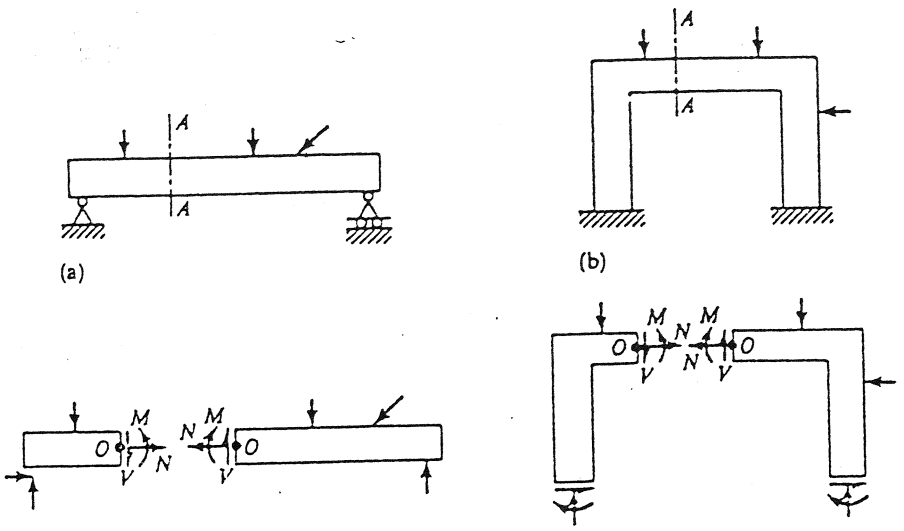
ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO I

LA INGENIERIA ESTRUCTURAL:

ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO I

LA INGENIERIA ESTRUCTURAL: ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL

1. INTRODUCCION.

1.1. Conceptos básicos y definiciones.

Las estructuras se diseñan y construyen para satisfacer requerimientos específicos de los seres humanos, los que pueden ser netamente funcionales y relacionarse con necesidades básicas de la sociedad, o bien, sin brindar una utilidad aparente, pueden tener afinidad con sentimientos estéticos o emocionales de aquélla. Entre ambos extremos caen la mayoría de las estructuras, ya que cumplen una función concreta y también están diseñadas en mayor o menor grado en armonía con las sensibilidades de la humanidad.

Se puede definir una ***estructura*** como un mecanismo diseñado y construido para soportar cargas (exteriores) y resistir las solicitaciones (interiores) que aquéllas provocan.

La aplicación de cargas a una estructura produce en ella *esfuerzos* y *deformaciones*. La determinación de estos esfuerzos y de estas deformaciones, tanto en lo que hace a sus valores extremos como a sus leyes de variación, constituye el objeto del ***análisis estructural.***

Un método dado de análisis estructural se expresa usualmente como un algoritmo matemático; sin embargo, la formulación de este algoritmo se basa en información obtenida a través de la aplicación de las teorías de la mecánica, investigaciones de laboratorio, experimentación en modelos y estructuras reales, experiencia y una gran dosis de criterio ingenieril.

El ***diseño estructural***, por su parte, tiene por objeto la determinación de la disposición y el dimensionado de todos los elementos estructurales, de manera tal que los mismos soporten en forma satisfactoria las cargas que se prevé actuarán sobre ellos, para lo cual requiere, entre otros, de los datos aportados por el análisis estructural.

En particular el diseño estructural implica determinar:

a) la disposición general de las estructuras y la de sus partes integrantes;
b) los posibles tipos o formas estructurales que respondan a soluciones funcionales, que a su vez sean técnica y económicamente factibles;
c) la consideración de los estados de cargas que solicitarán la estructura y la cuantificación de cada una de ellas;
d) el análisis y diseño preliminares de las soluciones posibles;
e) la selección criteriosa y fundada de una solución, y
f) el análisis y diseño final de la estructura, incluyendo la confección de los planos.

El campo del diseño estructural puede asociarse ya sea con la ciencia como con la ingeniería; sin embargo existen importantes diferencias entre los roles que desempeñan ambas disciplinas. Mientras que la ciencia involucra la investigación de lo que existe, la ingeniería debe ocuparse de construir lo que no existe. Aunque la ingeniería requiere la aplicación criteriosa de los principios científicos, su naturaleza creativa la convierte en un arte.

La *ingeniería estructural* se centra en lo relacionado con la concepción, análisis, diseño y construcción de los sistemas estructurales que se necesitan para apoyar las actividades humanas. Aunque la ingeniería estructural se halla más asociada a la ingeniería civil (que la tiene como parte componente en nuestros planes de estudio), interviene en cualquier disciplina que requiere sistemas o componentes estructurales, como un paso integral hacia el cumplimiento de sus objetivos.

Proyectos específicos que involucran ingeniería estructural incluyen realizaciones tan diversas como puentes, edificios, presas, medios de transporte, almacenamiento de líquidos o gases, medios de generación y transmisión de unidades de potencia, plantas de tratamiento de agua potable y de alcantarillado, fábricas y plantas industriales, componentes de máquinas, etc. Cada uno de estos emprendimientos requiere sistemas o componentes estructurales que deben ser concebidos para satisfacer las necesidades que se esperan cubrir con su materialización, diseñados y dimensionados para soportar en forma segura y útil las cargas que actuarán sobre ellas, y finalmente, construidos para proporcionar un producto final consistente con la concepción y el diseño.

1.2. El diseño de una obra de ingeniería.

El proceso que secuencialmente debe seguir el diseño de una obra de ingeniería es mucho más complejo que el esquema simplificado referido en el apartado anterior. Aunque generalmente se tiene la creencia que el papel principal del ingeniero está en el área de lo que impropiamente se denomina "cálculo" estructural, es imprescindible que el mismo participe activamente en la totalidad del proceso de diseño.

Para una mejor ilustración resulta conveniente seguir todos los pasos o etapas que corresponden a un proyecto típico de ingeniería civil, en las cuales se hallan involucradas las áreas atinentes a aspectos estructurales.

1.2.1. Etapa de concepción.

Cualquier proyecto de ingeniería debe estar dirigido hacia la satisfacción de un conjunto definido de objetivos. Durante la etapa de concepción o de planificación, se identifican las necesidades y se articulan cuidadosamente las diversas propuestas que puedan formularse para satisfacerlas. Estas propuestas deben ser consistentes con los deseos del cliente (muchas veces la comunidad) y los intereses de todas las demás partes involucradas.

Esta primera etapa requiere la intervención del cliente, arquitectos, planificadores, la comunidad adecuadamente representada, los organismos gubernamentales competentes y el ingeniero (o grupo de ingenieros) afectado al proyecto. En este nivel, el ingeniero frecuentemente opina o es consultado respecto a la factibilidad ingenieril y el costo asociado a las diversas alternativas bajo consideración. Sin perjuicio de ello el ingeniero debería también abrir juicio y opinar sobre temas menos específicos al área estructural

propiamente dicha, tales como aspectos estéticos, ambientales, de economía general del proyecto, etc.

La etapa conceptual debe concluir con la formulación de un plan que maximice la satisfacción de los objetivos preestablecidos y que minimice los aspectos objetables del proyecto.

1.2.2. Etapa de diseño preliminar.

El plan que emerge como resultado de la etapa anterior incluye frecuentemente varias alternativas sobre las que debe trabajarse a través de la preparación de diseños preliminares individuales.

Los diseños preliminares tienen una vital importancia, y en su elaboración el ingeniero juega un rol fundamental. Las decisiones clave con respecto a la posición y magnitud de la estructura, su tipología, los materiales constitutivos, la manera de conectar los componentes estructurales, etc., servirán de apoyo al diseño final. Es durante esta etapa que el talento creativo del ingeniero debe ser puesto de manifiesto al máximo para considerar las diversas posibilidades que sean consistentes con las alternativas planteadas en la etapa conceptual. En todo momento el ingeniero ha de tener presente que la estructura que está diseñando tendrá que ser luego materializada, por lo que los aspectos inherentes a su construcción deben ser ya previstos, a nivel de su factibilidad posterior, en esta etapa.

Cada diseño preliminar involucra una consideración completa de las cargas y acciones que tendrá que soportar la estructura. Para cada caso será necesario efectuar el pertinente análisis estructural, es decir, la determinación de las solicitaciones interiores y las deformaciones en toda la estructura.

Frecuentemente, los diseños preliminares pueden desarrollarse con métodos aproximados que brinda el análisis estructural para minimizar el tiempo y el esfuerzo invertidos en la fase preliminar, la que debe lograr un nivel tal que permita fundamentar decisiones inteligentes en la etapa siguiente.

1.2.3. Etapa de selección.

Una vez terminados los diseños preliminares correspondientes a cada una de las alternativas consideradas, corresponde efectuar la elección de la más conveniente. Para ello deben convocarse a las partes intervinientes en la etapa conceptual, de modo que puedan participar en el proceso de selección. La atención principal debe centrarse en evaluar cómo cada alternativa satisface los objetivos originalmente establecidos, dando también debida consideración a cualquier característica objetable que las mismas puedan presentar.

En esta etapa al ingeniero estructural/sta le conciernen las economías relativas a las alternativas, el impacto que pudiera tener cualquier característica única de cada una de ellas sobre el comportamiento estructural o los aspectos prácticos de la construcción y cualquier otro tópico relacionado con la decisión final.

1.2.4. Etapa de diseño definitivo.

Una vez elegida la alternativa considerada como la más conveniente, debe procederse a efectuar su diseño definitivo, etapa a la que también se suele

llamar como de *elaboración del proyecto ejecutivo*. En la misma los resultados de la etapa de diseño preliminar constituyen sólo el punto de partida, dado que ya en este nivel, el ingeniero estructuralista debe proceder con mayor precisión. Aquí las cargas se determinan con más exactitud de la que fue necesaria durante el diseño preliminar, y todas las posibles circunstancias y combinaciones de cargas deben ser consideradas.

Los resultados de esta etapa se concentran en un conjunto de planos con los diseños completos, que den una descripción gráfica de los aspectos generales, particulares y de detalle de todo el sistema estructural. Estos planos deben ser acompañados por especificaciones escritas que estipulen los materiales a emplear, la calidad de la mano de obra, las normas y reglamentos de aplicación, los niveles de aceptabilidad y de terminación y todos los demás aspectos que requieran quedar formalmente definidos para que a ellos se ajuste luego el proceso constructivo.

1.2.5. Etapa de construcción.

La meta de esta etapa es la de materializar la estructura diseñada en la fase de proyecto ejecutivo. La documentación técnica completa resultante de esta última, servirá como base al llamado a concurso para la ejecución de la obra.

Por lo general, inmediatamente antes de comenzar los trabajos de construcción, resulta necesaria la elaboración de planos de detalle complementarios relacionados con los mismos, labor que en obras de importancia debe complementarse con la adecuación definitiva del proyecto, en una tarea que se denomina como *ingeniería de detalle*. También en esta etapa se requiere la participación de un cuerpo competente de ingenieros estructuralistas (que deberían trabajar en coordinación con los que diseñaron la estructura), cuyo papel es vital a fin de minimizar la probabilidad de ocurrencia de fallas durante las construcción, hechos que por desgracia se produjeron y se producen en numerosas oportunidades. De hecho, algunos de los problemas más desafiantes en análisis estructural se relacionan con la etapa constructiva de las obras.

La secuencia de las etapas previamente referidas se ilustra mediante el diagrama de flujo de la figura 1, en el cual se consignan aquéllas en las que debe participar el análisis estructural, que como se observa, cumple un rol más limitado que el del diseño estructural, el que a su vez también es sólo una parte de todo el proceso de ingeniería integralmente considerado. De ello se desprende que el análisis estructural no constituye un fin por sí mismo, sino que debe acompañar y apoyar a las decisiones del diseño y de la ingeniería estructural.

1.3. Criterios de análisis y de diseño.

Los criterios fundamentales que deben guiar al ingeniero al encarar el análisis y diseño de una estructura son los de: funcionalidad, seguridad y economía.

Partiendo de la premisa que toda estructura debe cumplir los requisitos de ***funcionalidad*** que de su concreción se esperan, el segundo de los referidos criterios, el de ***seguridad***, significa que la estructura analizada y diseñada debe ser permanente en el tiempo, involucrando tal concepto a su vez, la resistencia mecánica, la estabilidad y la rigidez de la estructura.

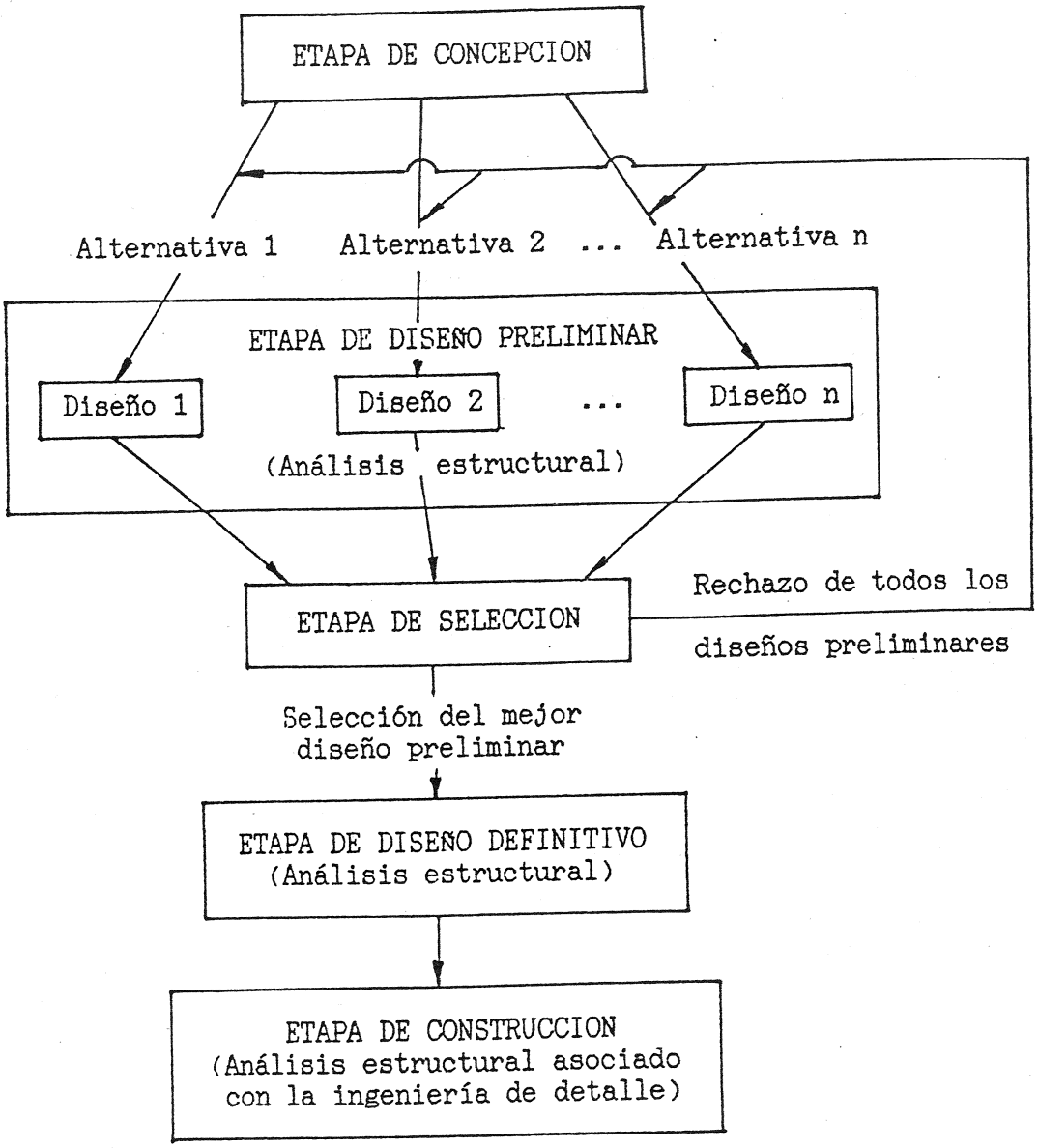


Figura 1

La determinación correcta de la *resistencia mecánica* de una estructura asegura su capacidad para soportar las cargas efectivas que actuarán sobre la misma cuando se halle en servicio, sin llegar nunca al estado de colapso o de rotura de la estructura o parte de ella.

La evaluación adecuada de la *estabilidad* revela la capacidad de la estructura para conservar las posiciones prefijadas y las formas de equilibrio adquiridas en estado deformado.

La verificación de la *rigidez* tiene por objeto proteger las estructuras contra grandes desplazamientos y vibraciones, de modo tal que las deformaciones producidas al actuar las cargas de servicio, no excedan las admisibles compatibles con el destino de aquéllas.

El tercer criterio, de *economía*, significa que debe llegarse a la solución requerida, con la estructura de mínimo costo (compatible con la seguridad), o

sea determinando las formas estructurales teórica y prácticamente racionales, que demanden el menor consumo de material, evitando tamaños innecesarios y dimensiones excesivas.

Evidentemente que los criterios de seguridad y economía son contrapuestos, y un adecuado balance entre ellos dará por resultado la solución óptima, siendo decisiva para su obtención, la habilidad y capacidad del ingeniero.

1.4. Resumen del proceso del análisis estructural.

En forma sintética el proceso del análisis estructural, debe comprender las siguientes fases:

1°) Establecer la disposición, forma y partes de que se compondrá la estructura; o sea, adoptar el trazado (o esquema teórico) de la misma, incluyendo sus dimensiones, las que se deben establecer por lo general "a priori", en forma intuitiva, en base a la experiencia del ingeniero.

2°) Fijar las cargas que soportará la estructura, en un todo de acuerdo a los conceptos que se exponen al respecto en el apartado siguiente.

3°) Determinar los valores extremos y leyes de variación de las solicitaciones internas (M, N, Q y M_t) y eventualmente de las deformaciones que se producen en cada uno de los distintos elementos que componen la estructura.

2. CARGAS SOBRE LAS ESTRUCTURAS.

La estimación precisa de las cargas que puedan aplicarse a una estructura durante su período de vida útil, es tal vez la tarea más importante y difícil del análisis estructural. No se deben dejar de considerar cargas que puedan presentarse con cierta probabilidad razonable.

Previo a proporcionar una visión general de los tipos de cargas que deben ser consideradas, resulta conveniente efectuar una primera clasificación de las mismas en cargas *permanentes* y cargas *accidentales* (o sobrecargas), a las que algunos autores llaman también cargas muertas y cargas vivas, respectivamente.

2.1. Cargas permanentes.

Son cargas de magnitud constante que permanecen fijas en un mismo lugar; constan del peso propio de la estructura y de todas las cargas que están permanentemente unidas a ella. En un edificio algunas de las cargas muertas son la estructura en sí, los muros, los pisos, aislaciones, tuberías, accesorios, etc.

Para diseñar una estructura es necesario estimar los pesos de los diversos elementos que la constituyen. Sin embargo los tamaños y por ende los pesos exactos de las partes, no se conocen hasta tanto no se haya terminado el análisis estructural y efectuado luego el dimensionado de cada uno de tales elementos. Una vez concretada esta etapa, los pesos resultantes del diseño deben ser comparados con los pesos estimados al comenzar el proceso. Si resultaran grandes diferencias, será necesario repetir el análisis, reiniciándolo partiendo de pesos mejor estimados.

2.2. Cargas accidentales.

Son aquellas que pueden cambiar en magnitud y en posición. En forma simple, todas las cargas que no son muertas son vivas. Las cargas accidentales que se mueven por su propia fuente de energía, como vehículos, personas y grúas se denominan *móviles*, mientras que aquellas que pueden ser movidas, tales como muebles, materiales depositados y la nieve, se llaman *movibles*. Otras cargas vivas son las causadas por las operaciones de construcción, el viento, la lluvia, los sismos, el frenado e impacto de vehículos sobre puentes, las explosiones, los suelos, los cambios de temperatura, etc.

Algunas de estas acciones merecen que se efectúen consideraciones complementarias sobre ellas a fin de clarificar los aspectos atinentes a su acción sobre las estructuras.

2.2.1. Cargas de ocupación para edificios.

Las cargas vivas de ocupación para edificios se especifican usualmente en términos de valores mínimos en kg/m^2, los que deben ser considerados para los fines del análisis. Los valores a adoptar suelen estar contenidos en los Códigos de Edificación municipales, consignados en función del destino de los locales.

2.2.2. Cargas de tránsito para puentes.

Los puentes deben diseñarse para soportar las cargas vehiculares asociadas con su uso funcional. En el caso de puentes carreteros los valores a adoptar, de acuerdo a la categoría del puente, quedan estipulados en los Reglamentos de las Direcciones de Vialidad con jurisdicción en la ruta, camino o zona de ubicación del puente.

El enfoque consiste usualmente en especificar una carga estándar, que debe colocarse sobre el puente. Esta carga está constituida por un sistema de cargas concentradas (transmitidas por los ejes de una aplanadora) más una carga uniforme, que simula una fila de vehículos. Cada arreglo de carga se coloca separadamente sobre la estructura de forma tal de producir el máximo valor de cada respuesta particular (momentos flectores, esfuerzos de corte, reacciones sobre pilas y estribos, etc.), adoptándose en cada caso el valor más desfavorable para los efectos del análisis de la estructura. Cada tipo de respuesta debe tratarse separadamente, a fin de establecer la distribución de las cargas críticas pertinentes.

Información semejante se halla disponible para cargas de puentes ferroviarios, siendo similares los criterios para determinar las condiciones de carga más desfavorables.

2.2.3. Cargas de viento.

Conjuntamente con las acciones sísmicas, constituyen las cargas laterales a considerar en el diseño estructural. Muchas fallas estructurales han sido ocasionadas por el viento. Una de las más graves fue probablemente la ocurrida en el puente Tay en Escocia en 1879 (murieron 75 personas); el derrumbe del puente Tacoma en el Estado de Washington es también muy conocido, pues modificó los criterios de diseño de puentes de grandes luces. Han ocurrido también fallas desastrosas en edificios debidos al viento, como el caso del Union Carbide en

Toronto en 1958. Muchas de las fallas han ocurrido durante el proceso de montaje.

Las presiones del viento sobre las estructuras se suponen en general uniformemente aplicadas a la superficie de barlovento y se considera que pueden provenir de cualquier dirección. Estas hipótesis, sin embargo, no son muy correctas porque las presiones ejercidas por el viento no son uniformes sobre grandes áreas, alcanzando probablemente en las proximidades de las esquinas de los edificios sus intensidades máximas. Por lo tanto, desde un punto de vista práctico, resulta imposible considerar todas las variaciones posibles a los fines del análisis, aunque las reglamentaciones actuales tienden a ser más detalladas en la formulación de sus requisitos.

Las fuerzas del viento actúan como presiones sobre las superficies verticales a barlovento, como presiones o succiones en superficies inclinadas (el signo depende de la pendiente) y como succiones en superficies horizontales y en superficies inclinadas y verticales a sotavento, debido a la formación de presiones negativas o vacíos. Por otra parte, las magnitudes de las cargas por viento varían con la localidad geográfica, la altura sobre el suelo, el tipo de terreno que rodea a la construcción, incluyendo las estructuras aledañas (aspecto también variable a su vez) y otros factores.

Un caso especial es la situación de las construcciones frente al paso de tornados y huracanes, en que además de las ráfagas de aire, se produce una considerable reducción de la presión atmosférica. Esta no se transmite al interior de los edificios herméticamente cerrados y así las presiones interiores, al ser mayores que las exteriores, generan fuerzas dirigidas hacia afuera contra los techos y paredes.

2.2.4. Cargas sísmicas.

Una carga dinámica usual que deben resistir las construcciones es la asociada con los movimientos sísmicos. En este caso, las cargas no se aplican a la estructura en la forma normal, dado que, por la naturaleza del fenómeno, la base de la estructura es sometida a un movimiento repentino. Como la parte superior de la construcción se opone al movimiento debido a su inercia, se produce una deformación inducida en la estructura, la que a su vez da origen a una vibración horizontal que produce fuerzas cortantes horizontales distribuidas en altura sobre la estructura.

Para fines de análisis estructural, los efectos de un sismo pueden expresarse en muchos casos, en forma simplificativa, como un conjunto de fuerzas laterales estáticas equivalentes, las que dependen de las aceleraciones asociadas con el movimiento del terreno, las características dinámicas de la construcción y la distribución de las masas en toda la estructura.

2.2.5. Cargas de nieve y de hielo.

Los valores a considerar para cuantificar las sobrecargas por nieve se basan sobre los registros efectuados de nieve caída en áreas geográficas dadas. Esta información se proporciona a través de los reglamentos atinentes, en los cuales se especifican las modificaciones a introducir por diversas causas, tales como la pendiente del techo, a fin de obtener los valores finales para el análisis.

Las cargas debidas a hielo pueden llegar a ser importantes en ciertos tipos de estructuras, tales como presas y puentes, cuando las condiciones climáticas del lugar favorecen su producción.

2.2.6. Cargas de impacto.

Las cargas que accionan sobre la estructura en un período de tiempo extremadamente corto, casi instantáneo, tienen sobre ella un efecto mayor que el que se produciría si la misma carga se aplicara estáticamente. La forma en que la carga varía con el tiempo, por una parte, y el tiempo que demora la plena carga en ser aplicada sobre la estructura, por otra, determinan el factor por el cual debe incrementarse la respuesta estática para obtener la respuesta dinámica. Este incremento generalmente se tiene en cuenta en los cálculos por medio de un *factor de impacto*.

Una situación en la que se consideran solicitaciones de este tipo, es la acción de cargas vehiculares móviles sobre los puentes carreteros, en los que el ingreso y tránsito de los vehículos sobre la estructura se supone que produce una carga de impacto sobre el puente.

2.2.7. Presiones de agua y de suelos.

Las presiones de los líquidos actúan normalmente a las superficies de cualquier elemento estructural que se sumerja en aquéllos. La intensidad de esta presión normal está dada por $p = \tau.h$, donde τ es el peso específico del líquido y h es la diferencia de altura entre la superficie del mismo y el punto considerado. Se produce así una distribución triangular de la intensidad de la presión, que aumenta con la profundidad, que actúa sobre el exterior de las estructuras sumergidas o en el interior de los depósitos o tanques.

Las estructuras que se desarrollan por debajo del nivel del terreno, tales como los muros de contención, los muros perimetrales de los subsuelos, los cimientos, etc., se hallan sujetas a empujes de tierra, cuya determinación surge de las teorías desarrolladas en Mecánica de Suelos.

Si la estructura se extiende debajo del nivel freático, deberán considerarse los efectos combinados de la presión del agua y del suelo, y en su caso, adicionar la acción sísmica y las eventuales sobrecargas.

2.2.8. Perturbaciones inducidas.

Dentro de un sistema estructural pueden ocurrir numerosas perturbaciones, las que inducen deformaciones que producen fuerzas y solicitaciones complementarias que se desarrollan dentro de aquél. Estas perturbaciones pueden ser causadas por el asentamiento de los apoyos o de los cambios de longitud de los elementos, los que pueden provenir de la variación de temperatura en un miembro, del ajuste forzado de una barra de longitud inadecuada durante el montaje, etc. Para ciertas clases de estructuras (sobre todo las hiperestáticas), los esfuerzos que se inducen como consecuencia de estas perturbaciones pueden alcanzar magnitudes apreciables.

Aunque estas causales no son realmente cargas, su efecto sobre la estructura es equivalente a si lo fueran y el mismo resulta evidente cuando se consideran las ecuaciones resultantes para el análisis de la estructura.

2.2.9. Cargas combinadas.

Una vez estimadas las cargas, el problema siguiente consiste en determinar cuál será la peor o más desfavorable combinación de las mismas que pueda presentarse en un momento dado, puesto que el diseño de una estructura debe ser consistente con la combinación de cargas más críticas que la misma pueda soportar durante su vida útil. Sin embargo, es necesario fijar algún criterio al seleccionar qué condiciones de carga pueden combinarse razonablemente. Es obvio que los efectos máximos de cada condición de carga no deberían combinarse directamente, ya que es altamente improbable que actúen simultáneamente. De hecho son remotas las posibilidades de ocurrencia de varias combinaciones individuales; la plena carga de nieve no es probable que suceda junto con la plena acción del viento, ya que éste expulsaría gran parte de la nieve fuera de la estructura; un sismo de gran magnitud no es probable que ocurra en el instante en que la estructura esté sometida a plena carga de viento o solicitada por la sobrecarga ocupacional máxima, etc.

Las combinaciones de cargas que deben ser consideradas en cada caso, se especifican normalmente en los códigos y reglamentos que rigen al respecto.

3. ORGANIZACION Y CLASIFICACION DE LAS ESTRUCTURAS.

La organización que puede adoptar una estructura depende de muchas consideraciones. Frecuentemente los requisitos funcionales de una estructura limitan las posibles formas que pueden considerarse para su diseño y materialización. Otros factores, tales como el sistema de cargas, las características y disponibilidades de materiales, condiciones de cimentación, requisitos estéticos y limitaciones económicas, juegan también papeles importantes al momento de definir la forma estructural.

Salvo en los casos rutinarios, determinar la organización de una estructura requiere estudio, criterio y experiencia. Normalmente deben plantearse dos o más formas de organización para una misma estructura, de acuerdo con la fase de diseño consignada en el apartado 1.2.2., las que después deben ser críticamente comparadas previo a definir la solución más adecuada. En ocasiones será necesario modificar la organización inicialmente adoptada, para permitirle satisfacer ciertas condiciones imprevistas que puedan aparecer en las fases subsiguientes del diseño.

3.1. Tipos de estructuras.

3.1.1. Estructuras de barras.

Son las estructuras que se analizarán en los capítulos posteriores, y pueden clasificarse en:

- vigas, de ejes recto o curvo;
- entramados planos de nudos rígidos, denominados pórticos (simples o múltiples) o estructuras aporticadas;
- entramados planos de nudos articulados, denominados usualmente armaduras o reticulados;
- emparrillados planos, o bien,
- combinaciones de los tipos anteriores.

Cada una de las estructuras mencionadas está formada por *elementos* o *miembros* estructurales, cuya longitud predomina netamente en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Los *nudos* de una estructura (o *vértices* en el caso de los reticulados) son los puntos de intersección o encuentro de los miembros.

Se denomina usualmente como ***viga*** (figura 2a) a una estructura formada por miembros rectos, que cuenta con uno o más puntos de apoyo. Cuando el eje es curvo se reserva para estas estructuras el nombre de ***arcos*** (figura 2b). Las acciones aplicadas sobre cualquiera de ellas pueden generalmente considerarse actuando en un plano que contiene un eje de simetría de la sección transversal, que será también eje principal de la misma. Como consecuencia de ello, las deformaciones se producirán en ese mismo plano.

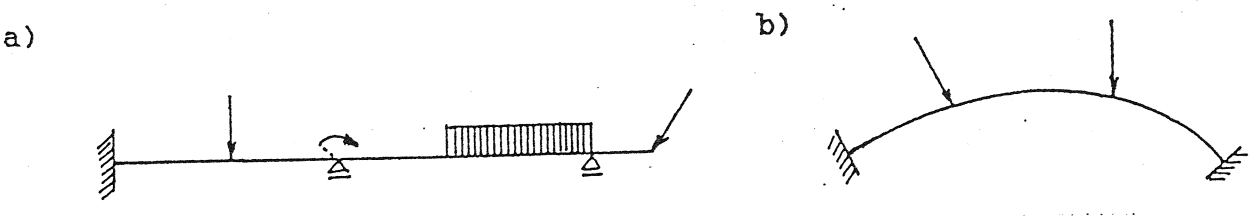


Figura 2

Una estructura aporticada. o simplemente ***pórtico***, está constituida por elementos coplanares que tienen sus ejes de simetría en ese mismo plano, donde también ubican las acciones actuantes y se desarrollan los desplazamientos (figura 3). Cuando se aplican cargas a una estructura de este tipo, la misma se deformará y sus nudos rotarán, pero los miembros estructurales que se unen en un nudo particular no se moverán entre sí (o sea que los ángulos entre los extremos de los elementos no variarán), constituyendo los que se denominan "nudos resistentes a momento" o *nudos rígidos*, cuyo empleo incrementa la capacidad de carga de la estructura.

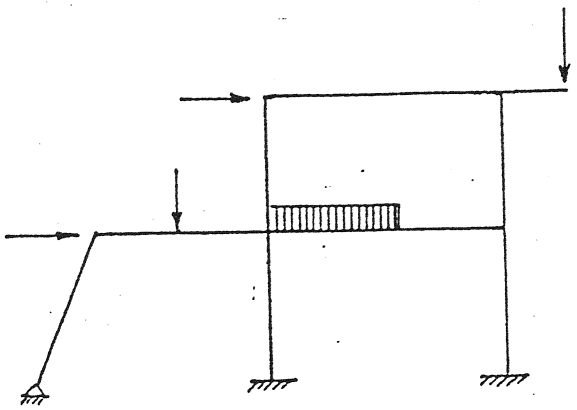


Figura 3

Los pórticos constituyen usualmente el armazón o esqueleto resistente de los edificios, ya sea construidos en acero o en hormigón armado. A los miembros horizontales (o levemente inclinados) se los denomina *vigas*, las que se hallan solicitadas predominantemente a flexión y corte, mientras que los elementos verticales (o eventualmente oblicuos), constituyen los *columnas* del pórtico, las

que trabajan por lo general (además del corte), a flexo-compresión, salvo casos particulares de fuertes acciones de dirección horizontal (sísmicas por ejemplo), que pueden generar en algunas de las columnas, solicitaciones de flexo-tracción.

Tanto en el caso de las vigas y arcos como en el de los pórticos, el análisis completo de las solicitaciones interiores quedará concretado una vez hallados los valores y leyes de variación de cada una de las solicitaciones presentes en todas sus barras, resultando como forma más conveniente para presentar los resultados la del trazado de los diagramas respectivos.

Una ***armadura plana*** o ***estructura de reticulado*** (figura 4) se idealiza como un sistema de elementos o barras coplanares, que se suponen interconectadas en sus extremos (vértices) por medio de articulaciones sin rozamiento, de manera tal de conformar una estructura que en su conjunto actúa como una viga de gran tamaño. Los elementos forman generalmente uno o varios triángulos en un único plano, en el que también se hallan las cargas externas, las que se suponen dispuestas en forma tal que se encuentran aplicadas en los vértices. Si hubiese cargas actuando en los propios miembros, para propósito de análisis se las reemplazaría por cargas estáticamente equivalentes aplicadas en los vértices. Luego, el análisis de las solicitaciones internas de un reticulado dará como resultado fuerzas axiales de tracción o de compresión en cada una de sus barras.

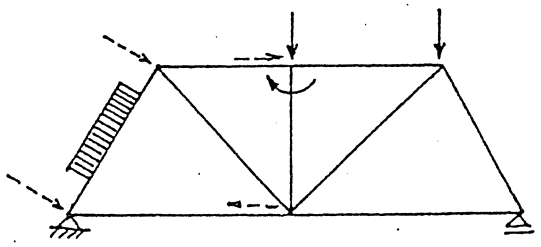


Figura 4

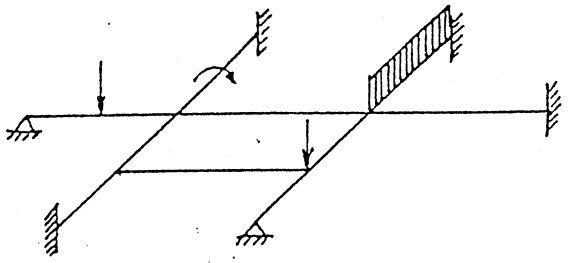


Figura 5

Un ***emparrillado*** (figura 5) es una estructura plana compuesta de miembros continuos que se intersectan o se cruzan. Mientras que en un pórtico plano las acciones aplicadas se hallan todas en el plano de la estructura, en el caso del emparrillado las acciones son normales (eventualmente oblicuas) al plano de la estructura. Esta orientación de la carga suele dar como resultado la aparición de momentos torsores, además de los momentos flectores, esfuerzos de corte y esfuerzos normales, cuyos valores y leyes de variación será preciso determinar. Se considera que cada miembro tiene dos ejes de simetría en su sección transversal, de modo que la torsión y la flexión se desarrollan independientemente una de otra.

3.1.2. Estructuras de superficies.

Las estructuras referidas en el apartado anterior están compuestas por elementos individuales que están conectados de manera de conformar un esqueleto estructural en el espacio, que debe soportarse a sí mismo y a todo lo que quede unido a él.

Otro tipo de elementos estructurales obtienen su configuración espacial a través de superficies tridimensionales continuas, y las cargas actúan sobre y deben ser resistidas mediante las superficies en sí mismas. Estructuras de este

tipo son las losas o placas, placas plegadas, cáscaras, cúpulas y membranas. Mediante muchas de ellas pueden lograrse algunos de los sistemas estructurales más eficientes en términos del uso del material, lo que conduce a economías inherentes, a la vez que brindan al diseñador una gran flexibilidad para crear estructuras de alto vuelo estético.

3.1.3. Formas estructurales prácticas.

La mayoría de las estructuras están conformadas por una combinación de varias formas estructurales, donde cada subestructura sirve de una manera única, y el conjunto debe satisfacer los objetivos funcionales requeridos por la estructura toda. Así, en el caso de un edificio por ejemplo, las cargas primarias actúan sobre las losas o elementos que constituyen los entrepisos y sobre los techos (cualquiera sea su configuración geométrica) y son transmitidas a las vigas y muros perimetrales. Las vigas a su vez descargan en columnas (eventualmente a través de otras vigas), y en definitiva, todos los elementos portantes verticales (muros y columnas) descargan en el terreno a través de la cimentación.

Si bien, tanto los sistemas de barras caracterizados en el apartado 1.3.1., como los superficiales referidos en 1.3.2., forman parte usualmente de las estructuras, y ambos son objeto del Análisis Estructural, en los capítulos siguientes serán tratados sólo los primeros, pues los segundos se hallan en el ámbito de otras asignaturas, por las particularidades específicas que su resolución presenta. En efecto; tal resolución debe tomar en consideración la geometría de la superficie y las propiedades tridimensionales del material, requiriendo otras pautas de análisis. Para ello, los métodos modernos discretizan estas estructuras en un sistema de elementos individuales, a los que luego se aplica el denominado *análisis de elementos finitos*.

Sin perjuicio de lo anterior, frente a un caso real, deberán conjugarse todos los procedimientos de análisis conducentes a una resolución integrada y coherente.

3.2. Esquema teórico o de análisis de una estructura.

El análisis de una estructura tomando en consideración todas las dimensiones y formas geométricas de sus elementos constitutivos, como así también la rigurosa interacción entre estos últimos, es, o complicado en la práctica y por consiguiente inaceptable, o teóricamente inadmisible. Por ello, el Análisis Estructural, como cualquier otra ciencia, emplea el procedimiento de abstracción científica, sustituyendo, al efecto del cálculo, las estructuras por sus esquemas.

El *esquema teórico* o *de análisis* de una estructura es su representación simplificada, donde sólo se indican los datos fundamentales que determinan su comportamiento bajo carga. En el esquema, las barras se sustituyen por sus líneas baricéntricas, llamadas ejes; las placas se sustituyen por sus superficies medias; las secciones transversales de las barras y las normales a las superficies medias de las secciones de las placas, independientemente de sus formas, se caracterizan, de un modo general, por los valores numéricos de las superficies y de los momentos de inercia; los sistemas reales de sustentación de la construcción son sustituidos por vínculos de apoyo ideales; las uniones más o menos rígidas de las barras de las armaduras son reemplazadas por articulaciones; las cargas sobre las superficies de los elementos son

trasladadas a los ejes o a las superficies medias, etc. Bajo esta concepción, es como si el esquema de una estructura representara a su esqueleto.

El dimensionado de una construcción se efectúa es base a su esquema teórico. Si el esquema completo de una estructura es simple y accesible para ello, se lo emplea como esquema teórico. Pero si el esquema completo resulta complejo para el análisis, entonces debe sometérselo a simplificaciones posteriores despreciando complementariamente ciertas propiedades o características que juegan un papel secundario en el trabajo o comportamiento real de la construcción. Estas simplificaciones, a veces, son indispensables para llevar adelante un cálculo en condiciones prácticas de realización y que conduzca, en sus resultados, a un grado aceptable de exactitud. En consecuencia y en términos generales, se adopta como esquema teórico de una estructura al esquema completo, convenientemente simplificado. A nivel de ejemplo, en la figura 6a) se muestra el esqueleto estructural resistente de una construcción de hormigón armado, mientras que en la figura 6b) se indica su esquema teórico, sobre el cual se efectúa el análisis y diseño.

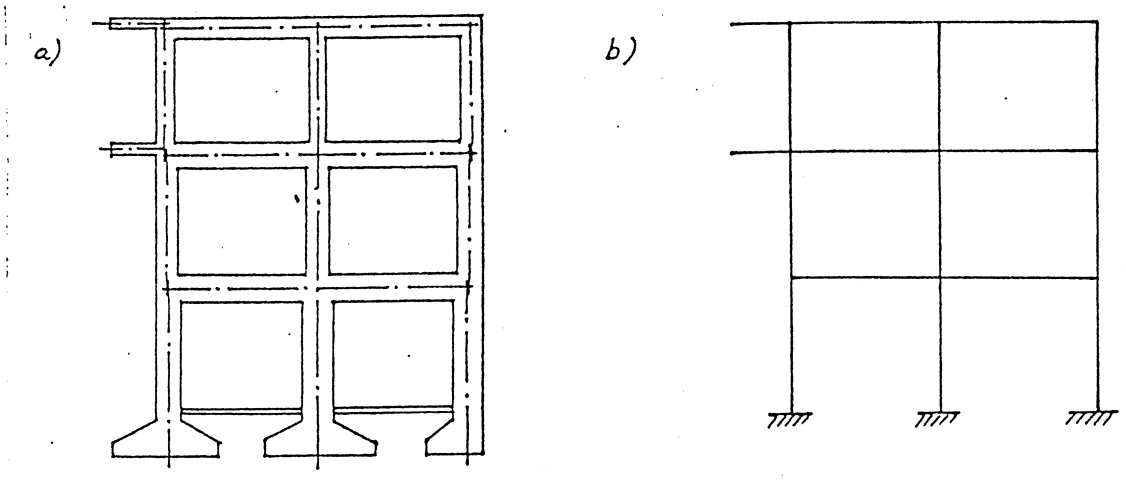


Figura 6

En la figura 7a) se indica la configuración real de una armadura, cuyo esquema completo corresponde al de la figura 7b). Sin embargo, al mismo es aplicable lo señalado con anterioridad en cuanto a la complejidad a los fines del cálculo, por lo que se introducen las simplificaciones que se muestran en el esquema final para análisis, que muestra la figura 7c).

