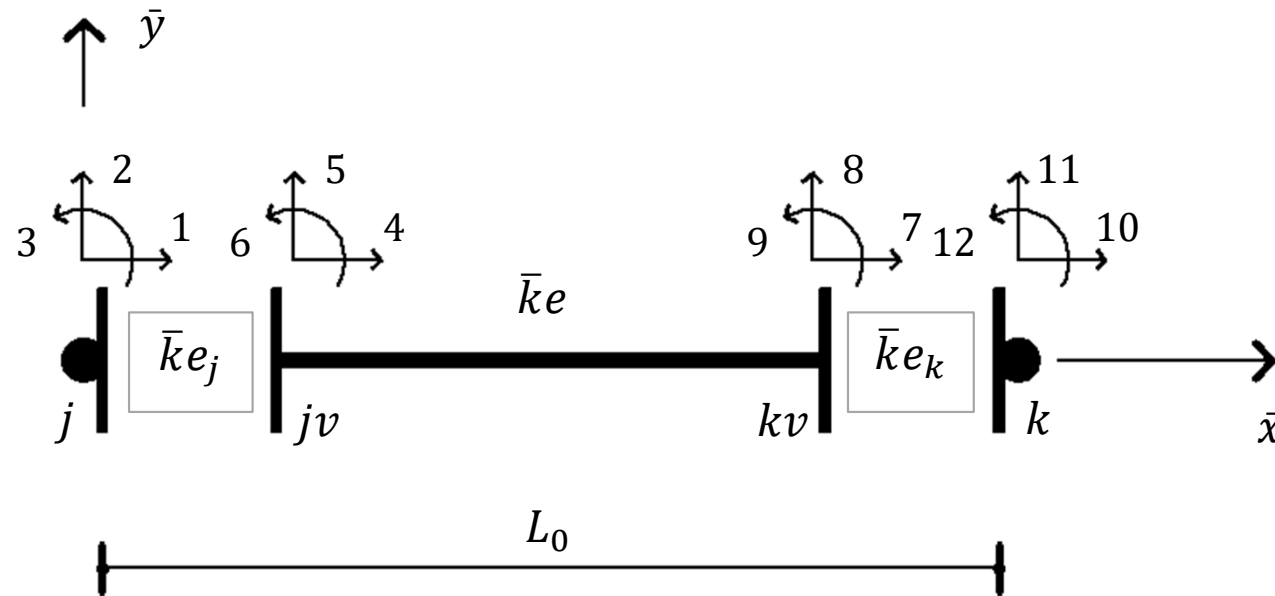
$$[\bar{k}e_k] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & kv & & k & & \\ \hline k1_k & 0 & 0 & -k1_k & 0 & 0 \\ 0 & k2_k & 0 & 0 & -k2_k & 0 \\ 0 & 0 & k3_k & 0 & 0 & -k3_k \\ \hline -k1_k & 0 & 0 & k1_k & 0 & 0 \\ 0 & -k2_k & 0 & 0 & k2_k & 0 \\ 0 & 0 & -k3_k & 0 & 0 & k3_k \end{array} \begin{array}{l} kv \\ \\ \\ k \\ \\ \end{array} \end{array}$$



BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Matriz de Rigidez de Barra con Extremos Flexibles

Considerando los nodos virtuales, en estructuras planas, tenemos 12 DOF



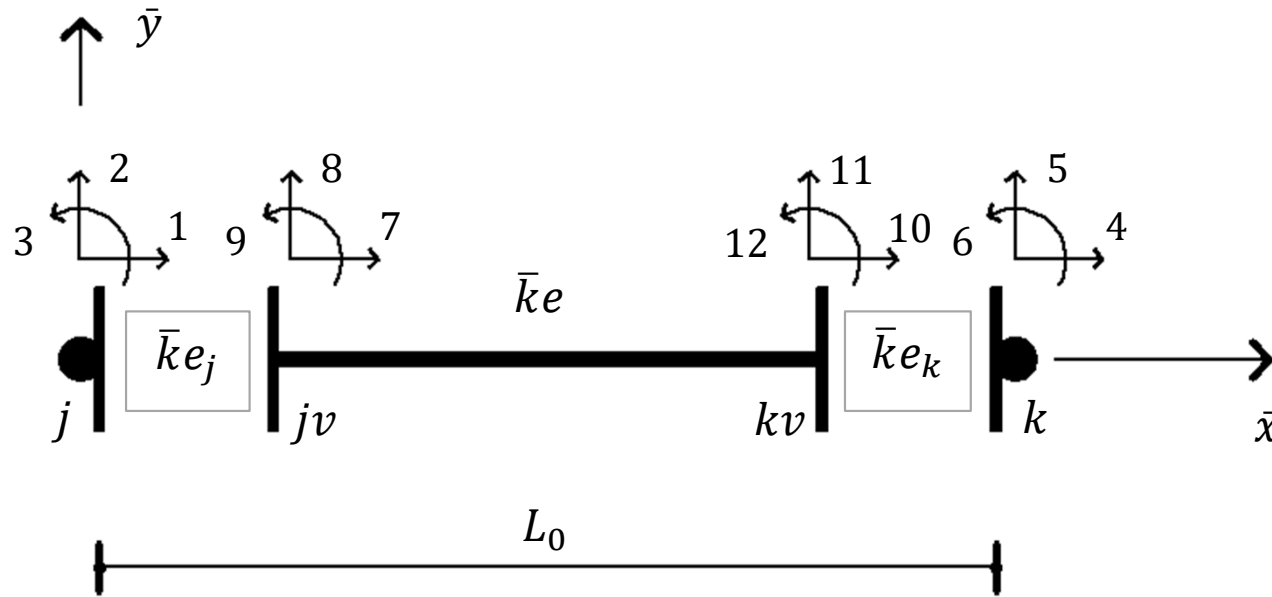
Para obtener la matriz de rigidez de barra con extremos flexibles, ensamblamos y condensamos.

Considerando que nos interesan las rigideces asociadas a los DOF de los nodos j y k conviene reenumerar los grados de libertad.

BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Matriz de Rigidez de Barra con Extremos Flexibles