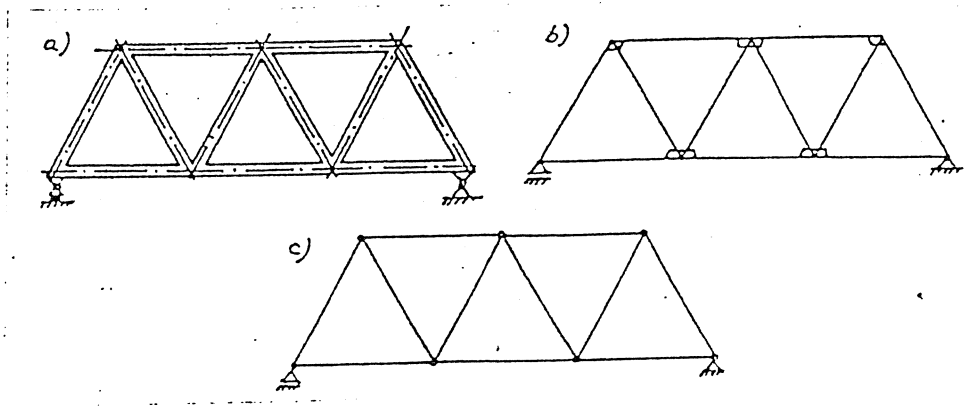


Figura 7

La elección del esquema para analizar una estructura es un problema complicado e importante, dependiendo de ella, fundamentalmente, la calidad final de dicho análisis. Incluso con un método exacto, el resultado puede no ser correcto si el esquema ha sido elegido incorrectamente. De lo expuesto se desprende que la elección del esquema teórico se halla estrechamente relacionada con la exactitud exigida al resultado. El esquema para análisis preliminares puede ser extremadamente simple y aproximativo, pero para los definitivos debe ser más riguroso y perfeccionado.

En todos los casos hay que tener presente que el proceso de simplificación debe ser practicado con criterio para asegurar que los resultados no se aparten sustancialmente de los de la estructura real. No hay sustituto para la experiencia al momento de establecer los límites en el proceso de simplificación.

3.3. Magnitudes a utilizar.

En los algoritmos que deben formularse para efectuar los análisis de las estructuras que se estudiarán en lo sucesivo, intervienen cuatro tipos de magnitudes o parámetros básicos, a saber:

a) **Parámetros geométricos:** coordenadas, segmentos, ángulos y características de las secciones transversales (fundamentalmente sección y momentos de segundo orden, y en algunos casos, dimensiones netas).

b) **Parámetros estáticos:** acciones exteriores (activas y reactivas) y solicitaciones internas.

c) **Deformaciones:** desplazamientos lineales (o corrimientos) de los puntos del eje baricéntrico y angulares (o rotaciones o giros) de las secciones transversales o de las tangentes a dicho eje.

d) **Constantes de los materiales:** módulos de elasticidad (longitudinal y transversal) del material estructural, coeficiente de dilatación térmica lineal y constantes elásticas de los apoyos o de las fundaciones.

3.4. Hipótesis fundamentales.

Se supondrá, como base de los desarrollos que se efectuarán para la resolución de estructuras, que en todos los casos se verifican las siguientes hipótesis:

a) El material (o los materiales) que constituyen las estructuras son:

- *continuos*, o sea que en la masa del material no existen oquedades, grietas, fisuras o discontinuidades de tipo alguno, de modo tal que la misma ocupa plenamente el volumen atribuido al sólido. De este modo se puede aplicar en dichos métodos, el cálculo infinitesimal.

- *homogéneos*, es decir que todos los puntos tienen las mismas propiedades, e

- *isótropos*, o sea que para cada punto las propiedades son iguales en todas las direcciones.

b) El material (o los materiales) que componen las estructuras son *elásticos*, o sea que responden a la ley de Hooke.

La elasticidad se define como la capacidad que tienen los cuerpos de recobrar su forma primitiva una vez que dejan de actuar las cargas que los deformaban. La ley de Hooke rige los fenómenos de deformación de los materiales elásticos sometidos a la acción de una carga, y establece que las deformaciones absolutas (o específicas) son proporcionales a las cargas (o tensiones) que las producen.

c) Todas las deformaciones son pequeñas y no alteran significativamente la geometría inicial de la estructura y sus elementos constitutivos.

Para cuantificar la condición enunciada en esta hipótesis, deben recordarse los principios básicos atinentes de la cinemática. Si a una chapa articulada en el punto O (figura 8), se la somete a un giro pequeño en el sentido indicado, un punto cualquiera de la misma, tal como el A, al rotar la chapa, describirá un arco de circunferencia pasando a la posición A_1, siendo

$$\widehat{AA_1} = \overline{OA} \cdot \theta(\text{rad})$$

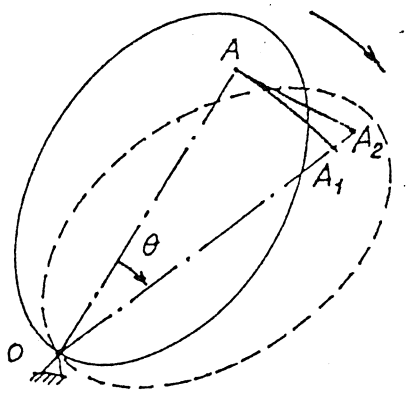


Figura 8

Si el ángulo θ es suficientemente pequeño, se verifica que

$$\text{tg } \theta \approx \theta(\text{rad})$$

es decir que la tangente trigonométrica del ángulo toma valores sensiblemente iguales al valor numérico del ángulo expresado en radianes, por lo que a los efectos prácticos del análisis estructural se los puede adoptar indistintamente. En consecuencia, si se considera el desplazamiento del punto A sobre la tangente geométrica $\overline{AA_2}$ (perpendicular a $\overline{OA}$) en lugar del arco $\widehat{AA_1}$, resulta

$$\overline{AA_2} = \overline{OA} \cdot \text{tg } \theta$$

Teniendo en cuenta los criterios expuestos y efectuando la comparación de las expresiones obtenidas, se tiene que

$$\widehat{AA_1} \approx \overline{AA_2}$$

En conclusión, cuando las deformaciones son pequeñas, el desplazamiento de un punto cualquiera de una estructura que rota alrededor de un punto O, puede considerarse directamente según la dirección normal a la recta que une ambos puntos ($\overline{OA}$).

Complementariamente, la adopción de esta hipótesis implica considerar que la longitud de cada barra permanece invariable entre el estado inicial y el estado deformado final, o sea $\overline{OA} \approx \overline{OA_2}$, al ser $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta$ para valores de θ suficientemente pequeños.

d) Todas las cargas se aplican gradualmente (si bien en un tiempo extremadamente corto) desde cero hasta su valor final.

e) Es válido el *Principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos*, el cual expresa que: "Si sobre una estructura actúa un sistema de acciones exteriores, la magnitud de cualquier efecto producido por las mismas (reacción de vínculo, solicitaciones interiores, tensiones, deformaciones, etc.), puede determinarse como la suma algebraica o geométrica de los valores componentes de dicha magnitud, producidos por cada una de las acciones que componen el sistema, consideradas actuando en forma independiente y sucesiva". En otras palabras, que el efecto de un sistema de cargas sobre una estructura es igual a la suma de los efectos de las cargas individuales, aplicadas separadamente y en un orden cualquiera.

La suma algebraica para las magnitudes escalares y los valores numéricos (módulos) de los vectores se aplica cuando los mismos están ubicados según una dirección única, por ejemplo la reacción de vínculo de un apoyo móvil, el esfuerzo interno en una barra de reticulado, las solicitaciones internas (M, N y Q) en una sección transversal determinada de una viga, etc. La suma geométrica, por su parte, se aplica cuando los vectores representativos de la magnitud a determinar, pasan por un mismo punto, pudiendo tener cualquier dirección, por ejemplo, la reacción de vínculo en una articulación, el vector tensión total en una sección transversal, etc.

El Principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos tiene una importancia fundamental en las resoluciones que encara el análisis estructural, al simplificar considerablemente los cálculos, debido a lo cual, muchos de los métodos de resolución se hallan sustentados sobre el mismo. Sin embargo, conviene hacer notar que este principio no es siempre aplicable, quedando acotado su campo de validez al cumplimiento de las siguientes condiciones:

- el material es elástico y responde a la ley de Hooke;
- cada carga por separado y todas en su conjunto producen cambios pequeños en la forma de la estructura, y
- la determinación de las reacciones y de las solicitaciones internas se efectúa por el estado no deformado de la estructura.

Precisamente estas tres hipótesis han sido establecidas de acuerdo a lo indicado en los puntos b) y c) precedentes.

f) Las constantes de los materiales se determinan experimentalmente y son invariables en el tiempo.

g) El sistema se halla en estado de equilibrio estático, concepto que se amplía en el apartado siguiente.

4. EQUILIBRIO ESTATICO.

4.1. Acciones exteriores activas y reactivas.

Cualquiera sea una estructura, estará siempre sujeta a una determinada condición de carga que resulta de su propio peso muerto, del peso de la aportación funcional de los elementos que soporta y del impacto del medio ambiente en que se erige. Este estado de cargas puede ser más o menos complicado de cuantificar, según los lineamientos generales expuestos en el apartado 2.; sin embargo, con la ayuda de la información contenida en los códigos y reglamentos de aplicación, de investigaciones y de ensayos, se puede suponer finalmente una condición de carga determinada. Serán necesarias asimismo consideraciones adicionales relativas a cómo se aplica esta condición de carga a la estructura. El resultado de las referidas consideraciones será un conjunto de fuerzas aplicadas, de magnitudes definidas, actuando según direcciones establecidas, en puntos determinados de la estructura. Cabe destacar que en este contexto, el término "fuerza" tiene un significado general, que puede incluir pares.

Cualquiera sea la naturaleza, magnitud y distribución de las cargas actuantes, que constituyen las *acciones exteriores activas* o *acciones aplicadas*, las mismas deberán siempre hallarse contrarrestadas por fuerzas generadas a través de los puntos de apoyo de la estructura, que serán las *acciones exteriores reactivas*.

Sin perjuicio de lo anterior, debe notarse que las fuerzas que actúan sobre una estructura pueden ser *estáticas* o *dinámicas*. Las primeras son de magnitudes fijas e independientes del tiempo, mientras que las segundas tienen magnitudes variables con el tiempo. En los capítulos siguientes se tratarán únicamente condiciones de cargas estáticas o condiciones de cargas dinámicas que pueden sustituirse por cargas estáticas equivalentes a los efectos del análisis.

Desde otro punto de vista las cargas que actúan sobre una estructura pueden ser *fijas* o *móviles*. En este último caso, resulta fundamental determinar, de entre las infinitas posiciones que una sobrecarga móvil puede ocupar sobre la estructura, aquella que dará origen al máximo valor de cada reacción de vínculo y al valor o valores extremos (cuando son de signo contrario) de las solicitaciones internas (M, N y Q en cualquier sección de estructuras de alma llena y S en todas las barras de las de reticulado). Estos problemas se resuelven mediante el trazado de las *líneas de influencia* correspondientes a cada caso planteado.

4.2. Condiciones de equilibrio.

Se dice que una estructura está en equilibrio cuando se halla inicialmente en reposo y se conserva así al someterla a la acción de un conjunto de fuerzas. Cuando una estructura satisface esta prueba para el equilibrio, cualquier parte constitutiva de la misma también se encontrará en equilibrio.

Para que se satisfaga la condición de reposo, debe existir un equilibrio entre las tendencias de las fuerzas que actuarían para perturbar la estructura de alguna manera. Expresado de otra forma, para que esta condición se verifique es necesario que la resultante de las acciones exteriores (activas y reactivas) que actúan sobre la estructura sea igual a cero. A tal efecto no sólo debe ser nula la suma de todas las fuerzas (o de sus componentes) actuando en cualquier

dirección posible, sino también debe serlo la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier eje.

Para que una estructura o parte de ella esté en equilibrio bajo la acción de un sistema de cargas, debe satisfacer las seis ecuaciones de equilibrio de la Estática. Usando los ejes cartesianos x, y y z, estas ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad ; \quad \Sigma M_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_z = 0$$

Para fines de análisis y diseño, la mayoría de las estructuras pueden considerarse planas, sin pérdida de exactitud, en cuyo caso serán también coplanares y contenidas en el plano de simetría de la estructura, las acciones (en equilibrio) actuantes sobre la misma. En estos casos la suma de las fuerzas en las direcciones x e y, así como la suma de los momentos respecto a un eje perpendicular al plano (o respecto a su punto de intersección con el mismo) debe ser cero:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_z = 0$$

Los subíndices x e y representan los ejes según los cuales actúan las fuerzas componentes F_x y F_y. Estos ejes pueden o no ser ortogonales, pero nunca coincidentes. Los momentos M se toman con respecto a cualquier punto del plano que corresponde al de simetría de la estructura y que a su vez contiene a las acciones.

Estas ecuaciones suelen escribirse a veces como:

$$\Sigma H = 0 \quad ; \quad \Sigma V = 0 \quad ; \quad \Sigma M = 0$$

Las mismas condiciones pueden también establecerse en forma diferente, mediante:

$$\Sigma M_A = 0 \quad ; \quad \Sigma M_B = 0 \quad ; \quad \Sigma M_C = 0$$

donde A, B y C son tres polos de momentos diferentes, no colineales, elegidos arbitrariamente.

Finalmente, cualquier combinación de los sistemas de ecuaciones precedentes es admisible, con tal que las ecuaciones utilizadas sean independientes.

Si sobre la estructura actuase un sistema de fuerzas concurrentes en el cual todas las rectas de acción de las fuerzas pasan por un punto determinado, la condición $\Sigma M_z = 0$ se satisface automáticamente, y las ecuaciones precedentes quedan reducidas a

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0$$

Otro caso especial se refiere a sistemas de fuerzas paralelas, en los que la sumatoria de fuerzas normal a la dirección de éstas es automáticamente cero, resultando

$$\Sigma F_P = 0 \quad : \quad \Sigma M_z = 0$$

donde la primera expresión representa la sumatoria de las fuerzas en la dirección de las fuerzas paralelas.

Cabe recordar además, que si la estructura, en lugar ser una sola chapa, estuviera conformada por una cadena cinemática abierta, se agrega una ecuación de equilibrio complementaria, por cada articulación intermedia que tenga la estructura (suma de los momentos de todas las acciones que se encuentran a la derecha, o a la izquierda, de cada articulación intermedia con respecto a la misma igual a cero).

Las ecuaciones precedentes, denominadas *ecuaciones de equilibrio estático*, no se pueden demostrar algebraicamente; sólo describen la afirmación de sir Isaac Newton de que para cada acción sobre un cuerpo en reposo, hay una reacción igual y opuesta. Si la estructura bajo consideración es una viga, una armadura, un pórtico, etc., las ecuaciones de la Estática deben satisfacerse para que tal estructura permanezca en equilibrio.

Teniendo en cuenta que de las acciones exteriores actuantes sobre una estructura sólo son conocidas las directamente aplicadas (activas), las ecuaciones de equilibrio permiten calcular las acciones exteriores reactivas, cuyo tipo y posición será función de la forma de vinculación de la estructura. En efecto; para identificar completamente a una fuerza, es necesario determinar tres características de ella: su magnitud, su sentido y su recta de acción. Todos estos valores son conocidos para las acciones exteriores activas, pero para las reactivas sólo se conoce el punto de aplicación, y en el caso de un apoyo móvil, también la dirección.

Sin perjuicio de la afirmación de que un cuerpo en reposo está en equilibrio, es también posible que una estructura entera se mueva, y aún esté en equilibrio. Un avión o un barco se mueven, pero sus partes individuales no se mueven entre sí. Para que las ecuaciones de la Estática sean aplicables a un cuerpo móvil, deben incluirse fuerzas adicionales. Estas son las fuerzas de inercia; incluidas en las ecuaciones, puede considerarse para los fines del análisis estructural que el cuerpo está sometido a un conjunto de fuerzas en equilibrio.

4.3. Solicitaciones interiores.

Tal como se expresara en el apartado 1.1., el análisis estructural tiene por objeto estudiar los principios y métodos que permitan hallar las solicitaciones interiores (M, Q, N y eventualmente también M_t) en una sección cualquiera de un elemento de la estructura cuando ésta se halle solicitada por la acción de un sistema de cargas dado.

Al determinar las solicitaciones internas, es necesario tener en cuenta que cualquier construcción bajo carga modifica sus formas, o sea que se deforma. La deformación se acrecienta hasta que las fuerzas internas de la estructura, que se desarrollan con la deformación del material, alcanzan a equilibrar las acciones exteriores actuantes, después de lo cual comienza el equilibrio en el estado deformado.

Dado que en los materiales de construcción corrientes, la deformación se desarrolla a gran velocidad, el equilibrio en estado deformado se establece prácticamente al mismo tiempo de aplicar la carga. Pero, si por su naturaleza física o por insuficiencia de sus dimensiones, el material de la estructura no está en condiciones de desarrollar acciones internas de la magnitud requerida que puedan impedir el aumento de la deformación y sean incapaces de establecer el equilibrio en estado deformado, entonces aquélla continuará hasta llegar a la rotura.

Con un planteamiento riguroso del problema, las solicitaciones internas de una estructura que se encuentra en estado deformado, deberían determinarse concordantemente con el método de cálculo adoptado, tomando en consideración el comportamiento de la carga durante la deformación de la estructura. Sin embargo, esto ofrece grandes dificultades, por cuanto las solicitaciones internas de una estructura en estado deformado y la deformación misma de esta estructura, son interdependientes. Además, debe tenerse en cuenta que es muy difícil su determinación, porque, incluso si el material responde a la ley de Hooke, como norma, entre los desplazamientos y la carga no habrá dependencia lineal. Esto se complica más aún en los casos en que el material de la construcción no sigue la ley de Hooke o trabaja más allá de sus límites (fase plástica).

Por los motivos expuestos y tomando en consideración la relativa pequeñez de las variaciones de la forma de una construcción en el curso de su deformación, lo habitual, para simplificar el cálculo, es determinar las solicitaciones internas en forma muy aproximada en el estado inicial no deformado de la estructura (cálculo según la *Teoría de Ier. orden*). En la mayoría de los casos (pero no en su totalidad), la exactitud obtenida con la adopción de tal supuesto resulta aceptable a los fines prácticos. Caso contrario deberá tomársela en consideración y efectuar el cálculo de las solicitaciones internas en base al estado deformado de la estructura (cálculo según la *Teoría de IIdo. orden*).

Para la determinación de las solicitaciones internas, se emplea el conocido método del seccionamiento de las barras, que las transforma en sus iguales externas, como acción de una de las partes de la estructura seccionada sobre la otra.

En tales condiciones, cuando un elemento estructural plano AB, solicitado por un sistema de acciones exteriores en equilibrio R_A, P_1, P_2, P_3 y R_B (figura 9a), se secciona por un punto dado C y se separa en dos partes, las solicitaciones internas se determinan en base a las condiciones de equilibrio de su parte seccionada.

En efecto; si por ejemplo se toma en consideración sólo la parte derecha de la barra, desechando la parte izquierda (figura 9b), para que el tramo de barra CB, solicitado sólo por las acciones P_2, P_3 y R_B esté en equilibrio, a través del plano en que se efectuó el seccionamiento deberá manifestarse la fuerza equilibrante necesaria, que representa el efecto sobre el tramo de barra CB de la parte AC no considerada.

Del polígono de fuerzas cerrado de la figura 9c), se desprende que la acción equilibrante que la estructura debe generar, es la que lleve al equilibrio al sistema P_2, P_3 y R_B, que no es otra que la resultante de las fuerzas R_A y P_1, o sea R_{izq}, la que en general tendrá cualquier dirección y sentido y pasará por un punto determinado de la sección K (centro de presión).

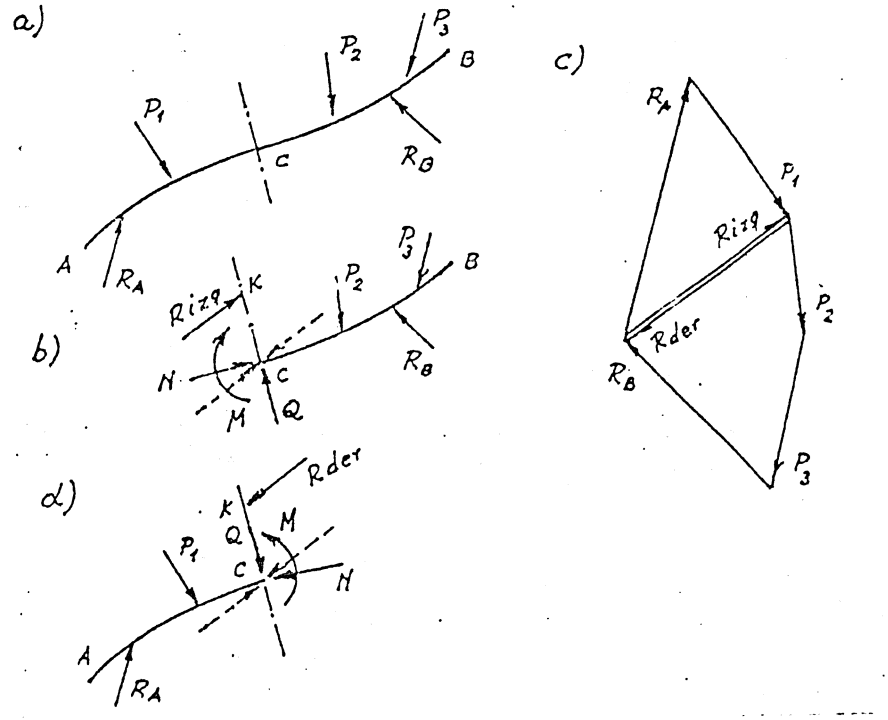


Figura 9

La traslación paralela de la fuerza R_{izq} actuante en K al centroide G de la sección transversal correspondiente al punto C, conduce a la aparición en dicha sección transversal de tres esfuerzos resultantes M, N y Q.

Si se efectuase igual razonamiento pero manteniendo la parte izquierda y poniendo en evidencia R_{der} como acción interior equilibrante (figura 9d), refiriéndola también al centroide G de la cara del corte efectuado, se pueden generalizar las siguientes definiciones para las solicitaciones internas así puestas en evidencia:

- **Momento flector M:** es igual a la suma de los momentos de los pares y de los momentos estáticos de todas las fuerzas ubicadas a la izquierda (o a la derecha) de la sección, con respecto estos últimos al punto de la misma que está sobre el eje de la barra.

- **Esfuerzo de corte Q:** es igual a la suma de las proyecciones sobre la dirección normal al eje de la barra, de todas las fuerzas ubicadas a la izquierda (o a la derecha) de la sección considerada.

- **Esfuerzo normal N:** es igual a la suma de las proyecciones sobre la tangente al eje de la barra, de todas las fuerzas ubicadas a la izquierda (o a la derecha) de la sección considerada.

Los esfuerzos en la sección C de la parte de la barra CB representan el efecto de la parte retirada AC sobre la misma (figura 9b) y viceversa (figura 9d). En consecuencia, los respectivos esfuerzos son iguales en magnitud y opuestos en sentido, o sea:

$$M_{CB} = - M_{CA} \quad ; \quad Q_{CB} = - Q_{CA} \quad ; \quad N_{CB} = - N_{CA}$$

4.4. Convenciones de signos.

De los conceptos precedentemente expuestos surge la necesidad de introducir claras convenciones de signos para todos los parámetros intervinientes, las que deben ser respetadas tanto para el planteo de las ecuaciones o la formulación del problema como para la interpretación de los resultados.

4.4.1. Reacciones.

En lo sucesivo se adoptarán las siguientes (figura 10):

- Todas las fuerzas o componentes de fuerzas que actúan según el eje **x** se considerarán positivas si actúan de izquierda a derecha y negativas si actúan de derecha a izquierda.

- Todas las fuerzas o componentes de fuerzas que actúan según el eje **y** se considerarán positivas si actúan hacia arriba y negativas si actúan hacia abajo.

- Todos los momentos estáticos se considerarán positivos si rotan en el sentido de giro de las agujas del reloj y negativos si rotan en el sentido opuesto.

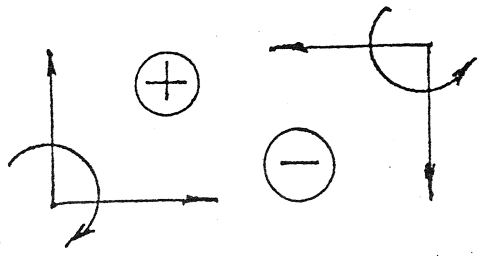


Figura 10

4.4.2. Solicitaciones internas.

Para las mismas se introducirá la convención de signos de las deformaciones (figura 11):

- Los momentos flectores M que producen alargamiento de las fibras de la parte inferior (o interior) de un elemento estructural se consideran positivos, mientras que los que producen alargamientos de las fibras de la parte superior (o exterior) se consideran negativos. Como convención complementaria, los diagramas de momentos flectores se dibujarán siempre del lado de las fibras traccionadas.

- Los esfuerzos de corte Q cuyo par tienda a rotar en el sentido del giro de las agujas del reloj se considerarán positivos, mientras que los que tiendan a hacerlo en sentido contrario, negativos.

- Los esfuerzos normales N que tienden a producir alargamiento se considerarán positivos y los que tienden a producir acortamiento, negativos.

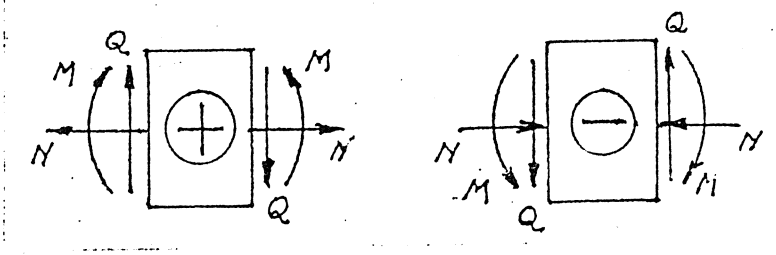


Figura 11

En algunos casos particulares, por motivos que se expondrán en su momento, se modificará alguna de estas convenciones, previa mención expresa de tal circunstancia.

4.5. Diagramas de cuerpo libre.

Para que una estructura esté en equilibrio, ella toda por un lado, y cada una de sus partes, por otro, debe estar en equilibrio. Si las ecuaciones de equilibrio estático son aplicables a toda la estructura, deben verificarse también para una parte de la misma, cualquiera sea su tamaño relativo respecto al de la estructura toda. Es posible entonces trazar el esquema de cálculo de cualquier parte de una estructura y aplicar las referidas ecuaciones a esa parte. El resultado, llamado *diagrama de cuerpo libre*, debe incluir todas las acciones aplicadas a esa parte de la estructura. Esas acciones son las reacciones y las cargas exteriores, así como las solicitaciones internas transmitidas desde las partes adyacentes de la estructura.

Aislar determinadas partes de las estructuras y considerar las acciones aplicadas a las mismas constituye la base de todo el análisis estructural. La consideración criteriosa de los cuerpos libres abre el camino a la solución de los problemas estructurales.

4.6. Unidades SI.

La Oficina Internacional de Pesas y Medidas tiene como objetivo establecer un sistema de unidades racional, coherente y de uso universal. En 1960, dicha Organización llamó a este sistema el *Sistema Internacional de Unidades*, con la abreviatura SI, en todos los idiomas.

Este sistema tiene la ventaja de que sólo admite una unidad por cada cantidad física, por ejemplo el metro (m) para las longitudes, el kilogramo (kg) para las masas, el segundo (s) para el tiempo, el newton (N) para las fuerzas, etc. De estas unidades básicas se obtienen otras, tales como por ejemplo, para las áreas el metro cuadrado (m^2), para la aceleración el metro por segundo cuadrado (m/s^2), para las fuerzas el kilogramo - metro por segundo cuadrado ($kg.m/s^2$) = newton (N) y para las presiones y las tensiones el newton por metro cuadrado (N/m^2) = pascal (Pa).

En análisis estructural se adopta simplificativamente 1 kg = 10 N; 1 tn = 10 kN y un megapascal (MPa) = 10 kg/cm^2.

5. ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS E INDETERMINADAS.

Ya se acotó que el objetivo fundamental del Análisis Estructural es la determinación de las solicitaciones internas en los elementos de una construcción. Los métodos a utilizar para ello dependen de si la estructura es estáticamente determinada (isostática) o estáticamente indeterminada (hiperestática).

Una estructura es *estáticamente determinada* o *isostática*, cuando todas sus reacciones y solicitaciones internas pueden ser calculadas utilizando solamente las ecuaciones de equilibrio estático. La forma de efectuar la resolución entra en la parte del Análisis Estructural abarcada por la Estática de las Estructuras.

Una estructura es *estáticamente indeterminada* o *hiperestática*, cuando para la determinación de las reacciones y solicitaciones internas no son suficientes las ecuaciones de equilibrio estático, debiéndose recurrir para ello a la consideración del estado de deformación de la estructura.

En las estructuras isostáticas, las reacciones y las solicitaciones internas no dependen de las dimensiones transversales, de la forma ni del material de los elementos estructurales, siendo suficiente la simplificación que surge de considerar la rigidez (o indeformabilidad) de tales elementos para arribar a la determinación de aquéllas.

En cambio, en los problemas hiperestáticos, las reacciones y los esfuerzos internos, al estar ligada su determinación al estado de deformación de la estructura, dependen de las dimensiones y forma de las secciones transversales y del material constitutivo de los elementos estructurales.

Los desarrollos que se efectuarán en los capítulos sucesivos tienen por finalidad la resolución de este tipo de estructuras. Para comprender tales desarrollos y las formulaciones teóricas que se efectuarán, es indispensable el conocimiento y dominio pleno de la Estática de las Estructuras y la Resistencia de Materiales, empleándose también conceptos adquiridos en el estudio de las Matemáticas, la Física y la Mecánica Teórica.

5.1. Nociones básicas.

5.1.1. Grados de libertad.

La libertad de un sistema es su posibilidad de realizar, sin deformación del material, cualquier tipo de movimiento con respecto a la tierra. Se llama **grado de libertad** del sistema al número de parámetros independientes que determinan la posición del mismo con respecto a la tierra, y que es también igual al número de desplazamientos independientes que posee el sistema.

En su forma más general, todo sistema estructural plano, está compuesto por vértices y chapas.

- *Vértice* es un punto de concurrencia de barras, al cual están articuladas. Como todo punto del plano, posee dos grados de libertad, pues su posición queda determinada mediante el conocimiento de dos coordenadas, o bien porque tiene dos posibilidades de movimientos rectilíneos en la dirección de cada uno de los ejes coordenados.

-- *Chapa* es un conjunto continuo y plano de puntos que se mantienen entre sí a distancias invariables y que se representa bajo la apariencia de figuras planas con formas indeterminadas. Toda chapa en su plano tiene tres grados de libertad, pues su posición queda determinada mediante el conocimiento de tres coordenadas independientes, o bien porque posee dos posibilidades de movimientos de traslación en la dirección de los ejes coordenados y uno de rotación alrededor de un punto determinado.

Si dado un sistema plano cualquiera se designa con V al número de vértices y con N al de chapas que lo componen, los grados de libertad Gl que posee un conjunto de chapas y vértices aislados entre sí será:

$$Gl = 3\,N + 2\,V$$

Resulta importante destacar que si bien en la mayoría de los casos la representación de las barras y de las chapas es efectúa en forma análoga, indicando sólo su eje longitudinal, la diferencia fundamental entre ambos elementos radica en que una barra propiamente dicha no es susceptible de recibir y soportar cargas fuera de sus extremos (vértices), mientras que en las chapas puede concebirse cualquier tipo de acciones transversales en toda su longitud. En consecuencia, en las barras se genera como único esfuerzo interno, una fuerza longitudinal constante, mientras que en las secciones transversales de las chapas aparecen, en general, momentos flectores, esfuerzos normales y de corte, que pueden variar a lo largo de las mismas. Sin perjuicio del concepto expresado, es frecuente utilizar el término "barra" en forma indistinta para denominar los elementos o miembros individuales, de todo carácter, que componen una estructura.

Para sistemas espaciales, cada vértice presenta 3 grados de libertad y todo cuerpo volumétrico 6.

5.1.2. Vínculos.

Resulta evidente que no puede concebirse una estructura constituida por chapas y vértices aislados, sin nexo de unión entre sí, y sin la necesaria sustentación en tierra. La formación de sistemas estructurales a partir de los elementos independientes considerados, se efectúa por medio de los denominados *vínculos internos*, mientras que la sustentación en tierra se materializa mediante los llamados *vínculos externos o de apoyo*.

Se define como **vínculo** a todo dispositivo o elemento físico que limita la posibilidad de movimiento de un vértice o de una chapa. Son vínculos externos aquellos que limitan los desplazamientos absolutos del sistema, es decir, sus desplazamientos relativos con respecto a la tierra considerada inmóvil. Son vínculos internos aquellos que limitan los desplazamientos relativos entre las distintas partes o elementos del sistema.

Los vínculos correctamente ubicados impedirán los posibles desplazamientos absolutos y/o recíprocos de los elementos constitutivos del sistema (chapas y/o vértices) y disminuirán por consiguiente los grados de libertad del mismo.

Cada vínculo posee una *característica cinemática* (de movimiento) que determina la cantidad de movimientos que el vínculo impide (coincidente con los grados de libertad que restringe) y una *característica estática* (de fuerza) correspondiente al número de reacciones que pueden surgir en el mismo.

5.2. Indeterminación estática. Grado de hiperestaticidad.

Para poder estudiar los métodos de análisis disponibles para la resolución de estructuras estáticamente indeterminadas, resulta fundamental entender claramente los criterios para la clasificación estática de las estructuras respecto a su determinación y estabilidad, tanto externas e internas como totales.

En esencia, los criterios para definir la determinación o indeterminación estática de una estructura implican efectuar una comparación entre la cantidad de magnitudes de fuerzas independientes desconocidas y el número de ecuaciones independientes de equilibrio disponibles para el cálculo de aquellas incógnitas. De tal comparación surgirá siempre alguna de las formas siguientes:

a) Si hay más ecuaciones que incógnitas, la estructura es estáticamente inestable.

b) Si el número de ecuaciones es igual al de incógnitas, la estructura es isostática o estáticamente determinada.

c) Si hay menor número de ecuaciones que de incógnitas, la estructura es hiperestática o estáticamente indeterminada.

El primero de estos criterios es absoluto, y no puede corresponder a ninguna estructura de la ingeniería. En el segundo y tercer caso las magnitudes de las fuerzas desconocidas deben determinarse de modo que aseguren la estabilidad de la estructura.

De acuerdo a lo expuesto, una estructura es indeterminada cuando presenta más componentes reactivas y/o miembros presentes que los estrictamente necesarios para asegurar su estabilidad.

El grado de indeterminación exterior es igual al número de componentes reactivas que están disponibles en exceso respecto a la cantidad requerida para la estabilidad exterior. Estas componentes reactivas en exceso se denominan *redundantes exteriores* o *vínculos superabundantes externos*. El grado de indeterminación interior, a su vez, está dado por el número de componentes de fuerzas interiores que se hallan presentes en exceso respecto a las que se requieren para la estabilidad interna. Estas también se denominan *redundantes interiores* o *vínculos superabundantes internos*, por igual motivo que el anterior.

La diferencia entre los vínculos totales (externos más internos) menos la cantidad de ecuaciones define el **grado de hiperestaticidad** de la estructura, que corresponde a la cantidad de vínculos superabundantes.

Sin embargo debe tenerse muy presente que los criterios consignados en los puntos b) y c) precedentes, establecen condiciones que son de cumplimiento necesario, pero no suficientes, para la clasificación estática de una estructura, dado que cabe la posibilidad que las componentes reactivas no estén adecuadamente colocadas como para asegurar la estabilidad o constituir un vínculo superabundante, en cuyo caso adquieren la figura de *vínculos aparentes*, cuya eventual presencia será necesario investigar.

5.3. Criterios para el cálculo del grado de hiperestaticidad.

5.3.1. Determinación del número de componentes externas o reactivas.

En función de las consideraciones efectuadas en el apartado 5.1., cada punto o sección de apoyo de una estructura puede valorizarse con respecto al número de componentes reactivas desconocidas. Para la estructura, como conjunto, el número total de componentes reactivas desconocidas estará dado por la sumatoria de las incógnitas para todos los puntos de apoyo.

Recordando los conceptos básicos de la Estática, en el caso de un apoyo móvil o de rodillos existe (ya sea el sistema plano o espacial) únicamente una fuerza reactiva (X_1), de dirección perpendicular a la del posible desplazamiento y cuya recta de acción pasa por el punto de apoyo (figura 12a).

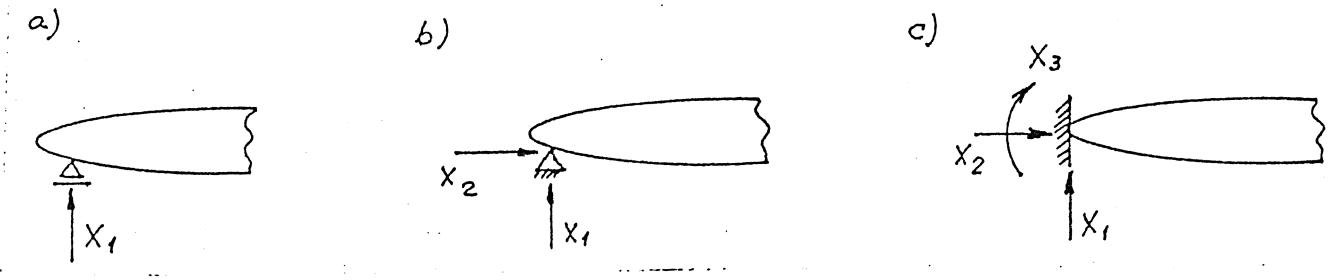


Figura 12

En un apoyo fijo o articulación se genera una fuerza de reacción de cualquier dirección, que pasa por su centro, y que puede ser descompuesta en dos componentes incógnitas (X_1 y X_2) si el sistema es plano (figura 12b) y tres si es espacial.

Finalmente, en un empotramiento la reacción está constituida por una fuerza de cualquier dirección y ubicación en el plano del mismo, la que reducida al centroide de la sección de empotramiento da origen, en el plano, a dos fuerzas de direcciones predeterminadas que pasan por dicho punto (X_1 y X_2) y un momento con respecto al mismo punto (X_3) (figura 12c). En el espacio por su parte, la reducción de la reacción de empotramiento al centroide dará origen a tres componentes de fuerza según otras tantas direcciones predeterminadas que pasan por dicho punto más tres componentes de momento respecto a tales direcciones.

A cada una de las referidas incógnitas (X_1) individualmente consideradas se las denomina *vínculo simple*. Así, en el plano, un apoyo móvil equivale a un vínculo simple, una articulación a dos y un empotramiento a tres, mientras que en el espacio, estas equivalencias pasan a ser, respectivamente, 1, 3 y 6.

Cabe observar que en cada caso el número de incógnitas, dado por la característica estática del vínculo, coincide con los grados de libertad que el vínculo restringe, o sea con su característica cinemática.

5.3.2. Determinación del número de componentes internas.

Existen diversos tipos de vínculos internos, ya sea presentes como tales en la estructura, o bien introducidos en forma ficticia en la misma como parte

de los procedimientos de análisis que posibilitan su resolución (en el caso de estructuras estáticamente indeterminadas).

En el caso de una barra articulada en sus extremos que une dos chapas, una chapa y un vértice o dos vértices, se origina en el vínculo una fuerza (X_1) de dirección coincidente con el eje de la barra que materializa el vínculo (figura 13a), por lo que toda barra equivale a una incógnita, ya sea la estructura plana o espacial. (Cabe consignar que a los fines del dibujo se suele señalar a las fuerzas X_1 desplazadas de su recta de acción por razones de claridad de interpretación).

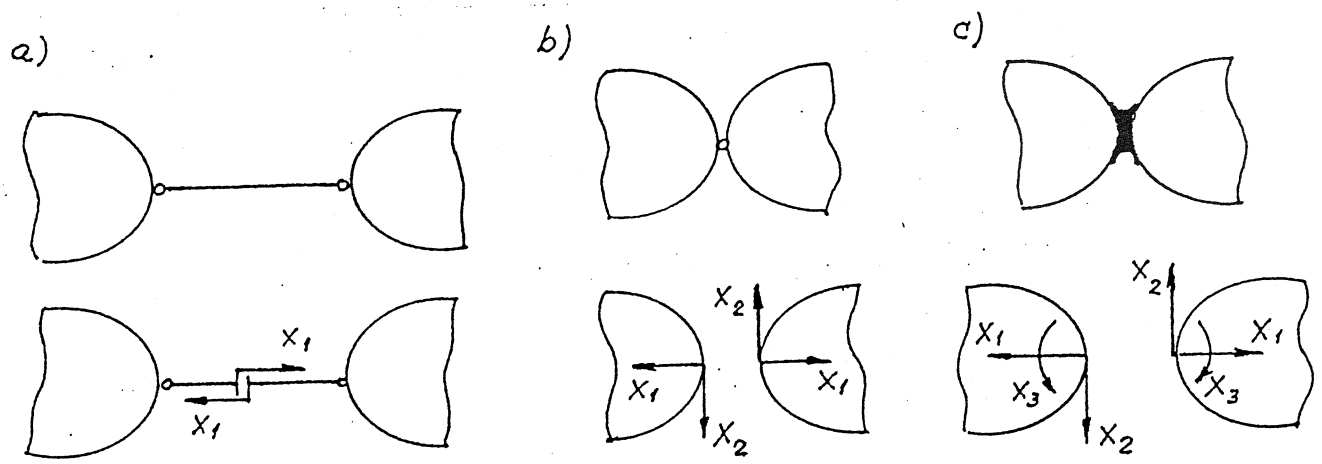


Figura 13

Otro tipo de vínculo interno es el constituido por una articulación que une dos chapas. Al cargar la estructura se origina una reacción interna, de cualquier dirección, que debe pasar por la articulación y que puede ser descompuesta según las direcciones adoptadas (generalmente las de los ejes x e y). En el caso de la figura 13b), las componentes incógnitas se han indicado por X_1 y X_2. En el espacio la equivalencia es de 3 vínculos simples.

Un tercer tipo de vínculo es la "soldadura" o unión rígida entre dos chapas (figura 13c), cuyo concepto es aplicable por extensión a cualquier sección de las barras de alma llena que conformen una estructura. En un vínculo de esta naturaleza, una parte de la estructura transmite a la otra una fuerza de reacción interna que puede tener cualquier dirección y pasar por cualquier punto del plano donde ubica el vínculo considerado. Esta reacción, reducida al punto de la soldadura o al centroide de la sección, puede ser descompuesta en dos fuerzas de direcciones preestablecidas (X_1 y X_2) y un momento (X_3) con respecto al punto de intersección de estas fuerzas. En el espacio las incógnitas serán 6.

En casos particulares se presentan articulaciones o uniones rígidas que unen tres o más chapas, vínculos a los que se denomina múltiples. Si se supone el caso de 3 chapas unidas mediante una articulación (figura 14), la misma impide el movimiento de traslación de dos de las chapas respecto a la tercera.

Como consecuencia de lo anterior se le restringen 2 grados de libertad a cada una de aquellas chapas, o sea 4 en total, equivaliendo por lo tanto a 4 vínculos simples.