Renumerando



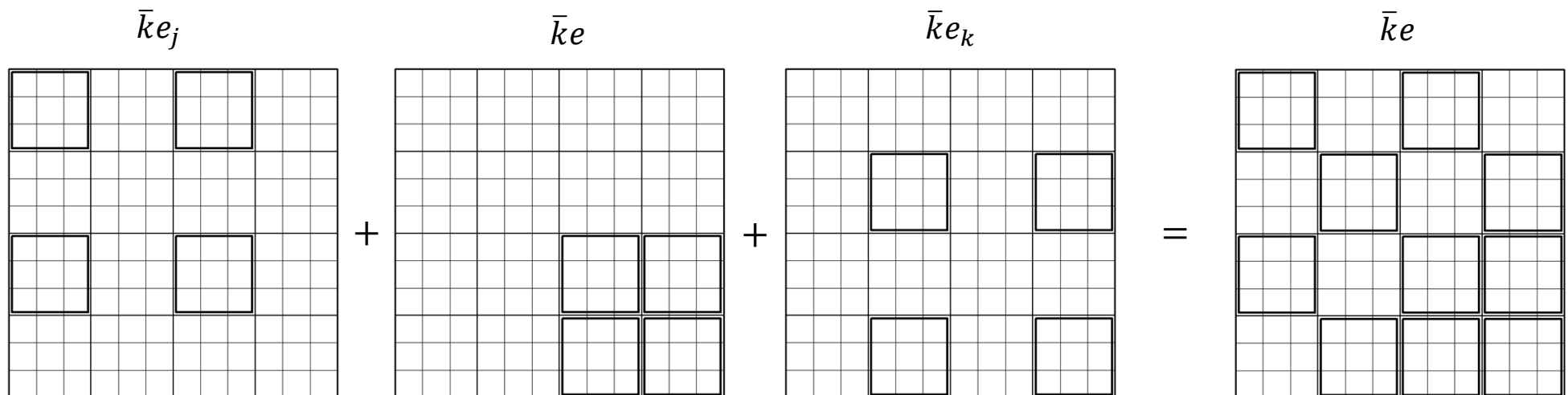
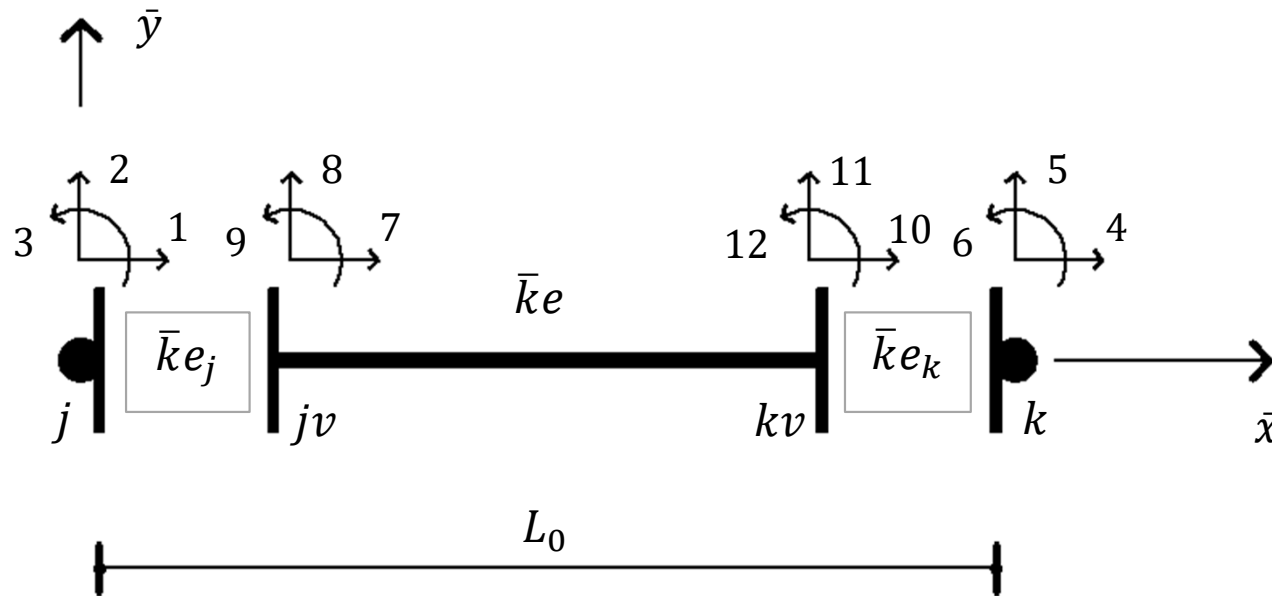
$$[\bar{k}e_j] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ k1_j & 0 & 0 & -k1_j & 0 & 0 \\ 0 & k2_j & 0 & 0 & -k2_j & 0 \\ 0 & 0 & k3_j & 0 & 0 & -k3_j \\ -k1_j & 0 & 0 & k1_j & 0 & 0 \\ 0 & -k2_j & 0 & 0 & k2_j & 0 \\ 0 & 0 & -k3_j & 0 & 0 & k3_j \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ \\ \\ jv \\ \\ jv \end{matrix}$$

$$[\bar{k}e_k] = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \\ k1_k & 0 & 0 & -k1_k & 0 & 0 \\ 0 & k2_k & 0 & 0 & -k2_k & 0 \\ 0 & 0 & k3_k & 0 & 0 & -k3_k \\ -k1_k & 0 & 0 & k1_k & 0 & 0 \\ 0 & -k2_k & 0 & 0 & k2_k & 0 \\ 0 & 0 & -k3_k & 0 & 0 & k3_k \end{bmatrix} \begin{matrix} kv \\ \\ kv \\ k \\ \\ k \end{matrix}$$

BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Matriz de Rigidez de Barra con Extremos Flexibles

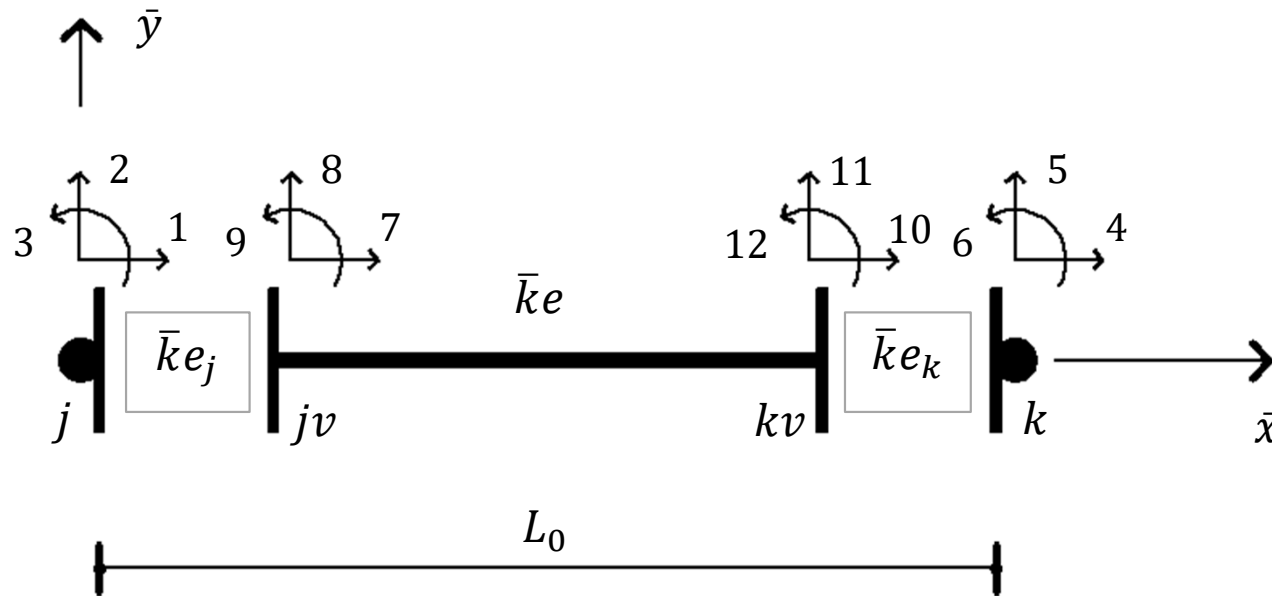
Ensamblando los extremos con la barra



BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Matriz de Rigidez de Barra con Extremos Flexibles

Condensando



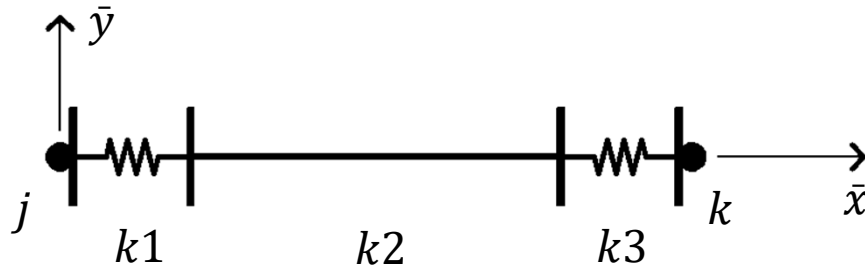
$$\bar{k}e = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{\delta\delta} & \bar{k}_{\delta\theta} \\ \bar{k}_{\theta\delta} & \bar{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}e^{ef} = \bar{k}_{\delta\delta} - \bar{k}_{\delta\theta} \bar{k}_{\theta\theta}^{-1} \bar{k}_{\theta\delta}$$

BARRAS CON EXTREMOS FLEXIBLES

Ejemplos

Barra solo con rigidez axial y extremos flexibles



ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS

Fundaciones



ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS

Fundaciones

Todas las estructuras de fundación transmiten las cargas al suelo, que es un medio deformable.

La influencia de la deformabilidad del suelo sobre las estructuras puede tenerse en cuenta en forma aproximada considerando que los apoyos se deforman elásticamente.

Es decir que existe una proporcionalidad entre la reacción que el apoyo transmite al suelo y la deformación del mismo.

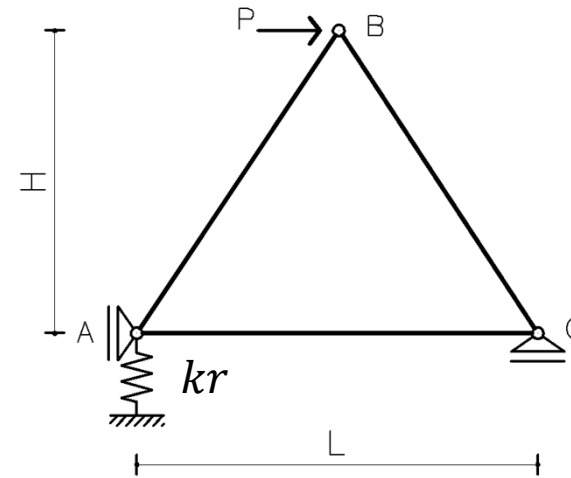
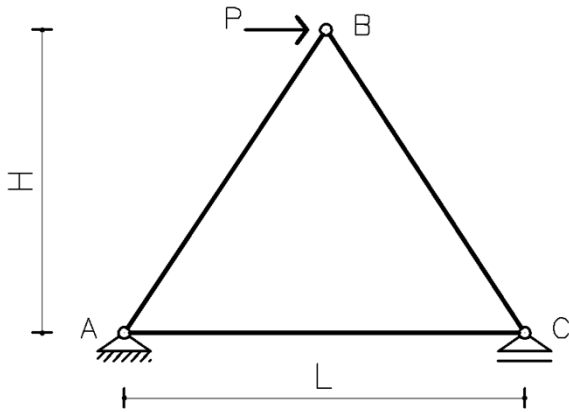
Para incluir la deformabilidad del suelo en el modelo de análisis se utilizan apoyos elásticos que suman su rigidez a la matriz de rigidez global.

Al aplicar las condiciones de contorno se mantienen los DOF de los apoyos elásticos.

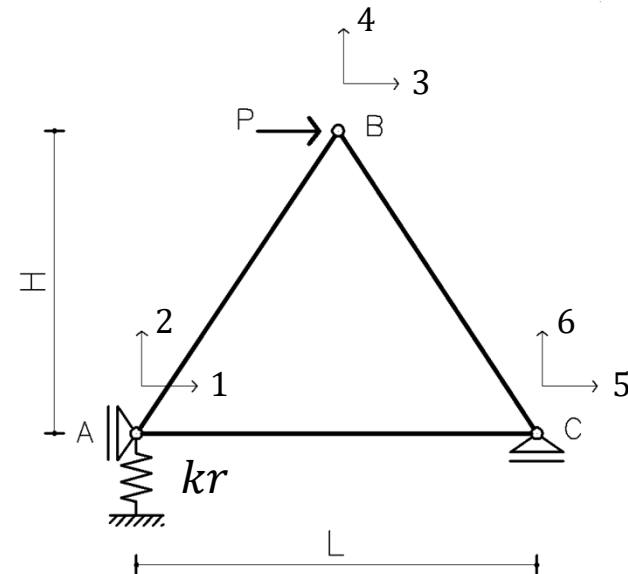
ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS

Esquema

Consideramos un apoyo elástico en A en dirección vertical



Identificando los DOF

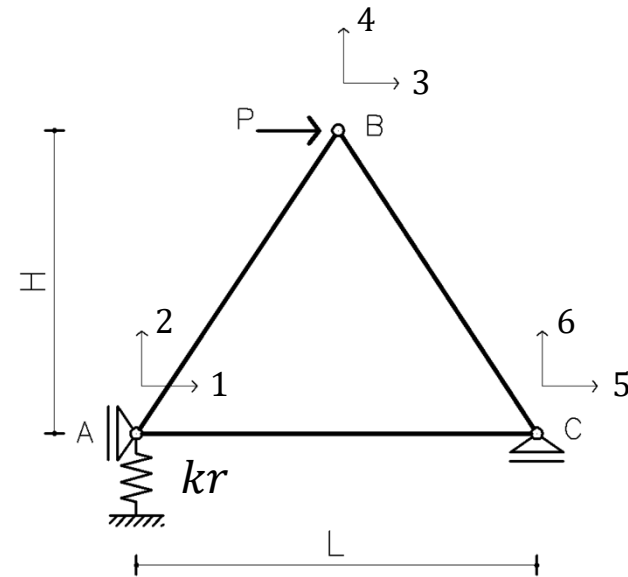


ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS

Rigidez de los Apoyos

La matriz de rigidez de los apoyos elásticos

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kr & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Ensamblando la matriz de rigidez global