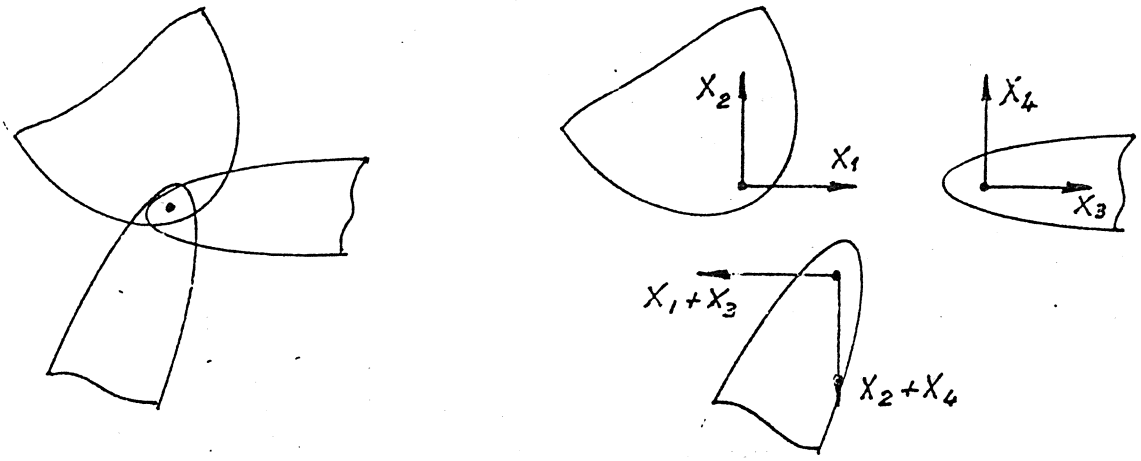


Figura 14

A su vez, en la articulación se origina una fuerza reactiva de cualquier dirección que pasa por la misma, la que puede ser descompuesta en 4 componentes independientes, designadas de X_1 a X_4 en la figura 14. Para aclarar este concepto cabe observar que sobre cada chapa se origina una fuerza reactiva, por lo que queda conformado un sistema de 3 fuerzas coplanares concurrentes en equilibrio. Esta condición de equilibrio será satisfecha cuando una cualquiera de las fuerzas componentes sea igual y contraria a la resultante de las otras dos, lo que se verifica en el caso considerado.

A la articulación que une dos chapas, se la suele denominar de primer orden, $A^{(1)}$, y a la que une tres chapas, articulación de segundo orden, $A^{(2)}$.

Al igual que en el caso de los vínculos de apoyo tratados en el apartado anterior, la característica estática de cada vínculo interno coincide con su característica cinemática.

5.3.3. Determinación de la cantidad de ecuaciones.

Si se designa por E a la cantidad total de ecuaciones de equilibrio estático disponibles para la resolución de una estructura en equilibrio, y teniendo en cuenta que en su forma más general puede considerarse que la misma estará conformada por chapas y vértices, de las consideraciones efectuadas en el apartado 4.2. resulta que una chapa plana, solicitada por un sistema cualquiera de acciones coplanares permite plantear tres ecuaciones de equilibrio estático, en cualquiera de las formas consignadas en el referido apartado. Por otra parte, a cada vértice concurren sólo barras que generan esfuerzos axiles, de modo que se trata, para cada uno de ellos, de sistemas de fuerzas concurrentes, para los que pueden plantearse, por vértice, dos ecuaciones de equilibrio estático.

En consecuencia, si N es el número de chapas y V el de vértices que presenta una estructura, el total de ecuaciones que pueden formularse en base a las consideraciones de equilibrio estático serán

$$E = 3\,N + 2\,V$$

expresión idéntica a la correspondiente a los grados de libertad que posee el sistema plano de chapas y vértices, supuestos todos sus elementos sin vinculación interna ni sustentación a tierra.

Para una estructura espacial, la expresión anterior se transforma en

$$E = 6\,N + 3\,V$$

refiriéndose en este caso N a la cantidad de cuerpos volumétricos individuales que componen las estructura espacial.

5.3.4. Resumen y comparaciones.

En definitiva, si E es la cantidad de ecuaciones de equilibrio estático determinada según lo referido en el apartado anterior, e I = Ie + Ii la cantidad de componentes reactivas desconocidas, designando por Ie a las externas y por Ii a las internas, calculadas según los criterios expuestos en los apartados 5.3.1. y 5.3.2. respectivamente, el grado de hiperestaticidad X, conceptualmente definido en 5.2. resultará

$$X = I - E$$

En consecuencia, las condiciones expresadas en los puntos a), b) y c) del apartado 5.2. pueden reexpresarse como:

a) Si $X < 0$, la estructura es móvil.

b) Si $X = 0$, la estructura es isostática.

c) Si $X > 0$, la estructura es hiperestática, y el valor de X indica el número de ecuaciones complementarias (de elasticidad) que deben plantearse para su resolución.

Merece destacarse que las consideraciones efectuadas respecto al significado del valor de X son válidas y aplicables a cualquier método de resolución de estructuras hiperestáticas en el cual las incógnitas sean acciones (fuerzas y/o pares), no siendo extensivas a aquellos métodos en los cuales las incógnitas están relacionadas con la deformación de la estructura.

5.4. Ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas.

Al efectuar en forma ordenada el estudio del análisis estructural se tratan siempre en primer lugar las estructuras isostáticas, tema que compete a la denominada Estática de las Estructuras. Este tratamiento incluye típicamente el análisis de esfuerzos, que conduce a la determinación de las solicitaciones actuantes sobre cualquier elemento de la estructura, basándose las ecuaciones de aplicación sobre la hipótesis de la rigidez del material constitutivo de la misma. En la etapa siguiente, la Resistencia de Materiales efectúa el análisis de las deformaciones, el que conduce a la determinación de los desplazamientos en cualquier punto de aquel tipo de estructuras.

Con el dominio de ambas herramientas, se está en condiciones de pasar a la consideración de las estructuras hiperestáticas, donde tanto el análisis de los esfuerzos como el de las deformaciones son partes integrantes de una solución que se basa en satisfacer las condiciones de equilibrio y de compatibilidad que debe satisfacer la estructura.

Sin embargo, cabe legítimamente preguntarse la razón del empleo de las estructuras estáticamente indeterminadas. Obviamente, existe más dificultad para

analizarlas que en el caso de las determinadas, de modo que ¿por qué no se usan exclusivamente estas últimas? Y si efectivamente existen ventajas específicas en las estructuras hiperestáticas ¿por qué en ciertos casos se usan las isostáticas? Como resultado, ventajas y desventajas están asociadas con cada tipo de estructura.

En términos generales las ventajas que presentan las estructuras hiperestáticas pueden resumirse en:

- Menor costo de material, al permitir obtener estructuras que a igualdad de solicitaciones requieren menor sección transversal en sus elementos constitutivos. Este aspecto resulta de la continuidad entre los distintos miembros estructurales, con la que se logra una mejor distribución de los esfuerzos interiores producidos por las cargas aplicadas. La continuidad (tanto a nivel de vigas continuas como de pórticos complejos) permite materializar elementos de mayores luces y por ende menor cantidad de apoyos a igualdad de sección, o el uso de menores secciones para luces iguales.

- Las estructuras estáticamente indeterminadas tienen con frecuencia mayores factores de seguridad que las isostáticas, en virtud de que cuando determinados sectores de esas estructuras resultan sobrefatigados, éstas tienen capacidad para redistribuir parte de los excedentes de esfuerzos a zonas menos solicitadas, capacidad que usualmente no tienen las estructuras estáticamente determinadas.

- Las estructuras hiperestáticas son más rígidas que las estáticamente determinadas, es decir que a igualdad de solicitación y dimensiones, experimentan menor deformación. Consideradas en su conjunto, gracias a su continuidad, al ser más rígidas tienen también mayor estabilidad frente a todo tipo de cargas (horizontales, verticales, móviles, etc.).

- En el caso particular de las solicitaciones producidas por sismo, cabe destacar que la resistencia de un edificio (o una construcción en general) a aquéllas, depende de su capacidad para disipar energía. Mientras mayor continuidad y monolitismo tenga el sistema estructural, o sea, mientras más hiperestático sea, mayor será su posibilidad de seguir manteniéndose estable, generando en su interior sucesivas líneas de defensa, a costa de la pérdida de algunos grados de hiperestaticidad.

- Las estructuras, cuando son hiperestáticas, resultan más atractivas, siendo difícil imaginar a estructuras isostáticas con la belleza arquitectónica de muchos arcos o pórticos múltiples hiperestáticos que se construyen en la actualidad.

Por el contrario, las desventajas más salientes son:

- Las estructuras hiperestáticas son muy sensibles a los desplazamientos de vínculos, por lo que no suelen ser convenientes en aquellos casos donde las condiciones de cimentación sean impropias, pues los asentamientos o rotaciones que se presenten en los apoyos de la estructura, por leves que parezcan, pueden causar cambios notables en los momentos flectores, esfuerzos de corte, esfuerzos totales y reacciones de vínculo.

- Los cambios en la posición relativa de los elementos estructurales causados por variación de temperatura, fabricación deficiente o deformaciones internas

por acción de la propia carga, pueden causar, en las estructuras hiperestáticas, graves cambios en las fuerzas en toda la estructura.

- Generalmente en las estructuras hiperestáticas se produce un mayor número de inversiones de solicitaciones internas que en las isostáticas. En ocasiones se requiere de más material de refuerzo en ciertas secciones de la estructura, para resistir los diferentes estados de solicitación, cuando los mismos pueden variar de signo.

Uno de los inconvenientes tradicionales de las estructuras hiperestáticas lo constituía la dificultad de su análisis y diseño, como consecuencia del elevado número de ecuaciones que suele venir asociado a su resolución. Esta circunstancia se agrava por el hecho de que, siendo la formulación de tales ecuaciones función no sólo de las cargas actuantes sino también de las dimensiones de los elementos estructurales, es necesario efectuar primero el predimensionado de toda la estructura, diseñar luego cada elemento para las solicitaciones obtenidas, evaluar las acciones internas para las nuevas dimensiones y así sucesivamente, hasta lograr el diseño final. El empleo de los modernos programas de computación desarrollados al efecto, ha eliminado por completo este inconveniente, permitiendo al ingeniero evaluar en muy poco tiempo múltiples alternativas de diseño, a fin de decidir la elección de la más conveniente.

6. ASPECTOS CONCEPTUALES COMPLEMENTARIOS.

6.1. Exactitud de los cálculos.

Un aspecto muy importante a tener presente en cualquiera de los cálculos que involucra el objeto de la asignatura, es que el Análisis Estructural no constituye una ciencia exacta en la que puedan calcularse respuestas confiables con ocho o más cifras significativas. Los resultados expresados con tres cifras significativas van ya tal vez más allá de la precisión que puede resultar de las estimaciones que se hacen de las resistencias de los materiales y de los valores adoptados de las cargas aplicadas a las estructuras. En efecto; los materiales usualmente constitutivos de las construcciones (hormigón, acero, madera y algunos otros) tienen resistencias últimas que sólo pueden estimarse en forma aproximada. Las cargas aplicadas a las estructuras, por su parte, pueden determinarse sólo con un cierto grado de aproximación. Así por ejemplo, si las cargas se conocen solamente hasta dos cifras significativas, no es razonable expresar las solicitaciones y los desplazamientos resultantes con ocho cifras significativas.

Lo anteriormente expresado adquiere relevancia ante el hecho de que en la actualidad todos los cálculos estructurales se obtienen a través de calculadoras y fundamentalmente, computadoras, en donde los resultados están disponibles con un elevado número de decimales. Expresarlos de esta forma a nivel de presentación final de un cálculo puede dar una impresión de falsa exactitud, pero además, y por sobre todo, pondrá en evidencia falta de criterio del calculista.

Debe tenerse presente al respecto que la solución a un problema dado no puede ser más exacta que los datos de entrada utilizados. Corresponderá en consecuencia emplear siempre un criterio ingenieril firme, y los resultados

finales deberán redondearse hasta el número de cifras significativas que sea consistente con tales datos de entrada.

6.2. Verificación de los resultados.

Una característica saliente del Análisis Estructural es la posibilidad de efectuar verificaciones matemáticas de los valores obtenidos. Para ello pueden aplicarse métodos distintos a los inicialmente utilizados o bien, emplear el mismo método, pero desde otra ubicación dentro de la estructura. El alumno primero, el profesional después, deberían ser capaces, en casi todas las situaciones, de poder verificar si su trabajo ha sido realizado en forma correcta.

Resulta natural y lógico que toda persona pueda cometer errores en su actividad, y lo que más puede hacerse al respecto es tratar de reducirlos al mínimo. En el caso particular del análisis de estructuras, la aplicación de ciertas revisiones aritméticas sencillas, permite descubrir muchos de estos costosos errores. Además el analizar con criterio los resultados, antes de darlos por definitivos y ciertos, también resulta siempre necesario, en especial en aquellos obtenidos por computadora y mediante la aplicación de programas con los que no se tenga suficiente experiencia de aplicación. El mejor ingeniero estructuralista no es el que comete menos errores, sino el que los descubre y corrige a tiempo.

6.3. La enseñanza del Análisis Estructural y la computación.

Nadie puede desconocer el vertiginoso ritmo con el que en las últimas décadas se ha desarrollado el cálculo mediante computadoras y las profundísimas modificaciones que como consecuencia de ello se han producido en numerosas actividades en que las mismas son de aplicación. Casi cualquier aspecto de nuestras vidas ha sido tocado por la computadora. Así hoy en día se efectúan en forma rutinaria, tareas que no eran consideradas posibles hace 20 ó 30 años.

Haciendo referencia concreta a los procedimientos necesarios para el análisis y diseño de estructuras (de obras de arquitectura, hidráulicas, viales, etc.), los mismos, en un principio, estaban guiados básicamente por la intuición apoyada en la experiencia. Lo adecuado de un diseño ingenieril se medía por la manera en que se comportaba la estructura, y si había insuficiencias, se hacían cambios después de la construcción. Resulta obvio también que en ocasiones ocurría el colapso, lo que, aunque resulte doloroso decirlo, iba perfeccionando luego los criterios y formulaciones para realizar los cálculos futuros.

La ingeniería desarrolló así muchos de sus métodos de cálculo basándose en catástrofes particulares (de un puente individual destruido por el viento, por ejemplo), o generales, como después de grandes terremotos, tras los cuales se introducían nuevas pautas para evitar la repetición futura de la destrucción de estructuras por las mismas causas. La experiencia así ganada a través de este procedimiento sumamente empírico, guió los diseños subsecuentes, y este proceso puede considerarse como el principio del análisis de estructuras.

Conforme creció la complejidad y magnitud de las construcciones propuestas por el hombre (altura de los edificios, longitud de los puentes, altura de los diques) y paralelamente la necesidad de enfoques menos empíricos para realizar el análisis de las estructuras, los ingenieros y los matemáticos aumentaron su interés por el problema y comenzaron a aplicar sus habilidades para darle

adecuada solución. Se siguió así una larga secuencia de desarrollos, de base matemática, conforme cada investigador confío en el progreso de sus contemporáneos o de sus predecesores.

Por lo general, el fundamento de las soluciones propuestas consistía en utilizar hipótesis simplificativas para el comportamiento de los materiales de construcción, pero aún válidas frente a su respuesta real, impactando la capacidad resistente por coeficientes de seguridad adecuados. Una vez establecidas las hipótesis básicas asumidas, el proceso de cálculo se llevaba a términos de desarrollos matemáticos, generalmente muy "elegantes" en cuanto a su concepción, pero de resolución muy complicada, por no decir prácticamente imposible, dado que implicaban dar respuesta a hallar las incógnitas de sistemas de ecuaciones lineales o diferenciales de muy elevado número de incógnitas o ecuaciones de grado superior.

Estos así llamados *métodos clásicos*, con profundos fundamentos teóricos y serias limitaciones prácticas de resolución, permitieron cubrir las necesidades y las responsabilidades involucradas de los ingenieros a lo largo de muchas décadas.

Bajo estas condiciones, las demandas para un análisis sofisticado, por una parte, junto por otra a las limitaciones sobre la posibilidad efectiva de realizar los cálculos pertinentes y hallar las soluciones requeridas, condujeron a un sinnúmero de técnicas especiales y procedimientos aproximativos para resolver los diversos tipos de estructuras.

En correspondencia a lo anterior, la docencia de las asignaturas, tanto básicas como de especialización, desarrollaba íntegramente estos métodos, sus demostraciones y sus herramientas (teóricas y prácticas) de resolución.

En este estado de cosas, el advenimiento y subsecuente desarrollo de la computación, y sobre todo la facilidad de adquisición y potencial de memoria de las PC, incrementó las capacidades de cómputo en varios órdenes de magnitud, evitando por una parte la necesidad de técnicas especiales, y por otra, permitiendo efectuar en un par de minutos, operaciones con elevado número de incógnitas, que hasta hace relativamente pocos años eran impensables realizar "a mano".

Así los artificios ingeniosos en uso fueron rápidamente sustituidos por las arrolladoras generalidades de los *métodos matriciales modernos*, pero, y esto resulta fundamental, sólo agilizando y/o permitiendo la realización de los cálculos numéricos, pues la base conceptual teórica en que estos métodos matriciales modernos se fundamentan, sigue siendo la misma que la que correspondía a los métodos clásicos antiguos.

Esta transición de los métodos clásicos a los métodos modernos ha provocado algunos cambios revolucionarios en la ingeniería estructural, y como consecuencia directa, en la enseñanza de esta rama de la ingeniería civil. Aunque los métodos matriciales han llegado a ser el cimiento del Análisis Estructural moderno cuando se emplean en la práctica de la actividad profesional, no queda completamente claro el papel de los métodos clásicos, principalmente en el proceso educativo.

La problemática planteada es comparable a la que ya se presenta en el ciclo escolar básico: ¿tiene sentido la enseñanza de las tablas de multiplicar o

el procedimiento para extraer raíces cuadradas, cuando cualquier calculadora, que puede ser adquirida por un par de pesos, lo resuelve instantáneamente sin necesidad de conocer el proceso seguido?

Llevando este ejemplo al nivel universitario, ¿deben enseñarse los fundamentos teóricos de los métodos de cálculo, y sus muchas veces tediosas demostraciones, o sentar al alumno directamente frente a una computadora, ejercitándolo sólo en el manejo de los programas de cálculo estructural ya existentes?

La respuesta de los educadores a esta pregunta es muy variada. Hay quienes sostienen que una fundamentación completa y detallada de los métodos clásicos es esencial antes de que el alumno pueda estudiar y apreciar los métodos modernos. Otros, a su vez, consideran que este enfoque formará un estudiante con una apreciación inadecuada de las técnicas modernas por computadora disponibles para la resolución de los más variados problemas de ingeniería, afirmando que estudiar los métodos clásicos (o generalizando, los fundamentos teóricos de cada procedimiento de cálculo) es darse un lujo en un ejercicio histórico y que el alumno debería ser introducido directamente en los métodos modernos. Frente a esta posición, el primer grupo afirma que este enfoque creará un estudiante que sabrá como resolver problemas cuando disponga del programa de computación adecuado, pero que será incapaz de discernir, por falta de base conceptual, si los resultados obtenidos son lógicos y consistentes con el problema planteado, y que además no sabrá resolver casos sencillos a mano cuando pueda resultar inapropiado o innecesario el uso de una computadora, o cuando deban calibrar, a nivel de verificación, programas más complejos.

Si se efectúa una remisión a los diversos libros de texto disponibles, los que en definitiva reflejan las opiniones de sus respectivos autores, generalmente profesores universitarios, se observará que varios de ellos adoptan uno u otro de estos puntos de vista. En un extremo se hallan los que desarrollan los métodos clásicos con gran detalle y relegan los métodos modernos a un par de capítulos breves que están resumidos al final, o aquellos que, inversamente, presentan inmediatamente el enfoque moderno, mencionando sólo tangencialmente el método clásico.

Frente a estos casos extremos, existen también autores, tales como los mencionados en las referencias bibliográficas (1), (2) y (3) que consideran que el estudiante debe formarse mediante una integración racional de los métodos clásico y moderno, bajo cuya premisa se basan sus respectivos libros de texto, cuyos propios títulos lo corroboran. En ellos las formulaciones clásicas se presentan y desarrollan a fin de clarificar los conceptos fundamentales del análisis estructural, para, después de una generalización suficiente, presentar las técnicas matriciales modernas y sus aplicaciones. En este enfoque, los métodos clásicos no se presentan como alternativas trabajosas de los métodos modernos, sino que se usan para dejar sentados todos los conceptos básicos, que de otra manera se perderían en las amplias generalizaciones de las formulaciones matriciales.

Con el proceso propuesto, llega a hacerse claro que gran parte de los enfoques clásicos constituyen el fundamento de las técnicas computacionales, de mayor generalidad y facilidad de aplicación. Se considera que esta forma de orientar la enseñanza dotará al estudiante de los conocimientos que requiere para entender y aplicar los modernos métodos de cálculo por computadora, y aún capacitarlo: a) para evaluar conceptualmente de un primer golpe de vista o con

sencillas verificaciones elementales efectuadas con calculadora. los resultados obtenidos y asegurar su validez; b) utilizar los métodos clásicos para resolver confiadamente problemas pequeños, y c) verificar partes aisladas de resultados obtenidos por computadora.

En conclusión, el estudiante debe aún hallarse en condiciones de poder resolver a mano pequeños problemas en los que los cálculos son manejables. En esta área, la calculadora de bolsillo ha tenido un impacto tan profundo como la computadora digital la tuvo sobre la práctica profesional. La regla de cálculo, que hasta hace un par de décadas era la marca distintiva del estudiante de ingeniería, es hoy una pieza de museo.

7. HITOS HISTORICOS EN EL DESARROLLO DE LA INGENIERIA ESTRUCTURAL.

La **ingeniería** se ha definido de muchas maneras en el transcurso del tiempo. En nuestros días puede decirse que es la disciplina que esencialmente permite aplicar conocimientos físicos, matemáticos, técnicos, financieros, socioeconómicos y de otras clases, en el diseño, construcción u operación de sistemas materiales destinados a satisfacer necesidades básicas de un conglomerado humano.

El **ingeniero civil** ha sido primordialmente un creador de obras y servicios públicos, como lo indica la diversidad de nombres con que se lo ha conocido en el curso de los años: ingeniero de caminos y puentes (del francés *ingénieur de ponts et chaussées*); ingeniero de caminos, canales y puertos (en España); ingeniero de construcción (en alemán, *Bauingenieur*); ingeniero constructor o ingeniero arquitecto (en ciertos casos), etc. y sus actividades se han extendido en la actualidad más allá de las puramente constructoras, abarcando también las de mejoramiento del ambiente y de la conservación ecológica.

Por otra parte, dentro de la ingeniería general se ha configurado una especialidad relacionada con la creación de sistemas materiales, cuya finalidad primaria es la de transmitir y resistir, eficaz y seguramente, la acción de fuerzas aplicadas de diversos orígenes: gravitacionales, sísmicas, de viento, dinámicas, hidráulicas, térmicas, eléctricas, etc., y tal disciplina es la ingeniería de las estructuras o **ingeniería estructural**.

En forma sumaria cabe mencionar que la evolución de esta rama de la ingeniería se inicia con los albores de la Humanidad, cuando junto con el artesano primitivo (el *homo faber*), apareció el constructor prehistórico, el ingenioso hacedor de rudimentarias viviendas, monumentos, puentes colgantes, etc. Milenios después vendrían las grandiosas construcciones de las culturas egipcias, griega y romana, hasta llegar a la Edad Media, en la que destacan sus maravillosas edificaciones arquitectónicas: castillos, catedrales, fortificaciones, etc.

En el Renacimiento puede situarse el origen del estudio científico de las estructuras y del comportamiento de los materiales de construcción, en los trabajos de dos notabilísimos precursores: Leonardo y Galileo.

Se cree que un arquitecto italiano, Andrea Palladio, hacia 1560, analizó y construyó las primeras estructuras de reticulado. Sus extensas notas sobre arquitectura incluyen descripciones detalladas y dibujos de armaduras de madera bastante similares a las usadas actualmente.

Tiempo después se iniciaría la serie de los importantes descubrimientos realizados por eminentes elasticistas o investigadores de la Teoría de la Elasticidad y de la Resistencia de Materiales, sin embargo con un lento progreso.

Hacia 1676, Robert Hooke observó que los sólidos no sólo resisten el peso y otras cargas mecánicas reaccionando contra ellas, sino que también cualquier sólido cambia su forma (alargándose o contrayéndose) cuando se le aplica una fuerza mecánica, y que dicho cambio de forma se produce cuando el sólido contrarresta la carga. Enunció así que "la potencia de cualquier cable está en la misma proporción que el alargamiento que sufre. Esto es, si una potencia alarga o flecta en una longitud, dos lo flectarán en dos, tres lo flectarán en tres, y así sucesivamente. Esta es la regla o ley de la Naturaleza, bajo la que debe actuar cualquier forma de movimiento de restitución o alargamiento"

Después de haber contrastado sus ideas en una serie de discusiones privadas con sir Christopher Wren, Hooke publicó sus experimentos en 1679 en un trabajo titulado *De potentia restitutiva o sobre cables.* Este trabajo contenía la famosa sentencia *ut tensio sic vis* (como el alargamiento, así la fuerza). Este principio se ha conocido, durante ya más de 300 años, como "Ley de Hooke".

Aunque en los tiempos modernos la ley de Hooke brindó un gran servicio a los ingenieros, constituyendo la piedra basal del análisis estructural, en la forma en que la enunció Hooke originalmente, su eficacia práctica era bastante limitada. Hooke hablaba de las deformaciones del conjunto de la estructura cuando se le aplicaba una carga y no hacía referencia al tamaño de la misma ni a su material constitutivo.

Resulta muy sorprendente que después de un comienzo tan prometedor, no apareciera ninguna forma científica de soslayar esta dificultad hasta 120 años después de la muerte de Hooke.

Contemporáneo a Hooke, pero en forma completamente independiente, Edmé Mariotte dedicó casi toda su vida al estudio de las leyes de la mecánica terrestre y a la resistencia a flexión y a tracción de barras. Alrededor de 1680 obtuvo una solución parcial del problema efectuando un enunciado relativamente semejante al de Hooke, pero por supuesto sin utilizar el concepto de tensión.

De hecho a lo largo de todo el siglo XVIII se hicieron progresos notablemente pequeños en la materia. Entre otros aspectos, ello se debió fundamentalmente a que los pocos científicos que se dedicaron al tema intentaron manejar fuerzas y deformaciones considerando al conjunto de la estructura (como había hecho Hooke), más que las fuerzas y los desplazamientos que podían desarrollarse en cualquier punto dentro del material.

Como progresos aislados, en ese siglo se acredita en 1717 a John Bernoulli el Principio de los Trabajos Virtuales, introduciendo el concepto de desplazamiento (o acción) virtual, significando este término que alguno de los nombrados "está en esencia o efecto, pero no de hecho".

Alrededor de 1760 Leonard Euler, buscando aplicaciones a sus descubrimientos matemáticos sobre lo que él denominó "cálculo variacional", obtuvo la base de lo que hoy se conoce como "fórmula de Euler para la carga crítica de pandeo", muchas décadas antes de que se introdujeran los conceptos de tensión, deformación unitaria y módulo de elasticidad.

A finales de siglo Charles Coulomb concibe por primera vez la línea de presiones.

Los puentes colgantes en base al sistema moderno de soportar los cables desde altas pilas y colgar el tablero por debajo del cable fue inventado por James Finlay, de Pensilvania, que empezó a construir puentes de este tipo alrededor de 1796. La idea de Finlay fue acogida por varios constructores, en especial por Thomas Telford, cuyo puente a través de los estrechos de Menai (en Gran Bretaña) se terminó en 1825, salvando en su tramo libre central una luz de 166 metros, con mucho la mayor de su época. La tensión de trabajo en las cadenas de sostén era de 55 MN/m^2.

Volviendo a la ley de Hooke, el comportamiento elástico en un punto cualquiera dentro del material, que permiten definir los conceptos de lo que conocemos como tensión y deformación unitaria, fueron recién descriptos en su forma más general por Augustin Cauchy en un trabajo dirigido a la Academia Francesa de Ciencias en 1822, trabajo que constituyó quizá el acontecimiento más importante de la historia de la elasticidad desde Hooke.

El tercer término de la ley de Hooke había sido expresado algunos años antes, en 1807, por Thomas Young, quien define su módulo en una carta dirigida al Almirantazgo Británico, con los siguientes términos: "El módulo de elasticidad de una sustancia es una columna de la misma sustancia, capaz de producir una presión en su base que es al peso que produce cierto grado de compresión, lo que la longitud de la sustancia es a la disminución de su longitud". La respuesta del Almirantazgo fue lacónica: "Aunque sus Señorías respetan mucho la ciencia y su trabajo es tenido en gran estima, les parece demasiado elaborado, ... en resumen, no ha sido entendido". De cualquier manera debe reconocerse que fue para Young muy difícil expresar el concepto de E sin los de tensión y deformación unitaria, que no se empezaron a utilizar hasta 15 ó 20 años después.

La definición moderna del módulo de Young ($E = \sigma/\varepsilon$) y en consecuencia de la ley de Hooke como hoy la expresamos, se dio en 1826 (tres años después de la muerte de Young) por el ingeniero francés Claude Louis Navier. Poco después S. D. Poisson introduce los conceptos atinentes a la deformación transversal de los materiales.

La ecuación de los tres momentos es desarrollada por el ingeniero francés Clapeyron en 1857.

En 1864, James Clark Maxwell publica un método de fuerzas para analizar estructuras hiperestáticas, el que se basaba en la consideración de desplazamientos. Sin embargo, su presentación, que incluía el hoy conocido y muy utilizado teorema de Maxwell o de los desplazamientos recíprocos, fue tan breve que no llamó mayormente la atención. Diez años después Otto Mohr, en forma independiente, amplió la teoría casi a su estado actual de desarrollo.

El verdadero valor del teorema de Maxwell no fue plenamente apreciado sino hasta 1886, cuando Heinrich Müller-Breslau, enuncia su principio, basado en el referido teorema, de vital importancia para el trazado con gran facilidad de líneas de influencia de estructuras continuas. Por otra parte, el profesor E. Winkler, había sido quien en 1867, en Berlín, había propuesto por primera vez el empleo de las líneas de influencia.

En la misma época, Alberto Castigliano, ingeniero de los ferrocarriles italianos, publica en 1879 un original y elaborado tratado sobre estructuras estáticamente indeterminadas, donde incluye los teoremas que hoy se conocen como primer y segundo teorema de Castigliano, el segundo de ellos presentado como tesis para recibir su diploma de ingeniero en la universidad de Turín.

Hacia finales del siglo XIX, Theodor Cooper usa en 1894 por primera vez el sistema del tren de cargas para el cálculo de puentes ferroviarios y M. Vierendeel desarrolla en 1896 la viga o armadura de nudos rígidos conocida con su nombre.

En esa época se erige sobre el río San Lorenzo en Quebec (Canadá), lo que aún hoy es la viga simplemente apoyada con voladizos más grande que se haya materializado. El puente se construyó entre 1899 y 1917 y costó 87 vidas. Su longitud total es de 987 metros, con 549 metros entre pilares de apoyo y voladizos de 219 metros cada uno.

En 1915 el profesor George A. Maney presentó el método de la pendiente-deflexión (antecesor del método de los desplazamientos) para el cálculo de estructuras hiperestáticas. El mismo fue considerado durante casi 15 años el método "exacto" para el análisis de vigas y pórticos en Estados Unidos, hasta que el profesor Hardy Cross diera a conocer el método de la distribución de momentos en 1930, luego de haber enseñado tal procedimiento a sus alumnos en la universidad de Illinois desde 1924.

El método de Cross no tuvo prácticamente sustituto hasta el advenimiento de las computadoras y las técnicas matriciales en la década de 1960, a pesar que pocos años antes G. Kani publicara un método de doble iteración que permitía resolver en forma exacta pórticos de varios niveles con desplazamiento lateral, perfeccionando el procedimiento de Cross, que exigía el planteo de sistemas de ecuaciones complementarios para tales casos. Sin embargo, este método sólo tuvo difusión en Europa central y oriental.

En el presente, la Ingeniería Estructural tiene un amplio desarrollo teórico y experimental, y cuenta con la ayuda de los modernos adelantos de la tecnología en materia de computación. Se han materializado así un sinnúmero de obras que por su magnitud figuran entre las mayores en su tipo jamás construidas.

Como ejemplos aislados cabe hacer mención de la torre autoportante CN Tower en Toronto (Canadá), terminada en 1975 que alcanza los 553,30 metros de altura, sólo un poco más que el edificio de mayor altura existente en la actualidad, las Torres Gemelas Petronas en Kuala Lumpur, Malasia (1997) que con sus 452 metros, supera por 9 metros a la Sears Tower de Chicago.

El puente colgante más extenso ubica en el estuario Humber, en Inglaterra. Construido entre 1972 y 1980, su luz central tiene una longitud de 1.410 metros; la altura de las torres de sostén es de 162,20 metros y se hallan desniveladas en 3,6 centímetros para compensar la curvatura de la tierra. Los hilos de los cables de acero trabajan a 580 MN/m^2, valor que supera en más de 10 veces la tensión de las cadenas de hierro colado de Telford.

La mayor luz en un puente en arco de acero se logró en Virginia Occidental (EE. UU.) con 518 metros. La obra fue concluida en 1977.

Pero los adelantos modernos no sólo se han puesto de manifiesto en la magnitud de las obras, sino sobre todo en su diseño. Se ha quebrado así la disciplina formal, exterior, de las tipologías convencionales, en especial en materia de puentes y edificios, para plasmar realizaciones absolutamente originales, es decir, formas - tipo estructurales que aparecen como ideas nuevas y que no habían existido en el pasado, aportando esenciales innovaciones. A ello se suman revolucionarios diseños arquitectónicos que logran dar a las estructuras un dinamismo tal que dan la sensación de estar dotadas de movimiento.

Pareciera así que en materia de ingeniería estructural el ingreso al siglo XXI estará signado con la continua búsqueda de rupturas con la tradición. Hasta hace muy poco tiempo atrás la norma era el soporte de unas obras en otras, el continuo aprendizaje de unos ingenieros en base a las experiencias de sus antecesores.

En contraposición a ello, el criterio innovador, una mejor adecuación de las metodologías de cálculo al real comportamiento de las estructuras y nuevas concepciones en el empleo de los materiales de construcción, constituyen el desafío básico que deberán afrontar las futuras generaciones de ingenieros.

8. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

3. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

4. "MECANICA DE CONSTRUCCION" - Tomos I y II - V. A. Kiseliov - Editorial Mir - Moscú - 1972.

5. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana S.A. - México - 1997.

6. "ESTABILIDAD III - Capítulo I: Introducción, Conceptos Fundamentales y Análisis de Sistemas" - Carlos D. Segerer -Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo - 1985.

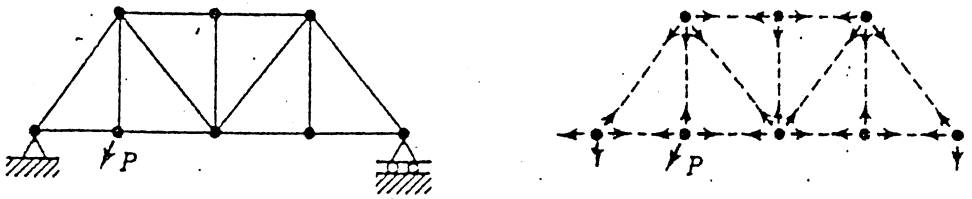
7. "TEORIA ELEMENTAL DE ESTRUCTURAS" - Yuan-Yu Hsieh - Editorial Prentice/Hall Internacional - Madrid - 1973.

8. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Jan J. Tuma - Mc Graw-Hill de México - 1975.

9. "ESTATICA APLICADA" - Raúl Salvador Llano - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo - 1999.

10. "ESTRUCTURAS o por qué las cosas no se caen" - J. E. Gordon - Celeste Ediciones - Madrid - 1999.

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO I - Anexo

RESOLUCION MATRICIAL

DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 1995

1. INTRODUCCION.

El álgebra matricial es particularmente útil en el Análisis Estructural, dado que permite encarar el problema de la resolución de estructuras mediante una serie de operaciones con matrices, apropiadas tanto para una resolución ágil con calculadoras ordinarias, como, sobre todo, para el empleo de computadoras. Pero todavía más importante es que, usando matrices, se pueden analizar todos los tipos de estructuras por medio de un enfoque general y, debido a las propiedades de organización de aquéllas, el empleo del álgebra matricial es ventajoso aún en el cálculo manual. La formulación con matrices permite representar ecuaciones en una forma compacta, lo cual no sólo ahorra espacio, sino que también ayuda al calculista a concentrarse en el aspecto conceptual, formulando las operaciones sin distraerse con detalles algebraicos o aritméticos.

El simbolismo del álgebra matricial, así como el auxilio de las computadoras, que tan prácticas resultan en la resolución de los problemas de análisis estructural, pueden llegar a encerrar un aspecto negativo para la comprensión del fenómeno estructural en sí mismo y, por lo tanto, para la formación del ingeniero estructuralista, que no sólo debe analizar estructuras, sino (y ésta es su verdadera función), crearlas y proyectarlas. El mencionado aspecto negativo resulta de la posibilidad de perderse en el uso de expresiones matemáticas, sin tener presente el significado físico de cada uno de los símbolos que en las mismas aparecen. Por ello debe insistirse en la fundamental importancia que posee la interpretación física de cada matriz, la que en todo momento debe tenerse presente, y en lo posible, profundizarse.

Si bien es cierto que por lo general no existen grandes ventajas al aplicar los métodos matriciales para el cálculo de las reacciones de vínculo y para la determinación de los valores que permitan trazar los diagramas de solicitaciones internas en estructuras estáticamente determinadas sencillas, aquéllos pueden resultar de utilidad para reemplazar los métodos gráficos tradicionales para la determinación de los esfuerzos en las barras de estructuras de reticulado y para el trazado de líneas de influencia. Independientemente de ello, el tema en sí presenta interés para poner al corriente al estudiante con las técnicas asociadas con los métodos matriciales y servir de introducción a la formulación de los mismos para la resolución de estructuras hiperestáticas.

2. CALCULO DE UN VECTOR DE SOLICITACIONES.

2.1. Concepto de Matriz de Influencia.

Sea la viga simplemente apoyada que muestra la figura 1a), sometida a la acción de las cargas concentradas P_1 y P_2, aplicadas respectivamente en las secciones 1 y 2. Si se desean calcular, por

ejemplo, los valores de la reacción de vínculo en el apoyo A y el momento flector y el esfuerzo de corte en una sección cualquiera j, puede procederse de acuerdo a los postulados fundamentales de la Estática, planteando en primer lugar las ecuaciones de equilibrio para determinar los valores de las reacciones de vínculo, y aplicando luego los conceptos básicos que surgen de las definiciones de momento flector y esfuerzo de corte.

Sin embargo, los valores de R_A, M_j y Q_j pueden ser también hallados aplicando el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos, en virtud del cual resulta

$$\begin{aligned} R_A &= R_{A1} + R_{A2} \\ M_j &= M_{j1} + M_{j2} \\ Q_j &= Q_{j1} + Q_{j2} \end{aligned} \qquad (1)$$

donde R_{A1}, M_{j1}, y Q_{j1} son, respectivamente, la reacción de vínculo en A y el momento flector y el esfuerzo de corte en la sección j, producidos por la acción P_1 individualmente considerada, resultando extensivo el concepto para R_{A2}, M_{j2} y Q_{j2}, debidos a la acción P_2 (figura 1b).

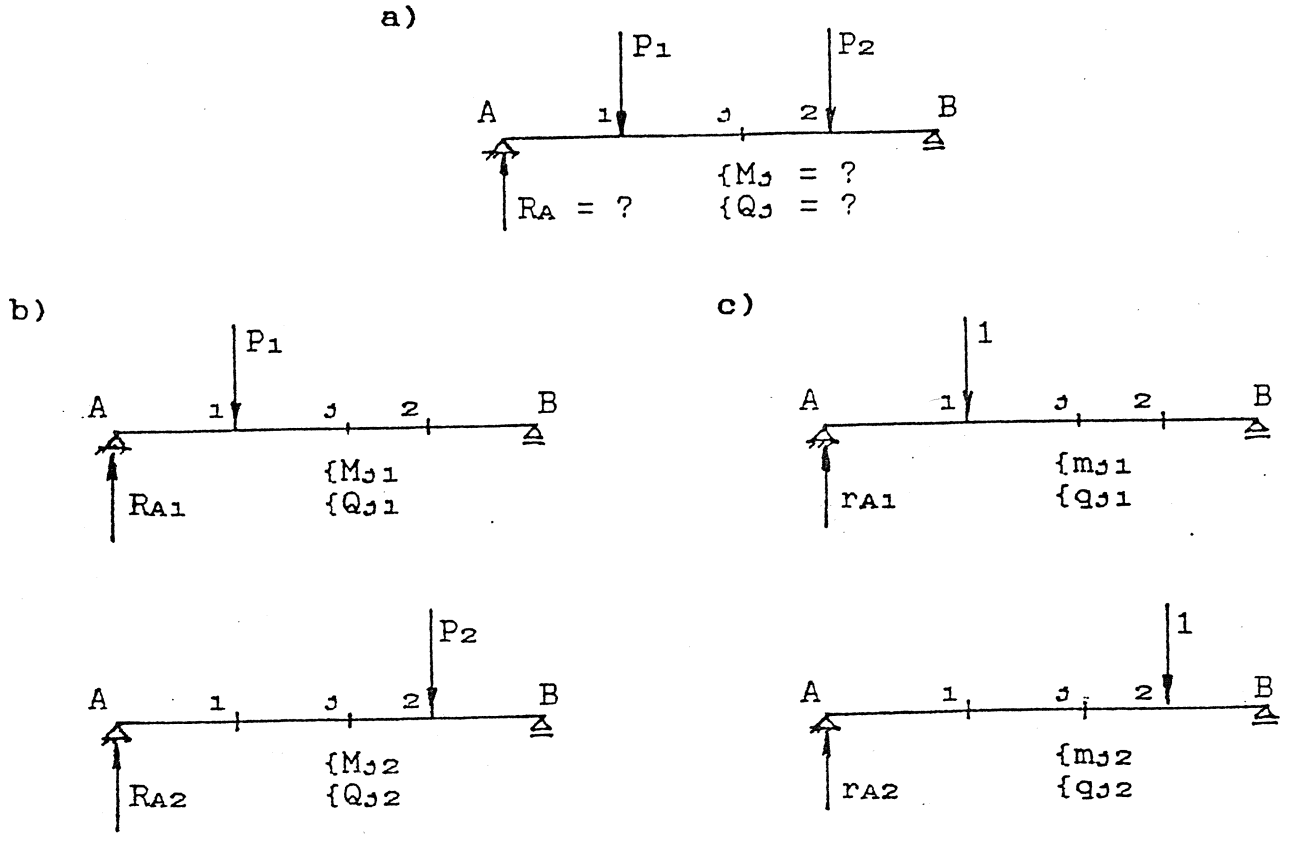


Figura 1

Ahora bien, de acuerdo a la proporcionalidad existente entre los valores de las acciones exteriores y los de las

solicitaciones, tanto de vínculo como interiores que las mismas producen, puede escribirse que:

$$\begin{array}{lll} R_{A1} = r_{A1}.P_1 & ; & R_{A2} = r_{A2}.P_2 \\ M_{j1} = m_{j1}.P_1 & ; & M_{j2} = m_{j2}.P_2 \\ Q_{j1} = q_{j1}.P_1 & ; & Q_{j2} = q_{j2}.P_2 \end{array} \qquad (2)$$

donde r_{Ak} es la reacción de vínculo en el apoyo A y m_{jk} y q_{jk} son, respectivamente, el momento flector y el esfuerzo de corte que se producen en la sección j, cuando actúa sobre la estructura, como única acción exterior, una carga unitaria aplicada en la sección k (k = 1, 2), de igual dirección y sentido que las correspondientes cargas dadas (figura 1c).