$$[K] = \mathbf{E}_{i=1}^{nb} [ke] + [K_A]$$

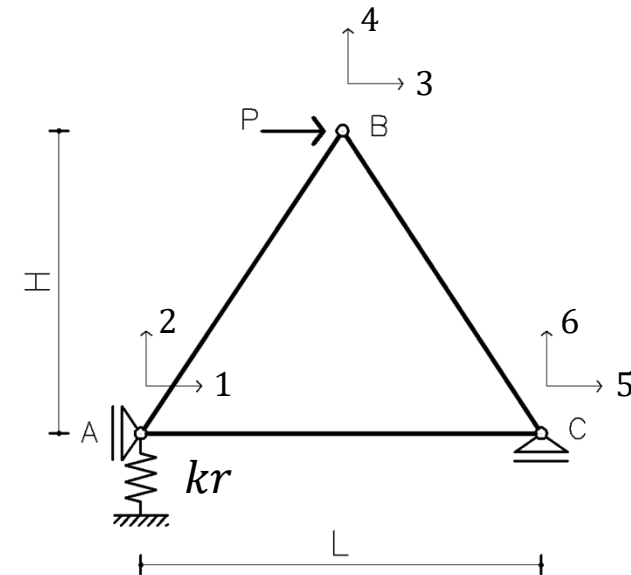
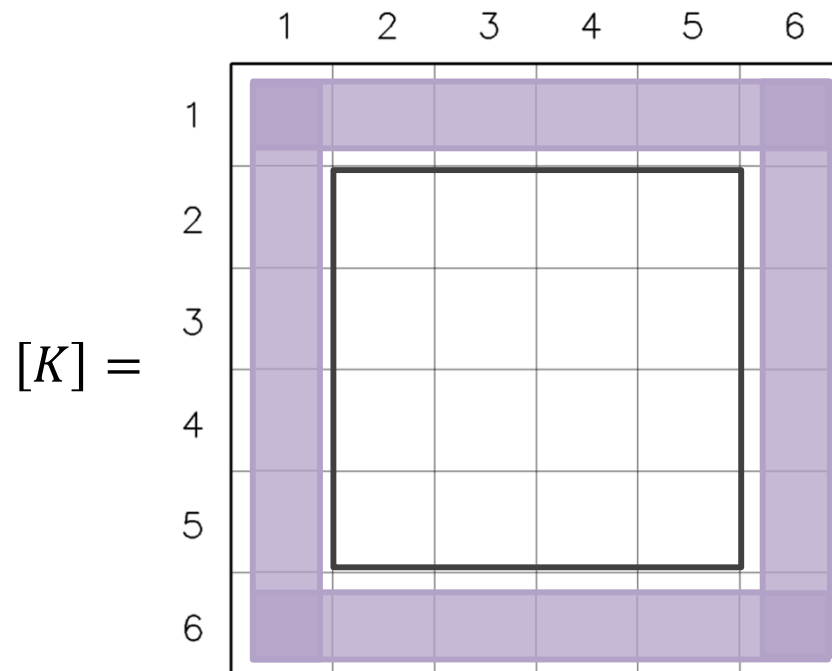
$$[K] = [6 \times 6]$$

ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS

Esquema

Condiciones de contorno:

- + Se mantienen los grados de libertad donde están los apoyos elásticos.
- + Se eliminan las filas y columnas de los grados de libertad donde hay apoyos.

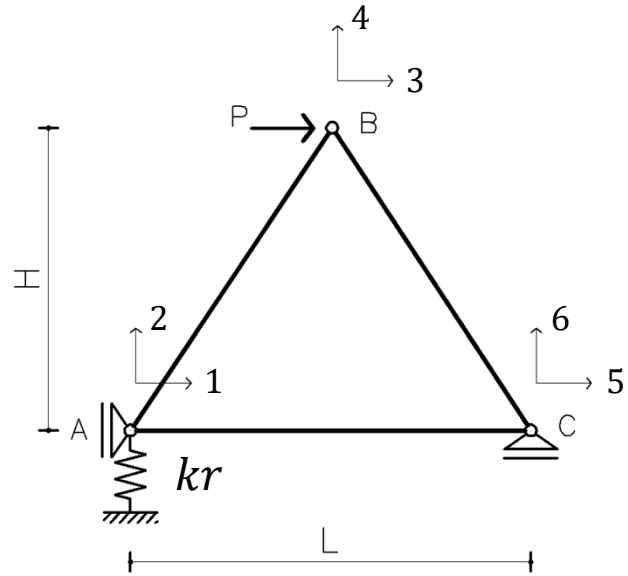


Cálculo de las reacciones

$$[R] = [K][U] - [P] - [K_A][U]$$

ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS

Ejemplos



ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Restricciones Cinemáticas (Constraints)

Se usan para forzar ciertos tipos de comportamientos que involucran movimientos de cuerpo rígido.

Conectan diferentes partes del modelo.

Pueden imponer ciertas condiciones de simetría.

Las restricciones cinemáticas se aplican a un conjunto de dos o mas nodos.

Los desplazamientos de los nodos del conjunto están relacionados por las ecuaciones de restricción.

Tipos de Comportamiento

- Comportamiento Rígido
 - Cuerpo Rígido
 - Diafragma Rígido
 - Placa Rígida
 - Bara Rígida
 - Viga Rígida
- Igual Desplazamiento
- Simetría y Antisimetría

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Restricciones Cinemáticas

La utilización de constricciones implica una reducción de los DOF de la estructura, debido a que los movimientos de los nodos del conjunto dependen de los movimientos de uno de los nodos de ese conjunto.

El nodo del cual dependen los movimientos de los otros nodos del conjunto se lo denomina nodo maestro MJ (master joint).

Al ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura, los elementos que están conectados a nodos con restricciones cinemáticas aportan su rigidez (una vez transformada) a los DOF del master joint.

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Comportamiento Rígido

Cuerpo Rígido

Los nodos restringidos se mueven juntos como un cuerpo rígido tridimensional

Diafragma Rígido

Todos los nodos conectados al plano del diafragma se mueven junto con el diafragma considerado como infinitamente rígido en su plano

Placa Rígida

Los nodos conectados a una placa rígida no pueden tener movimientos relativos en la dirección de la flexión de la placa.

Línea Rígida

Los nodos conectados a una línea rígida se mantienen siempre a la misma distancia sobre esa línea.

Viga Rígida

Los nodos conectados a una viga rígida no pueden tener movimientos relativos en la dirección de la flexión de la viga.

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Cuerpo Rígido (Body)

Los nodos restringidos se mueven juntos como un cuerpo rígido tridimensional.

En general aplica a todos los grados de libertad, pero en algunos softwares se puede aplicar solo a un subconjunto de ellos.

Se usa para:

- + Modelar conexiones rígidas, p.e. casos especiales de uniones vig-vig, vig-col.
- + Para conectar distintas partes de un modelo estructural que tienen distintas discretizaciones geométricas.
- + Para conectar excéntricamente elementos de barra con elementos 2D.

Conectividad

Los nudos restringidos como cuerpo rígido pueden tener cualquier ubicación en el espacio.

Sistema de Coordenadas Locales

Cada restricción tiene su propio SCL

Si el SCL de la restricción cinemática no es paralelo al SCG se debe realizar la rotación correspondiente.

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Cuerpo Rígido (Body)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción

Estas ecuaciones se expresan en términos de los corrimientos y rotaciones según los tres ejes locales.

Los corrimientos del nodo j en función de los del nodo i son:

$$u_x^j = u_x^i + \phi_y^i \Delta_z - \phi_z^i \Delta_y \quad \Delta_x = x_j - x_i$$

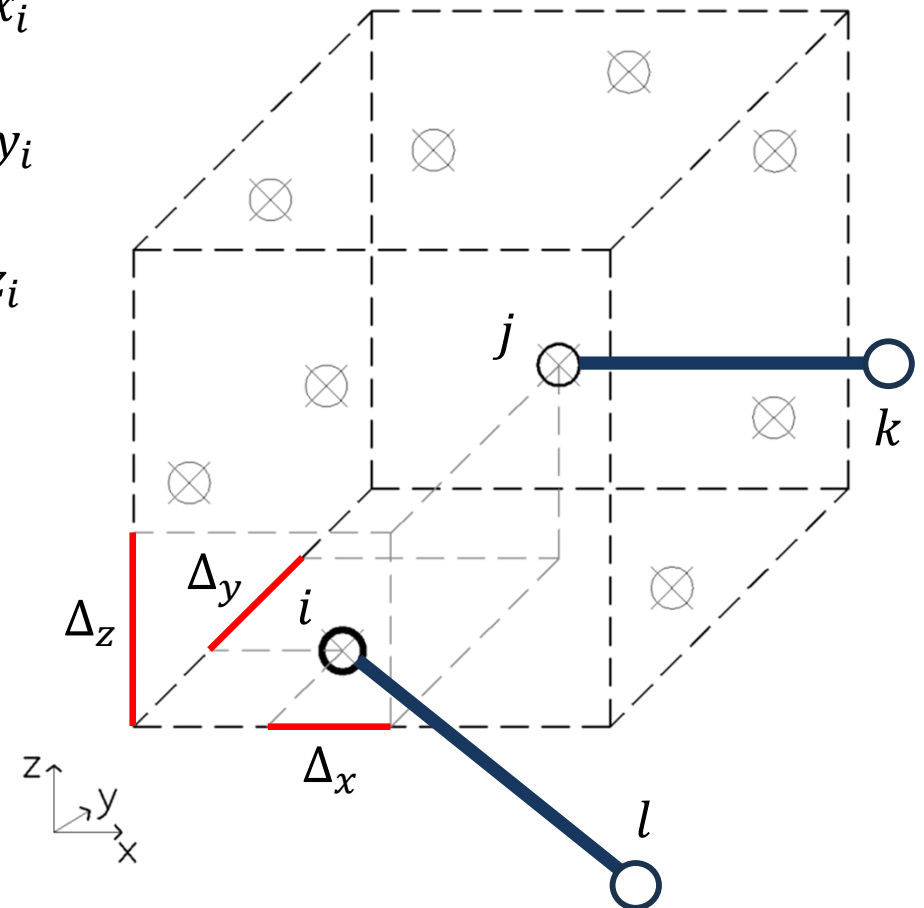
$$u_y^j = u_y^i + \phi_z^i \Delta_x - \phi_x^i \Delta_z \quad \Delta_y = y_j - y_i$$

$$u_z^j = u_z^i + \phi_x^i \Delta_y - \phi_y^i \Delta_x \quad \Delta_z = z_j - z_i$$

$$\phi_x^j = \phi_x^i \quad i \equiv MJ$$

$$\phi_y^j = \phi_y^i \quad \text{SCL // SCG}$$

$$\phi_z^j = \phi_z^i$$



ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Cuerpo Rígido (Body)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción

Estas ecuaciones se expresan en términos de los corrimientos y rotaciones según los tres ejes locales.

Los corrimientos del nodo j en función de los del nodo i son:

$$u_x^j = u_x^i + \phi_y^i \Delta_z - \phi_z^i \Delta_y$$

$$\Delta_x = x_j - x_i$$

$$u_y^j = u_y^i + \phi_z^i \Delta_x - \phi_x^i \Delta_z$$

$$\Delta_y = y_j - y_i$$

$$u_z^j = u_z^i + \phi_x^i \Delta_y - \phi_y^i \Delta_x$$

$$\Delta_z = z_j - z_i$$

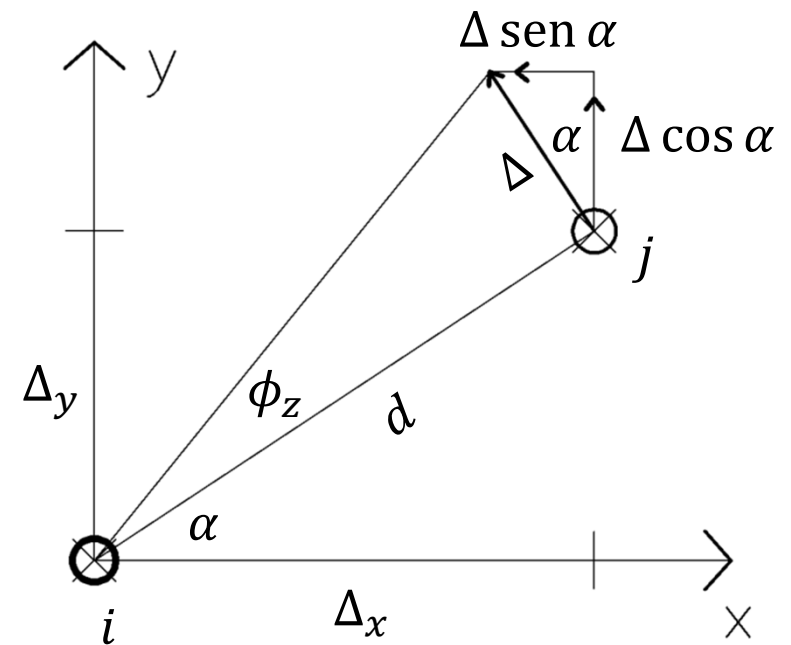
$$\phi_x^j = \phi_x^i$$

$$i \equiv MJ$$

$$\phi_y^j = \phi_y^i$$

$$\text{SCL // SCG}$$

$$\phi_z^j = \phi_z^i$$



$$\Delta = \phi_z d$$

$$u_x = -\Delta \sin \alpha = -\phi_z d \sin \alpha$$

$$u_x^j = -\phi_z^i \Delta_y$$

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Cuerpo Rígido (Body)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción

Estas ecuaciones se expresan en términos de los corrimientos y rotaciones según los tres ejes locales.