Reemplazando las (2) en las (1):

$$\begin{array}{l} R_A = r_{A1}.P_1 + r_{A2}.P_2 \\ M_j = m_{j1}.P_1 + m_{j2}.P_2 \\ Q_j = q_{j1}.P_1 + q_{j2}.P_2 \end{array} \qquad (3)$$

Es posible dar a las ecuaciones (3) una representación matricial, agrupando las solicitaciones incógnitas y las acciones exteriores en los vectores

$$[X] = \begin{bmatrix} R_A \\ M_j \\ Q_j \end{bmatrix} \quad ; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \\ P_2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

con lo que aquéllas pueden escribirse

$$[X] = [i].[P] \qquad (5)$$

donde

$$[i] = \begin{bmatrix} r_{A1} & r_{A2} \\ m_{j1} & m_{j2} \\ q_{j1} & q_{j2} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

El vector [X] está formado por las incógnitas que se hayan planteado, representando en consecuencia una función respuesta específica. Como tales incógnitas corresponden por lo general a solicitaciones internas, se lo suele llamar *vector de tensiones internas* de la viga, denominación que proviene del hecho que dichas solicitaciones internas son resultantes de tensiones.

El vector [P] que agrupa las acciones exteriores activas, es el vector de las cargas externas aplicadas a la estructura, o simplemente *vector de cargas*.

La matriz [i] que vincula a las cargas exteriores activas con las solicitaciones internas (y eventualmente con las reacciones de vínculo), es la denominada *matriz de influencia* (o *matriz de incidencia*), la que puede ser de forma cuadrada o rectangular. El

número de sus filas es igual al de incógnitas que se deseen determinar y el número de sus columnas, al de acciones exteriores que actúan sobre la estructura. Para conformar cada una de estas columnas es necesario cargar la estructura en la dirección de las acciones exteriores actuantes, con fuerzas (o pares según el caso), de valor unitario, actuando en forma independiente y sucesiva, en el mismo orden que el adoptado al formar el vector [P] y con el mismo sentido con el que tales acciones exteriores se presentan sobre la estructura. De acuerdo a la (5) puede interpretarse a la matriz de influencia como una matriz que transforma el vector de las cargas [P] en el vector de los valores de la magnitud [X] para la cual está compuesta.

2.2. Criterios para la conformación de [X].

La formulación matricial precedentemente analizada sirve, no sólo para la determinación de las solicitaciones internas en una sección dada de una estructura, sino que puede ser extendida a los fines de calcular todos los parámetros necesarios que permitan definir la configuración integral de los diagramas de momentos flectores, esfuerzos normales y de corte y los valores característicos de los mismos. Para ello sólo deberán elegirse adecuadamente las secciones, y eventualmente los tramos en que se considerará subdividida la estructura, determinando en forma conveniente los elementos que conformarán el vector [X].

A los efectos indicados deberá tenerse en cuenta:

a) El tipo de solicitaciones internas cuyos diagramas (y por ende valores característicos) se desee determinar.

b) Las leyes de variación de dichas solicitaciones (que pueden generalmente establecerse de antemano en lo relativo a su configuración), cuya consideración, en la mayoría de los casos, permite limitar considerablemente la cantidad de términos a incluir en el planteo de [X].

Para los casos en que la estructura se halle solicitada sólo por cargas concentradas, se sabe que el diagrama de momentos flectores tiene configuración poligonal, con los vértices en correspondencia con los puntos de aplicación de aquéllas, mientras que los diagramas de esfuerzos normales y de corte son rectangulares en los tramos entre cargas. Como consecuencia de ello pueden adoptarse para la conformación del vector [X]:

* Para momentos flectores, los puntos de aplicación de las acciones exteriores, los puntos de quiebre de la estructura, los apoyos interiores y las secciones de empotramiento.

* Para los esfuerzos normales y de corte, los tramos entre los puntos adoptados para los momentos flectores.

En una concepción completamente general, puede considerarse la estructura dividida en un número determinado de tramos, cada uno de los cuales se halla solicitado en la forma que indica la figura 2.

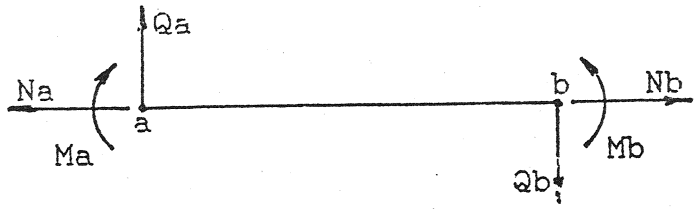


Figura 2

En el caso de cargas distribuidas, la longitud de cada tramo, y por ende la cantidad de puntos a considerar, deberá ser elegida en forma acorde al grado de exactitud pretendido en la determinación de la ley de variación de las solicitaciones internas (básicamente las de variación parabólica). Para cada uno de tales tramos se deberá reemplazar la carga distribuida por su resultante en el tramo.

La eventual constancia de Q y/o de N a lo largo del tramo y la casi general igualdad de las solicitaciones internas del extremo final de un tramo y del inicial del contiguo, reducirá la cantidad de términos a incluir para conformar el vector [X].

3. RESOLUCION MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE ALMA LLENA.

3.1. Reducción de un sistema de acciones.

Sea un sistema de acciones cualesquiera (constituido por fuerzas y/o pares), tal como el P_1, P_2 y M, indicado en la figura 3, al que se desea reducir al punto O y al sistema de ejes x-y que pasan por el mismo.

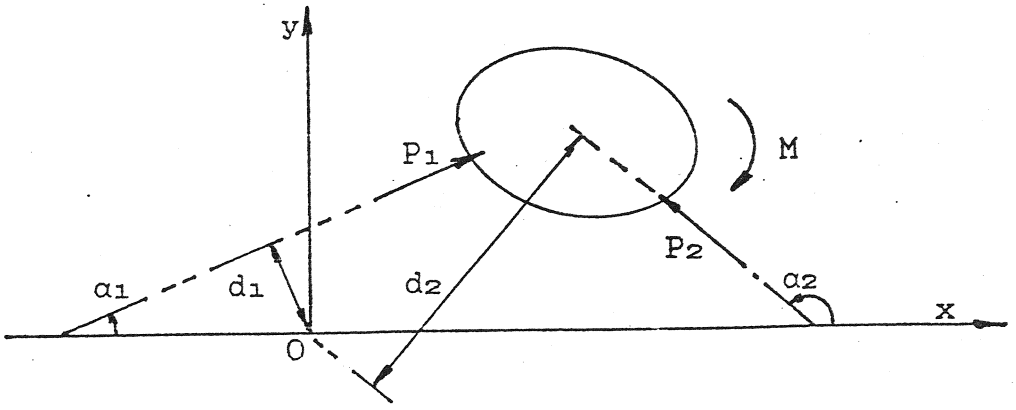


Figura 3

Por Estática, las componentes de reducción serán:

$$
\begin{aligned}
&* \text{ Según el eje x:} && C_x = P_1.\cos\alpha_1 + P_2.\cos\alpha_2 \\
&* \text{ Según el eje y:} && C_y = P_1.\operatorname{sen}\alpha_1 + P_2.\operatorname{sen}\alpha_2 \\
&* \text{ Respecto al punto O:} && C_o = P_1.d_1 - P_2.d_2 + M
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

que expresadas en forma matricial

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_2 & 0 \\ d_1 & -d_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \end{bmatrix} \qquad (8)$$

o bien

$$[C] = [A_c] \cdot [P] \qquad (9)$$

donde [C] es el vector formado por las componentes de reducción del sistema, las que serán tantas como grados de libertad tenga el mismo, [P] es el vector de las acciones actuantes sobre la chapa plana y [Ac] es una matriz usualmente denominada *matriz de transformación* de las acciones dadas en sus componentes de reducción respecto al sistema de ejes y al punto (o los puntos) elegidos.

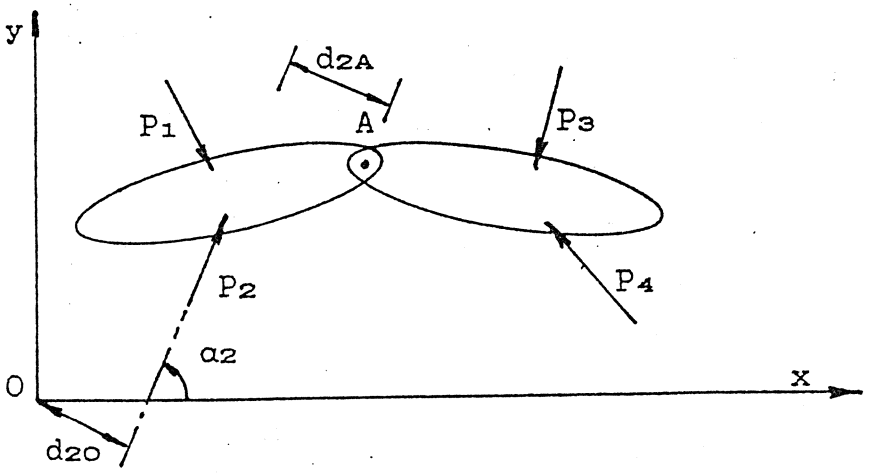


Figura 4

Si el sistema estuviese formado por más de una chapa (por ejemplo dos, como en el caso de la figura 4), los grados de libertad serían cuatro, y podría reducirse el sistema a las cuatro coordenadas correspondientes para tales casos: tres para el total de las fuerzas respecto al sistema O(x-y) y la cuarta respecto a la articulación relativa A para las fuerzas actuantes sobre una sola de las chapas. En consecuencia

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_o \\ C_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_4 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_2 & \operatorname{sen}\alpha_3 & \operatorname{sen}\alpha_4 \\ d_{1O} & -d_{2O} & d_{3O} & -d_{4O} \\ -d_{1A} & d_{2A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Obsérvese que los brazos de palanca d_{iJ} deben consignarse en la formulación de la matriz [Ac] con el signo del momento de la fuerza correspondiente. En la figura 4, por razones de simplicidad, se indica sólo el argumento y los brazos de palanca

correspondientes a la fuerza P_2, siendo extensivos los conceptos conocidos para la interpretación de los restantes elementos de la matriz [Ac].

3.2. Sistema de acciones en equilibrio.

Si un sistema de fuerzas (o de acciones en general) se halla en equilibrio, su resultante, o lo que es lo mismo, sus componentes de reducción, deben ser nulas. Para que ello ocurra deberá ser, teniendo en cuenta la (9)

$$[C] = [A_c].[P] = 0 \qquad (11)$$

que constituye la expresión matricial del equilibrio de un sistema de acciones [P]. Esta condición de equilibrio es válida para un caso general de n chapas, dependiendo de su vinculación la elección de las coordenadas de reducción.

3.3. Equilibrio de los sistemas planos vinculados.

Teniendo en cuenta que al considerar cualquier sistema vinculado pueden suprimirse los vínculos, colocando en su lugar las reacciones que los mismos originan, quedan constituidos en todos los casos sistemas de acciones (activas y reactivas) en equilibrio, para las cuales no existe inconveniente alguno en plantear la condición [C] = 0 extendida a todo el sistema de acciones formado por las cargas exteriores activas [P] y las reacciones de vínculo [R], según los grados de libertad del sistema.

3.3.1. Sistema de una chapa isostáticamente vinculada.

En el caso de una chapa isostáticamente vinculada (figura 5), las ecuaciones de equilibrio referidas al sistema O (x-y), en las condiciones antedichas en lo relativo a la medición de los argumentos y los brazos de palanca, serán:

$$\begin{aligned} P_1.\cos\alpha_1 + P_2.\cos\alpha_2 + R_1.\cos\beta_1 + R_2.\cos\beta_2 + R_3.\cos\beta_3 &= 0 \\ P_1.\operatorname{sen}\alpha_1 + P_2.\operatorname{sen}\alpha_2 + R_1.\operatorname{sen}\beta_1 + R_2.\operatorname{sen}\beta_2 + R_3.\operatorname{sen}\beta_3 &= 0 \\ P_1.d_1 + P_2.d_2 + R_1.d_{R1} - R_2.d_{R2} - R_3.d_{R3} &= 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

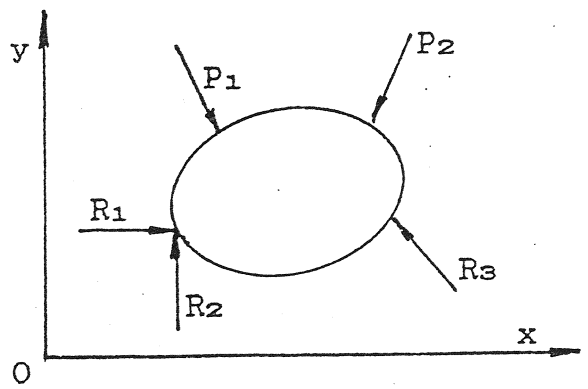


Figura 5

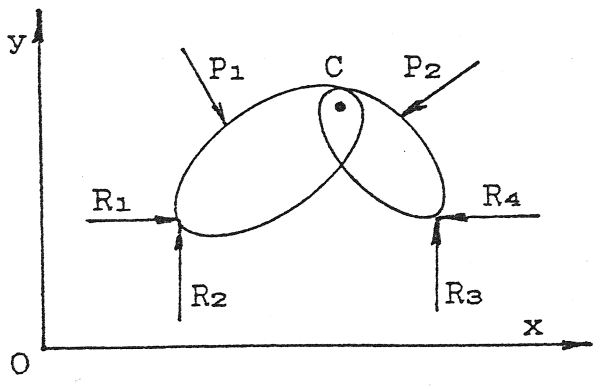


Figura 6

Para su expresión en forma matricial resulta útil particionarla en la forma

$$[A_p].[P] + [A_r].[R] = 0 \qquad (13)$$

con

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \\ P_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$[A_p] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_r] = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \operatorname{sen}\beta_1 & \operatorname{sen}\beta_2 & \operatorname{sen}\beta_3 \\ d_{R1} & -d_{R2} & -d_{R3} \end{bmatrix}$$

3.3.2. Sistema de dos chapas isostáticamente vinculadas.

En el caso de un sistema constituido por dos chapas isostáticamente vinculadas (figura 6), será también de aplicación la expresión (13), siendo en este caso

$$[A_p] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_2 \\ d_1 & d_2 \\ -d_{1c} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_r] = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cos\beta_4 \\ \operatorname{sen}\beta_1 & \operatorname{sen}\beta_2 & \operatorname{sen}\beta_3 & \operatorname{sen}\beta_4 \\ d_{R1} & -d_{R2} & -d_{R3} & -d_{R4} \\ -d_{R1c} & d_{R2c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Análogamente debe procederse para los casos de cadenas constituidas por tres o más chapas.

3.4. Cálculo de las reacciones de vínculo.

Se observa que siempre que el sistema sea isostáticamente determinado, la matriz $[A_r]$ será cuadrada, y con tantas filas y columnas como grados de libertad tenga el sistema. Por lo tanto, de la (13)

$$[A_r].[R] = - [A_p].[P]$$

$$[R] = - [A_r]^{-1}.[A_p].[P] = [i_R].[P] \qquad (14)$$

llamando

$$[i_R] = - [A_r]^{-1}.[A_p] \qquad (15)$$

3.5. Cálculo de las solicitaciones internas.

La expresión (5) puede particionarse tomando en consideración por separado las matrices de influencia correspondientes a las acciones exteriores directamente aplicadas y a las reacciones de vínculo, por una parte, y los vectores [P] y [R] por otra. Se obtendrá en consecuencia

$$[X] = [i_p].[P] + [i_r].[R] \qquad (16)$$

y reemplazando el valor de [R] dado por la (14)

$$[X] = [i_p].[P] - [i_r].[A_r]^{-1}.[A_p].[P]$$

o bien

$$[X] = ([i_p] - [i_r].[A_r]^{-1}.[A_p]).[P] = [i_x].[P] \qquad (17)$$

llamando

$$[i_x] = [i_p] - [i_r].[A_r]^{-1}.[A_p] \qquad (18)$$

La expresión (17) permite calcular cualquier conjunto de solicitaciones internas, con las mismas consideraciones que las efectuadas en el apartado 2.2.

3.6. Criterios para la formación de [i_p] y de [i_r].

Para conformar las matrices [i_p] e [i_r] deben tenerse presentes los conceptos expuestos al respecto para la conformación de la matriz [i] en el apartado 2.1., pero tomando en consideración que en esta concepción general intervienen por separado los efectos de las acciones exteriores P_i y los de las reacciones de vínculo R_i, lo que evita el cálculo estático completo de la estructura a resolver, bajo la acción de los estados unitarios de carga, que debía efectuarse según las consideraciones efectuadas en el mencionado apartado. Por el contrario, en este caso los estados de acciones unitarias (tanto activas como reactivas), actúan sucesivamente como única solicitación aplicada sobre la estructura, supuesta libre, o sea sin ningún tipo de vinculación.

Para clarificar el concepto relativo a la conformación de dichas matrices, considérese, por ejemplo, el semipórtico de la figura 7, del que se desean calcular los parámetros necesarios para trazar los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos de corte.

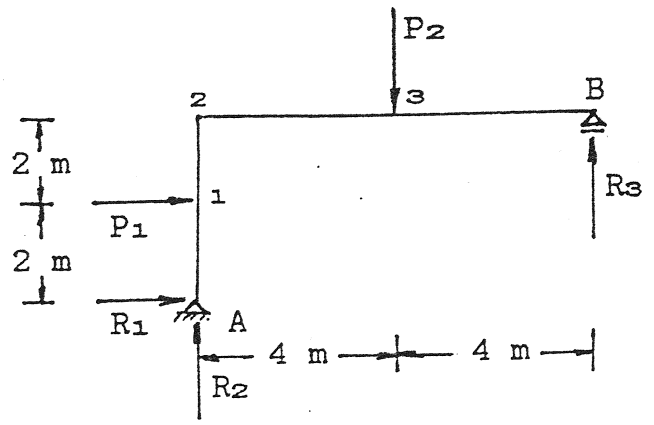


Figura 7

En tal caso el vector de incógnitas será

$$[X] = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ Q_{A1} \\ Q_{12} \\ Q_{23} \\ Q_{3B} \end{bmatrix}$$

Las figuras 8 y 9 indican los esquemas a tener en cuenta para la conformación de las matrices $[i_r]$ e $[i_p]$.

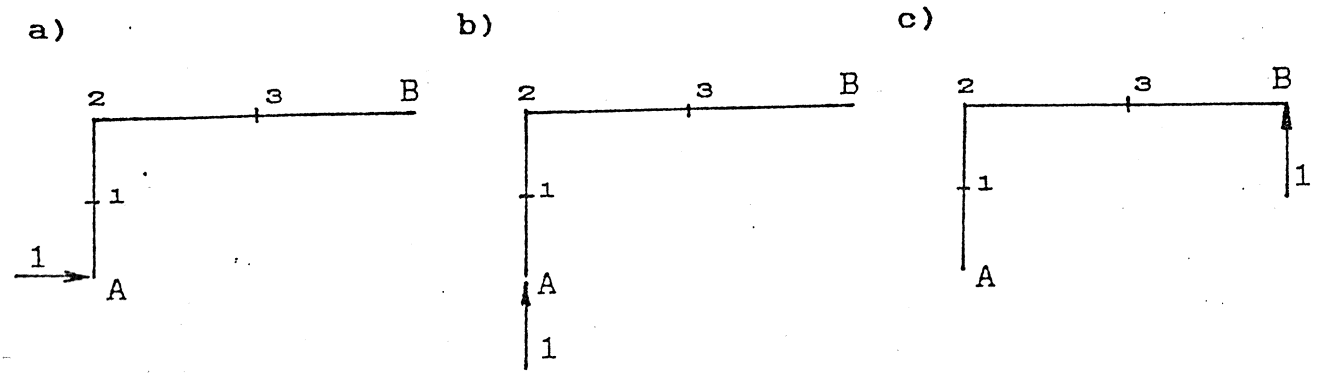


Figura 8

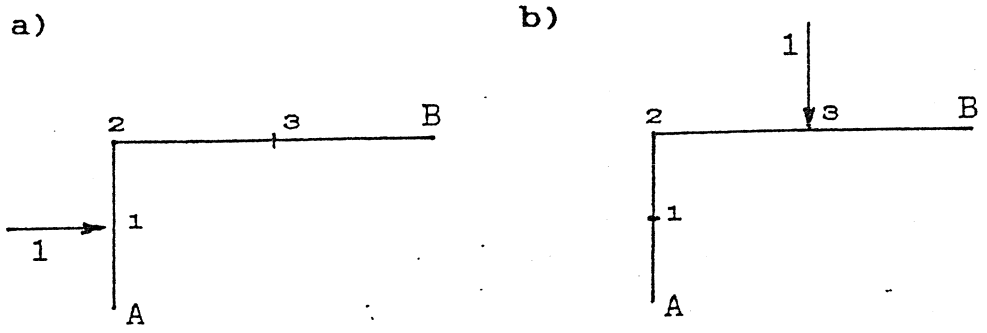


Figura 9

$$[i_r] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [i_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La primera columna de la [i_R] estará formada por los valores indicados, los que surgen del análisis de la figura 8a). En efecto, considerando sobre la estructura, supuesta como una barra no vinculada, la acción de una fuerza unitaria en la dirección y con el sentido presupuesto para R_1, el momento estático de dicha fuerza con respecto al punto 1 será de -2 y con respecto a los puntos 2 y 3 será de -4. Por su parte, recordando el concepto del esfuerzo de corte y la convención de signos adoptada, la proyección de dicha fuerza en cualquier sección de los tramos A-1 y 1-2 será -1, siendo nula la proyección sobre las secciones de los tramos 2-3 y 3-B. Análogamente se razona para conformar las columnas segunda (figura 8b) y tercera (figura 8c).

Para el planteo de la matriz [i_P] se efectúa idéntico razonamiento, considerando sucesivamente la actuación sobre la barra de $P_1 = 1$ para conformar la primera columna (figura 9a) y $P_2 = 1$ para la segunda (figura 9b).

Debe ponerse especial atención en el planteo de estas matrices para que en ambas la reducción de fuerzas se efectúe adoptando un mismo sentido de recorrido de la estructura.

4. RESOLUCION MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE RETICULADO.

Los conceptos anteriores relativos a la resolución matricial de estructuras estáticamente determinadas, son extensivos también a la determinación de los esfuerzos en las barras y los valores de las reacciones de vínculo en reticulados.

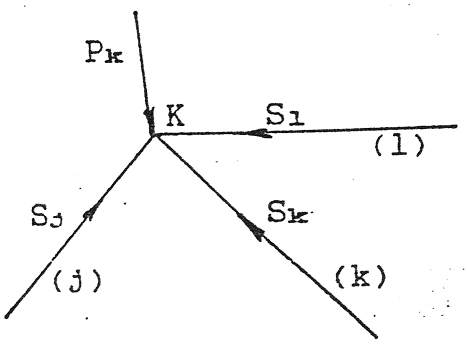


Figura 10

Sea K (figura 10), un nudo genérico de un reticulado al cual concurren las barras j, k y 1, cuyas direcciones forman con el semieje positivo del eje de las x considerado con origen en K, los ángulos α_j, α_k y α_1. Si se designan por S_j, S_k y S_1 a los esfuerzos en dichas barras y se supone que en el nudo se halla aplicada una fuerza exterior P_k, cuya dirección y sentido quedan definidos por el ángulo β_k medido en iguales condiciones, pueden plantearse las ecuaciones de equilibrio de las acciones actuantes, las que resultarán de la forma:

Según el eje x: $P_k.\cos \beta_k + S_j.\cos \alpha_j + S_k.\cos \alpha_k + S_1.\cos \alpha_1 = 0$
Según el eje y: $P_k.\text{sen } \beta_k + S_j.\text{sen } \alpha_j + S_k.\text{sen } \alpha_k + S_1.\text{sen } \alpha_1 = 0$

Para un reticulado completo, compuesto por V nudos, podrán plantearse en total 2V ecuaciones. En tales condiciones pueden agruparse los términos correspondientes en vectores y matrices que incluyan a todos ellos, de manera de obtener una expresión matricial única para todo el reticulado, de la forma

$$[P] + [As].[S] = 0 \qquad (19)$$

y despejando

$$[S] = - [As]^{-1}.[P] = [is].[P] \qquad (20)$$

Cabe observar que en este caso en el vector [P] se deben considerar las proyecciones según x e y de cada fuerza exterior actuante.

Teniendo presente la condición de isostaticidad del reticulado (grado de hiperestaticidad X = 0), y que para este tipo de estructuras

$$X = Vs + B - 2V = 0$$

será

$$2V = Vs + B$$

Dado que el total de ecuaciones de equilibrio disponibles para plantear es precisamente 2V, resulta que en reticulados isostáticos esta cantidad es siempre igual a las incógnitas por reacciones de vínculo (Vs) más el número de barras (B) con que cuenta la estructura. En virtud de ello, si se reemplazan las reacciones de vínculo por barras ficticias colocadas en la dirección de las incógnitas a que las mismas equivalen (figura 11), resultará que la matriz [As] será siempre de forma cuadrada, siendo, en tales condiciones, su cantidad de filas y columnas igual a 2V, igual a su vez a Vs + B.

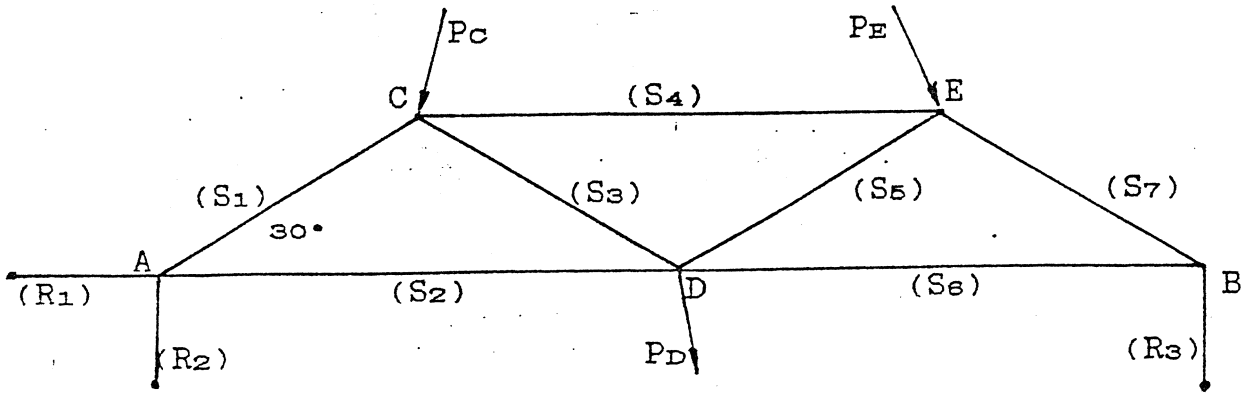


Figura 11

La referida matriz [As] se denomina *matriz de transformación de los esfuerzos en las barras en fuerzas nodales*, y está formada por los cosenos y senos de los ángulos que definen la dirección de cada barra.

La matriz [is] a su vez, es la matriz de influencia del reticulado, y está formada por los coeficientes de influencia de los esfuerzos axiles en las barras, es decir, el valor del esfuerzo en las barras (incluidas las ficticias que reemplazan a los vínculos), cuando las cargas exteriores actuantes en los nudos toman valores unitarios. Se obtiene, tal como muestra la (20), por inversión de la matriz [As], cambiada de signo.

Si a manera de ejemplo se considera el reticulado de la figura 11, la matriz [As] tendría la forma

$$[As]=\begin{array}{c}\begin{matrix}(R_1)&(R_2)&(R_3)&(S_1)&(S_2)&(S_3)&(S_4)&(S_5)&(S_6)&(S_7)\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & & 0{,}866 & 1 & & & & & \\ 0 & -1 & & 0.500 & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & & & -1 & -0{,}866 \\ & & -1 & & & & & & 0 & 0{,}500 \\ & & & -0{,}866 & & 0{,}866 & 1 & & & \\ & & & -0{,}500 & & -0{,}500 & 0 & & & \\ & & & & -1 & -0{,}866 & & 0{,}866 & 1 & \\ & & & & 0 & 0{,}500 & & 0{,}500 & 0 & \\ & & & & & & -1 & -0{,}866 & & 0{,}866 \\ & & & & & & 0 & -0{,}500 & & -0{,}500 \end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}(A_x)\\(A_y)\\(B_x)\\(B_y)\\(C_x)\\(C_y)\\(D_x)\\(D_y)\\(E_x)\\(E_y)\end{matrix}$$

mientras que los vectores [P] y [S] serían

$$[P]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\P_{Cx}\\P_{Cy}\\P_{Dx}\\P_{Dy}\\P_{Ex}\\P_{Ey}\end{bmatrix} \quad ; \quad [S]=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\\S_7\end{bmatrix}$$

La formación de la matriz [As] se puede efectuar sin dificultades en forma ordenada y autocorrectiva. Para ello debe tenerse presente que:

* Cada columna representa una barra (real o ficticia).

* Cada fila representa una ecuación de equilibrio en el nudo y en la dirección (x o y) correspondiente.

* En cada columna aparecen 4 (ó 2) términos, que representan los senos y cosenos del ángulo que define la orientación de la barra, en sus dos extremos para las barras reales (o en su extremo en contacto con la estructura para las ficticias).

* Como en las barras reales los ángulos de orientación (α_i) de cada extremo difieren 180° entre sí, cada par de términos (sen

y cos) correspondiente a un extremo, presenta signo cambiado respecto a los del opuesto.

4.1. Matriz [As] reducida.

Cabe observar que no es necesario determinar el valor de las reacciones de vínculo para calcular los esfuerzos en las barras. En el caso del reticulado considerado en el apartado anterior, podrían eliminarse de la matriz [As], y por ende de la $[As]^{-1}$, las filas (o columnas) que corresponden a A_x, A_y y B_y (direcciones de las reacciones) y las columnas (o filas) de R_1, R_2 y R_3. Subsistiría así un sistema de 7 ecuaciones con otras tantas incógnitas (S_i), y consecuentemente una matriz reducida a tantas filas y columnas como barras tenga el reticulado, que permitirá calcular los esfuerzos en la totalidad de dichas barras.

5. APLICACION AL TRAZADO DE LINEAS DE INFLUENCIA.

En los apartados anteriores se desarrollaron relaciones matriciales de la forma

$$[X] = [i_{XP}].[P] \qquad (21)$$

donde [X] es un vector que representa una función respuesta específica, [P] es un vector carga, mientras que $[i_{XP}]$ es la matriz de influencia que permite determinar la función respuesta en base a las cargas actuantes. El vector [X] puede contener reacciones de vínculo, momentos flectores, esfuerzos de corte, esfuerzos normales, esfuerzos en barras de reticulados, desplazamientos, o en general, cualquier magnitud respuesta de interés.

En forma desarrollada, la (21) puede escribirse

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_i \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1j} & \cdots & i_{1m} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2j} & \cdots & i_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ i_{i1} & i_{i2} & \cdots & i_{ij} & \cdots & i_{im} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nj} & \cdots & i_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_j \\ \cdot \\ \cdot \\ P_m \end{bmatrix} \qquad (22)$$

donde la matriz $[i_{XP}]$ deberá contar con tantas filas (n) como términos tenga el vector [X] y tantas columnas (m) como términos tenga [P].

El análisis de la fila de orden i de la matriz $[i_{XP}]$ pone de manifiesto que i_{ij} corresponde al valor de $[X_i]$ cuando P_j es igual a 1. Así, por definición, i_{ij} será la ordenada de la línea de influencia de X_i correspondiente a la carga unitaria aplicada en el punto j. Dado que j puede tomar los valores de 1 a m, la fila de orden i de la matriz $[i_{XP}]$ corresponderá a los valores de las

ordenadas de la línea de influencia de X_1, cuando la carga unitaria ocupa las sucesivas posiciones de 1 a m. En virtud de ello, cada fila de la matriz $[i_{XP}]$ representa la línea de influencia correspondiente a la función respuesta asociada con dicha fila, resultando así totalmente apropiada la designación de aquélla como *matriz de influencia.*

Para los distintos casos formulados de acuerdo con los procedimientos matriciales ilustrados en los apartados anteriores, las ecuaciones de la forma (21) constituyen el resultado natural de dichos procedimientos. Como tal, la matriz de influencia, conteniendo una familia completa de líneas de influencia, es un subproducto de la formulación matricial.

Con respecto al método matricial para la obtención de líneas de influencia, resulta necesario consignar diversos aspectos a tener presente para su formulación, a saber:

* El vector [X] debe escogerse de modo que incluya las solicitaciones para las que se desea determinar las líneas de influencia.

* El vector de cargas [P] debe formularse de modo que incluya las cargas unitarias aplicadas en los puntos en los que se desea determinar la magnitud de las ordenadas de las líneas de influencia, y que deben corresponder, como mínimo, a todos los puntos singulares que aquellas presenten.

Procediendo de acuerdo a las pautas enunciadas, cada elemento de la matriz $[i_{XP}]$ representará una ordenada de la línea de influencia para uno de los elementos del vector [X] correspondiente a un valor unitario para una de las cargas del vector [P].

5.1. Líneas de influencia de reacciones de vínculo.

Aplicando las consideraciones precedentes al procedimiento desarrollado en el apartado 3.4., que dio como resultado la formulación de las expresiones (14) y (15) para la determinación matricial de reacciones de vínculo

$$[R] = [i_R].[P] = (-[A_r]^{-1}.[A_p]).[P] \qquad (23)$$

surge que la matriz $[i_R]$ permitirá el trazado de las líneas de influencia de todas las reacciones de vínculo incluidas en el vector [R].

5.2. Líneas de influencia de momentos flectores.

En este caso la expresión de aplicación será, de acuerdo a los desarrollos efectuados en el apartado 3.5. y las expresiones (17) y (18)

$$[X] = [M] = [i_M].[P] = ([i_P] - [i_r].[A_r]^{-1}.[A_p]).[P] \qquad (24)$$

5.3. Líneas de influencia de esfuerzos de corte.

Al igual que para el momento flector, la expresión de aplicación será también

$$[X] = [Q] = [i_Q].[P] = ([i_P] - [i_r].[A_r]^{-1}.[A_P]).[P] \qquad (25)$$

El vector [X] = [Q] se conformará con tantos términos como líneas de influencia de Q se deseen trazar. Para constituir el vector [P] debe tenerse presente que, salvo en el caso de secciones extremas, deben considerarse por cada sección incógnita, dos fuerzas unitarias, ubicadas una inmediatamente a la izquierda y otra inmediatamente a la derecha de tales secciones.

5.4. Líneas de influencia de esfuerzos en barras de reticulados.

En el apartado 4. se desarrolló la resolución matricial de estructuras de reticulado, conduciendo las consideraciones efectuadas a la formulación de la matriz de influencia de aplicación a dicho tipo de estructuras, la que según la (20) está dada por

$$[i_S] = - [A_S]^{-1} \qquad (26)$$

habiéndose puesto de manifiesto además, que cada elemento de dicha matriz corresponde al esfuerzo en la barra S_i (que constituyen las filas de la [is]) cuando actúa una carga unitaria en el nudo y en la dirección correspondiente a las columnas de dicha matriz.

En consecuencia, si se resuelve la (20), tomando como [P] una matriz que en cada columna tenga como único elemento no nulo una carga unitaria negativa (dirigida hacia abajo) en la dirección del eje y, por cada uno de los nudos del cordón cargado (superior o inferior), los términos de cada fila de la [S] darán, en valor y signo, las ordenadas de la línea de influencia correspondiente al esfuerzo en la barra a que se refiere la fila considerada, bajo los nudos consignados. Dado que entre nudos la variación de la línea de influencia es lineal, no existen inconvenientes para completar su trazado.

Si se desean obtener sólo las líneas de influencia de las barras de reticulado, puede optarse por el planteo de la matriz reducida a que se hizo referencia en el apartado 4.1. En cambio, si también se requiere el trazado de las líneas de influencia de las reacciones de vínculo, se deberá efectuar la formulación completa, incluyendo los términos R_1, R_2, etc.

6. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

* ANALISIS ESTRUCTURAL - Ings. Arturo J. Bignoli y Máximo Fioravanti - Ediciones Troquel - Buenos Aires - 1970.

* CALCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS - Ing. Mario H. Gradowczyk - Editorial Universitaria de Buenos Aires - 1966.

* APUNTES DE CLASE. Ing. Carlos D. Segerer (Cátedra de Estabilidad III - Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo).

* RESOLUCION MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE RETICULADO ESTATICAMENTE DETERMINADAS. Ing. Raúl H. Giménez (Cátedra de Estabilidad III - Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo).

INDICE

CAPITULO I: LA INGENIERIA ESTRUCTURAL: ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL

Página

1. Introducción 1
   1.1. Conceptos básicos y definiciones 1
   1.2. El diseño de una obra de ingeniería 2
   1.3. Criterios de análisis y de diseño 4
   1.4. Resumen del proceso del análisis estructural. 6

2. Cargas sobre las estructuras 6
   2.1. Cargas permanentes. 6
   2.2. Cargas accidentales 7

3. Organización y clasificación de las estructuras. 10
   3.1. Tipos de estructuras. 10
   3.2. Esquema teórico o de análisis de una estructura . . . 13
   3.3. Magnitudes a utilizar 15
   3.4. Hipótesis fundamentales 15

4. Equilibrio estático. 18
   4.1. Acciones exteriores activas y reactivas 18
   4.2. Condiciones de equilibrio 18
   4.3. Solicitaciones interiores 20
   4.4. Convenciones de signos. 23
   4.5. Diagramas de cuerpo libre 24
   4.6. Unidades SI 24

5. Estructuras estáticamente determinadas e indeterminadas. . 25
   5.1. Nociones básicas. 25
   5.2. Indeterminación estática. Grado de hiperestaticidad . 27
   5.3. Criterios para el cálculo del grado de hiperestaticidad 28
   5.4. Ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas 31

6. Aspectos conceptuales complementarios. 33
   6.1. Exactitud de los cálculos 33
   6.2. Verificación de los resultados. 34
   6.3. La enseñanza del Análisis Estructural y la computación. 34

7. Hitos históricos en el desarrollo de la Ingeniería Estructural. 37

8. Bibliografía consultada. 41

Página

CAPITULO I – Anexo: Resolución matricial de estructuras isostáticas. 42

1. Introducción 43

2. Cálculo de un vector de solicitaciones 43
   2.1. Concepto de Matriz de Influencia. 43
   2.2. Criterios para la conformación de [X] 46

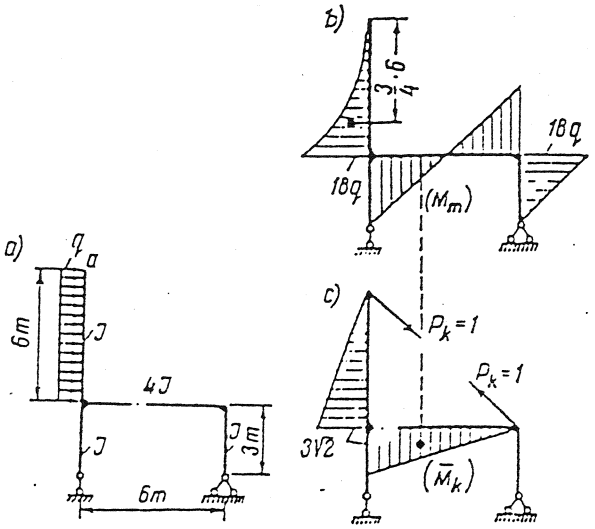
3. Resolución matricial de estructuras de alma llena. 47
   3.1. Reducción de un sistema de acciones 47
   3.2. Sistema de acciones en equilibrio 49
   3.3. Equilibrio de los sistemas planos vinculados. 49
   3.4. Cálculo de las reacciones de vínculo. 50
   3.5. Cálculo de las solicitaciones internas. 50
   3.6. Criterios para la formación de $[i_P]$ y de $[i_r]$ 51

4. Resolución matricial de estructuras de reticulado. 53
   4.1. Matriz [As] reducida. 56

5. Aplicación al trazado de líneas de influencia. 56
   5.1. Líneas de influencia de reacciones de vínculo 57
   5.2. Líneas de influencia de momentos flectores. 57
   5.3. Líneas de influencia de esfuerzos de corte. 58
   5.4. Líneas de influencia de esfuerzos en barras de reticulados 58

6. Bibliografía consultada. 58

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO II

ANALISIS DE LOS DESPLAZAMIENTOS - TRABAJO - TEOREMAS FUNDAMENTALES

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO II

ANALISIS DE LOS DESPLAZAMIENTOS - TRABAJO - TEOREMAS FUNDAMENTALES

1. DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS.

1.1. Conceptos básicos y definiciones.

En respuesta a las acciones que actúan sobre una estructura, ésta experimenta deformaciones. Se denomina **deformación** a la variación de la forma de una estructura por la acción de agentes exteriores (sistemas de cargas, variaciones de temperatura o movimientos de apoyos). Esta ocurre como consecuencia de la variación de las dimensiones (y por ende de la forma) de los elementos infinitesimales *ds* que conforman cada miembro estructural.

Las deformaciones se manifiestan en la estructura mediante un conjunto de desplazamientos, dado que, al deformarse la misma, todos sus puntos y secciones pasan a ocupar nuevas posiciones respecto a la inicial, excepto en correspondencia con los vínculos inmóviles. Se denomina **desplazamiento** a la magnitud que define el cambio de posición de un punto o de una sección una vez producida la deformación de la estructura. En consecuencia, cada desplazamiento será una traslación o una rotación de algún punto o sección particular de la estructura.

De igual manera que la estructura debe tener una resistencia adecuada para soportar las acciones que actúan sobre ella, también debe contar con la suficiente rigidez como para no llegar a ser inservible debido a deformaciones inadmisibles.

Las consideraciones duales entre fuerzas y desplazamientos son de capital importancia en análisis estructural. Las primeras dan una medida de las solicitaciones que una estructura debe soportar como resultado de una condición de carga determinada, mientras que los segundos brindan una medida de cómo responde la estructura a la condición de carga actuante. La respuesta de la estructura reflejará la naturaleza de la carga. Una carga estática producirá una respuesta estática que es independiente del tiempo, mientras que una carga dinámica se traducirá en una respuesta dependiente del tiempo. En lo sucesivo se tratarán sólo casos estáticos.