Los corrimientos del nodo j en función de los del nodo i , matricialmente

$$\begin{bmatrix} u_x^j \\ u_y^j \\ u_z^j \\ \phi_x^j \\ \phi_y^j \\ \phi_z^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_z & -\Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_z & 0 & \Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_y & -\Delta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \\ \phi_x^i \\ \phi_y^i \\ \phi_z^i \end{bmatrix} \quad [u^j] = [c^i][u^i]$$

$$[c^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_z & -\Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_z & 0 & \Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_y & -\Delta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[u^j]$: Corrimientos nodo restringido

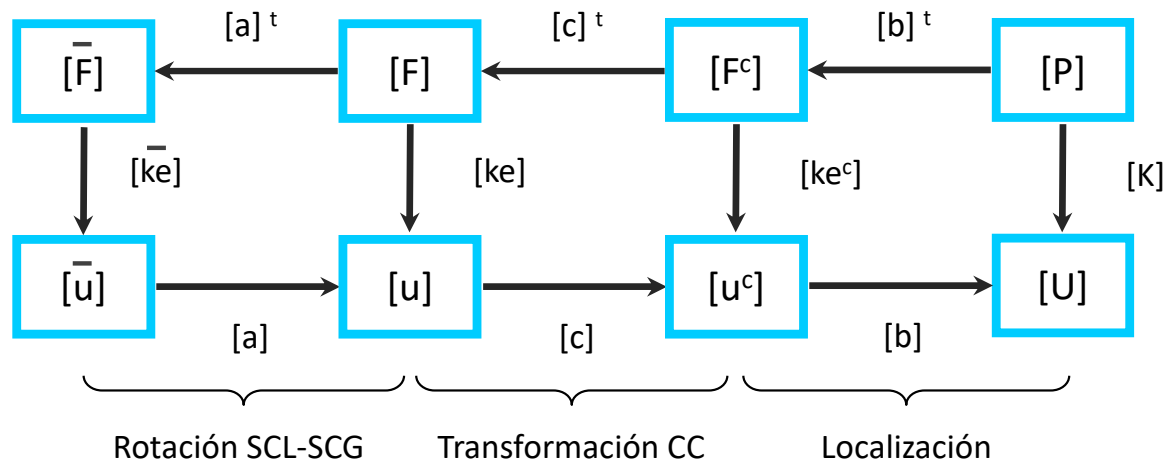
$[u^i]$: Corrimientos del MJ

$[c^i]$: Matriz de compatibilidad

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Cuerpo Rígido (Body)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción



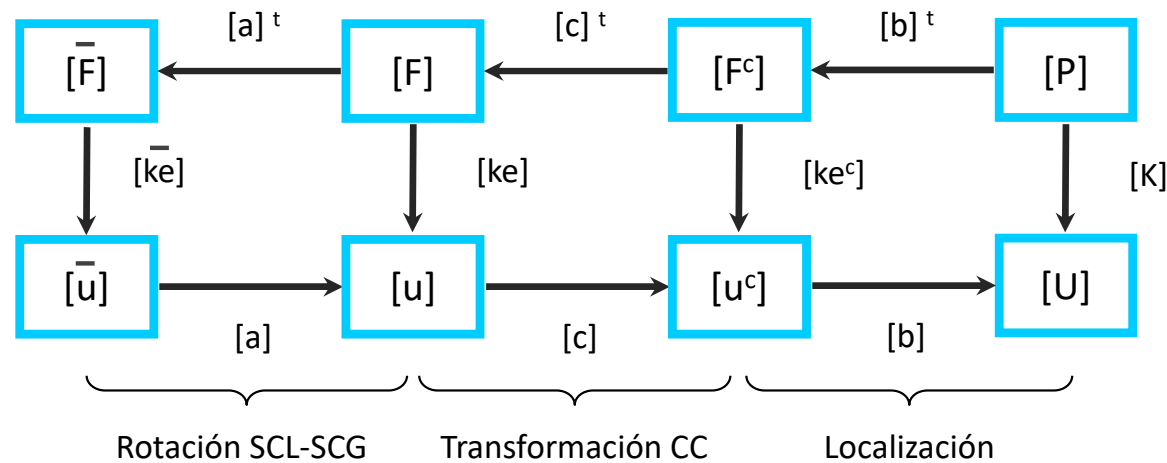
En la matriz de localización los DOF del nodo restringido cambian por los del MJ

$$[u^j] = [c^i][u^i] \quad [c^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_z & -\Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_z & 0 & \Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_y & -\Delta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Cuerpo Rígido (Body)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción



En la matriz de localización los DOF del nodo restringido cambian por los del MJ

En caso que los nodos j y k de la barra posean restricciones distintas

$$\begin{bmatrix} u^j \\ u^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ u^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x_j - x_i \\ \Delta_y &= y_j - y_i \\ \Delta_z &= z_j - z_i \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 Nodo j

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x_k - x_m \\ \Delta_y &= y_k - y_m \\ \Delta_z &= z_k - z_m \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 Nodo k

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Diafragma Rígido (Diaphragm)

Los nodos restringidos se mueven juntos en el plano del diafragma.

Aplica a los grados de libertad contenidos en el plano del diafragma, dos desplazamiento y el giro cuyo vector es normal al plano del diafragma.

No afecta los desplazamientos fuera del plano del diafragma.

En general todos los nudos deben estar contenidos en el plano del diafragma

Se usa para:

+ Modelar la presencia de losas, p.e. para acciones sísmicas en modelos de masa concentrada.

+ Para modelar diafragmas en losas de puentes.

Conectividad

Los nudos restringidos como diafragma rígido deben ser coplanares.

En caso contrario, si el software lo permite, pueden aparecer momentos no equilibrados.

Sistema de Coordenadas Locales

Cada restricción tiene su propio SCL

Solo interesa la orientación del eje 3, normal al diafragma.

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Diafragma Rígido (Diaphragm)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción

Estas ecuaciones se expresan en términos de los corrimientos en el plano del diafragma y la rotación normal al plano del diafragma.

Los corrimientos del nodo j en función de los del nodo i son:

$$u_x^j = u_x^i - \phi_z^i \Delta_y$$

$$\Delta_x = x_j - x_i$$

$$u_y^j = u_y^i + \phi_z^i \Delta_x$$

$$\Delta_y = y_j - y_i$$

$$u_z^j = u_z^i$$

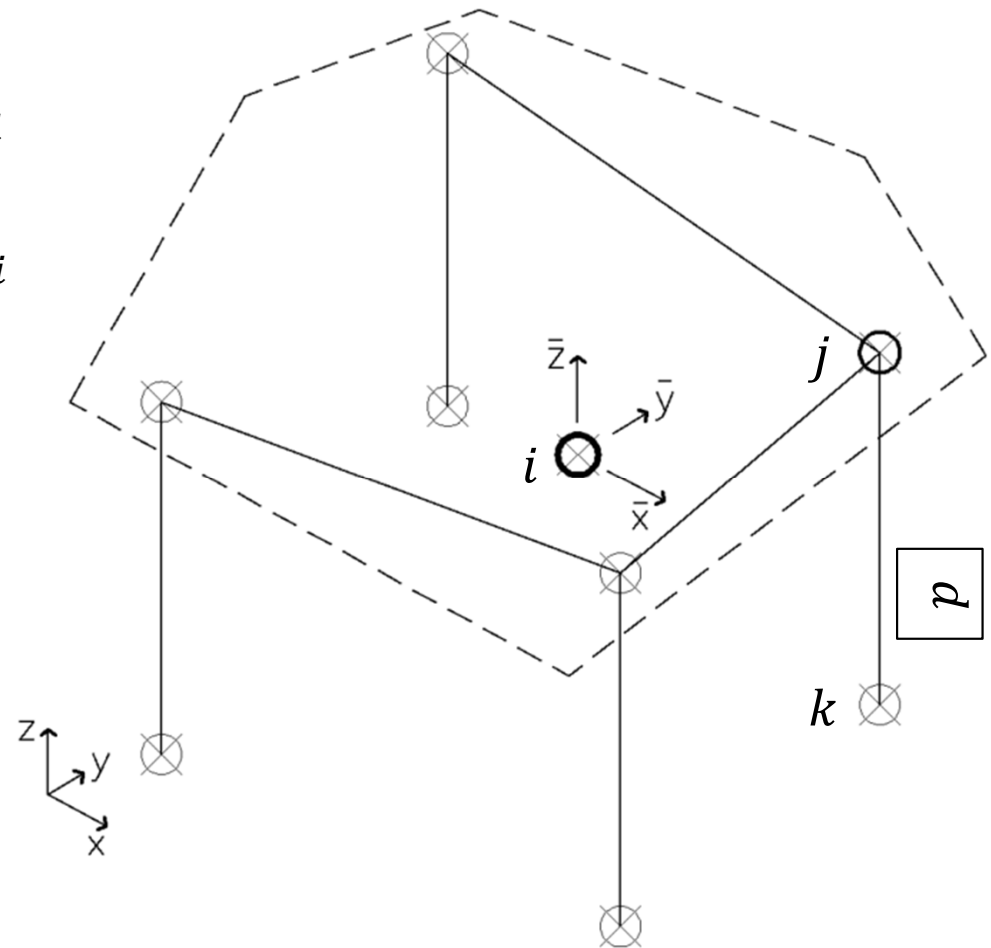
$$i \equiv Mj$$

$$\phi_x^j = \phi_x^i$$

$$\text{SCL // SCG}$$

$$\phi_y^j = \phi_y^i$$

$$\phi_z^j = \phi_z^i$$



ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Diafragma Rígido (Diaphragm)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción

Estas ecuaciones se expresan en términos de los corrimientos y rotaciones según los tres ejes locales.

Los corrimientos del nodo j en función de los del nodo i , matricialmente

$$\begin{bmatrix} u_x^j \\ u_y^j \\ u_z^j \\ \phi_x^j \\ \phi_y^j \\ \phi_z^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^j \\ \phi_x^j \\ \phi_y^j \\ \phi_z^i \end{bmatrix} \quad [u^j] = [c^i][u^i]$$

$$[c^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[u^j]$: Corrimientos nodo restringido

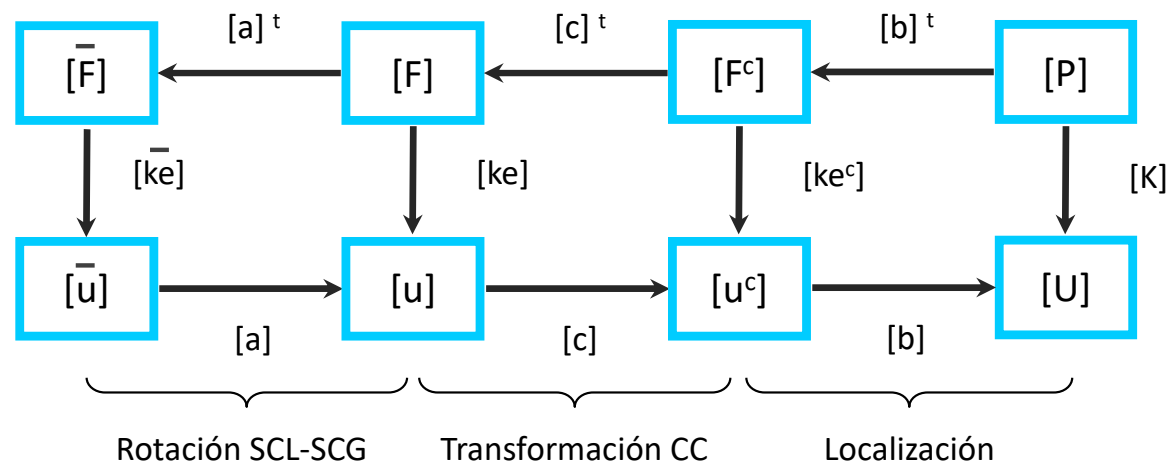
$[u^i]$: Corrimientos del MJ

$[c^i]$: Matriz de compatibilidad

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Diafragma Rígido (Diaphragm)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción



En la matriz de localización los DOF del nodo restringido cambian por los del MJ

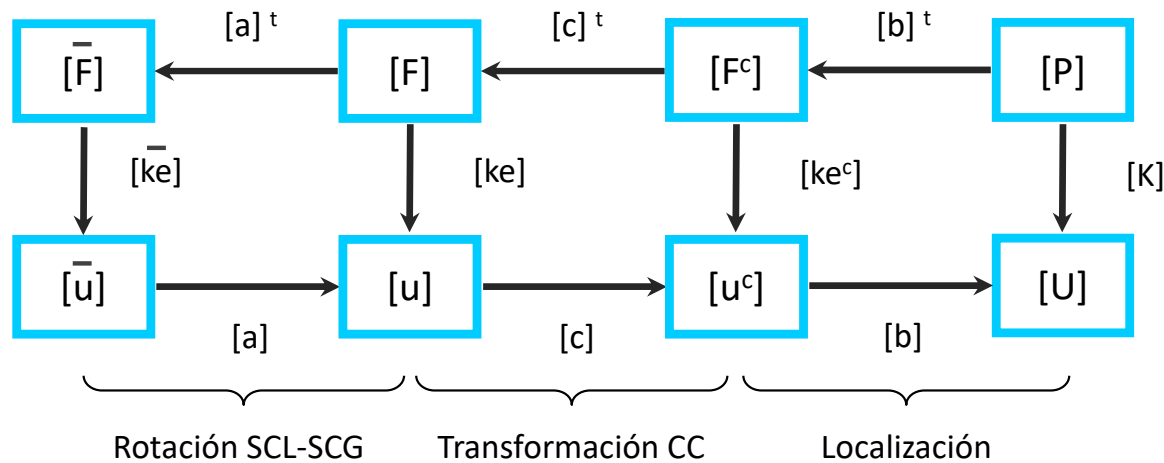
$$[u^j] = [c^i][u^i]$$

$$[c^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Diafragma Rígido (Diaphragm)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción



En la matriz de localización los DOF del nodo restringido cambian por los del MJ

En caso que los nodos j y k de la barra posean restricciones distintas

$$\begin{bmatrix} u^j \\ u^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ u^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x_j - x_i \\ \Delta_y &= y_j - y_i \end{aligned}$$

Nodo j

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x_k - x_m \\ \Delta_y &= y_k - y_m \end{aligned}$$