El estudio de los desplazamientos de las estructuras es indispensable para:

a) la apreciación de la rigidez de las estructuras;
b) la resolución de estructuras hiperestáticas, por cuanto los valores de determinados desplazamientos intervienen (ya sea como incógnitas o como magnitudes a determinar previamente,

según el método que se emplee), en la formulación de las ecuaciones o de las matrices de cálculo, y

c) la confrontación entre los desplazamientos teóricamente calculados y los experimentales, cuyo fin es el control del comportamiento de las estructuras una vez construidas y al cabo de un determinado tiempo de servicio.

1.2. Tipos de desplazamientos.

Tal como se expresara precedentemente, los desplazamientos en una estructura son causados por los efectos acumulados de las deformaciones de todos sus elementos.

Si un punto A de un miembro estructural pasa de dicha posición inicial, a la posición A_1, luego de producida la deformación, su desplazamiento se determina por medio de la variación de sus coordenadas $x_{A1} - x_A$ e $y_{A1} - y_A$ (figura 1).

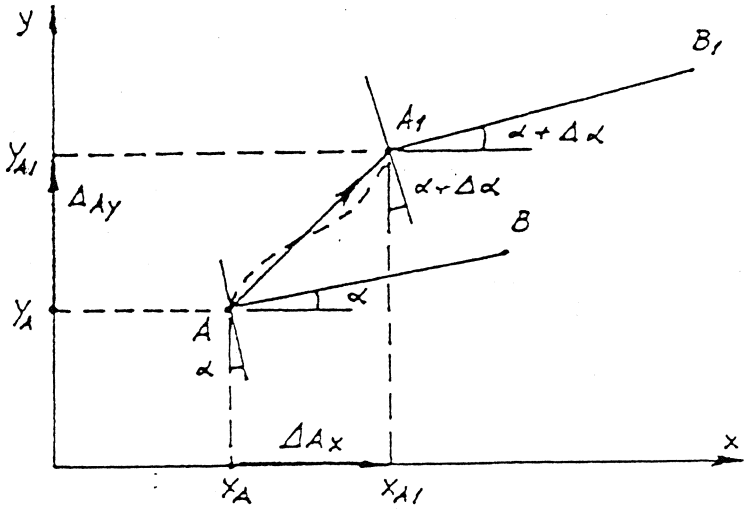


Figura 1

El vector $\overline{AA_1}$ se denomina *vector del desplazamiento lineal* o *vector del corrimiento total* del punto y su intensidad (o sea la distancia AA_1), *desplazamiento lineal* o *traslación* o *corrimiento total* del punto. Se observa, de acuerdo a la definición precedente, que el desplazamiento del punto depende únicamente de las posiciones inicial y final y no de la trayectoria descripta para pasar de A a A_1.

Las proyecciones sobre los ejes se denominan desplazamientos o corrimientos en la dirección de los ejes coordenados (Δ_{Ax} y Δ_{Ay}) o componentes del desplazamiento en las direcciones x e y.

Se denomina *diagrama de desplazamientos lineales* o de *corrimientos*, al gráfico que representa las magnitudes, en una cierta escala, de los desplazamientos producidos en una dirección determinada, de los puntos de los ejes de las barras que constituyen la estructura, trazados sobre el esquema de la estructura no deformada. Cuando no se efectúa aclaración al

respecto. se debe entender que los corrimientos son los producidos en dirección perpendicular al eje de la barra.

La posición de cualquier línea material o parte de la estructura, en estado deformado, se determina por el desplazamiento de los puntos que le pertenecen. Así por ejemplo, la posición del tramo lineal AB que une dos puntos sobre el eje de una barra, se determina por el desplazamiento de los puntos A y B.

Se denomina *desplazamiento angular*, *giro* o *rotación* del tramo lineal considerado (AB), al ángulo $\Delta\alpha$ que forma la nueva dirección del elemento lineal y su dirección inicial (figura 1).

Si se aproxima el punto B al punto A, en el límite se obtendrá la expresión de $\Delta\alpha$ en función del ángulo girado por la normal (o tangente) al eje de la barra en el punto A, que permitirá obtener, a su vez, el desplazamiento angular o rotación experimentada por la *sección transversal* que pasa por el punto.

1.3. Nomenclatura y desplazamientos unitarios.

En lo sucesivo se designará usualmente a los desplazamientos en general, cuando no se especifique su naturaleza, mediante las letras Δ ó D; a los desplazamientos lineales o corrimientos con las letras ξ ó η, y a los desplazamientos angulares o giros, mediante θ ó φ.

En aquellos casos en que se analice un desplazamiento concreto en una dirección determinada, originado por una causa dada, su designación irá acompañada con dos subíndices (por ejemplo Δ_{ij}). El primer subíndice (i) indica la dirección del desplazamiento (lineal o angular) y el segundo subíndice (j) indica la causa que lo produce.

El desplazamiento originado por una sola fuerza P_i (o de un momento M_i) en dirección de su propia recta de acción (o del plano en el cual actúa), se designa con Δ_{ii} y se denomina *desplazamiento propio*, mientras que al debido a una fuerza P_j en la dirección de otra fuerza P_i se lo designa por Δ_{ij} y se denomina *desplazamiento suplementario*.

Los desplazamientos producidos por una sola fuerza, correspondientes al valor unidad de la misma, se denominan *desplazamientos unitarios* o *específicos* y se designarán con la letra δ. Teniendo en cuenta que se aceptó entre las hipótesis fundamentales la linealidad entre causa y efecto, en este caso entre acción y desplazamiento, resulta

$$\delta = \frac{\Delta}{P} \qquad (1)$$

Los desplazamientos específicos pueden ser también propios o suplementarios, o sea respectivamente

$$\delta_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{P_i} \quad ; \quad \delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{P_j} \qquad (2)$$

En adelante se estudiarán sólo sistemas capaces de deformarse linealmente, para los cuales es aplicable el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos. En ellos, cualquier desplazamiento Δ_i en una dirección dada i, debido a varias fuerzas P_1, P_2, .. P_i, .. P_n, es función lineal de estas fuerzas, o sea

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \ldots + \Delta_{ii} + \ldots + \Delta_{in} \qquad (3)$$

o bien, tomando en consideración las (2)

$$\Delta_i = \delta_{i1}.P_1 + \delta_{i2}.P_2 + \ldots + \delta_{ii}.P_i + \ldots + \delta_{in}.P_n \qquad (4)$$

es decir que el desplazamiento total en la dirección i, es igual a la suma de los desplazamientos producidos por el valor unitario de cada una de las fuerzas actuantes, por los verdaderos valores de dichas fuerzas. Tal como se consignó, el concepto es también extensivo a pares actuando sobre la estructura.

1.4. Relación entre solicitaciones internas y deformaciones.

Sea un segmento de longitud arbitraria cortado de un miembro de una estructura determinada (figura 2a), al que por simplicidad se considera de sección circular. En cualquier sección transversal, tal como el extremo de la derecha del segmento, actuará la resultante derecha del esfuerzo aplicado, la que en el caso más general se podrá reducir a tres fuerzas y tres pare : las fuerzas son la normal N_x y las de corte Q_y y Q_z; los momentos son el torsor M^t_{zy} y los flectores M^f_{yx} y M^f_{xz}.

Las deformaciones de la barra pueden analizarse tomando separadamente cada componente de esfuerzo interno y determinando su efecto sobre un elemento de la misma, el cual se obtiene aislando una porción comprendida entre dos secciones transversales separadas entre sí una distancia *dx*.

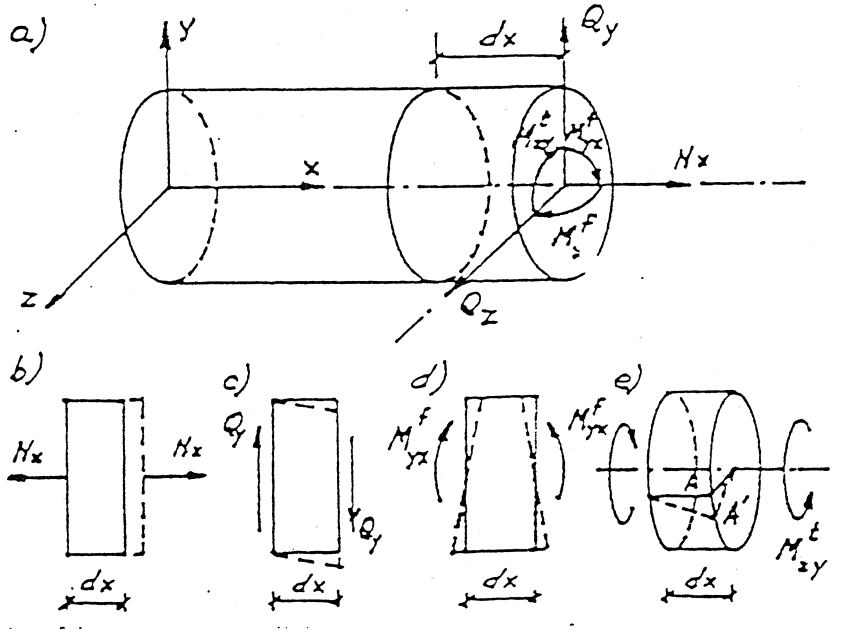


Figura 2

El efecto del esfuerzo normal N_x sobre el elemento se muestra en la figura 2b). Suponiendo que la fuerza actúa en el centroide de la sección transversal, se observa que el elemento se deforma uniformemente y los desplazamientos de cada punto de la sección transversal son normales al plano de la misma, dependiendo su sentido del signo de N_x. (En las deformaciones mostradas en la figura 2 se han supuesto en todos los casos signos arbitrarios para las solicitaciones).

En el caso de un esfuerzo de corte (figura 2c), una sección transversal de la barra se desplaza lateralmente con respecto a la otra. También suelen producirse distorsiones de las secciones transversales, pero que tienen un efecto despreciable en la determinación de los desplazamientos.

Un par flexionante (figura 2d) provoca una rotación relativa de las dos secciones transversales extremas, las que ya no quedan paralelas entre sí. Las deformaciones resultantes en las fibras del elemento son de dirección paralela al eje longitudinal de la barra, produciéndose acortamientos en el sector de compresión y alargamientos en el de tracción.

Finalmente, el par torsionante causa una rotación relativa de las dos secciones transversales extremas alrededor del eje x (figura 2e) y como consecuencia, el desplazamiento del punto A por ejemplo, es hacia la posición A'. En el caso de una barra circular, la torsión produce sólo deformaciones por solicitaciones transversales y las secciones permanecen planas. Para otras formas de las secciones transversales sí ocurrirán distorsiones en ellas.

Las deformaciones mostradas en las figuras 2b) a 2e) se denominan, respectivamente, *axial*, *de corte*, de *flexión* y de *torsión*. Su cuantificación se efectuará en el apartado siguiente, dependiendo en todos los casos de la magnitud de la solicitación, de la forma y dimensiones de la sección transversal de la barra y de las propiedades mecánicas del material que la constituye.

1.5. Determinación de los desplazamientos.

De acuerdo a las hipótesis fundamentales expresadas en el Capítulo I, se considerarán los materiales constitutivos de las estructuras como totalmente elásticos, y por ende resulta de aplicación para ellos la ley de Hooke. o sea

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad (5)$$

siendo: σ, la tensión normal en la sección considerada, igual a la relación entre el esfuerzo normal (N ó S) y el área de la sección transversal F. Es decir

$$\sigma = N / F \qquad \text{o bien} \qquad \sigma = S / F \qquad (6)$$

E, módulo de elasticidad longitudinal del material, y
ε, deformación longitudinal específica, igual a la relación entre la variación de longitud producida (Δl) y la longitud inicial (l), o sea

$$\varepsilon = \Delta l \; / \; l \qquad (7)$$

Cabe destacar que se empleará la notación N para designar el esfuerzo normal en elementos de estructuras de alma llena en los que aparece también M y Q, mientras que S se empleará para designar el esfuerzo axil constante en barras de estructuras de reticulado.

1.5.1. Desplazamientos debidos a solicitaciones axiles.

Sea un elemento de longitud l (figura 3a) sujeto a la acción de una fuerza N en cada extremo. Cuando este sistema sea de dirección coincidente con el eje longitudinal de la barra y esté aplicado en el centroide de las secciones transversales extremas, se producirá un estado de tensión pura, cuyo valor en cada sección estará dado por la (5).

La deformación longitudinal específica del elemento resultará en consecuencia, teniendo en cuenta también la (6)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \, . \, F} \qquad (8)$$

Al producto E.F se lo denomina *rigidez axial* de la barra.

La variación de longitud $d\xi$ de un elemento de longitud inicial ds (figura 3b) surgirá de

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds} \quad ; \quad \text{luego} \quad d\xi = \varepsilon \, . \, ds = \frac{N}{E.F} \, ds \qquad (9)$$

La deformación total Δl de la barra mostrada en la figura 3a) se obtiene integrando esta expresión a lo largo de la longitud l, y si E, F y N son constantes, resultará

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{E.F} \, ds = \frac{N.l}{E.F} \qquad (10)$$

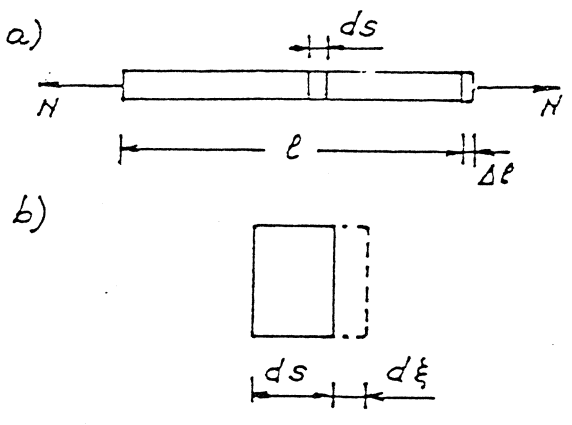


Figura 3

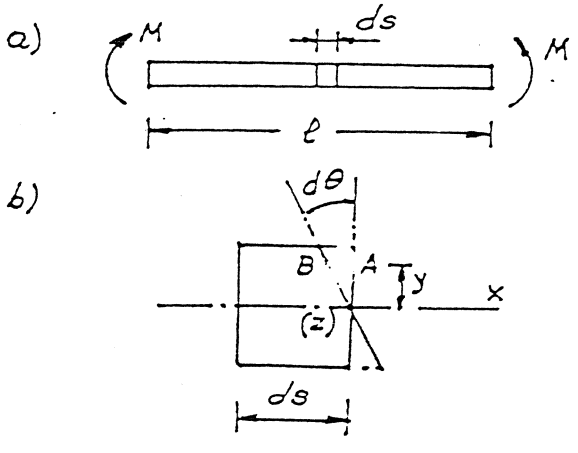


Figura 4

1.5.2. Desplazamientos debidos a flexión.

En la figura 4a) se muestra una barra sujeta a flexión pura producida por pares M que actúan en cada extremo de la misma. Se supone que el plano de flexión, o sea el que contiene a estos pares, es un plano de simetría de la barra, por lo que todos los desplazamientos se producirán en dicho plano.

En cualquier sección transversal de la barra (figura 4b), las tensiones normales que se producen en un punto determinado A estarán dadas, de acuerdo a la expresión deducida en Resistencia de Materiales, por

$$\sigma = - \frac{M.y}{J} \qquad (11)$$

donde y es la distancia del eje neutro al punto considerado y J el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje z (de punta en la figura).

La deformación específica por flexión en el mismo punto es igual, aplicando la ley de Hooke, a

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = - \frac{M.y}{E.J} \qquad (12)$$

El signo menos que aparece en las expresiones (11) y (12) se debe a que los momentos flectores positivos producen esfuerzos negativos (compresión) en el sector donde y es positivo.

El ángulo relativo de rotación $d\theta$ entre dos secciones transversales se muestra en la figura 4b). Para ángulos pequeños de rotación este ángulo se puede determinar dividiendo el acortamiento $\overline{AB}$ de una fibra situada a la distancia y del eje neutro por la misma distancia y. Como a su vez

$$\varepsilon = - \frac{\overline{AB}}{ds}, \qquad \text{es} \qquad \overline{AB} = - \varepsilon \, . \, ds$$

la expresión de $d\theta$ resulta

$$d\theta = \frac{\overline{AB}}{y} = - \frac{\varepsilon . ds}{y} \qquad (13)$$

De la sustitución de la (12) en la (13) resulta

$$d\theta = \frac{M}{E.J} \, ds \qquad (14)$$

Al producto E.J se lo denomina *rigidez a la flexión* de la barra.

1.5.3. Desplazamientos debidos a solicitaciones de corte.

Generalmente, en las secciones transversales de las barras se presentan como solicitaciones internas, momentos flectores y esfuerzos de corte en forma simultánea.

La deformación producida en cualquier sección de una barra debida al esfuerzo de corte Q que actúa en la misma, se obtiene a partir de la relación que liga las distorsiones τ con las tensiones de corte σ, por medio del módulo de elasticidad transversal G,

$$\sigma = G \cdot \tau \qquad (15)$$

Luego

$$\tau = \frac{\sigma}{G} = \psi \frac{Q}{G.F} \qquad (16)$$

al ser

$$\sigma = \psi \frac{Q}{F} \qquad (17)$$

donde ψ es un factor de corrección (denominado *factor de corte*) que tiene en cuenta la variación de la distribución de las tensiones de corte a lo largo de la sección y que depende exclusivamente de la forma de la misma. Respecto a su concepto y determinación se hará referencia en el apartado 2.3.3., que complementa al presente.

Por otra parte (figura 5): $d\eta = \tau . ds$ (18)

y teniendo en cuenta la (16) se obtiene

$$d\eta = \psi . \frac{Q}{G.F} . ds \qquad (19)$$

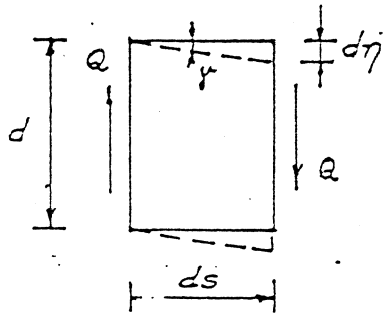


Figura 5

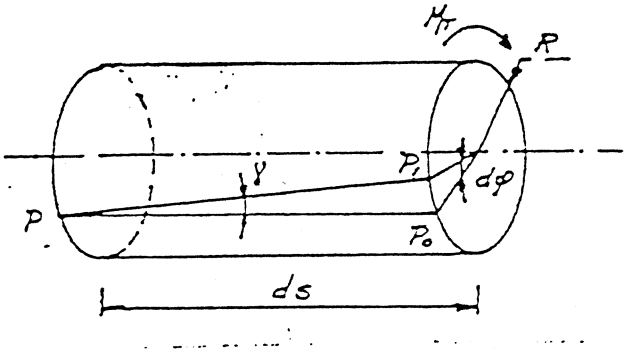


Figura 6

1.5.4. Desplazamientos debidos a solicitaciones de torsión.

Si una barra es sometida a solicitaciones de torsión (figura 6), dos secciones distanciadas entre sí ds, experimentarán un giro

relativo $d\varphi$. En estas condiciones, el punto P_o que se hallaba sobre una misma generatriz con el punto P, pasa a la posición P_1, describiendo un arco

$$\overset{\frown}{P_oP_1} = \tau.ds = R.d\varphi \qquad (20)$$

Además:

$$\tau = \frac{\sigma}{G} \quad , \quad \text{y:} \quad \sigma = \frac{M_t.R}{J_T} \qquad (21)$$

expresión esta última deducida en Resistencia de Materiales y en la cual J_T es el *módulo de torsión* o módulo de Saint Venant, cuyo valor coincide con el del momento de inercia polar en secciones circulares y anulares. Reemplazando valores

$$\tau = \frac{M_t.R}{G.J_T} \qquad (22)$$

De la (20) y la (22)

$$d\varphi = \frac{\tau}{R}\,ds = \frac{M_t}{G.J_T}\,ds \qquad (23)$$

Si el momento torsor se halla aplicado en el extremo de la barra, estando fijo el otro extremo, y si además J_T es constante será

$$\varphi = \frac{M_t.l}{G.J_T} \qquad (24)$$

Para secciones rectangulares de ancho b y altura d, que son las de mayor aplicación para las estructuras que se estudiarán, resulta aproximadamente

$$J_T = \beta.d.b^3 \qquad (25)$$

siendo

$$\beta \approx \frac{1}{3} - 0{,}21\,\frac{b}{d}\left(1 - \frac{b^4}{12\,d^4}\right)$$

hallándose tabulados sus valores en la Tabla N° 1.

Algunos autores mantienen en las expresiones el momento de inercia polar e introducen un factor numérico f, llamado *factor de torsión*, que sólo depende de la forma de la sección, y cuyo valor es igual a uno para el círculo (lleno o hueco) y mayor que uno en cualquier otro caso. De este modo resulta

$$d\varphi = f\,\frac{M_t}{G.J_P}\,ds \qquad (26)$$

o bien

$$\varphi = f \frac{M_t . l}{G . J_p} \qquad (27)$$

Para secciones compactas (esto es no dispersas, como por ejemplo lo serían los perfiles laminados), Saint Venant sugiere la siguiente expresión aproximada del factor de torsión

$$f \approx 40 \frac{(J_p)^2}{F^4} \qquad (28)$$

El factor 40 se halla sujeto a algunas variaciones frecuentemente importantes. Para la elipse vale $4\pi^2 = 39,48$; para el rectángulo varía de 42,7 para d = b (cuadrado) a 36,0 para d/b = ∞, mientras que para el triángulo equilátero es igual a 45.

Cabe recordar que $J_p = J_x + J_y$, luego para el cuadrado vale $J_p = a^4/64$ y para el rectángulo $J_p = bd.(d^2 + b^2)/12$.

Al producto $G.J_T$, o bien $G.J_p/f$, se lo denomina *rigidez a la torsión* de la barra.

1.5.5. Comparación de las expresiones de los desplazamientos producidos por solicitaciones interiores.

Comparando las expresiones obtenidas para cada una de las solicitaciones interiores N, M, Q y M_t según las (9), (14), (19) y (23)

$$d\xi = \frac{N}{E.F} ds \; ; \; d\theta = \frac{M}{E.J} ds \; ; \; d\eta = \psi \frac{Q}{G.F} ds \; ; \; d\varphi = \frac{M_t}{G.J_T} ds$$

se observa que en todos los casos los desplazamientos correspondientes son directamente proporcionales a la acción interior que los produce e inversamente proporcionales a un producto de dos factores, uno de los cuales depende del material y el restante de las características geométricas de la sección transversal. El factor que depende del material es E para aquellos casos (N y M) en que las solicitaciones internas producen tensiones normales en la sección transversal y G cuando (caso de Q y de M_t) produce tensiones tangenciales. El parámetro geométrico es el área de la sección transversal F cuando la solicitación interior es una fuerza (N y Q) y un momento de segundo orden, J ó J_T, cuando la solicitación interior es un momento (M o M_t respectivamente).

1.5.6. Desplazamientos debidos a variaciones uniformes de temperatura.

Una variación constante de temperatura Δt a lo largo de toda la altura d de la sección transversal de una barra, provoca una variación uniforme en la longitud de todas las fibras de la sección, y en consecuencia será constante la deformación experimentada por cada una de ellas e igual a (figura 7a):

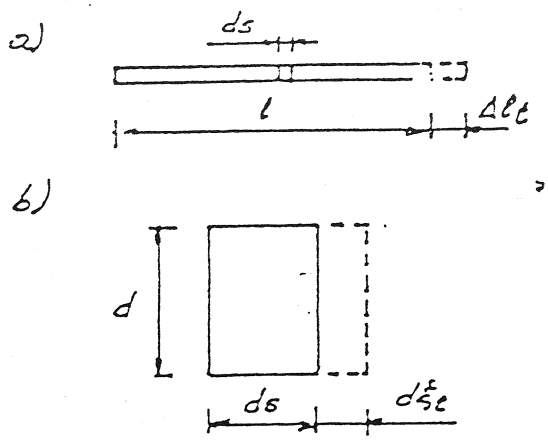


Figura 7

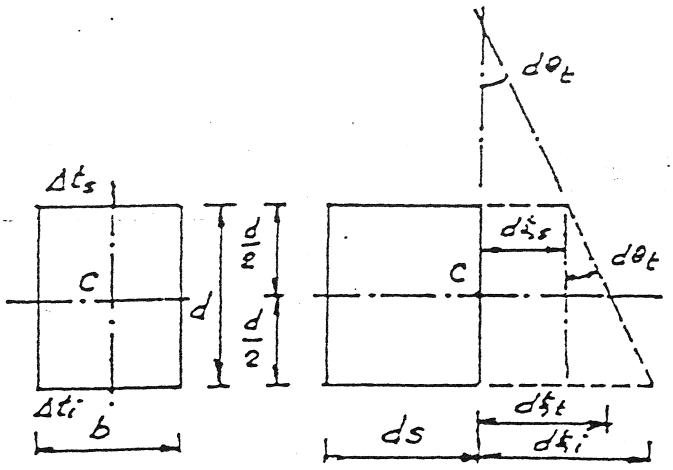


Figura 8

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_t}{l} = \alpha.\Delta t \qquad (29)$$

siendo α el coeficiente de dilatación térmica lineal del material.

La variación en la longitud total de la barra será en consecuencia

$$\Delta l_t = \alpha.\Delta t.l \qquad (30)$$

Si se considera un elemento de longitud inicial ds, que experimenta una variación uniforme de temperatura Δt, el valor del desplazamiento experimentado por cada uno de los puntos de la sección será (figura 7b)

$$d\xi_t = \alpha.\Delta t.ds \qquad (31)$$

Debe tenerse siempre presente el signo de la variación térmica (positivo o negativo), que definirá el sentido de $d\xi_t$ (alargamiento o acortamiento de las fibras, respectivamente).

Se observa que una variación uniforme de temperatura no produce rotación relativa entre las secciones transversales, por lo que en este caso $d\theta_t = 0$.

1.5.7. Desplazamientos debidos a variaciones no uniformes de temperatura.

Si se produce una variación lineal de temperatura (o que sin error apreciable puede considerarse como tal) a través de las fibras de la sección transversal, desde Δt_i en la parte inferior fibras de la sección transversal, desde Δt_i en la parte inferior (o interior) hasta Δt_s en la parte superior (o exterior) de la barra, y se supone por ejemplo que $\Delta t_i > \Delta t_s$, para la determinación de los desplazamientos producidos, deben considerarse las siguientes situaciones:

1.5.7.1. Sección simétrica respecto a un eje ubicado en dirección normal a la de la variación térmica (figura 8).

En este caso, se tendrá para la fibra inferior y superior respectivamente, de acuerdo a la (31)

$$d\xi_1 = \alpha.\Delta t_1.ds \qquad y \qquad d\xi_s = \alpha.\Delta t_s.ds \tag{32}$$

El desplazamiento $d\xi_t$ en correspondencia con el centroide de la sección valdrá:

$$d\xi_t = \frac{d\xi_1 + d\xi_s}{2} = \frac{\alpha.(\Delta t_1 + \Delta t_s).ds}{2} \tag{33}$$

Por su parte la rotación $d\theta_t$ será:

$$d\theta_t = \frac{d\xi_1 - d\xi_s}{d} = \frac{\alpha.(\Delta t_1 - \Delta t_s).ds}{d} \tag{34}$$

1.5.7.2. Sección no simétrica respecto a un eje ubicado en dirección normal a la de la variación térmica.

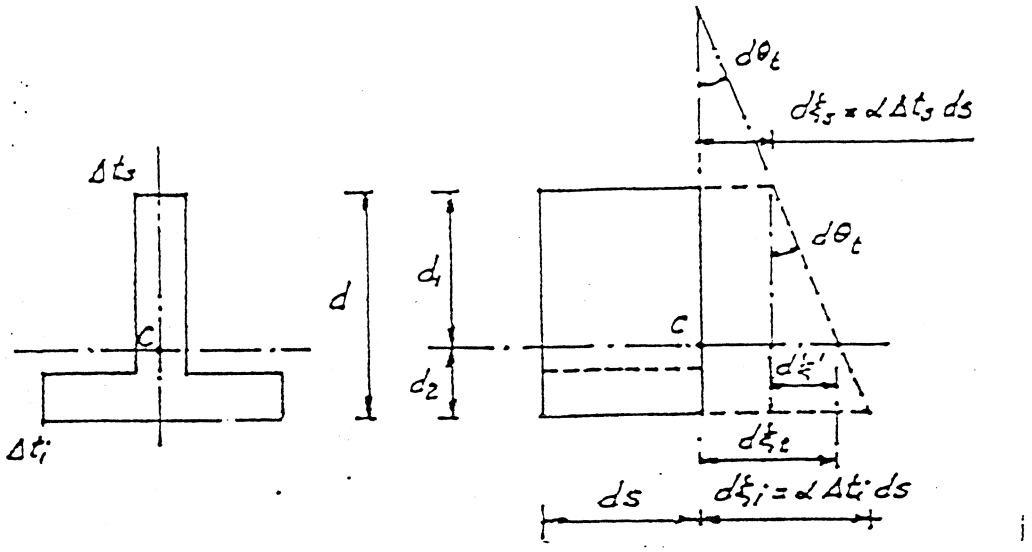


Figura 9

De la figura 9

$$d\theta_t = \frac{d\xi_1 - d\xi_s}{d} = \frac{\alpha.(\Delta t_1 - \Delta t_s).ds}{d} \tag{35}$$

expresión idéntica a la (34), o sea que $d\theta_t$ no experimenta modificación respecto al caso anterior. En cambio

$$d\xi_t = d\xi_s + d\xi'$$

siendo por semejanza de triángulos

$$\frac{d\xi'}{d_1} = \frac{d\xi_1 - d\xi_s}{d} \qquad \text{de donde:} \qquad d\xi' = (d\xi_1 - d\xi_s)\,\frac{d_1}{d}$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$d\xi_t = d\xi_s + \frac{(d\xi_1 - d\xi_s).d_1}{d} = \frac{d\xi_s.d + d\xi_1.d_1 - d\xi_s.d_1}{d} =$$

$$= \frac{d\xi_s.(d - d_1) + d\xi_1.d_1}{d} = \frac{d\xi_s.d_2 + d\xi_1.d_1}{d}$$

al ser $d - d_1 = d_2$. Luego, introduciendo en esta última expresión los valores de $d\xi_s$ y de $d\xi_1$ dados por la (32) se obtiene

$$d\xi_t = \frac{\alpha.(\Delta t_s.d_2 + \Delta t_1.d_1).ds}{d} \qquad (36)$$

Todas las expresiones desarrolladas en este apartado 1.5. son válidas para barras rectas o de pequeña curvatura.

2. TRABAJO DE LAS ACCIONES EXTERIORES E INTERIORES.

2.1. Objeto de su estudio. Tipos de trabajo.

Los métodos generales de determinación de los desplazamientos en los sistemas capaces de deformarse linealmente, se basan en el análisis del trabajo de las acciones exteriores, por una parte, y de las interiores de acción recíproca entre las partículas materiales del sistema, por otra. Las acciones exteriores efectúan el trabajo en los desplazamientos de sus puntos o secciones de aplicación, mientras que las interiores lo realizan en las deformaciones que experimenta la estructura.

El trabajo se llama **real o efectivo** cuando es producido por acciones realmente aplicadas sobre la estructura y que la deforman, en los desplazamientos provocados por esas mismas acciones.

El trabajo se llama **virtual o ficticio** cuando es producido:

a) por otras acciones (acciones virtuales o ficticias) independientes del sistema de acciones (u otra causa) realmente aplicado sobre la estructura y que la deforma, en los desplazamientos provocados por estas últimas; o

b) por el sistema de acciones realmente aplicado sobre la estructura, en desplazamientos producidos por otra causa independiente al efecto de aquéllas (desplazamientos virtuales o ficticios).

Al trabajo de las acciones exteriores se lo llamará Te y al de las interiores Ti.

2.2. Trabajo producido por fuerzas y pares.

2.2.1. Trabajo de una fuerza.

Se llama *trabajo mecánico* (o simplemente *trabajo*) de una fuerza de magnitud y dirección constantes (figura 10), cuyo punto de aplicación experimenta un desplazamiento lineal Δ, al producto de la fuerza por la proyección del desplazamiento sobre la recta de acción de la fuerza

$$T = P.\Delta' = P.\Delta.\cos\alpha \qquad (37)$$

Cuando la fuerza y la proyección del desplazamiento tienen sentidos coincidentes, el trabajo será positivo; caso contrario será negativo.

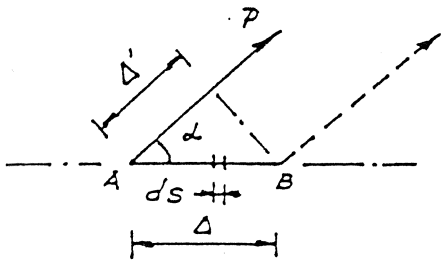


Figura 10

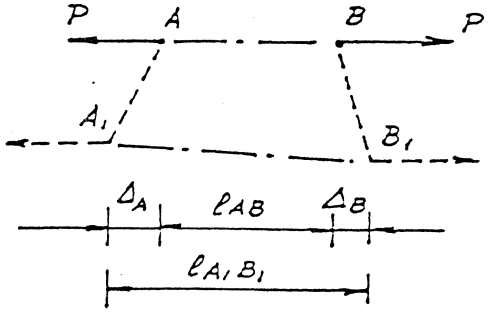


Figura 11

Si la fuerza es de magnitud variable será

$$dT = P.\cos\alpha.ds \quad ; \quad T = \int_A^B P.\cos\alpha.ds \qquad (38)$$

El trabajo de varias fuerzas es igual a la suma del trabajo de cada una de ellas individualmente considerada

$$T = \Sigma\, P_1.\Delta'_1 \qquad (39)$$

2.2.2. Trabajo de un sistema de dos fuerzas iguales y contrarias.

Si se supone que dos fuerzas P de igual magnitud, rectas de acción coincidentes y sentidos contrarios, que actúan en los puntos A y B de una estructura cualquiera (figura 11), se trasladan a los puntos A_1 y B_1 (supuestos los desplazamientos lo suficientemente pequeños para que las rectas de acción de las fuerzas mantengan su dirección después de la deformación), el trabajo de las mismas será

$$T = P\,.\,\Delta_A + P\,.\,\Delta_B = P.(\Delta_A + \Delta_B) = P\,.\,\Delta l_{AB} \qquad (40)$$

al ser

$$\Delta l_{AB} = l_{A_1B_1} - l_{AB} = \Delta_A + l_{AB} + \Delta_B - l_{AB} = \Delta_A + \Delta_B$$

Al desplazamiento $\Delta l_{AB} = \Delta_A + \Delta_B$ se lo denomina *desplazamiento relativo entre los puntos A y B*, e indica la variación de distancia experimentada por los puntos A y B como consecuencia de la deformación producida. Cabe observar que tal desplazamiento relativo es independiente de los valores y signos de los desplazamientos individuales de los puntos A y B.

2.2.3. Trabajo de un par.

Sea el par de fuerzas de la figura 12, del que se desea calcular el trabajo desarrollado al producirse un giro θ del segmento genérico $\overline{AB}$ que une sus puntos de aplicación (o dos puntos de paso de sus respectivas rectas de acción).

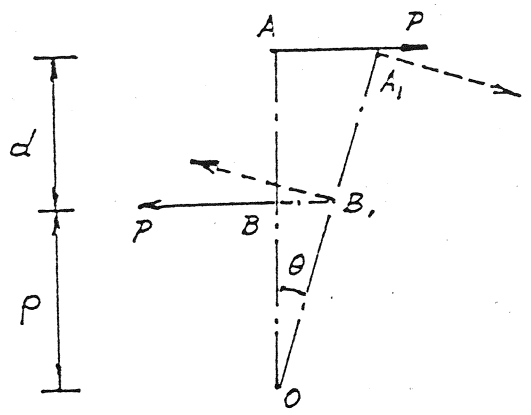


Figura 12

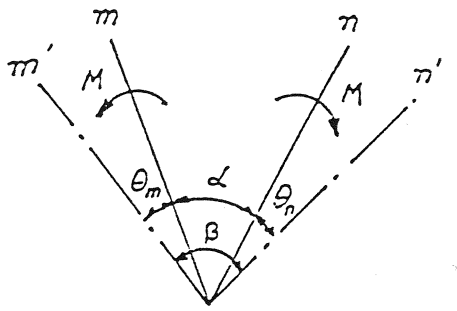


Figura 13

Por la (39), el trabajo del sistema será

$$T = P.(\rho + d).\theta - P.\rho.\theta = P.d.\theta = M.\theta \qquad (41)$$

siendo M el momento del par, igual a $M = P.d$.

También en este caso, para un sistema de pares

$$T = \Sigma M_i.\theta_i \qquad (42)$$

2.2.4. Trabajo de un sistema de dos pares iguales y contrarios.

Si se tienen dos pares iguales y contrarios, cada uno de momento M, que actúan sobre las secciones m y n, que forman entre sí un ángulo α, y las mismas rotan tras la deformación de la estructura a la que pertenecen en ángulos θ_m y θ_n, para ocupar las posiciones finales m´ y n´ (figura 13), el trabajo producido será

$$T = M.\theta_m + M.\theta_n = M.(\theta_m + \theta_n) = M.\theta_{mn} \qquad (43)$$

puesto que

$$\theta_{mn} = \beta - \alpha = \theta_m + \alpha + \theta_n - \alpha = \theta_m + \theta_n$$

Al giro $\theta_{mn} = \theta_m + \theta_n$, se lo denomina *giro relativo entre las secciones m y n*, e indica la variación angular total entre la

posición final e inicial entre ambos planos. Al igual que para el caso de un sistema de dos fuerzas iguales y contrarias, este desplazamiento relativo es independiente de los valores y signos de los desplazamientos individuales de los planos m y n.

2.3. Trabajo efectivo de las acciones exteriores e interiores.

2.3.1. Trabajo efectivo de las acciones exteriores.

De acuerdo al concepto definido en el apartado 2.1., el trabajo efectivo de las acciones (fuerzas y/o pares) exteriores es el trabajo que éstas realizan en los desplazamientos causados por ellas mismas. Las acciones externas, deformando la estructura, realizan un trabajo positivo (Te). Si se considera el material como idealmente elástico, por la ley de conservación de la energía, este trabajo se transforma totalmente en energía potencial de deformación (U), acumulada por la estructura durante su deformación.

La acumulación de energía potencial se suele referir al trabajo de las solicitaciones interiores de acción recíproca entre las partículas materiales del cuerpo (Ti). Durante la descarga, inversamente, las acciones exteriores realizan un trabajo negativo, y las interiores, haciendo volver a la estructura al estado inicial indeformado, realizan un trabajo interno contrario al anterior, con lo que se consume la energía potencial de deformación. De esta manera, el trabajo de las solicitaciones interiores es igual al trabajo de las acciones exteriores y a la energía potencial de deformación, contada desde el estado inicial.

$$Te = Ti = U \qquad (44)$$

Tal como se expresara en las hipótesis fundamentales asumidas en el Capítulo I, los materiales constitutivos de las estructuras se suponen perfectamente elásticos, regidos por ende por la ley de Hooke, mientras que las acciones aplicadas, a su vez, no adquieren instantáneamente su valor total, sino que llegan a él en forma gradual, comenzando desde cero hasta alcanzar sus valores finales.

Sea una viga como la de la figura 14a), sujeta a la acción de un sistema de fuerzas $P_1 \ldots P_i \ldots P_n$, valores que corresponden a sus magnitudes finales. Se efectuará el análisis de los desplazamientos en la dirección de las cargas, considerando en primer lugar, una fuerza genérica P_i.

En un estado intermedio de su aplicación, dicha carga habrá alcanzado el valor P_i' y producido un desplazamiento η_i'. Un instante después la carga se habrá incrementado en dP_i' y el desplazamiento en $d\eta_i'$. El trabajo externo elemental producido por tal incremento de la fuerza valdrá

$$dTe_i = (P_i' + dP_i').d\eta_i'$$

y despreciando infinitésimos de orden superior

$$dTe_i = P_i'.d\eta_i' \qquad (45)$$

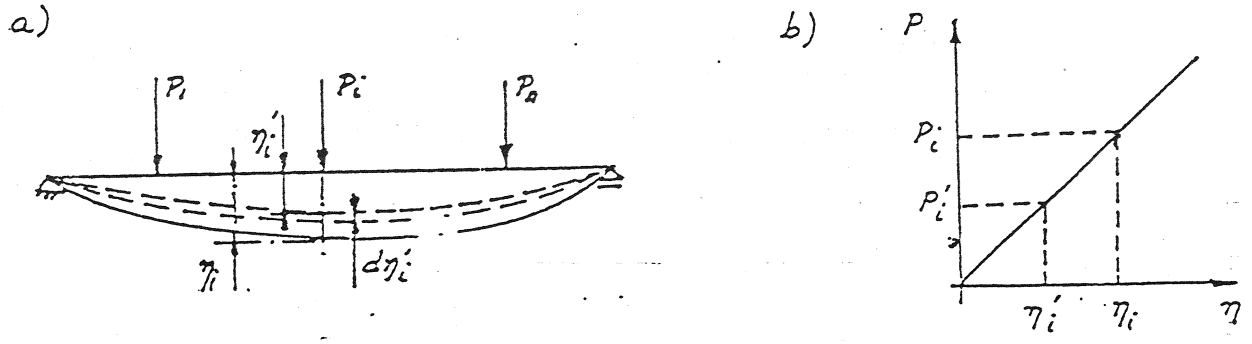


Figura 14

Pero, por la ley de Hooke, los desplazamientos son proporcionales a las cargas, o sea relacionando estos valores intermedios con los finales (figura 14b), se tendrá

$$\frac{P_1}{\eta_1} = \frac{P_1'}{\eta_1'} \qquad \text{o bien} \qquad P_1' = \frac{P_1}{\eta_1}\,\eta_1'$$

valor que reemplazado en la (45) da

$$dTe_1 = \frac{P_1}{\eta_1}\,\eta_1' \,.\, d\eta_1'$$

y el trabajo total será la integral de este valor en todo el recorrido de la fuerza, o sea desde cero hasta η_1; en consecuencia

$$Te_1 = \int_0^{\eta_1} \frac{P_1}{\eta_1}\,\eta_1' \,.\, d\eta_1' = \frac{P_1}{\eta_1}\left[\frac{(\eta_1')^2}{2}\right]_0^{\eta_1} = \frac{1}{2}\,P_1 \,.\, \eta_1 \qquad (46)$$

Es decir que el trabajo externo, por estar las fuerzas aplicadas gradualmente, es igual a la mitad del producto de la carga por el desplazamiento.

En definitiva, para el sistema de n cargas resultará

$$Te = \tfrac{1}{2} \sum_1^n P_1 \,.\, \eta_1$$

y en general, para un sistema exterior de acciones compuestas por fuerza y pares

$$Te = \tfrac{1}{2} \sum_1^n P_1 \,.\, \eta_1 + \tfrac{1}{2} \sum_1^n M_1 \,.\, \theta_1 \qquad (47)$$

expresión conocida como ley o ecuación de Clapeyron, que expresa que: *El trabajo efectivo de varias acciones de dirección constante, cualquiera sea su orden y ley de aplicación, es igual a la semisuma del producto de cada acción por el desplazamiento en sus respectivas direcciones, debido al efecto de todas las acciones.*

2.3.2. Trabajo efectivo de las solicitaciones interiores.

Para calcular el trabajo de las solicitaciones interiores y expresar así la energía potencial de un elemento de barra ds, se analizará por separado el trabajo correspondiente a cada una de las solicitaciones pertinentes (N, M y Q), limitando el estudio a sistemas planos.

2.3.2.1. Trabajo interno producido por esfuerzos normales.

En el caso de un elemento estructural sometido a esfuerzos normales N, de modo tal que σ = cte, el trabajo elemental en una porción de barra comprendida entre dos secciones infinitamente próximas ds, en el desplazamiento lineal $d\xi$ producido por dicho esfuerzo normal será, de acuerdo a las expresiones deducidas en el apartado anterior

$$dTi^N = \tfrac{1}{2}\, N \,.\, d\xi$$

y teniendo en cuenta el valor de $d\xi$ dado por la (9) resulta

$$dTi^N = \tfrac{1}{2}\, N \frac{N}{E.F}\, ds = \tfrac{1}{2} \frac{N^2}{E.F}\, ds$$

Extendiendo a toda la longitud de la barra, la expresión del trabajo interno total por esfuerzo normal será

$$Ti^N = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{E.F}\, ds \qquad (48)$$

Para el caso de barras de estructuras de reticulado es

$$N = S = \text{cte} \quad ; \quad E.F = \text{cte} \quad ; \quad \int ds = l$$

por lo tanto

$$Ti^N = \Sigma \frac{1}{2} \frac{S^2.l}{E.F} \qquad (49)$$

2.3.2.2. Trabajo interno producido por momentos flectores.

Cuando en las secciones extremas del elemento ds actúa un momento flector M, se produce por acción del mismo, un giro relativo entre ambas secciones de valor $d\theta$, por lo que la expresión del trabajo será, según la (43)

$$dTi^M = \tfrac{1}{2}\, M \,.\, d\theta$$

y teniendo en cuenta el valor de $d\theta$ dado por la (14)

$$dTi^M = \tfrac{1}{2}\, M \frac{M}{E.J}\, ds = \tfrac{1}{2} \frac{M^2}{E.J}\, ds$$

y extendiendo a toda la longitud de la barra

$$Ti^M = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E.J} \, ds \qquad (50)$$

2.3.2.3. Trabajo interno producido por esfuerzos de corte.

A fin de evaluar el trabajo interno en los desplazamientos producidos por los esfuerzos de corte actuantes, son también extensivas las consideraciones precedentes, por lo que

$$dTi^Q = \tfrac{1}{2} \, Q \, . \, d\eta$$

Reemplazando el valor de $d\eta$ dado por la (19)

$$dTi^Q = \tfrac{1}{2} \, Q \, \psi \frac{Q}{G.F} \, ds = \psi \, \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{G.F} \, ds \qquad (51)$$

y para la totalidad del elemento estructural

$$Ti^Q = \psi \, \frac{1}{2} \int \frac{Q^2}{G.F} \, ds \qquad (52)$$

2.3.3. Deducción del valor del factor de corte.

Los conceptos desarrollados en el apartado anterior pueden ser utilizados para efectuar la deducción del factor de corte ψ. Para ello debe tenerse presente que por la irregularidad de la distribución de las tensiones tangenciales en el caso de la flexión, debe partirse de un elemento de superficie dF, donde actúa un esfuerzo de corte elemental dQ, pudiéndose considerar a la tensión tangencial resultante

$$\tau = \frac{dQ}{dF} \qquad (53)$$

como constante en el área dF.

El trabajo interno producido en estas condiciones será

$$dTi^Q = \int \tfrac{1}{2} \, dQ \, . \, d\eta \qquad (54)$$

Despejando dQ de la (53) y teniendo en cuenta el valor que corresponde a $d\eta$ según la (18), reemplazando en la (54) se obtiene

$$dTi^Q = \int_F \tfrac{1}{2} \, \tau \, . dF . \tau . ds$$

Además, por la primera de las (16) es $\tau = \tau/G$. Luego

$$dTi^{Q} = \int_F \frac{1}{2} \tau \cdot dF \frac{\tau}{G} ds = \int_F \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} ds.dF \qquad (55)$$

La expresión general de las tensiones tangenciales debidas a esfuerzos de corte se deduce en Resistencia de Materiales y es conocida como fórmula de Jouravsky, según la cual

$$\tau = \frac{Q.S_y}{J.b} \qquad (56)$$

donde: Q es el esfuerzo de corte en la sección considerada; S_y el momento estático respecto al eje neutro de la porción del área de la sección transversal que se halla por encima de la fibra donde se desea calcular el valor de τ; J el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro, y b el ancho de la sección en correspondencia con la fibra considerada.

Elevando al cuadrado la (56) y reemplazando en la (55)

$$dTi^{Q} = \int_F \frac{1}{2} \frac{Q^2.S_y^2}{G.J^2.b^2} ds.dF = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{G.F} ds \int_F \frac{S_y^2.F}{J^2.b^2} dF$$

Comparando esta expresión con la (51) se observa que

$$\psi = \int_F \frac{S_y^2.F}{J^2.b^2} dF = \frac{F}{J^2} \int_F \frac{S_y^2}{b^2} dF \qquad (57)$$

constante conocida como *factor de forma* o *factor de corte*, cuyo valor depende, como se desprende de la expresión obtenida, de la forma de la sección transversal a través de F, b, J y S_y.

2.3.3.1. Valor del factor de corte para secciones rectangulares.

Para una sección rectangular (figura 15), los parámetros geométricos anteriores valdrán

$$b = cte \quad ; \quad F = b.d \quad ; \quad dF = b.dy \quad ; \quad J = b.d^3/12$$

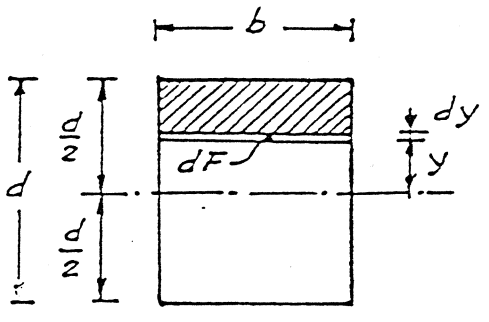


Figura 15

$$S_y = b\left(\frac{d}{2} - y\right).\left(\frac{d/2 - y}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{d}{2} - y\right).\left(\frac{d}{2} + y\right) =$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

Reemplazando todos estos valores en la (57)

$$\psi = \frac{b.d.144}{b^2.d^6} \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{b^2.(d^2/4 - y^2)^2}{4\ b^2}\ b.dy =$$

$$= \frac{36}{d^5} \int_{-d/2}^{+d/2} \left[\frac{d^4}{16} - \frac{d^2.y^2}{2} + y^4\right].dy = \frac{36}{d^5} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{d^4}{16}\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right) - \frac{d^2}{2x3}\left(\frac{d^3}{8} + \frac{d^3}{8}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{d^5}{32} + \frac{d^5}{32}\right)\right]$$

$$\psi = 36\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80}\right] = 36\ \frac{15-10+3}{240} = \frac{288}{240} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Se observa que ψ es un coeficiente sin dimensiones físicas y que depende sólo de la forma de la sección. Siempre es mayor que 1 y tanto mayor cuanto más se aparta de la uniformidad la distribución de los esfuerrzos de corte.

El valor obtenido para el rectángulo es constante, cualquiera sea la relación de los lados y es aplicable, por consiguiente, también para el cuadrado. Para el círculo es $\psi = 32/27$ y para los perfiles doble T laminados es $\psi \approx F/F_a$, donde F es la superficie total y F_a la del alma vertical.

Con el procedimiento descripto para el cálculo de ψ a través de la ecuación de trabajo, se obtiene una expresión para dicho factor que sólo depende de la forma de la sección. Sin embargo, si el análisis se efectuase basándose en la teoría de la elasticidad, se llega a que también el coeficiente de Poisson (coeficiente de alargamiento transversal), influye sobre el valor de ψ.

Para secciones rectangulares puede calcularse aproximadamente el valor de ψ mediante la expresión

$$\psi = \frac{3}{4}.\frac{1,6 + \mu}{1 + \mu}$$

con lo que para el acero $\psi \approx 1,1$ y para el hormigón $\psi \approx 1,2$.

2.3.4. Resumen de las expresiones.

En conclusión, y como según la (44) el trabajo externo es igual al interno, se tendrá como expresión final de aplicación, considerando ordenadamente las (47), (50), (52) y (58)

$$\Sigma \tfrac{1}{2} P_i.\eta_i + \Sigma \tfrac{1}{2} M_i.\theta_i = \int \tfrac{1}{2} \frac{M^2}{EJ}\, ds + \Psi \int \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{GF}\, ds + \int \tfrac{1}{2} \frac{N^2}{EF}\, ds \qquad (58)$$

Si la estructura estuviese constituida por varios elementos estructurales, en el segundo miembro corresponderá considerar en cada sumando la sumatoria extendida a todos ellos, de cada una de las integrales consignadas.

Para reticulados se considera la (49), resultando

$$\Sigma \tfrac{1}{2} P_i.\eta_i = \Sigma \tfrac{1}{2} \frac{S^2.l}{E.F} \qquad (59)$$

El Teorema de Clapeyron es de aplicación para el cálculo del trabajo o de la energía de deformación, como así también para el cálculo de desplazamientos.

3. TRABAJO VIRTUAL DE LAS ACCIONES EXTERIORES E INTERIORES.

3.1. Conceptos básicos.

Tal como se definiera en los apartados 2.1. y 2.2., un trabajo resulta siempre del producto de una acción (fuerza o par) por un desplazamiento (lineal o angular, respectivamente). Cuando o la acción o el desplazamiento no se hallan realmente presentes en la estructura, y se los aplica o produce independientemente en determinadas condiciones, el trabajo así producido se conoce como *trabajo virtual* o *ficticio*.

Puede presentarse así un trabajo virtual en una estructura cuando el mismo es desarrollado por acciones exteriores reales actuantes sobre la misma, en desplazamientos ficticios independientes de los que por sí generaría el sistema de acciones.

Inversamente, puede concebirse también el trabajo virtual como el trabajo producido por acciones virtuales o ficticias, durante los desplazamientos reales producidos por acciones u otras causas (variación de temperatura o movimiento de vínculos) también reales.

Por lo general en el empleo del concepto de los trabajos virtuales, los sistemas ficticios (ya sea de desplazamientos o de acciones), son introducidos como auxiliares de cálculo para obtener el valor de determinadas incógnitas (desplazamientos característicos) o permitir el trazado de diagramas, por ejemplo el de líneas de influencia mediante el método cinemático.

3.2. Principio de los Trabajos Virtuales.

El Principio de los Trabajos Virtuales se aplica al caso de estructuras supuestas rígidas, sujetas a la acción de sistemas de fuerzas y/o pares en equilibrio, en las cuales se producen desplazamientos (traslaciones y/o rotaciones) compatibles con los vínculos de aquéllas. Como requisito adicional se requiere que una de las dos componentes del trabajo (las acciones o los desplazamientos) sean virtuales, eliminado con ello la influencia del aumento gradual del valor de la carga (desde cero hasta su valor final) durante el movimiento de la estructura.

3.2.1. Caso de traslaciones.

Sea la chapa rígida de la figura 16, sobre la cual actúa un sistema de fuerzas P_i en equilibrio y que experimenta en una dirección determinada x, una traslación Δ, la que será igual para todos los puntos por tratarse de una estructura rígida.

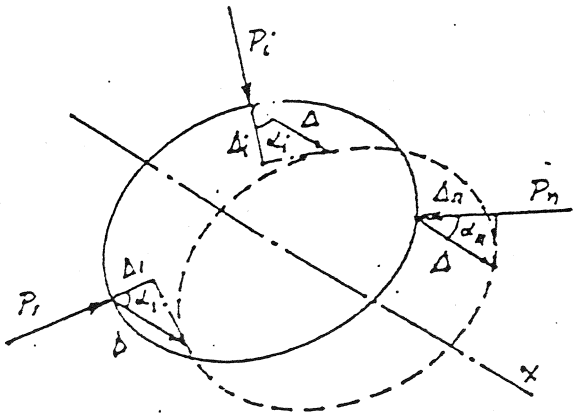


Figura 16

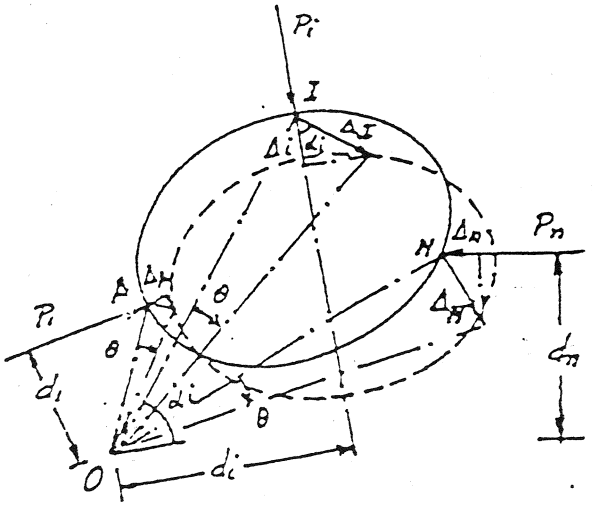


Figura 17

El trabajo virtual de la fuerza P_i será

$$T_i = P_i \Delta_i \qquad \text{siendo:} \qquad \Delta_i = \Delta . \cos \alpha_i$$

luego

$$T_i = P_i . \Delta . \cos \alpha_i$$

El trabajo de todas las fuerzas será

$$T = \Sigma T_i = \Sigma P_i . \Delta . \cos \alpha_i = \Delta . \Sigma P_i . \cos \alpha_i$$

Pero si el sistema de fuerzas está en equilibrio, su resultante es nula y por ende, lo será también toda proyección de la misma, o sea que: $\Sigma P_i . \cos \alpha_i = 0$.

Dado que por hipótesis $\Delta \neq 0$, resulta en definitiva $T = 0$.

3.2.2. Caso de rotaciones.

Efectuando los razonamientos con el mismo criterio que en el caso anterior y teniendo en cuenta la figura 17, donde se dió una rotación θ a la chapa alrededor del punto O, resulta

$$T_i = P_i.\Delta_i = P_i.\Delta_I.\cos \alpha_i$$

En este caso los desplazamientos de los puntos de aplicación de cada fuerza (Δ_A, .. Δ_I, .. Δ_N) son variables y proporcionales a su distancia al polo de rotación, siendo constante en cambio el valor de θ. Del concepto básico de rotación de una chapa resulta

$$\Delta_I = \overline{OI}.\theta \qquad \text{luego:} \qquad T_i = P_i.\overline{OI}.\theta.\cos \alpha_i$$

Pero $\overline{OI}.\cos \alpha_i = d_i$

por lo que $T_i = P_i.d_i.\theta$

Extendiendo a todo el sistema

$$T = \Sigma\, T_i = \Sigma\, P_i.d_i.\theta = \theta.\Sigma\, P_i.d_i$$

Pero $\Sigma\, P_i.d_i$ es el momento estático total del sistema de fuerzas con respecto al punto O de su plano, el que es nulo por tratarse de un sistema de fuerzas en equilibrio. Por consiguiente y puesto que $\theta \neq 0$, resulta $T = 0$.

Generalizando los dos casos expuestos puede formularse el siguiente principio, conocido como Principio de los Trabajos Virtuales: *El trabajo virtual producido por un sistema de acciones (fuerzas y/o pares) en equilibrio, que actúa sobre un cuerpo rígido, en un desplazamiento compatible con los vínculos del mismo, es igual a cero.*

3.3. Teorema de los Trabajos Virtuales. Demostración.

Sea una estructura vinculada cualquiera, tal como la de la figura 18a), sobre la cual se supone actuando un sistema de acciones (fuerzas y/o pares) exteriores en equilibrio entre sí, y en equilibrio a su vez con las solicitaciones internas que dicho sistema provoca.

Este sistema total de acciones en equilibrio se considera como un sistema virtual o ficticio *que por sí no genera deformaciones en la estructura*. Para individualizarlo se designarán por $\overline{P}_i$ y $\overline{M}_i$ a las acciones exteriores (tanto activas como reactivas) que lo componen y por $\overline{M}$, $\overline{N}$ y $\overline{Q}$ a las solicitaciones internas que el mismo provoca.

En estas condiciones la estructura se halla en la posición a que indica la figura. Si en tal estado y debido a la acción de una causa exterior cualquiera, independiente del sistema virtual ya actuante, se produce una deformación compatible con los vínculos y con la continuidad estructural, se pasará en general para la estructura considerada en su conjunto, a la posición deformada b,

y en particular, un elemento cualquiera Δs, acompañará a la estructura en su deformación, y con él se desplazarán todas las acciones virtuales (tanto exteriores como interiores) actuantes sobre el mismo (figura 18a).

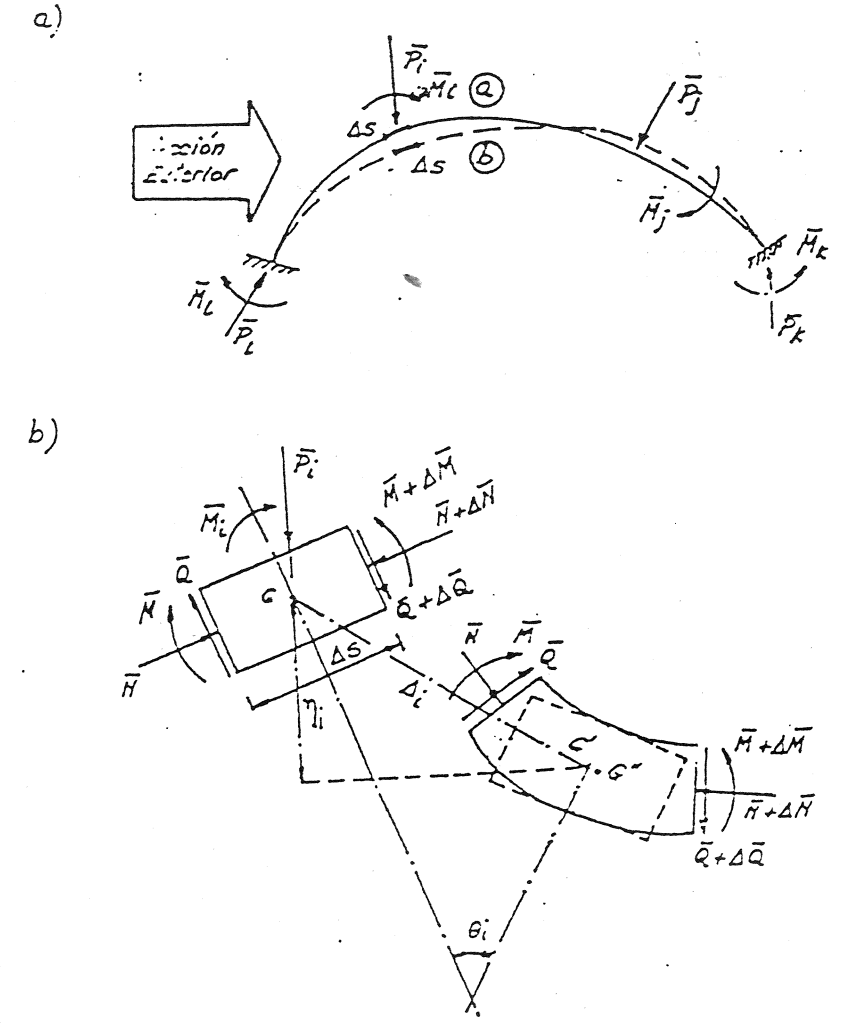


Figura 18

El movimiento total desde la posición a a la posición b, puede considerarse como constituido por dos componentes: un movimiento rígido (sin deformación relativa entre los puntos), que corresponderá a su vez a una componente de traslación y una de rotación, y una posterior deformación elástica o movimiento elástico del elemento. En consecuencia:

Movimiento total = Movimiento rígido + Movimiento elástico

En otras palabras, si bien se llega del estado inicial al estado final deformado (figura 18b) mediante movimientos simultáneos, a los efectos prácticos se puede suponer la independencia de las deformaciones y la superposición de los efectos, considerando primero una traslación paralela de los puntos del elemento, definida por el corrimiento $\Delta_1 = \overline{GG'}$ del centroide, luego una rotación definida por el ángulo θ_1 girado por

la sección centroidal (ambas en movimiento rígido) y finalmente la deformación elástica propia del elemento, hasta llegar a la forma final que indica la figura, en la que el centroide ocupa la posición G".

Las acciones exteriores ($\overline{P}_1$ y $\overline{M}_1$) y las solicitaciones interiores ($\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{Q}$, $\overline{M} + \Delta\overline{M}$, $\overline{N} + \Delta\overline{N}$ y $\overline{Q} + \Delta\overline{Q}$), correspondientes todas al sistema virtual que actúa sobre el elemento, cambian de posición durante la deformación del mismo, al modificarse la ubicación de sus puntos y planos de aplicación. En consecuencia, se tiene un sistema de acciones virtuales cuyos componentes experimentan determinados desplazamientos, lo que significa que se producirán los correspondientes trabajos virtuales, pudiéndose considerar por separado el trabajo total producido por las acciones exteriores (ΔTe) y el producido por las solicitaciones interiores (ΔTi).

Al igual que para el movimiento, se pueden diferenciar para cada uno de ellos, dos trabajos: uno desarrollado durante el movimiento rígido [$\Delta T^{(r)}$] y el otro durante el movimiento elástico, o sea el trabajo de deformación [$\Delta T^{(d)}$]. En consecuencia

$$\Delta Te = \Delta Te^{(r)} + \Delta Te^{(d)}, \text{ para las acciones exteriores} \qquad (60)$$

$$\Delta Ti = \Delta Ti^{(r)} + \Delta Ti^{(d)}, \text{ para las solicitaciones interiores} \qquad (61)$$

El trabajo $\Delta Te^{(r)}$ será igual al producto de las fuerzas aplicadas en el elemento ($\overline{P}_1$ en este caso) por la proyección del desplazamiento rígido ($\overline{GG'} = \Delta_1$) en la dirección de la fuerza (η_1) más el producto de los pares ($\overline{M}_1$ en este caso) por la rotación del plano sobre el cual actúan (θ_1). Es decir que

$$\Delta Te^{(r)} = \overline{P}_1.\eta_1 + \overline{M}_1.\theta_1 \qquad (62)$$

Por su parte, el trabajo de las acciones exteriores durante la deformación elástica [$\Delta Te^{(d)}$], responderá a idénticos criterios, pero aplicados al desplazamiento $\overline{G'G''}$ y a la eventual modificación de posición del plano de actuación de $\overline{M}_1$ al producirse la deformación elástica. Como estos desplazamientos son muy pequeños y despreciables comparados con los valores de Δ_1 y θ_1, se puede considerar a los fines prácticos $\Delta Te^{(d)} \approx 0$.

En consecuencia la (60) queda

$$\Delta Te = \Delta Te^{(r)} \qquad (63)$$

Previo a analizar los valores que corresponden a las expresiones de los trabajos $\Delta Ti^{(r)}$ y $\Delta Ti^{(d)}$, debe tenerse en cuenta que el elemento considerado se halla en equilibrio bajo la solicitación de las acciones exteriores y de los esfuerzos internos (todos virtuales), por lo que al producirse la deformación, la suma de los trabajos de todas esas acciones en el movimiento rígido debe ser nula, por el Principio de los Trabajos Virtuales, expuesto en 3.2. Es decir que

$$\Delta Te^{(r)} + \Delta Ti^{(r)} = 0$$

o bien, por la (63)

$$\Delta Te + \Delta Ti^{(r)} = 0 \qquad ; \qquad \Delta Ti^{(r)} = -\Delta Te \tag{64}$$

Llevando este valor a la expresión (61) resulta

$$\Delta Ti = -\Delta Te + \Delta Ti^{(d)} \tag{65}$$

que resulta válida para el elemento Δs. Extendiendo a todos los elementos en que se puede suponer dividida la estructura se tiene

$$\Sigma \Delta Ti = -\Sigma \Delta Te + \Sigma \Delta Ti^{(d)} \tag{66}$$

En estas condiciones puede considerarse a la totalidad de la estructura dividida en una serie de elementos solidarios o "pegados" unos a otros, en las caras de las secciones de corte (figura 19).

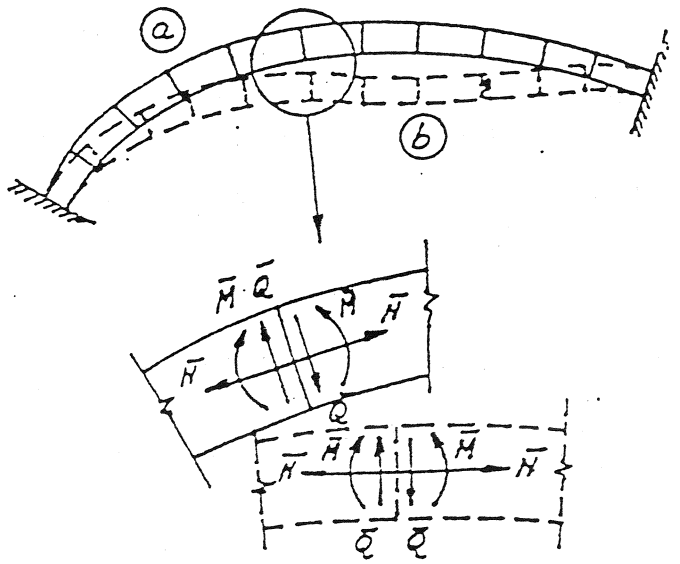


Figura 19

Sobre la cara común de dos elementos consecutivos cualesquiera, analizada desde la izquierda, actúan determinadas solicitaciones internas $\bar{M}$, $\bar{N}$ y $\bar{Q}$ y sobre la misma cara, analizada desde la derecha, las acciones serán de idéntico valor, pero de signo contrario. Al producirse la deformación, por la continuidad estructural, las caras que son solidarias se acompañan mutuamente durante la misma, por lo que el trabajo generado por los esfuerzos de la izquierda tendrá un cierto valor y el de los de la derecha tendrá igual valor, pero de signo contrario, con lo que el trabajo total de estas acciones interiores será nulo. Extendiendo a toda la estructura resulta entonces que $\Sigma \Delta Ti = 0$.

Como consecuencia de lo anterior la (66) queda

$$\Sigma \Delta Ti = -\Sigma \Delta Te + \Sigma \Delta Ti^{(d)} = 0 \tag{67}$$

o bien $$\Sigma \Delta Te = \Sigma \Delta Ti^{(a)}$$

y en forma sintética $$Te = Ti^{(a)} \qquad (68)$$

Esta expresión constituye el Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV) según el cual: *Para toda deformación compatible con los vínculos, de una estructura que se halla en equilibrio bajo la solicitación de un sistema de acciones ficticias, el trabajo virtual de las acciones exteriores (en movimiento rígido) es igual al trabajo de las acciones interiores en la deformación elástica.*

Este teorema es extensivo a cualquier trabajo virtual, o sea que también es aplicable al caso de un sistema de acciones reales en equilibrio, que actúan sobre una estructura sobre la que se provoquen desplazamientos virtuales, independientes de la deformación real que aquéllas tiendan a producir. Ello resulta evidente teniendo en cuenta que tal supuesto no modifica los conceptos de la demostración efectuada, dado que en las aplicaciones de la ingeniería, las deformaciones (ya sean reales o virtuales) son siempre pequeñas y compatibles con los vínculos.

3.4. Expresión de cálculo del TTV.

3.4.1. Trabajo externo.

Por las consideraciones efectuadas en la demostración anterior, y generalizando a toda la estructura, la expresión (62) resulta

$$Te = \Sigma \overline{P}_i . \eta_i + \Sigma \overline{M}_i . \theta_i \qquad (69)$$

3.4.2. Trabajo interno de deformación.

Sea un elemento ds sobre el cual actúan los esfuerzos internos producidos por el sistema virtual actuante (figura 20) y en el que se considera únicamente la deformación elástica que el mismo haya experimentado, con respecto a la posición inicial (una vez terminado el movimiento rígido).

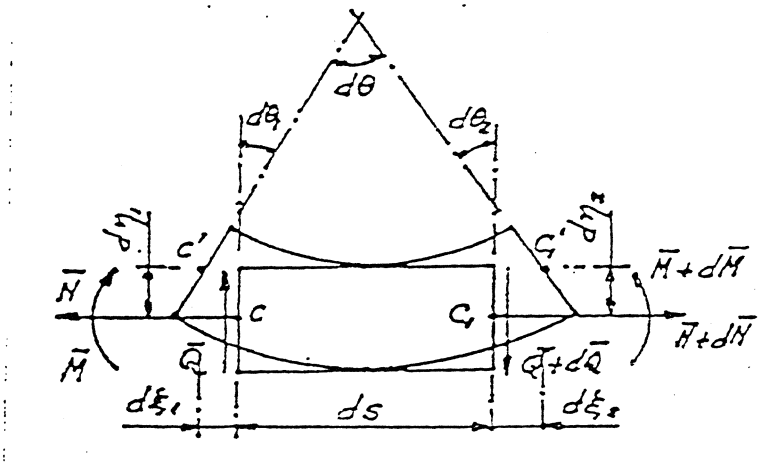


Figura 20

Considerando que las direcciones de las solicitaciones interiores prácticamente no varían por tratarse de desplazamientos suficientemente pequeños y despreciando infinitésimos de orden superior, resulta

$$dTi^{(a)} = \overline{M}.d\theta + \overline{N}.d\xi + \overline{Q}.d\eta \qquad (70)$$

Para la formulación de esta expresión se ha aplicado la (40) para el trabajo de los esfuerzos $\overline{N}$ y $\overline{Q}$, siendo los desplazamientos relativos $d\xi = d\xi_1 + d\xi_2$, y $d\eta = d\eta_1 + d\eta_2$, respectivamente; mientras que para el trabajo de los momentos $\overline{M}$ es de aplicación la (43), siendo el giro relativo en este caso $d\theta = d\theta_1 + d\theta_2$. Siempre deben tenerse en cuenta correctamente los signos de las solicitaciones respecto al de los desplazamientos que las mismas producen.

Integrando la (70)

$$Ti^{(a)} = \int \overline{M}.d\theta + \int \overline{N}.d\xi + \int \overline{Q}.d\eta \qquad (71)$$

3.4.3. Expresiones generales.

Teniendo en cuenta la expresión general del TTV dada por la (68) y las formas que adopta cada uno de sus miembros según la (69) y (71), resulta como expresión general de cálculo para estructuras planas

$$\Sigma\, \overline{P}_1.\eta_1 + \Sigma\, \overline{M}_1.\theta_1 = \int \overline{M}.d\theta + \int \overline{N}.d\xi + \int \overline{Q}.d\eta \qquad (72)$$

y para estructuras espaciales

$$\Sigma\, \overline{P}_1.\eta_1 + \Sigma\, \overline{M}_1.\theta_1 = \int \overline{M}.d\theta + \int \overline{N}.d\xi + \int \overline{Q}.d\eta + \int \overline{M}_t.d\varphi \qquad (73)$$

Para estructuras compuestas por varios miembros, o para los casos en que resulta conveniente dividir la estructura en tramos parciales

$$\Sigma\overline{P}_1.\eta_1 + \Sigma\overline{M}_1.\theta_1 = \Sigma \int \overline{M}.d\theta + \Sigma \int \overline{N}.d\xi + \Sigma \int \overline{Q}.d\eta + \Sigma \int \overline{M}_t.d\varphi \qquad (74)$$

3.5. Causas que producen la deformación.

Al efectuar la demostración del TTV en el apartado 3.3., se indicó como causante de la deformación de la estructura, en forma general, a una "acción exterior cualquiera", sin individualizarla. A los fines de desarrollar la expresión del segundo miembro de la (72), se hace necesario definir concretamente dicha acción deformante, dado que de su naturaleza dependerán los valores de los desplazamientos $d\theta$, $d\xi$ y $d\eta$.

En las aplicaciones prácticas pueden actuar como causales de las deformaciones de las estructuras las siguientes:
a) Otro sistema de acciones exteriores.
b) Variación de temperatura.
c) Movimiento de vínculos.

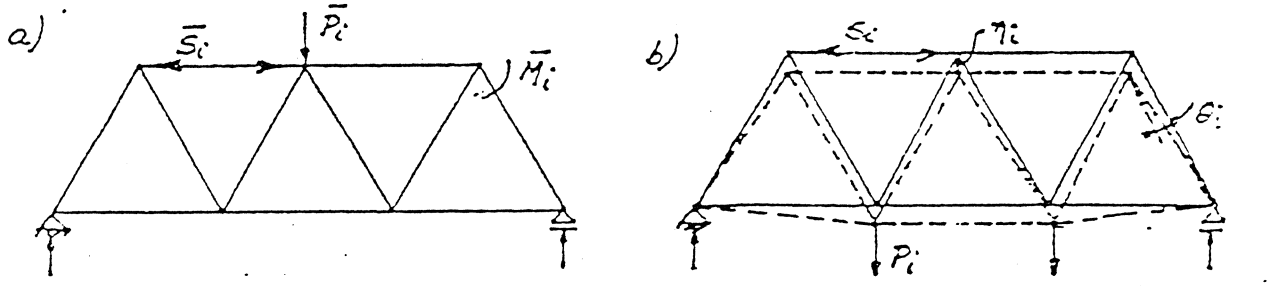
Los análisis pertinentes se aplicarán en primera instancia a sistemas planos.

3.5.1. Otro sistema de acciones exteriores.

3.5.1.1. Estructuras solicitadas sólo por esfuerzo normal.

Este caso se presenta en las estructuras de reticulado, cuyas barras se hallan solicitadas exclusivamente por esfuerzos normales, constantes a lo largo de las mismas.

Si se considera un reticulado cualquiera (figura 21a), sobre el que actúa un sistema de fuerzas y/o pares ($\overline{P}_1/\overline{M}_1$) virtuales, que por sí no producen deformación en la estructura, se generará en cada barra un esfuerzo interno $\overline{S}_1$ (Cabe recordar que en caso de actuar momentos $\overline{M}_1$ se los debe reemplazar por el par de fuerzas equivalentes aplicadas en los nudos extremos de la barra donde actúa $\overline{M}_1$).



Sistema no deformante Sistema deformante

Figura 21

Si en estas condiciones actúa sobre la estructura otro sistema (P_1/M_1) independiente del anterior y que produce la deformación de aquélla, originando en cada barra un esfuerzo S_1 (figura 21b), la expresión general (74) queda reducida a

$$\Sigma\ \overline{P}_1.\eta_1 + \Sigma\ \overline{M}_1.\theta_1 = \Sigma \int \overline{S}_i.d\xi \qquad (75)$$

donde $d\xi$ es el desplazamiento axial en cada barra producido por la solicitación S_1, cuyo valor ha sido determinado según la (9). Reemplazando en la (75) se tiene

$$\Sigma\ \overline{P}_1.\eta_1 + \Sigma\ \overline{M}_1.\theta_1 = \Sigma \int_0^{l_1} \overline{S}_1 \frac{S_1}{E.F_1}\, ds$$

aplicando cada integral a las diversas barras que conforman la armadura, de longitudes l_i y secciones F_i. Como además en cada barra $\bar{S}_i$, S_i y F_i son constantes, resulta

$$\Sigma \bar{P}_i.\eta_i + \Sigma \bar{M}_i.\theta_i = \Sigma \frac{\bar{S}_i.S_i}{E.F_i} \int_0^{l_i} ds$$

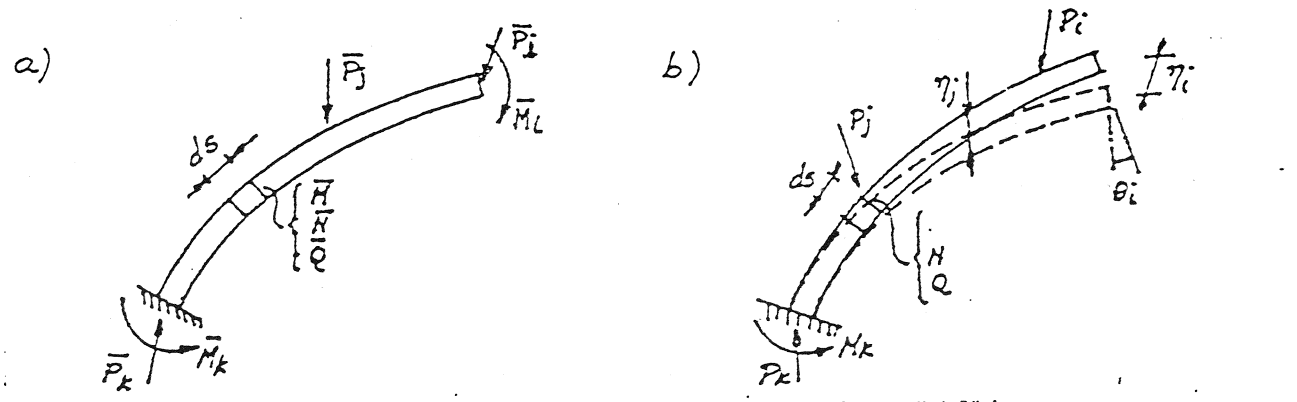
$$\Sigma \bar{P}_i.\eta_i + \Sigma \bar{M}_i.\theta_i = \Sigma \frac{\bar{S}_i.S_i}{E.F_i} l_i \qquad (76)$$

Esta última expresión puede escribirse también, teniendo en cuenta la (10), en función de la variación de longitud Δl_i que en cada barra produce el sistema deformante

$$\Sigma \bar{P}_i.\eta_i + \Sigma \bar{M}_i.\theta_i = \Sigma \bar{S}_i.\Delta l_i \qquad (77)$$

3.5.1.2. Estructuras de alma llena.

Si sobre una estructura plana cualquiera de alma llena se considera aplicado un sistema virtual de acciones ($\bar{P}_i/\bar{M}_i$) que no la deforman, se producirán en cada sección de la misma las correspondientes solicitaciones internas $\bar{M}$, $\bar{N}$ y $\bar{Q}$ (figura 22a), mientras que el sistema deformante (P_i/M_i) generará M, N y Q (figura 22b).



Sistema no deformante Sistema deformante

Figura 22

La expresión general de aplicación en este caso es la (72), en donde $d\theta$, $d\xi$ y $d\eta$ son los desplazamientos producidos por las solicitaciones internas M, N y Q, correspondientes al sistema deformante, cuyos valores están dados, respectivamente, por las (14), (9) y (19). En consecuencia

$$\Sigma\bar{P}_i.\eta_i + \Sigma\bar{M}_i.\theta_i = \int_o^s \bar{M} \frac{M}{E.J} ds + \int_o^s \bar{N} \frac{N}{E.F} ds + \psi \int_o^s \bar{Q} \frac{Q}{G.F} ds \qquad (78)$$

Si la estructura estuviese conformada por varias barras, debe considerarse en el segundo miembro la sumatoria extendida a cada barra, en todos los sumandos.

3.5.1.3. Estructuras espaciales de alma llena.

Para el caso de estructuras espaciales, a las solicitaciones internas consideradas en el apartado anterior, debe agregarse la aparición de momentos torsores, por lo que será de aplicación la (73) o (74) como expresión general, con el valor de $d\varphi$ dado por la (23), agregándole el cuarto sumando al segundo miembro de la (78).

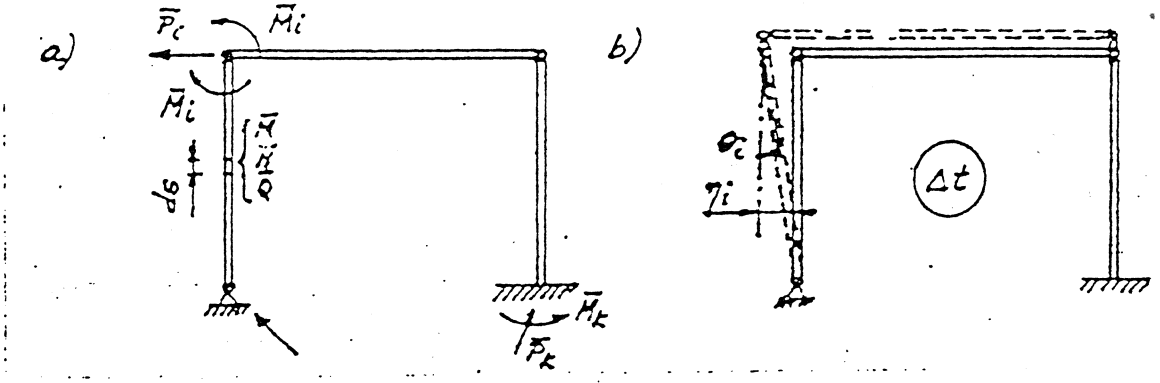
3.5.1.4. Consideraciones generales.

Debe observarse muy especialmente que en todos los casos, en el primer miembro (correspondiente al trabajo externo Te) aparecen las acciones del primer sistema (que no deforma la estructura) por los desplazamientos provocados por el segundo sistema (deformante) en los puntos y las secciones donde están aplicadas las acciones del primero. Análogamente, en el segundo miembro (correspondiente al trabajo de deformación elástica $Ti^{(d)}$) aparecen las solicitaciones internas del primer sistema por los desplazamientos provocados por el segundo sistema.

3.5.2. Variación de temperatura.

3.5.2.1. Variación uniforme de temperatura.

Sea una estructura sobre la cual actúa un sistema virtual de acciones ($\overline{P}_i/\overline{M}_i$), las que en un elemento genérico ds provocan las solicitaciones internas $\overline{M}$, $\overline{N}$ y $\overline{Q}$, y que experimenta una variación de temperatura uniforme en todas sus fibras (Δt) que constituye la causa exterior que produce la deformación (figuras 23a) y b).



Sistema no deformante Sistema deformante

Figura 23

De acuerdo a lo analizado en 1.5.6., una variación uniforme de temperatura produce un cambio de longitud constante en todas las fibras y como consecuencia, una traslación paralela de las secciones (sin rotación ni corrimiento transversal), cuyo valor está dado por la (31). Llevándolo a la (72)

$$\Sigma \bar{P}_i.\eta_i + \Sigma \bar{M}_i.\theta_i = \int \bar{N}.\alpha.\Delta t.ds = \alpha.\Delta t \int \bar{N}.ds \qquad (79)$$

Si la estructura estuviese compuesta por varios miembros, debe aplicarse la sumatoria de las integrales correspondientes a cada uno de ellos.