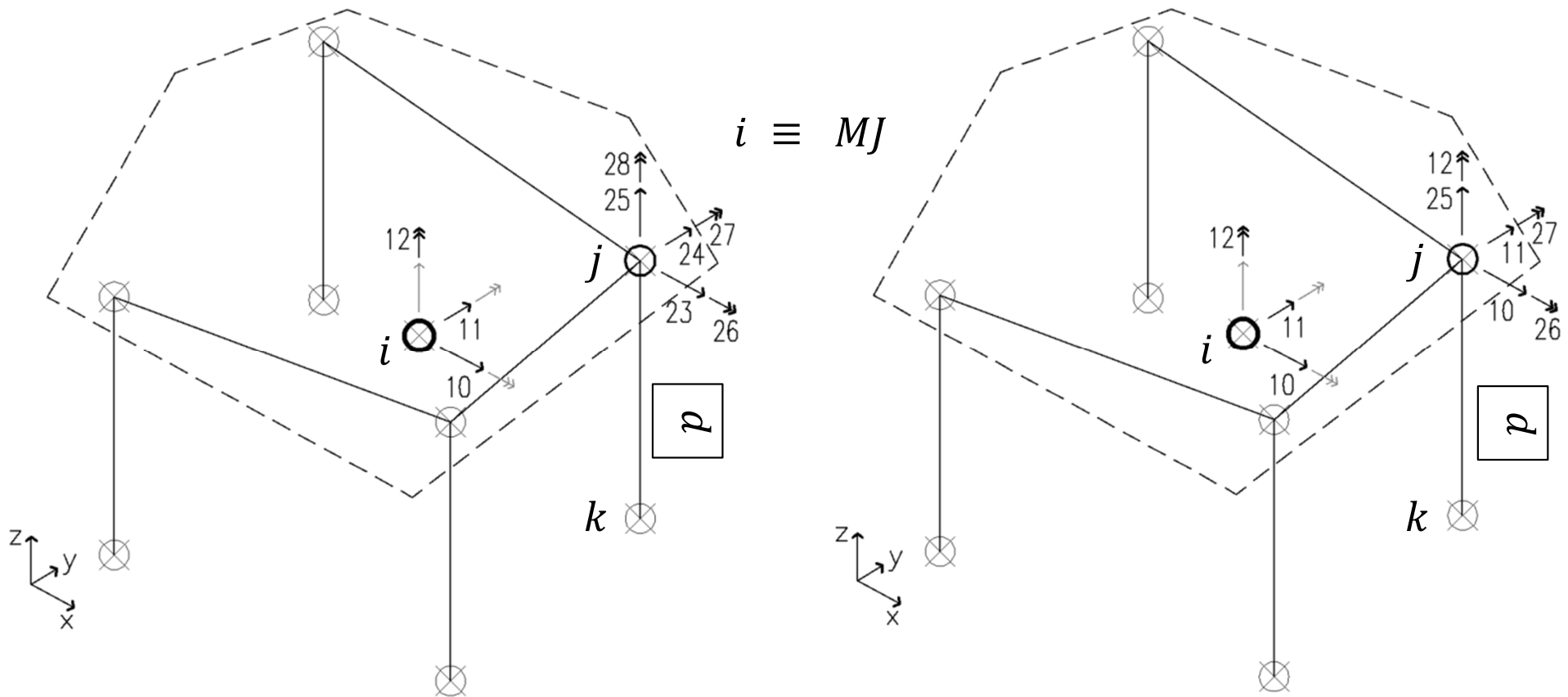
Nodo k

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Diafragma Rígido (Diaphragm)

Ecuaciones de Compatibilidad de la Restricción

En la matriz de localización los DOF del nodo restringido cambian por los del MJ



$$\begin{bmatrix} u^j \\ u^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ u^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x_j - x_i \\ \Delta_y &= y_j - y_i \end{aligned}$$

Nodo j

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x_k - x_m \\ \Delta_y &= y_k - y_m \end{aligned}$$

Nodo k

ESTRUCTURAS CON CONSTRICCIONES

Ejemplo Diafragma Rígido

Ver TP

ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS

Desplazamientos Impuestos

Los desplazamientos impuestos representan el caso de las condiciones de contorno inhomogéneas.

La ecuación de equilibrio global

$$[K] [U] = [P]$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1i} & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & K_{2i} & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdot & K_{ii} & \cdot & K_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & K_{ni} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ U_i \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ P_i \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos impuestos son valores conocidos de algunas componentes de $[U]$

Previo a resolver la estructura conocemos desplazamientos no nulos de algunos DOF

ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS

Desplazamientos Impuestos

Suponiendo conocido el desplazamiento U_2

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1i} & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & K_{2i} & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdot & K_{ii} & \cdot & K_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & K_{ni} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ U_i \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ P_i \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1i} & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & K_{2i} & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdot & K_{ii} & \cdot & K_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & K_{ni} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12}U_2 \\ K_{22}U_2 \\ \cdot \\ K_{i2}U_2 \\ \cdot \\ K_{n2}U_2 \end{bmatrix}$$

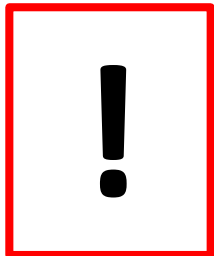
ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS

Desplazamientos Impuestos

Eliminando la fila y columna 2 y reemplazando el vector de cargas por:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1i} & \cdot & K_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdot & K_{ii} & \cdot & K_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & K_{ni} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_i \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 - K_{12}U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_i - K_{i2}U_2 \\ \cdot \\ P_n - K_{n2}U_2 \end{bmatrix}$$

Introduciendo las condiciones de contorno y resolviendo el sistema se obtienen los desplazamientos de toda la estructura provocados por los desplazamientos impuestos en algunos DOF

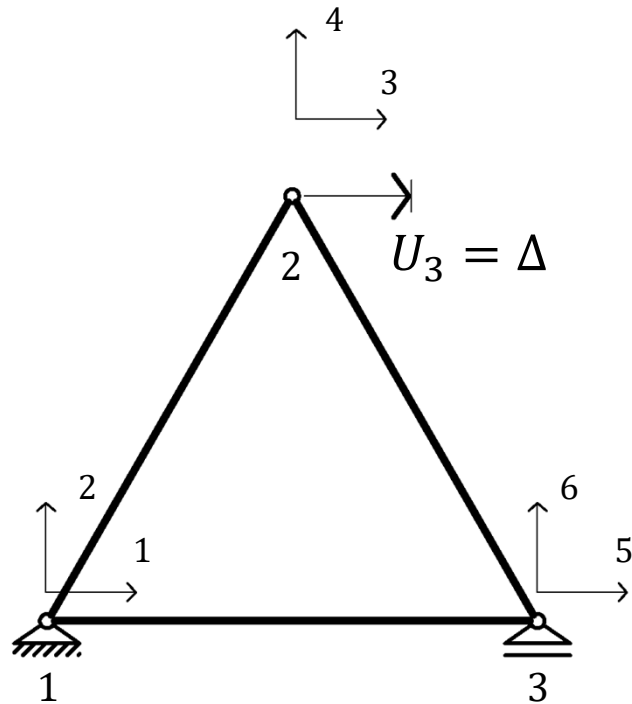


**En estructuras con desplazamientos impuestos
no vale PIASE**

ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS

Ejemplos

Imponemos un desplazamiento horizontal en el nodo 2



BIBLIOGRAFÍA

- Wilson, Edward. “Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering”. Computers and Structures, Inc. 1996-2001. ISBN 0-923907-00-9.
<https://edwilson.org/bookshelf/threedimensional.pdf>
- Oñate, Eugenio. “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”. CIMNE. Artes Gráficas Torres S.A., 1995. ISBN 84-87867-00-6