3.5.2.2. Variación no uniforme de temperatura.

Para este caso, además del desplazamiento longitudinal $d\xi_t$, se produce también la rotación de las secciones $d\theta_t$, cuyos valores están dados respectivamente por las (33) y (34). Reemplazándolos en la expresión general (72) se tiene

$$\Sigma \bar{P}_i.\eta_i + \Sigma \bar{M}_i.\theta_i = \int \bar{M}.\alpha.\left(\frac{\Delta t_i - \Delta t_s}{d}\right).ds + \int \bar{N}.\alpha.\left(\frac{\Delta t_i + \Delta t_s}{2}\right).ds \qquad (80)$$

En caso que la sección transversal no sea simétrica respecto del eje neutro, la expresión de aplicación se obtendrá utilizando en el reemplazo efectuado para arribar a la fórmula anterior, las expresiones deducidas en el apartado 1.5.7.2. En virtud de ellas se mantiene idéntico el término correspondiente a los momentos flectores, mientras que en el segundo sumando del segundo miembro de la (80) debe introducirse la (36).

3.5.3. Movimiento de vínculos.

En aquellos casos en que la causa deformante sea el movimiento de uno o varios vínculos (descenso de apoyos, giro de secciones empotradas), si la estructura es isostática el movimiento que se produce en la misma es únicamente rígido, por lo que $Te = Ti^{(d)} = 0$, la que una vez planteada (como Principio de los Trabajos Virtuales) permite despejar cualquier incógnita que se requiera obtener.

El caso de estructuras hiperestáticas se analizará en el apartado 5.3. del presente Capítulo.

3.6. Aplicación del TTV al cálculo de desplazamientos.

El método basado en el Teorema de los Trabajos Virtuales, llamado también método de la carga unitaria, método de la carga virtual o método de Maxwell-Mohr (debido a que J. C. Maxwell en 1864 y O. Mohr en 1874, lo dedujeron independientemente), es el método más general y versátil para calcular desplazamientos en estructuras. Se lo puede aplicar tanto en estructuras estáticamente determinadas como indeterminadas.

Para la utilización de este método se consideran dos sistemas de acciones. El primero, al que se denomina *sistema deformante*, está constituido por la estructura en su condición real, esto es, sujeta a las cargas efectivamente actuantes, cambios de temperatura u otros efectos. El segundo sistema lo constituye una acción unitaria aplicada en la dirección del desplazamiento de la

estructura real que se desea calcular. Esta acción unitaria es una carga ficticia o virtual, no existente en la estructura real y que por sí no la deforma, que sólo se introduce para propósitos de análisis. De allí que a este segundo sistema se lo conozca indistintamente como *sistema no deformante*, *sistema unitario*, *sistema virtual* o *sistema auxiliar*.

Cabe observar que en todas las expresiones desarrolladas de $Te = Ti^{(a)}$ [expresiones (76), (78), (79) y (80)], el primer miembro es de la forma $\Sigma \bar{P}_i.\eta_i + \Sigma \bar{M}_i.\theta_i$, de modo tal que si como única acción del sistema virtual se aplica $\bar{P} = 1$ o $\bar{M} = 1$, la expresión general del TTV se reduce respectivamente a $\eta = Ti^{(a)}$ o $\theta = Ti^{(a)}$, o sea que el trabajo interno de deformación, calculado según los segundos miembros de las expresiones mencionadas, arroja como resultado directamente el valor del desplazamiento real producido en la dirección de la acción unitaria aplicada.

A los efectos indicados, el término *desplazamiento* se utiliza en el sentido general discutido en el apartado 1. Por lo tanto, los desplazamientos posibles de determinar pueden ser:

- *Caso 1:* El corrimiento de un punto del eje de la estructura, en cuyo caso la acción unitaria virtual debe ser una fuerza concentrada aplicada en dicho punto y en la dirección del corrimiento que se desea calcular.

- *Caso 2:* El ángulo de rotación del eje de un miembro estructural (o lo que es igual, el giro de la sección transversal correspondiente), en cuyo caso la acción unitaria será un par aplicado en el plano donde la rotación ocurre.

- *Caso 3:* El corrimiento relativo entre dos puntos en la dirección de la recta que los une, en cuyo caso el sistema unitario estará constituido por dos fuerzas colineales y opuestas, aplicadas una en cada punto, en un todo de acuerdo a las consideraciones efectuadas en el apartado 2.2.2., expresión (40), en la que se hace $\bar{P} = 1$.

- *Caso 4:* El giro relativo entre dos secciones, caso para el cual el sistema unitario estará conformado por dos pares iguales y opuestos aplicados en dichas secciones, en un todo de acuerdo a las consideraciones efectuadas en el apartado 2.2.4., expresión (43), en la que se hace $\bar{M} = 1$.

Dado que en principio el sentido del desplazamiento es también desconocido (salvo en los casos en que la deformación sea evidente), el sistema unitario puede ser aplicado con sentido arbitrario; luego al calcular el valor del desplazamiento, si éste resulta con signo positivo, significa que el trabajo también lo es, es decir que el sentido del desplazamiento coincide con el supuesto para el sistema unitario. Por el contrario, si el resultado obtenido es negativo, el sentido del desplazamiento es contrario al supuesto para el sistema unitario.

En resumen, los pasos a seguir para calcular un desplazamiento por el método descripto, son los siguientes:

1°) Según corresponda al tipo de estructura, se determinan los diagramas de M, N y Q (si aquélla es espacial también M_t) o los valores de S_i en el caso de reticulados, debidos al sistema deformante (sistema real actuante). Este paso no corresponde cuando la causa deformante sea cambios de temperatura.

2°) Se aplica en la estructura una acción o sistema unitario 1, en correspondencia con el desplazamiento Δ que se desea calcular, constituyendo el sistema no deformante.

3°) Se determinan los diagramas de $\overline{M}$, $\overline{N}$ y $\overline{Q}$ (en su caso también $\overline{M}_t$) o los valores de $\overline{S}_i$ de la estructura, debidos a la acción o sistema unitario.

4°) Se forman los productos indicados en los segundos miembros de las expresiones (76), (78), (79) u (80), según corresponda, y se integra cada término para toda la estructura.

5°) Se suman los valores parciales para obtener el desplazamiento total.

Cabe observar que mediante este método se obtienen por separado los valores que corresponden a los desplazamientos originados por cada acción interior individualmente considerada (M, N, Q y M_t), lo que permite, por comparación, establecer la incidencia relativa de cada una de ellas. En la mayoría de las estructuras planas, la incidencia de N y Q es despreciable frente a la de M, por lo que en tales casos el cálculo se limita al primer sumando.

3.6.1. Consideraciones relativas al análisis dimensional.

3.6.1.1. Estructuras de alma llena.

a) Cálculo de corrimientos. Al aplicar un sistema auxiliar constituido por una o dos fuerzas de valor unitario (1), adimensional, los diagramas respectivos resultan de unidades 1.cm los de $\overline{M}$ (y $\overline{M}_t$), y adimensionales los de $\overline{N}$ y $\overline{Q}$, con unidad de referencia dimensional 1.

En consecuencia el análisis dimensional arroja para el primer miembro de las expresiones de cálculo

$$1.\eta = 1.cm = cm$$

mientras que para el segundo miembro, expresión (78), se tiene para los sumandos correspondientes a momentos

$$\frac{1.cm.N.cm}{N/cm^2.cm^4}.cm = cm$$

Para los sumandos correspondientes a esfuerzos (N y Q) resulta (recordando que ψ es adimensional)

$$\frac{1 \cdot N}{N/cm^2 . cm^2} . cm = cm$$

b) Cálculo de rotaciones. En este caso, al aplicar como sistema auxiliar el constituido por uno o dos pares de momento 1 (sin dimensiones), las reacciones de vínculo (cuando se presentan) tendrán como unidades 1/cm, por lo que los diagramas de momentos $\overline{M}$ serán adimensionales y los de $\overline{N}$ y $\overline{Q}$ de unidades 1/cm.

En consecuencia el análisis dimensional arroja para el primer miembro de las expresiones de cálculo

$$1.\theta = 1.Nº \text{ puro (rad)} = \text{adimensional}$$

y para el segundo miembro, expresión (78), se tiene para los sumandos correspondientes a momentos

$$\frac{1.N.cm}{N/cm^2 . cm^4} . cm = \text{adimensional}$$

Por su parte, para los sumandos en que intervienen los esfuerzos (N y Q) resulta (recordando que ψ es adimensional)

$$\frac{1/cm.N}{N/cm^2 . cm^2} . cm = \text{adimensional}$$

3.6.1.2. Estructuras de reticulado.

a) Cálculo de corrimientos. Al aplicar un sistema auxiliar constituido por una o dos fuerzas de valor 1, adimensional, los esfuerzos internos en las barras ($\overline{S}_i$) que el mismo provoca, resultarán también valores adimensionales. En consecuencia el análisis dimensional arroja para el primer miembro de las expresiones de cálculo

$$1.\eta = 1.cm = cm$$

mientras que para el segundo miembro, expresión (76), resulta

$$\Sigma \frac{1.N.cm}{N/cm^2 . cm^2} = \Sigma\ cm = cm$$

b) Cálculo de rotaciones. En este caso, al aplicar como sistema auxiliar al constituido por uno o dos pares de momento 1 (sin dimensiones), los mismos deben ser reducidos a fuerzas actuantes en los nudos, las que resultarán iguales a $1/l_i$, o sea de unidades 1/cm, produciendo en consecuencia esfuerzos internos ($\overline{S}_i$) que también tendrán por unidad 1/cm.

Por lo tanto, el análisis dimensional arroja para el primer miembro de las expresiones de cálculo

$$1.\theta = 1.Nº \text{ puro (rad)} = \text{adimensional}$$

mientras que para el segundo miembro, expresión (76), se tiene

$$\Sigma \frac{1/cm.N.cm}{N/cm^2.cm^2} = \text{adimensional}$$

3.6.1.3. Casos de variación de temperatura.

Son de aplicación al efecto las expresiones desarrolladas en el apartado 3.5.2. Respecto a los primeros miembros no se producen modificaciones con relación a los casos anteriores. Además, cabe observar que $\alpha.\Delta t$ es siempre adimensional [1/°C.°C]. En cuanto a los segundos miembros, si es de aplicación la (79) se tendrá para el cálculo de corrimientos, al ser $\bar{N}$ adimensional por los motivos indicados en 3.6.1.1.a)

$$\bar{N}.ds = 1.cm = cm$$

mientras que para el cálculo de rotaciones, $\bar{N}$ tiene por unidades 1/cm, según lo consignado en 3.6.1.1.b), con lo que

$$\bar{N}.ds = (1/cm).cm = \text{adimensional}$$

Si fuera de aplicación la (80), se tendrá, para el cálculo de corrimientos

$$(1.cm).(1/cm).cm + 1.cm = cm$$

mientras que para la determinación de rotaciones

$$1.(1/cm).cm + (1/cm).cm = \text{adimensional}$$

3.7. Métodos auxiliares para el cálculo de las integrales.

3.7.1. Empleo de tablas.

De las expresiones de cálculo se desprende que en los casos de estructuras de alma llena, se debe resolver la integración de dos diagramas, de igual o distinta configuración, de ordenadas y e $\bar{y}$, resultando en todos los casos

$$I = k \int y.\bar{y}.dx$$

Haciendo abstracción del factor constante k, pueden calcularse las integrales

$$I = \int y.\bar{y}.dx$$

que corresponden a diversas combinaciones de diagramas, en forma analítica, y tabular los resultados obtenidos, en función de las dimensiones características de cada diagrama. El procedimiento a emplear al respecto se desprende de los casos particulares que se desarrollan a continuación.

3.7.1.1. Diagrama rectangular con rectangular (figura 24).

$$y = cte = i \qquad ; \qquad \bar{y} = cte = k$$

$$I = \int y.\bar{y}.dx = \int_o^s i.k.dx = i.k.s \qquad (81)$$

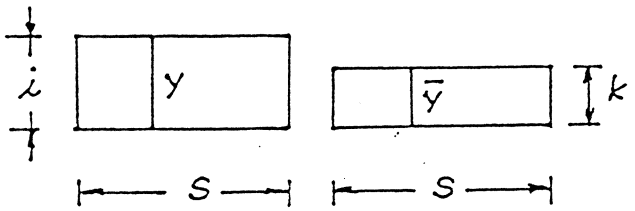


Figura 24

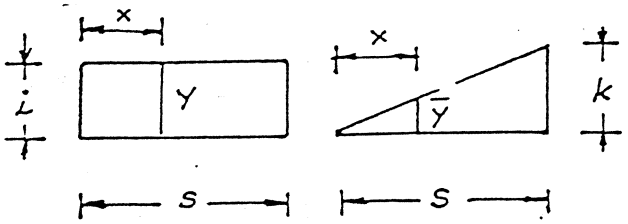


Figura 25

3.7.1.2. Diagrama rectangular con triangular (figura 25).

$$y = cte = i \qquad ; \qquad \frac{\bar{y}}{x} = \frac{k}{s} \qquad \text{luego} \qquad \bar{y} = \frac{k}{s}\,x$$

$$I = \int y.\bar{y}.dx = \int_o^s i\,\frac{k}{s}\,x.dx = i\,\frac{k}{s}\int_o^s x.dx = i\,\frac{k.s^2}{s.2} = \tfrac{1}{2}\,i.k.s \qquad (82)$$

3.7.1.3. Diagrama triangular con triangular de igual disposición (figura 26).

$$\frac{y}{x} = \frac{i}{s} \quad \text{luego} \quad y = \frac{i.x}{s} \qquad ; \qquad \frac{\bar{y}}{x} = \frac{k}{s} \quad \text{luego} \quad \bar{y} = \frac{k.x}{s}$$

$$I = \int_o^s \frac{i.x.k.x}{s\,.\,s}\,dx = \frac{i.k}{s^2}\int_o^s x^2.dx = \frac{i.k.s^3}{s^2.3} = \frac{1}{3}\,i.k.s \qquad (83)$$

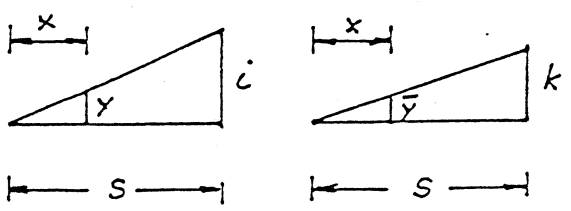


Figura 26

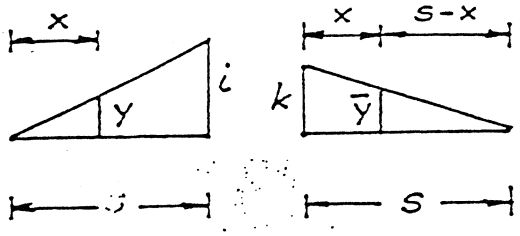


Figura 27

3.7.1.4. Diagrama triangular con triangular de disposición opuesta (figura 27).

$$\frac{y}{x} = \frac{i}{s} \text{ luego } y = \frac{i.x}{s} \; ; \; \frac{\bar{y}}{s-x} = \frac{k}{s} \text{ luego } \bar{y} = \frac{k.(s-x)}{s}$$

$$I = \int_o^s \frac{i.x.k.(s-x)}{s \,.\, s}\, dx = \frac{i.k}{s^2} \int_o^s x.(s-x).dx = \frac{i.k}{s^2}\left(s\,\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right)$$

$$I = \frac{i.k}{s^2}.\frac{3.s^3 - 2.s^3}{6} = \frac{1}{6}\, i.k.s \qquad (84)$$

3.7.1.5. Diagramas triangulares cruzados (figura 28).

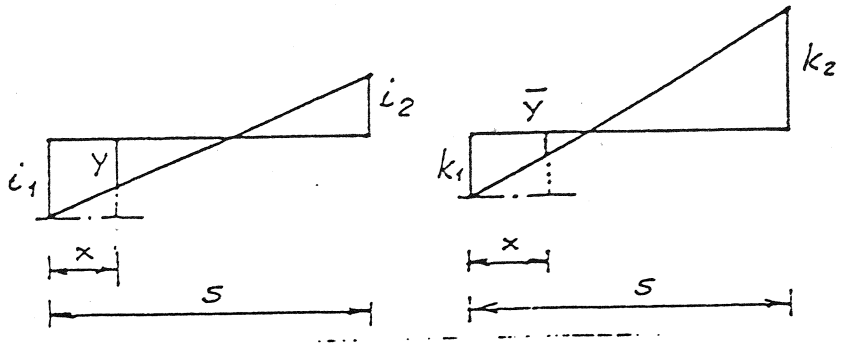


Figura 28

$$y = i_1 - \frac{i_1 + i_2}{s}\, x \qquad ; \qquad \bar{y} = k_1 - \frac{k_1 + k_2}{s}\, x$$

$$I = \int_o^s \left(i_1 - \frac{i_1 + i_2}{s}.x\right).\left(k_1 - \frac{k_1 + k_2}{s}.x\right).dx$$

$$I = \int_o^s \left(\frac{i_1.s - i_1.x - i_2.x}{s}\right).\left(\frac{k_1.s - k_1.x - k_2.x}{s}\right).dx$$

$$I = \frac{1}{s^2} \int_o^s (i_1.k_1.s^2 - i_1.k_1.s.x - i_1.k_2.s.x - i_1.k_1.s.x +$$

$$+ i_1.k_1.x^2 + i_1.k_2.x^2 - i_2.k_1.s.x + i_2.k_1.x^2 + i_2.k_2.x^2).dx$$

$$I = \frac{1}{s^2}\left(i_1.k_1.s^3 - i_1.k_1\,\frac{s^3}{2} - i_1.k_2\,\frac{s^3}{2} - i_1.k_1\,\frac{s^3}{2} +\right.$$

$$\left. + i_1.k_1\,\frac{s^3}{3} + i_1.k_2\,\frac{s^3}{3} - i_2.k_1\,\frac{s^3}{2} + i_2.k_1\,\frac{s^3}{3} - i_2.k_2\,\frac{s^3}{3}\right)$$

Observando que la suma de los sumandos 1ro., 2do. y 4to. es cero, queda

$$I = i_1.k_1 \frac{s}{3} + i_2.k_2 \frac{s}{3} - i_1.k_2 \frac{s}{6} - i_2.k_1 \frac{s}{6} \qquad (85)$$

$$I = \frac{s}{6} [2.(i_1.k_1 + i_2.k_2) - (i_1.k_2 + i_2.k_1)] \qquad (86)$$

$$I = \frac{s}{6} [(2.i_1 - i_2).k_1 + (2.i_2 - i_1).k_2] \qquad (87)$$

En la forma seguida para los casos particulares desarrollados pueden obtenerse también los valores de las integrales para las combinaciones de leyes de variación de solicitaciones más frecuentes en la práctica, las que se han agrupado en tablas para facilitar su empleo.

La Tabla Nº 2 adjunta en el Anexo del presente Capítulo, permite resolver en forma rápida y sencilla las integrales que aparecen en la expresión del trabajo interno de deformación de estructuras de alma llena, presuponiendo su utilización la constancia de E, F, J, J_T y G en cada tramo de longitud s.

En la referida tabla pueden observarse los valores obtenidos mediante las (81), (82), (83), (84) y (87).

3.7.2. Método de las áreas y ordenadas.

Cuando no se dispone de las tablas estudiadas en el apartado anterior, o se presenta un caso no previsto en las mismas, o se tienen dudas respecto a la consideración de los signos, puede resultar de utilidad el denominado método de las áreas y ordenadas.

En los casos en que en la estructura las barras son rectas y sus secciones transversales constantes en una parte o en toda su longitud, el cálculo de las integrales que intervienen en las expresiones de los desplazamientos, en estas partes, puede ser sustituido por la "multiplicación" de los diagramas a integrar. En estos casos, las solicitaciones internas $\bar{M}$, $\bar{N}$ y $\bar{Q}$ (y $\bar{M}_t$ si corresponde) del estado auxiliar, son siempre funciones lineales por partes, o sea que sus diagramas, por tramos, son rectilíneos. Como los parámetros característicos de las secciones y del material se extraen como constantes fuera del signo integral, dentro de ésta se conserva el producto de dos funciones, una de las cuales es lineal por partes.

Sean los diagramas que muestra la figura 29, los que deben ser integrados.

$$I = \int \frac{y.\bar{y}}{cte} ds = \frac{1}{cte} \int y.\bar{y}.ds \quad \text{o sea:} \quad cte.I = \int_o^s y.\bar{y}.ds$$

De la figura 29 se observa que $\bar{y} = x.tg\ \alpha$, con α constante.

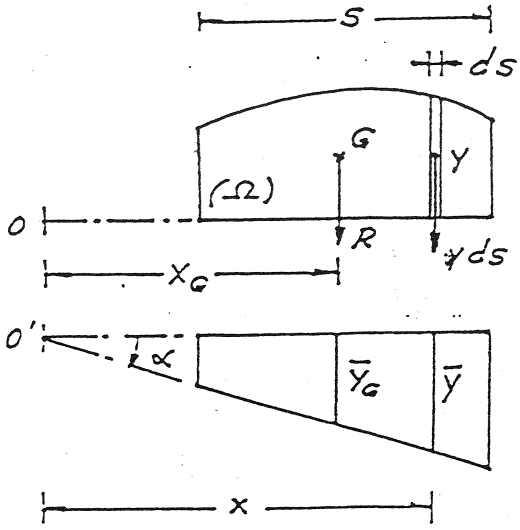


Figura 29

Luego

$$\int_o^s \bar{y}.y.ds = \int_o^s x.tg\ \alpha.y.ds = tg\ \alpha \int_o^s x.y.ds \qquad (88)$$

Pero esta última integral es el momento estático de las áreas elementales y.ds con respecto al punto O; luego la suma de todas ellas es igual al momento estático de la resultante del diagrama del sistema deformante (R), aplicada en su baricentro, con respecto al mismo punto O, o sea

$$\int_o^s x.y.ds = R.x_G = \Omega.x_G \qquad (89)$$

siendo R = Ω, el área del diagrama de ordenadas y.

Llevando el valor de la (89) a la (88)

$$\int_o^s \bar{y}.y.ds = tg\ \alpha.\Omega.x_G = \Omega.\bar{y}_G \qquad (90)$$

por ser $tg\ \alpha.x_G = \bar{y}_G$.

De la (90) se desprende que la integral es igual al producto de la ordenada del diagrama lineal (del sistema no deformante) ubicada en correpondencia con el baricentro del diagrama genérico del sistema deformante (diagrama y), por el área de este último.

Si ambos diagramas, los de y e $\bar{y}$, son lineales, al "multiplicarlos" es indiferente de cual de ellos se toma el área y de cual la ordenada baricéntrica.

El signo positivo del producto se obtiene cuando el diagrama y y la ordenada $\bar{y}_G$ son de un mismo signo, o sea, cuando ambos están colocados a un mismo lado del eje de la barra.

Para facilitar el cálculo de áreas y la ubicación de baricentros, puede consultarse la Tabla Nº 3.

3.7.3. Descomposición en diagramas simples.

En numerosas aplicaciones prácticas o en el desarrollo teórico del cálculo de desplazamientos de estructuras particulares, suele ser conveniente descomponer los diagramas compuestos de solicitaciones internas (generalmente debidos al sistema deformante), en figuras simples, el valor de cuyas integrales puede ser fácilmente determinado, y aún ser retenido en la memoria, y sumar luego los resultados parciales obtenidos.

Sea por ejemplo integrar un diagrama trapecial con otro triangular (figura 30a). El trapecio puede ser descompuesto en dos triángulos, con lo que, recordando las (84) y (83)

$$I = \frac{1}{6} i_1.k.s + \frac{1}{3} i_2.k.s = \frac{1}{6} (i_1 + 2.i_2).k.s \qquad (91)$$

valor este que se indica para la integración de dichos diagramas en la Tabla Nº 2.

Si se deben integrar dos triángulos de distinta longitud (figura 30b), se determina el valor de la ordenada que se produce a la distancia s del diagrama de longitud mayor (i_1) y se procede como en el caso anterior, arribándose a igual expresión.

Otro caso de aplicación práctica lo constituye la integración de los diagramas que muestra la figura 30c), y que también pueden ser descompuestos en figuras elementales, para las cuales se tiene.

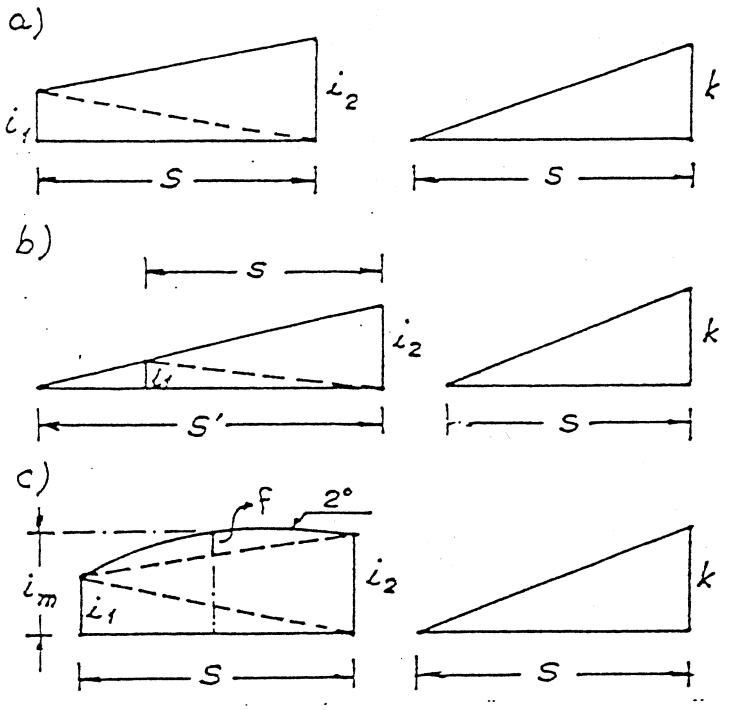


Figura 30

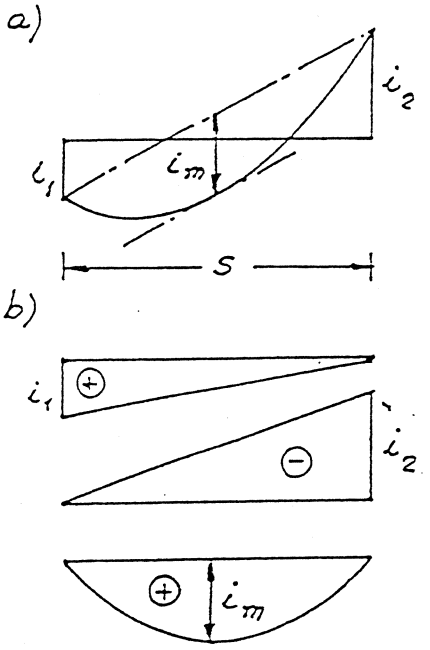


Figura 31

$$I = \frac{1}{6}\, i_1.k.s + \frac{1}{3}\, i_2.k.s + \frac{1}{3}\, f.k.s$$

pero $$f = i_m - \frac{i_1 + i_2}{2} = i_m - \frac{i_1}{2} - \frac{i_2}{2}$$

$$I = k.s.\left[\frac{1}{6}\, i_1 + \frac{1}{3}\, i_2 + \frac{1}{3}\, i_m - \frac{1}{6}\, i_1 - \frac{1}{6}\, i_2\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\, k.s.(i_1 + 2.i_2 + 2.i_m - i_1 - i_2) = \frac{1}{6}\,(2.i_m + i_2).k.s \qquad (92)$$

valor que se observa en la Tabla Nº 2.

Análogamente, teniendo en cuenta la adecuación de los signos, puede resolverse la integración con un triángulo del diagrama de la figura 31a), consignándose en la figura 31b) los diagramas parciales y los signos a considerar para cada uno de ellos.

4. TEOREMAS Y LEYES FUNDAMENTALES DEDUCIDOS A PARTIR DEL TTV.

4.1. Teoremas de Mohr. Demostración aplicando el TTV.

Previo a la demostración resulta conveniente recordar las configuraciones de las líneas de influencia del momento flector y del esfuerzo de corte en un sección i de una viga simplemente apoyada (figuras 32a) y b), respectivamente.

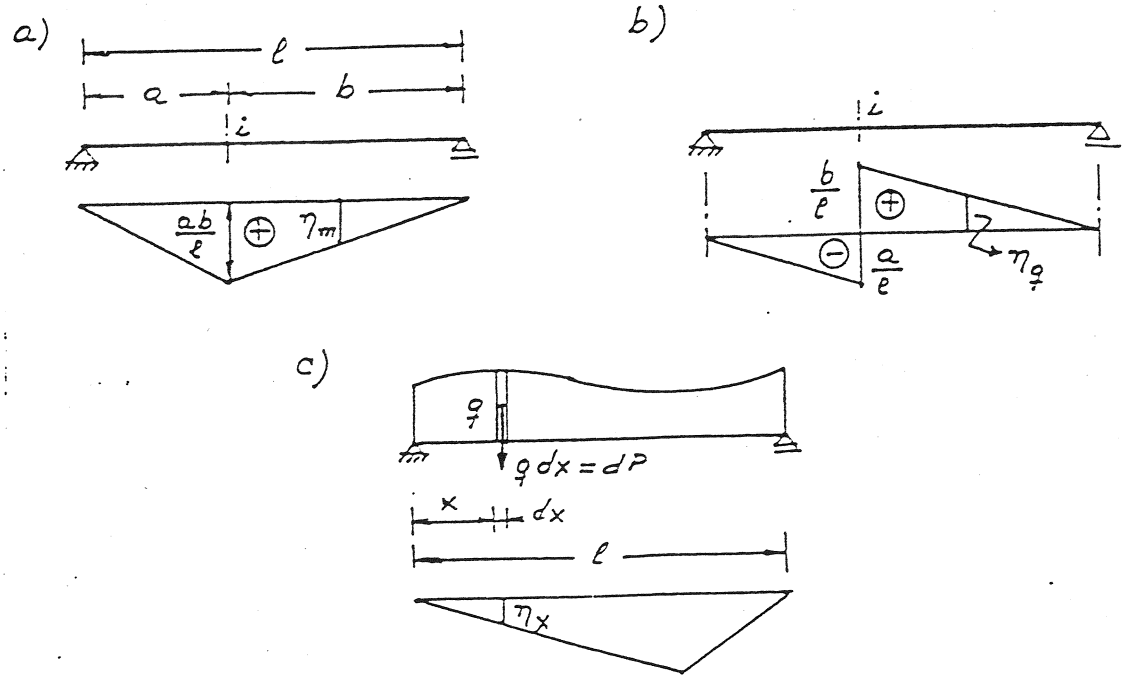


Figura 32

Por otra parte, si sobre la viga actúa una carga distribuida según una ley cualquiera y se conoce la línea de influencia de una determinada incógnita X (figura 32c), el valor de la misma resultará de

$$dX = \eta x.dP \quad \text{con:} \quad dP = q.dx \; ; \; \text{luego:} \; X = \int_o^l \eta x.dP = \int_o^l \eta x.q.dx \qquad (93)$$

de modo tal que el valor de la incógnita es igual a la integración de ambos diagramas (el de cargas y la línea de influencia), a lo largo del tramo común abarcado por ambos.

4.1.1. Primer Teorema de Mohr.

Sea una viga como la de la figura 33a), solicitada por un sistema de cargas P_o que la deforma, y se desea calcular el corrimiento vertical en un punto determinado *i*. Se considera que *l* es la luz de la viga y *a* y *b* las distancias que definen la posición de la sección *i*.

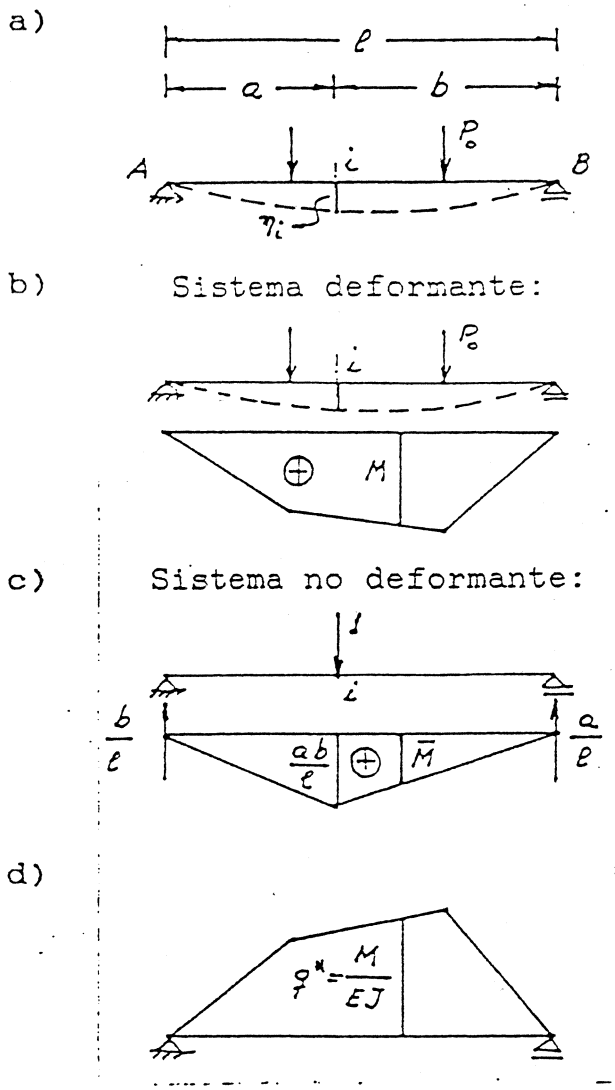


Figura 33

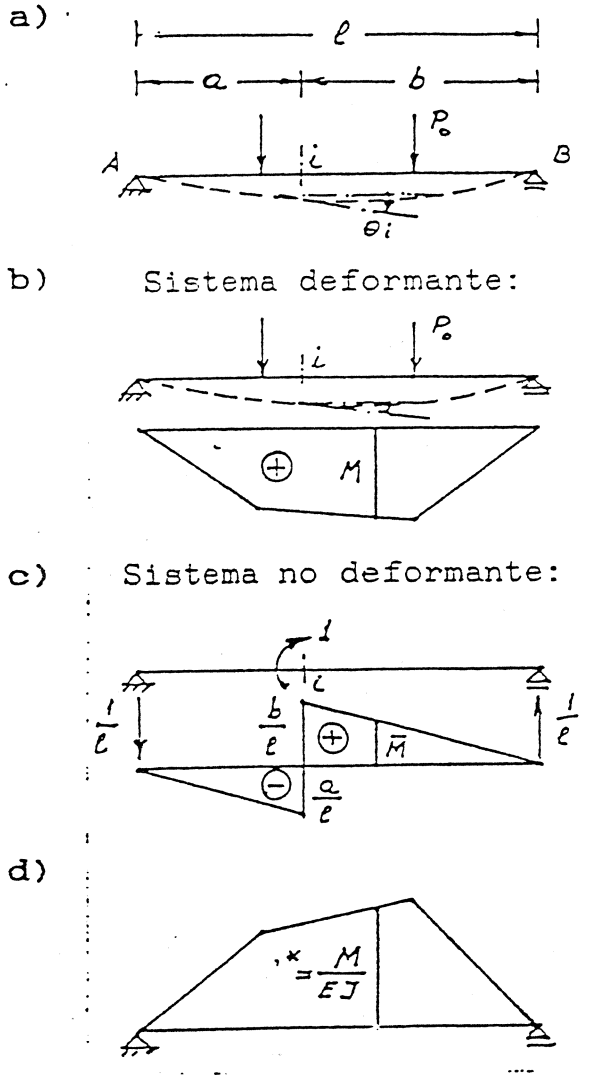


Figura 34

Aplicando el Teorema de los Trabajos Virtuales y prescindiendo de las deformaciones debidas a N y Q (hipótesis corrientes en el cálculo de estructuras), se tienen los sistemas deformante y no deformante (unitario) que muestran las figuras 33b) y c), con sus respectivos diagramas de momentos, resultando

$$1.\eta_i = \int \bar{M} \frac{M}{E.J} dx \qquad (94)$$

Comparando el diagrama de $\bar{M}$ de la figura 33c) con el de la figura 32a), resulta que sus ordenadas coinciden en valor y signo con las de la línea de influencia de los momentos flectores para la misma sección i de la viga simple bajo estudio ($\bar{M} = \eta_m$).

Si se consideran los valores de $M/E.J = q^*$ como ordenadas de cargas específicas, la integral de la expresión (94) resulta

$$\eta_i = \int \bar{M}.q^*.dx = \int \eta_m.q^*.dx = M_i^* \qquad (95)$$

expresión análoga a la (93), que da el momento flector en i de una viga cargada con este sistema de cargas específicas o diagrama de momentos reducidos en EJ (figura 33d).

En consecuencia: *El valor del momento flector producido por el diagrama de momentos reducido en EJ, considerado como superficie de carga, en un punto cualquiera de la viga, es igual a la flecha u ordenada de la elástica en dicho punto.*

4.1.2. Segundo Teorema de Mohr.

Si se desea determinar la rotación θ_i en el mismo punto genérico, producida por un determinado sistema de cargas P_o (figura 34a), para aplicar el Teorema de los Trabajos Virtuales se considera como sistema no deformante, que en la sección correspondiente a dicho punto actúa un par unitario con el sentido de las rotaciones positivas, el que da lugar al diagrama $\bar{M}$ de la figura 34c).

Si M (figura 34b) es el diagrama de momentos del sistema inicial dado (deformante en este caso), se obtiene el valor de θ_i por el trabajo del par unitario en el desplazamiento producido por el sistema de cargas dado, o sea

$$1.\theta_i = \int \bar{M} \frac{M}{E.J} dx \qquad (96)$$

Pero observando el diagrama de $\bar{M}$ de la figura 34c) resulta que sus ordenadas son coincidentes en valor y signo con las de la línea de influencia del esfuerzo de corte en el mismo punto i de la viga simple (figura 32b), o sea que $\bar{M} = \eta_q$.

Razonando de igual forma que en el caso anterior

$$\theta_1 = \int \overline{M}.q^*.dx = \int \eta_q.q^*.dx = Q_1^* \qquad (97)$$

O sea que: *El valor de la rotación en una sección de una viga puede obtenerse como el esfuerzo de corte en dicha sección, provocado por el diagrama de momentos reducido en EJ, considerado como superficie de carga, actuando sobre la viga simple.*

A la viga cargada con el diagrama $q^* = M/EJ$ se la denomina viga auxiliar o *viga conjugada* y a la carga q^* *carga elástica.*

Para el caso de una viga simplemente apoyada en sus extremos resulta en consecuencia que las rotaciones en las secciones de los apoyos están dadas directamente por los valores de las reacciones de vínculo de la viga conjugada

$$\theta_A = R_A^* \quad ; \quad \theta_B = R_B^* \qquad (98)$$

4.1.3. Análisis de la viga conjugada.

La relación matemática correcta entre los valores de flechas y rotaciones con los de momentos flectores y esfuerzos de corte que se derivan de los Teoremas de Mohr, se verifican sólo para vigas simplemente apoyadas en sus extremos. Si el método se aplica a otro tipos de vigas, la correspondencia de valores no se produce. Para poder efectuar la extensión a tales casos, es necesario hacer uso de vigas conjugadas en las que se introducen modificaciones en sus vinculaciones con respecto a las vigas originales, de modo de obtener relaciones correctas, de acuerdo a los criterios que se indican a continuación.

a) *Extremo libre.* El extremo libre de una viga (para el que M y Q son nulos) experimenta giros y corrimientos cuando la viga se carga; en consecuencia la viga conjugada debe tener en ese extremo valores no nulos de M y Q, siendo el empotramiento el único tipo de vínculo capaz de proporcionarlos. *Un extremo libre en la viga real se convierte en uno empotrado en la viga conjugada.*

b) *Empotramiento.* Se puede elaborar una explicación similar en sentido inverso para el caso de un empotramiento. Ni flecha ni rotación pueden ocurrir en un empotramiento, por lo que en ese punto de la viga conjugada debe verificarse que $M = Q = 0$. *Un empotramiento en la viga real se convierte en un extremo libre en la viga conjugada.*

c) *Apoyo simple extremo.* En vínculos de este tipo, el extremo de la viga rota, pero no experimenta corrimientos cuando se carga la viga. En consecuencia en la viga conjugada deberá haber esfuerzo de corte, pero no momento flector en ese punto, situación que sólo se presenta en un apoyo simple. *Un extremo simplemente apoyado en la viga real permanece igual en la viga conjugada.*

d) *Apoyo simple interior.* Al igual que en el caso anterior, si el apoyo simple es interior, no existen corrimientos pero sí rotaciones. Sin embargo respecto a estas últimas, ambos casos son

diferentes. La tangente a la elástica en un apoyo simple interior (cuya inclinación mide la rotación de la sección de apoyo) es continua a través de aquél, es decir, no se presenta un cambio brusco de pendiente como el que se origina en un vínculo ubicado en un extremo, tal como se consigna respectivamente con *a* y *b* sobre la curva elástica de la figura 35. En consecuencia, si en un apoyo simple interior no existen cambios de pendiente (o sea la rotación debe ser igual a ambos lados del apoyo), no puede haber variación del esfuerzo de corte en el vínculo correspondiente a la viga conjugada; en otras palabras, el mismo no puede tener reacción. Como cualquier tipo de apoyo externo la generaría, será necesario considerar en esa sección una articulación interna libre. *Un apoyo simple interior en la viga real se convierte en una articulación interior libre en la viga conjugada.*

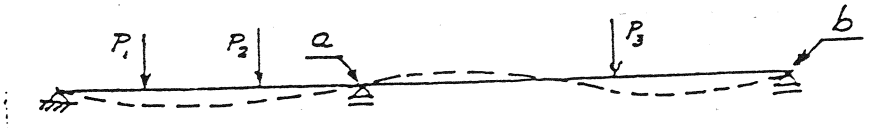


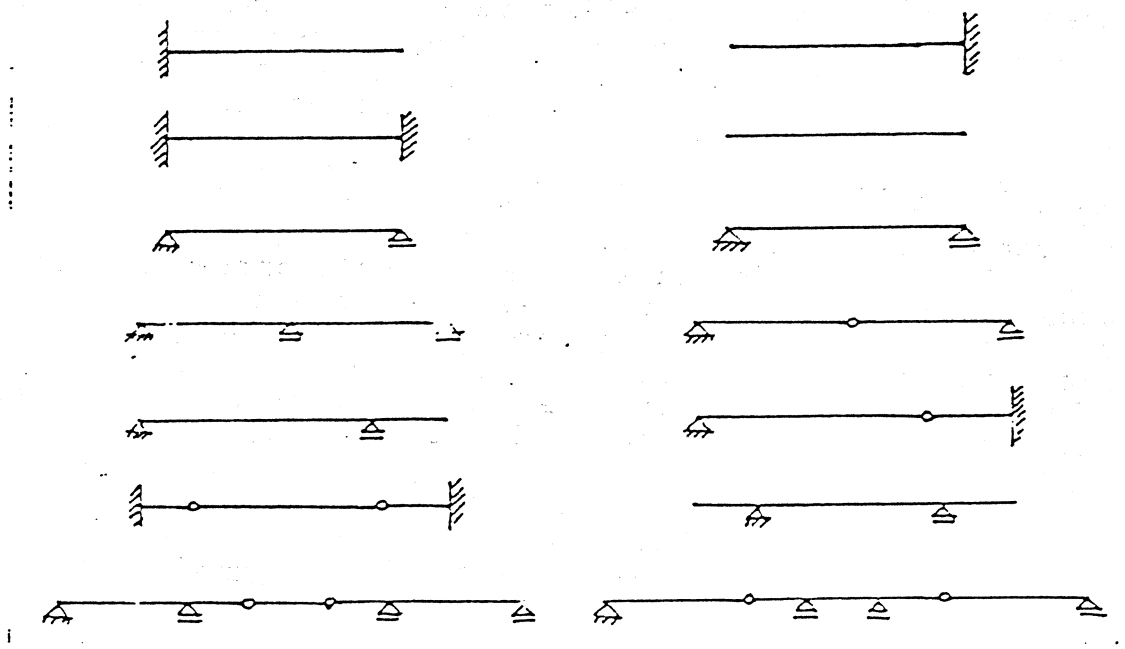
Figura 35

e) *Articulación interior libre.* En la misma existen tanto flecha como rotaciones (distintas en las dos secciones que limitan la articulación), lo cual implica que el apoyo correspondiente en la viga conjugada también debe tener valores de M y Q. *Una articulación interna libre en la viga real se convierte en un apoyo simple en la viga conjugada.*

La Tabla Nº 4 resume los casos anteriores para realizar la transformación de la viga real a la viga conjugada. La figura 36 por su parte, muestra a nivel de ejemplo varios tipos de vigas comunes y sus correspondientes vigas conjugadas. Cabe aclarar que el criterio utilizado en la figura para transformar apoyos interiores móviles en articulaciones es válido estrictamente sólo para cargas verticales. En caso de cargas inclinadas, corresponde adoptar el dispositivo indicado en la Tabla Nº 4.

4.1.4. Condiciones de equilibrio de la viga conjugada.

Las reacciones, los momentos flectores y los esfuerzos de corte de la viga conjugada se calculan fácilmente por estática, ya que tal viga es siempre estáticamente determinada, aún cuando la viga real sea hiperestática. En ocasiones la viga conjugada puede aparecer como completamente inestable. El ejemplo más notorio es la viga conjugada correspondiente a una viga doblemente empotrada (segundo caso de la figura 36), que no cuenta con apoyo alguno. Sin embargo, al resolver la viga biempotrada hiperestática, cualquiera sea el estado de cargas que la solicite, se observaría que las áreas positivas y negativas del diagrama de momentos flectores están siempre equilibradas de forma tal que sus respectivas superficies parciales son iguales, con lo que las cargas hacia arriba y hacia abajo en la viga conjugada tienen resultante nula, no necesitando en consecuencia ningún tipo de apoyo.



Viga real Viga conjugada

Figura 36

4.2. Ley de Betti.

Sea una estructura (figura 37a) sobre la cual actúa un sistema de cargas P_i sin deformarla (sistema no deformante), admitiéndose a su vez que no se produzcan movimientos de vínculos ni variación de temperatura.

Sistema no deformante Sistema deformante

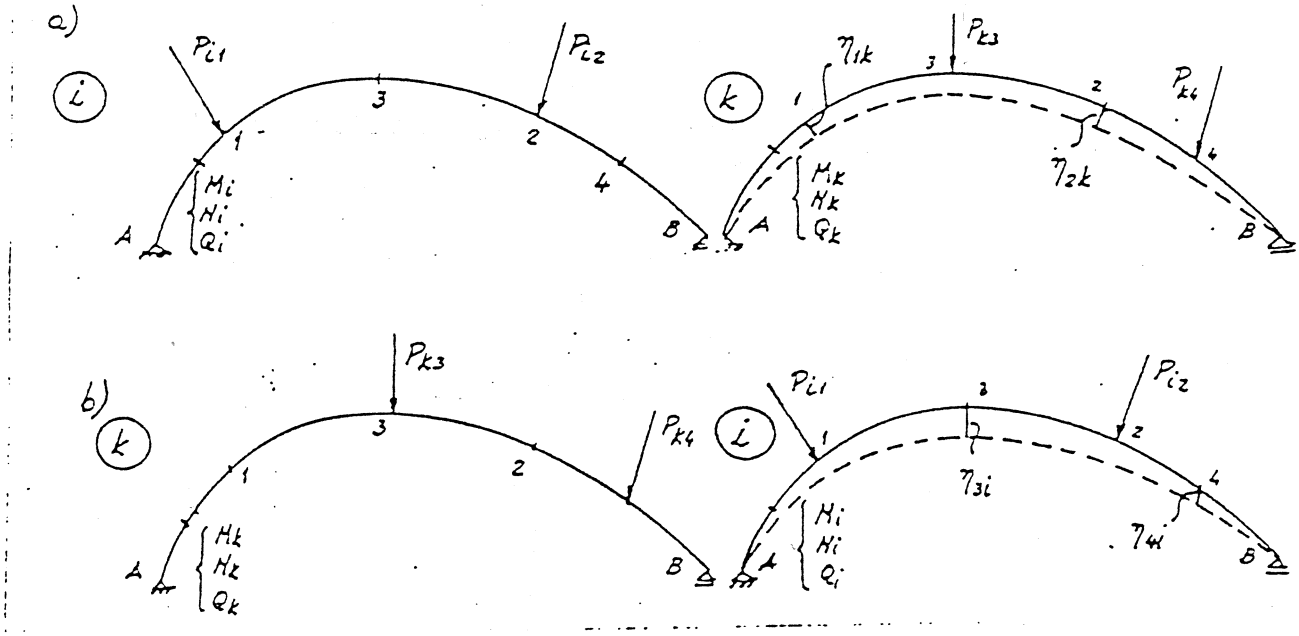


Figura 37

Si en estas condiciones se supone que actúa un segundo sistema de cargas P_k como sistema deformante, éste provocará desplazamientos η_{ik} sobre los puntos de aplicación de las fuerzas del sistema no deformante y en sus direcciones, generándose los correspondientes trabajos, tanto de las acciones exteriores como de las solicitaciones internas del primer sistema. Aplicando el Teorema de los Trabajos Virtuales resulta

$$\Sigma P_i.\eta_{ik} = \int M_i \frac{M_k}{E.J} ds + \int N_i \frac{N_k}{E.F} ds + \psi \int Q_i \frac{Q_k}{G.F} ds \quad (99)$$

Si ahora se considera (figura 37b) que primeramente está aplicado el sistema de cargas P_k como sistema no deformante y luego se aplica el sistema P_i como deformante, éste producirá desplazamientos η_{ki} de las acciones (exteriores e interiores) del primer sistema y el correspondiente trabajo, por lo que podrá escribirse

$$\Sigma P_k.\eta_{ki} = \int M_k \frac{M_i}{E.J} ds + \int N_k \frac{N_i}{E.F} ds + \psi \int Q_k \frac{Q_i}{G.F} ds \quad (100)$$

Siendo iguales los segundos miembros de las (99) y (100), también deben serlo los primeros, y en consecuencia resulta

$$\Sigma P_i.\eta_{ik} = \Sigma P_k.\eta_{ki} \quad (101)$$

Esta expresión constituye la ley de Betti, por la cual: *El trabajo virtual de un sistema de acciones P_i durante la deformación debida a otro sistema de acciones P_k, es igual al trabajo virtual de las acciones P_k por efecto de la deformación debida al sistema P_i.*

De la igualdad de los segundos miembros de las (99) y (100), se desprende la generalización en el sentido que la referencia a "acciones" significa que cualquiera de los sistemas puede estar constituido tanto por fuerzas como por pares o combinación simultánea de ambos, debiéndose en tal caso recordar que a las fuerzas les corresponden corrimientos como desplazamientos a considerar, mientras que a los pares les corresponden los giros de las secciones en que actúan.

4.3. Teorema de Maxwell.

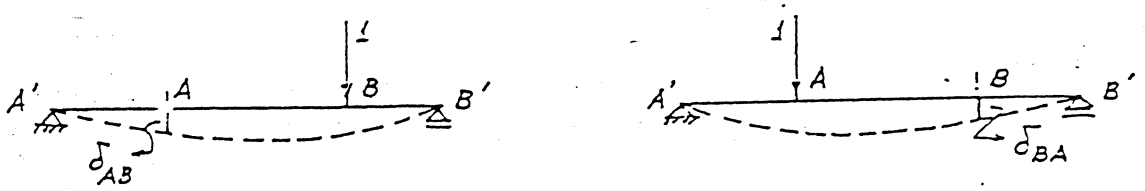
Si en la expresión de la ley de Betti, los sistemas de acciones P_i y P_k se reducen a una única acción unitaria (fuerza o par) cada uno, resulta

$$\eta_{ik} = \eta_{ki} \quad (102)$$

que expresa el teorema de Maxwell o de reciprocidad de los desplazamientos elásticos: *El desplazamiento (lineal o angular) producido en un punto o sección A de una estructura o elemento estructural por una acción (fuerza o par) unitaria, que actúa en un punto o sección B, es igual al desplazamiento en B producido por una acción unitaria actuante en A.*

La ley de los desplazamientos recíprocos aplicada a vigas puede enunciarse de tres maneras diferentes:

1°) Si δ_{AB} es el desplazamiento de A cuando se aplica una fuerza unitaria en B y δ_{BA} es el desplazamiento de B cuando se aplica una fuerza unitaria en A (en ambos casos considerando los desplazamientos en la dirección de las acciones correspondientes), se tiene que $\delta_{AB} = \delta_{BA}$ (figura 38).



igura 38

En efecto. Aplicando en ambos casos el TTV (limitado a momentos flectores para mayor sencillez), resulta (figura 39)

$$1.\delta_{AB} = \int M_A \frac{M_B}{E.J}\, dx \qquad y \qquad 1.\delta_{BA} = \int M_B \frac{M_A}{E.J}\, dx$$

Luego $\delta_{AB} = \delta_{BA}$.

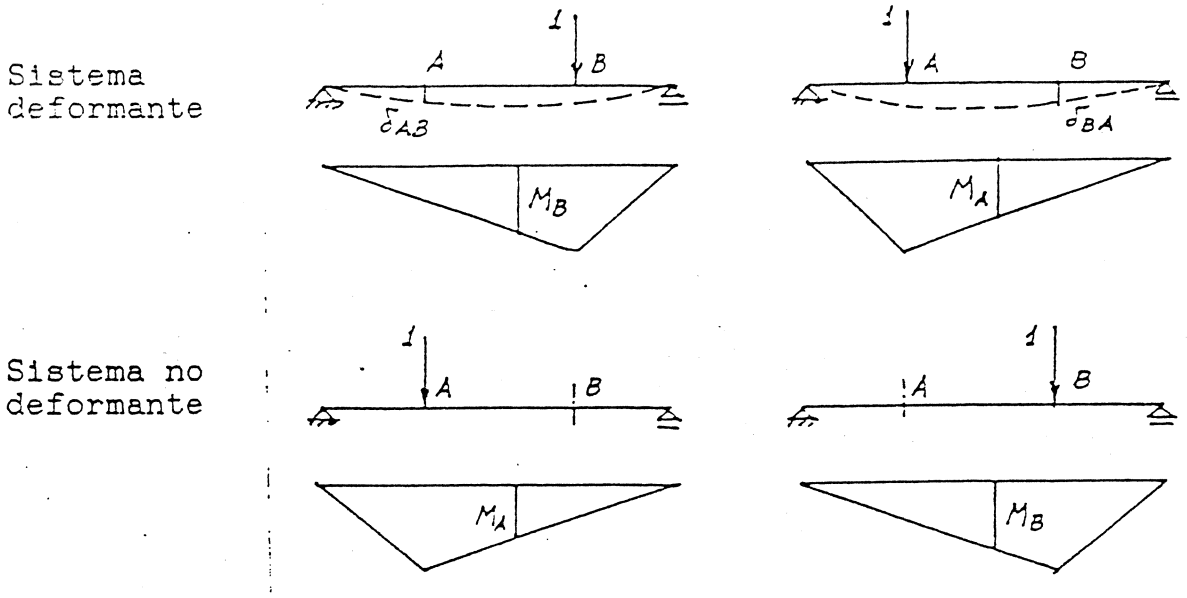


Figura 39

2°) Si θ_{AB} es el ángulo girado por la sección 1 cuando se aplica una fuerza unitaria en B y δ_{BA} es el corrimiento en B cuando se aplica un par unitario en A, se tiene que $\theta_{AB} = \delta_{BA}$ (figura 40).

Razonando en idéntica forma al caso anterior y de la figura indicada

Sistema deformante

Sistema no deformante

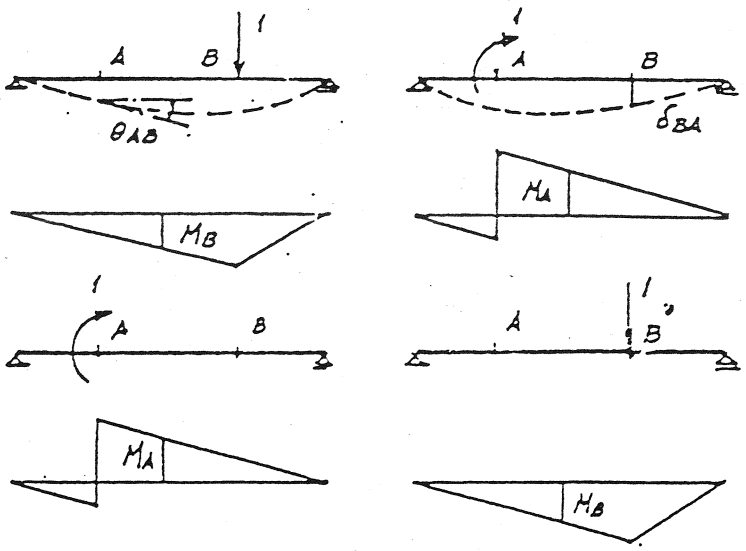


Figura 40

$$1.\theta_{AB} = \int M_A \frac{M_B}{E.J} dx \qquad y \qquad 1.\delta_{BA} = \int M_B \frac{M_A}{E.J} dx$$

En consecuencia $\theta_{AB} = \delta_{BA}$.

3°) Si θ_{AB} es el ángulo girado por la sección A cuando se aplica un par unitario en B y θ_{BA} es el ángulo girado por la sección B cuando se aplica un par unitario en A, se tiene que $\theta_{AB} = \theta_{BA}$ (figura 41).

Sistema deformante

Sistema no deformante

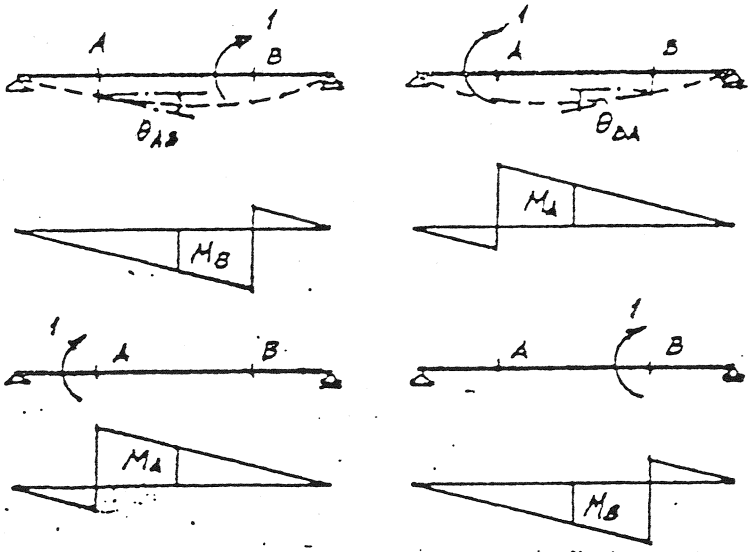


Figura 41

$$1.\theta_{AB} = \int M_A \frac{M_B}{E.J} dx \qquad y \qquad 1.\theta_{BA} = \int M_B \frac{M_A}{E.J} dx$$

con lo que $\theta_{AB} = \theta_{BA}$.

A continuación se muestran en forma directa otros casos de aplicación de uso frecuente en la práctica.

- El desplazamiento $\delta_{B,mn}$ del apoyo B debido al sistema de cargas de igual dirección y sentidos contrarios $P_m = P_n = 1$ actuantes en los puntos m y n de la estructura de la figura 42, es igual a la variación de distancia δ_{mn} de dichos puntos provocada por la fuerza $P_B = 1$ [Recuérdese que por la (40) es $\delta_{mn} = \delta'_{mn} + \delta''_{mn}$].

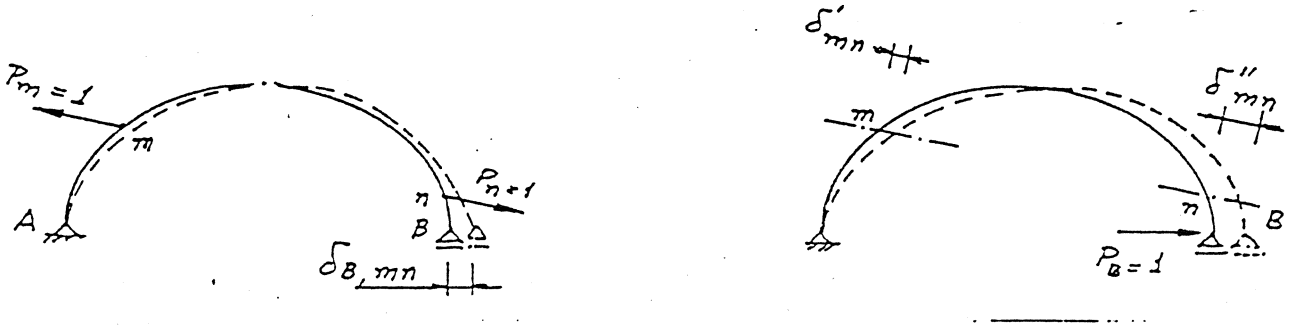


Figura 42

- El desplazamiento δ_{BA} del apoyo B del pórtico de la figura 43, provocado por un par unitario aplicado en A, es igual a la rotación θ_{AB} de la sección A (o el ángulo de la tangente a la elástica en A), provocada por una fuerza unitaria horizontal actuando en B.

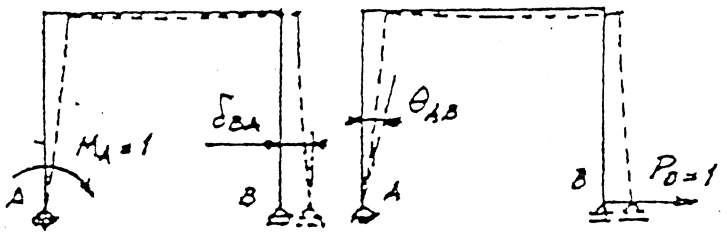


Figura 43

- La rotación relativa θ_{CB} entre las secciones que limitan la articulación C de la viga articulada de la figura 44, provocada por un sistema de pares unitarios actuantes en B, es igual a la rotación relativa θ_{BC}, causada por un sistema de pares unitarios aplicados en C.

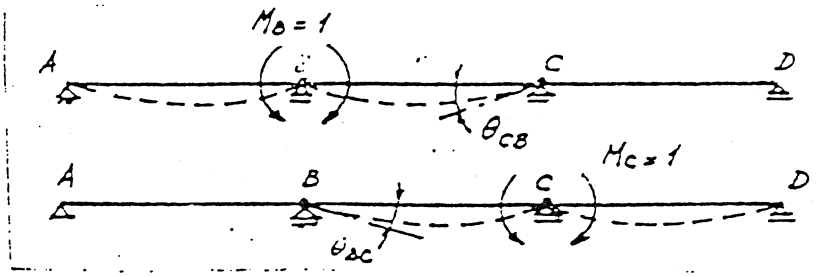


Figura 44

- La rotación θ_{A1} del extremo A de una viga simplemente apoyada solicitada por una fuerza unitaria actuando en i, es igual al corrimiento δ_{1A} provocado en este último punto cuando sobre la viga actúa un par unitario aplicado en el extremo A (figura 45).

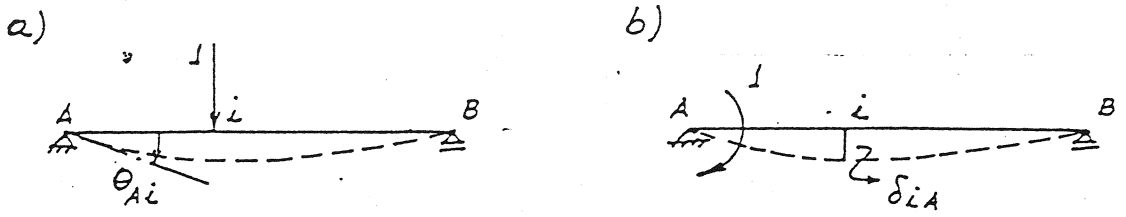


Figura 45

Obsérvese que si la carga unitaria varía su posición entre A y B, las ordenadas de la elástica de deformación de la figura 45b) indican la ley de variación de θ_{A1} para cada posición de la fuerza $P_1 = 1$, al ser $\delta_{1A} = \theta_{A1}$. Este concepto es de fundamental importancia en el trazado de líneas de influencia de estructuras hiperestáticas de alma llena.

4.4. Fundamentos de los métodos energéticos.

En Análisis Estructural existen numerosas técnicas de cálculo que se clasifican bajo el rótulo general de **métodos energéticos.** Estos métodos se presentan bajo una gran variedad de formas y cada uno posee ventajas y desventajas propias. Sin embargo, es importante destacar que todos estos métodos pueden ser deducidos a partir del Teorema de los Trabajos Virtuales.

En el apartado 3.3. se demostró el TTV, según el cual si un cuerpo deformable está en equilibrio, los trabajos virtuales debían satisfacer la relación (68), o sea que $Te = Ti^{(d)}$, donde Te es el trabajo virtual de las acciones exteriores en movimiento rígido y $Ti^{(d)}$ el trabajo de las solicitaciones interiores en la deformación elástica de la estructura.

En los métodos energéticos, a Te se lo denomina la variación potencial de las acciones exteriores, mientras que $Ti^{(d)}$ representa un cambio virtual en la energía de deformación [$Ti^{(d)} = U$]. O sea que la (68) se escribe, para poner de manifiesto matemáticamente tal concepto y poder aplicar luego el cálculo diferencial

$$\delta Ti^{(d)} - \delta Te = \delta U - \delta Te = \delta(U - Te) = 0 \qquad (103)$$

A la diferencia (U - Te) se la llama *energía potencial total* del sistema, estableciendo la (103) una nueva forma de exponer el TTV, por la cual *en todo sistema en equilibrio, la variación de la energía potencial total debe ser nula para cualquier deformación (o acción) virtual.* En otras palabras, la energía potencial total es constante respecto a las variaciones en los desplazamientos (o las acciones) virtuales.

4.4.1. Primer Teorema de Castigliano.

Si se supone una variación en la energía potencial total de un sistema, producida como consecuencia de una variación virtual en el valor del desplazamiento en un dirección dada i, resulta

$$\delta U - \delta Te = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}.\delta\Delta_i - P_i.\delta\Delta_i = 0 \qquad (104)$$

donde $\delta\Delta_i$ es un desplazamiento virtual en la dirección de la acción P_i y $\partial U/\partial\Delta_i$ indica la variación de energía de deformación por variación unitaria de Δ_i. La (104) puede escribirse también

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} - P_i\right].\delta\Delta_i = 0$$

y como $\delta\Delta_i \neq 0$, debe ser nulo el término entre corchetes, lo que conduce a que

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\partial Ti^{(d)}}{\partial \Delta_i} = P_i \qquad (105)$$

Esta ecuación constituye el enunciado matemático del Primer Teorema de Castigliano que establece que *la derivada parcial de la energía de deformación (o del trabajo interno de deformación) con respecto a un desplazamiento es igual a la acción actuante en la dirección de ese desplazamiento.*

La (105) es válida para i = 1, 2, ... n y por lo tanto, representa *n ecuaciones de equilibrio* correspondientes a los *n* grados de libertad cinemática que presente una estructura, las que permiten resolver estructuras hiperestáticas aplicando el Método de los Desplazamientos.

4.4.2. Segundo Teorema de Castigliano.

Cuando la variación en la energía potencial total de un sistema, resulta como consecuencia de una variación virtual en el valor de la acción iésima, resulta

$$\delta U - \delta Te = \frac{\partial U}{\partial P_i}.\delta P_i - \Delta_i.\delta P_i = 0 \qquad (106)$$

donde δP_i es una acción (fuerza o par) virtual correspondiente al desplazamiento Δ_i y $\partial U/\partial P_i$ indica la variación de energía de deformación por variación unitaria de P_i. Escribiendo la (106) en la forma

$$\left[\frac{\partial U}{\partial P_i} - \Delta_i\right].\delta P_i = 0$$

y como $\delta P_i \neq 0$, se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\partial T_i^{(d)}}{\partial P_i} = \Delta_i \qquad (107)$$

Esta ecuación constituye la expresión matemática del Segundo Teorema de Castigliano que establece que *la derivada parcial de la energía de deformación (o del trabajo interno de deformación) con respecto a una acción es igual al desplazamiento correspondiente a esa acción.*

La (107) es válida para i = 1, 2, ... n y por lo tanto, conduce a *n* ecuaciones de desplazamientos, las que pueden utilizarse ya sea para calcular desplazamientos individuales, como para formular sistemas de *ecuaciones de compatibilidad* que permiten resolver estructuras hiperestáticas aplicando el Método de las Fuerzas.

4.4.3. Teorema de Menabrea.

Sea un cuerpo elástico hiperestáticamente sustentado, con vínculos rígidos y compatibles con la forma que tiene el cuerpo en el estado original no deformado, sometido a la acción de un sistema de acciones exteriores P_i y libre de cualquier otra causa productora de tensiones o deformaciones (figura 46a). Si en estas condiciones se eliminan los vínculos hiperestáticos y en su reemplazo se aplican en la estructura resultante las reacciones X_i a que las mismas dan lugar, se obtiene el estado de solicitación mostrado en la figura 46b), donde se supone que tales reacciones pasan a formar parte del sistema de acciones aplicado a la estructura.

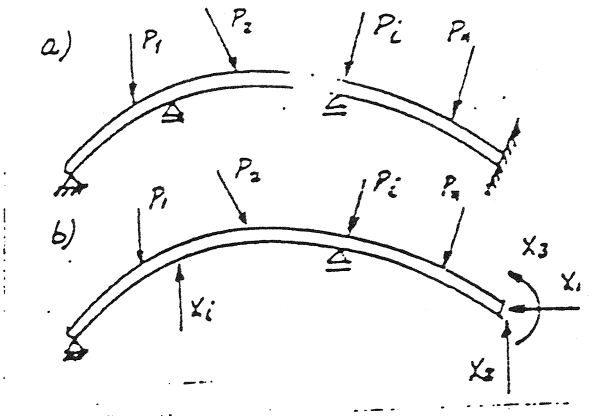


Figura 46

En realidad, las acciones X_i son funciones de las P_i, estando definidas por la condición de que la deformación producida por el sistema $P_i + X_i$ sea compatible con los vínculos suprimidos. Efectuando una abstracción teórica, prescindiendo de la consideración anterior, las acciones X_i podrían adoptar valores cualesquiera, sin que esto suponga el equilibrio de la estructura. Por consiguiente, bajo tal supuesto, se puede expresar el trabajo

de deformación $T(P_1+X_1)$ de esta estructura en función de las acciones P_1 y X_1, considerando a las X_1 como independientes de las P_1 y con valores que pueden suponerse variables, mientras que las P_1 tienen valores dados y constantes.

Por el Segundo Teorema de Castigliano, las derivadas parciales del trabajo total producido por el sistema $(P_1 + X_1)$ con respecto a las acciones X_1 dan los desplazamientos de sus puntos de aplicación medidos en las direcciones de las X_1, desplazamientos que deben ser nulos, por las condiciones propias inherentes a los vínculos. O sea que

$$\frac{\partial T(P_1+X_1)}{\partial X_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T(P_1+X_1)}{\partial X_2} = 0 \quad , \quad \text{etc.}$$

En consecuencia se verifican las condiciones necesarias para que el trabajo considerado como función de las acciones X_1, supuestas variables, tome un valor extremo (máximo o mínimo), según cual sea el signo de la derivada segunda. Calculando la misma resulta

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} = \delta_{11} > 0 \qquad (108)$$

puesto que la derivada del desplazamiento en la dirección de la acción que lo produce, es igual al desplazamiento producido por la acción unitaria actuando en esa dirección, la que constituye siempre una magnitud esencialmente positiva. Lo expuesto se demuestra directamente si se considera cualquiera de las expresiones (2), escritas en función de la acción X_1

$$\Delta_1 = \delta_{11}.X_1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} = \delta_{11}$$

La conclusión que expresa la (108) puede desarrollarse también en forma conceptual. En efecto, al aumentar ilimitadamente el valor de las incógnitas X_1, la energía potencial también aumenta paralelamente, por lo que no puede haber máximo. Esto significa que las incógnitas X_1 adquieren valores tales que hagan mínimo el trabajo de deformación.

En definitiva puede expresarse que: *En un sistema hiperestático, sometido sólo a acciones exteriores de valores dados, las reacciones hiperestáticas toman valores tales que hacen mínimo el trabajo de deformación*, lo que constituye el Teorema de Menabrea o del trabajo mínimo.

5. DESPLAZAMIENTOS EN ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS.

5.1. Desplazamientos debidos a cargas.

Al deducir la expresión del TTV en el apartado 3.3., no se efectuó ninguna limitación a las condiciones de vinculación de la

estructura; es más, la propia demostración se realizó en base a la consideración de una estructura hiperestática. Por consiguiente, el método de la carga unitaria para el cálculo de desplazamientos puede ser perfectamente utilizado en estructuras estáticamente indeterminadas, mediante la aplicación de la expresión general

$$1.\Delta_{io} = \int M_1^{(h)} . \frac{M_o^{(h)}}{E.J} . ds \qquad (109)$$

donde: Δ_{io} es el desplazamiento en la dirección i producido por el sistema de cargas actuante P_o (que constituye el sistema deformante); $M_1^{(h)}$ es una ordenada genérica del diagrama de momentos flectores correspondiente a la estructura hiperestática dada, producido por una acción unitaria aplicada en la dirección i del desplazamiento que se desea calcular y $M_o^{(h)}$ es la ordenada genérica homóloga del diagrama de momentos flectores debido al sistema deformante P_o, correspondiente también a la estructura hiperestática dada (figura 47). Cabe acotar que para simplificar las expresiones se prescinde de las influencias de N y Q. Su eventual consideración se efectúa en la forma conocida y no invalida los criterios de aplicación del método.

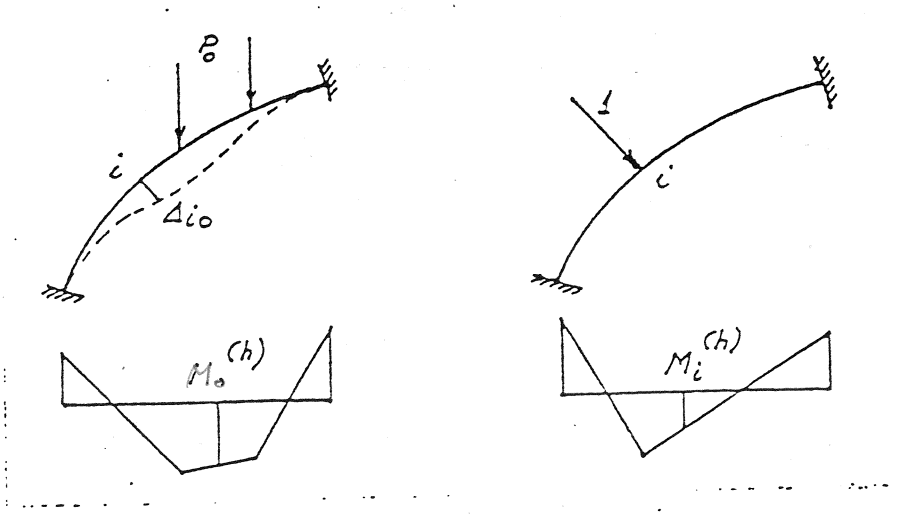


Figura 47

Surge en consecuencia que para hallar cualquier desplazamiento en una estructura hiperestática, la misma debe ser resuelta como tal en dos oportunidades, una bajo la acción del sistema P_o para la construcción del diagrama $M_o^{(h)}$ y otra bajo la carga $P_1 = 1$ para la determinación del diagrama $M_1^{(h)}$.

Esta dificultad puede ser parcialmente salvada sobre la base del siguiente razonamiento: ni las deformaciones de la estructura hiperestática dada ni su diagrama de momentos, debidos al sistema de cargas P_o, varían si se transforma a la misma en una estructura isostática equivalente, poniendo en evidencia las reacciones de los vínculos eliminados, con lo que el sistema deformante pasa a ser, por ejemplo, el que muestra la figura 48a).

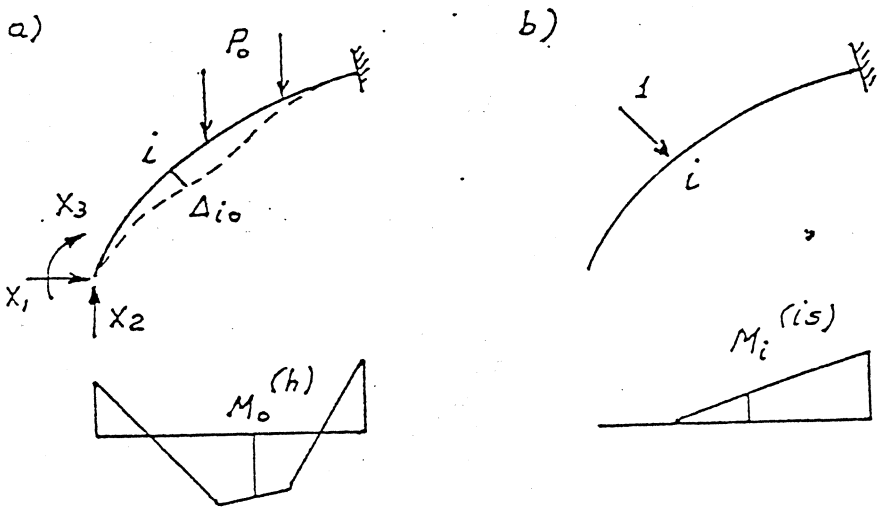


Figura 48

Ahora bien; para trazar el sistema auxiliar unitario, debe suprimirse el sistema exterior actuante. Si al mismo se han considerado incorporadas las incógnitas hiperestáticas, su eliminación convierte a la estructura que corresponde al sistema no deformante en un sistema isostático, tal como el que se observa en la figura 48b). Esto significa que el estado auxiliar con la acción $P_1 = 1$ como única carga, no debe ser necesariamente aplicado sobre la estructura hiperestática original; sino que puede serlo sobre cualquier isostático derivado de la estructura primitiva y con ello el diagrama de momentos $M_1^{(is)}$ puede determinarse por lo general en forma mucho más rápida y sencilla.

En consecuencia el desplazamiento buscado podrá también calcularse en base a

$$1.\Delta_{io} = \int M_1^{(is)} . \frac{M_o^{(h)}}{E.J} . ds \qquad (110)$$

indicando $M_1^{(is)}$ que el diagrama fue obtenido sobre una estructura estáticamente determinada derivada de la estructura dada.

La determinación de desplazamientos en estructuras hiperestáticas sometidas a la acción de un sistema de cargas puede ser también resuelta de una tercera forma. Si se invierte la consideración de los sistemas deformante y no deformante, tomando a la acción unitaria $P_1 = 1$, con su diagrama de momentos $M_1^{(h)}$ como deformante, y al sistema P_o con su diagrama $M_o^{(h)}$ como ficticio (no deformante), tal como muestra la figura 49, la aplicación del TTV permite escribir

$$\Sigma\ P_o.\Delta_j = \int M_o^{(h)} . \frac{M_1^{(h)}}{E.J} . ds = \Delta_{io} \qquad (111)$$

La expresión anterior es igual a Δ_{io} en virtud de la (109).

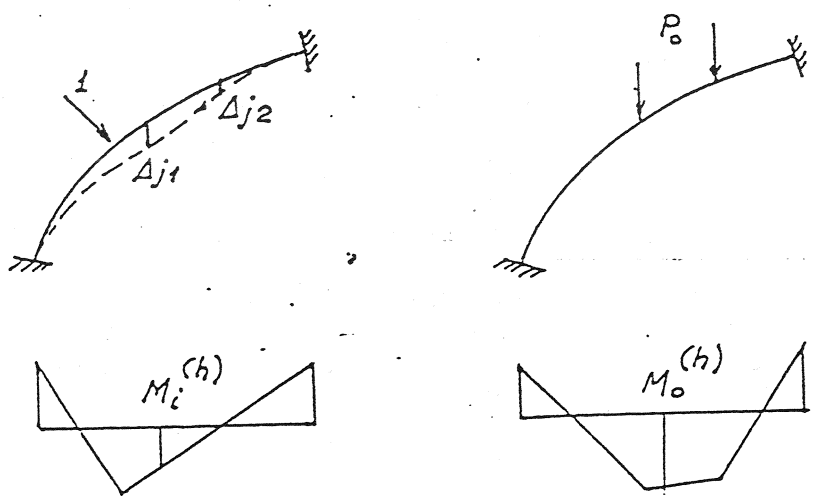


Figura 49

Cabe observar que el razonamiento efectuado no constituye otra cosa que la aplicación de la ley de Betti al caso dado.

Como consecuencia de la conclusión anterior, puede aplicarse también al problema así planteado el razonamiento precedentemente efectuado, en el sentido de poner en el sistema deformante ($P_1 = 1$ con $M_1^{(h)}$) en evidencia como acciones exteriores a sus incógnitas hiperestáticas, para luego, al conformar el sistema no deformante, en el que se eliminan tales acciones exteriores, transformar la estructura en isostática con un diagrama de momentos $M_o^{(is)}$. O sea que será válido también como tercera opción

$$1.\Delta_{o1} = \int M_o^{(is)} . \frac{M_1^{(h)}}{E.J} . ds = \Delta_{1o} \qquad (112)$$

En síntesis, las (109), (110) y (112) pueden resumirse en

$$\Delta_{1o} = \int M_1^{(h)} . \frac{M_o^{(h)}}{E.J} . ds = \int M_1^{(is)} . \frac{M_o^{(h)}}{E.J} . ds = \int M_1^{(h)} . \frac{M_o^{(is)}}{E.J} . ds \qquad (113)$$

O sea que: para la determinación de los desplazamientos debidos a cualquier sistema de acciones P_o, que actúa sobre una estructura hiperestática, se puede aplicar la acción auxiliar $P_1 = 1$ a cualquier estructura estáticamente determinada obtenida a partir de la dada, o bien, aplicarla a la estructura hiperestática original, en cuyo caso el sistema P_o puede suponerse actuando sobre cualquier estructura isostática derivada de aquélla, y en adelante, en cualquier caso, determinar el desplazamiento por la expresión general del TTV, en el orden usual.

5.2. Desplazamientos debidos a variación de temperatura.

Los desplazamientos debidos a variación de temperatura en estructuras hiperestáticas, pueden ser descompuestos en dos

sumandos, por aplicación del principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos: el debido al efecto de la temperatura en una estructura isostática obtenida a partir de la estructura dada y el debido a las incógnitas hiperestáticas X_t (X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{nt}) (figura 50), o sea que

$$\Delta_{it} = \Delta_{it}^{(is)} + \Delta_{it}^{(Xt)} \qquad (114)$$

donde $\Delta_{it}^{(is)}$ es el desplazamiento debido a la acción de la temperatura en el isostático elegido, y que se determina por medio de las expresiones (79) u (80), según que la variación de temperatura sea o no uniforme.

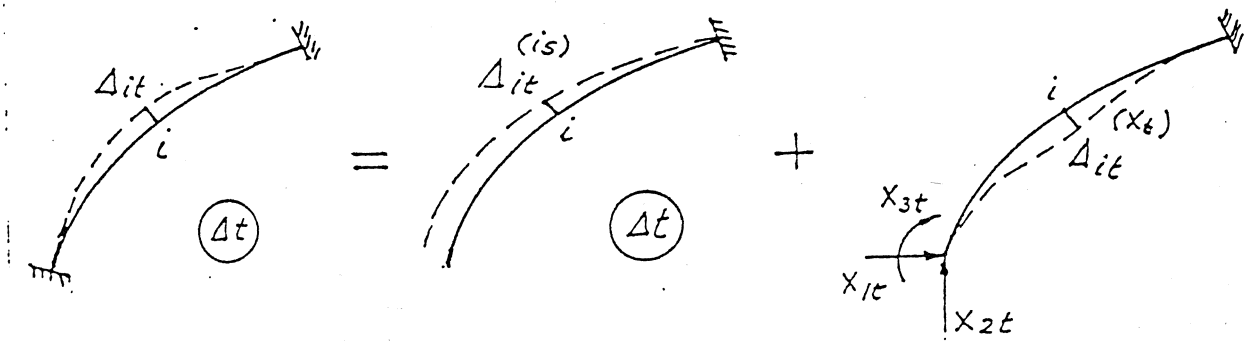


Figura 50

A su vez, el sistema X_t es indefectiblemente un sistema de acciones, para cuya determinación es necesario resolver en todos los casos primero la estructura hiperestática, por lo que resulta como más conveniente la adopción de la segunda de las (113), teniéndose así como expresión final

$$\Delta_{it} = \Delta_{it}^{(is)} + \int M_i^{(is)} \cdot \frac{M_{xt}^{(h)}}{E.J} \cdot ds \qquad (115)$$

5.3. Desplazamientos debidos a movimientos de vínculos.

El cálculo de los desplazamientos debidos a movimientos de vínculos en estructuras hiperestáticas, tales como descenso de apoyos, descenso y/o rotaciones de secciones empotradas, etc., puede efectuarse con idéntico razonamiento al seguido en el apartado anterior, considerando por una parte el desplazamiento de vínculos en cualquier isostático derivado del hiperestático dado y por otra, la acción de las incógnitas hiperestáticas puestas en evidencia. En consecuencia, la expresión final para determinar el valor del desplazamiento en un punto o sección de la estructura en la dirección i por esta causa (Δ_{is}) estará dada por

$$\Delta_{is} = \Delta_{is}^{(is)} + \int M_i^{(is)} \cdot \frac{M_{xs}^{(h)}}{E.J} \cdot ds \qquad (116)$$

6. RESOLUCION DE HIPERESTATICOS SENCILLOS.

6.1. Formulación general.

Se considerará arbitrariamente como hiperestáticos sencillos a aquéllos que tienen una única incógnita hiperestática, correspondiendo en consecuencia a estructuras con un grado de hiperestaticidad, es decir, con un vínculo superabundante. El procedimiento de resolución a emplear se presenta como una introducción al método de las fuerzas.

Sea por ejemplo la estructura de este tipo que muestra la figura 51a), solicitada por un sistema exterior de cargas cualesquiera P_o.

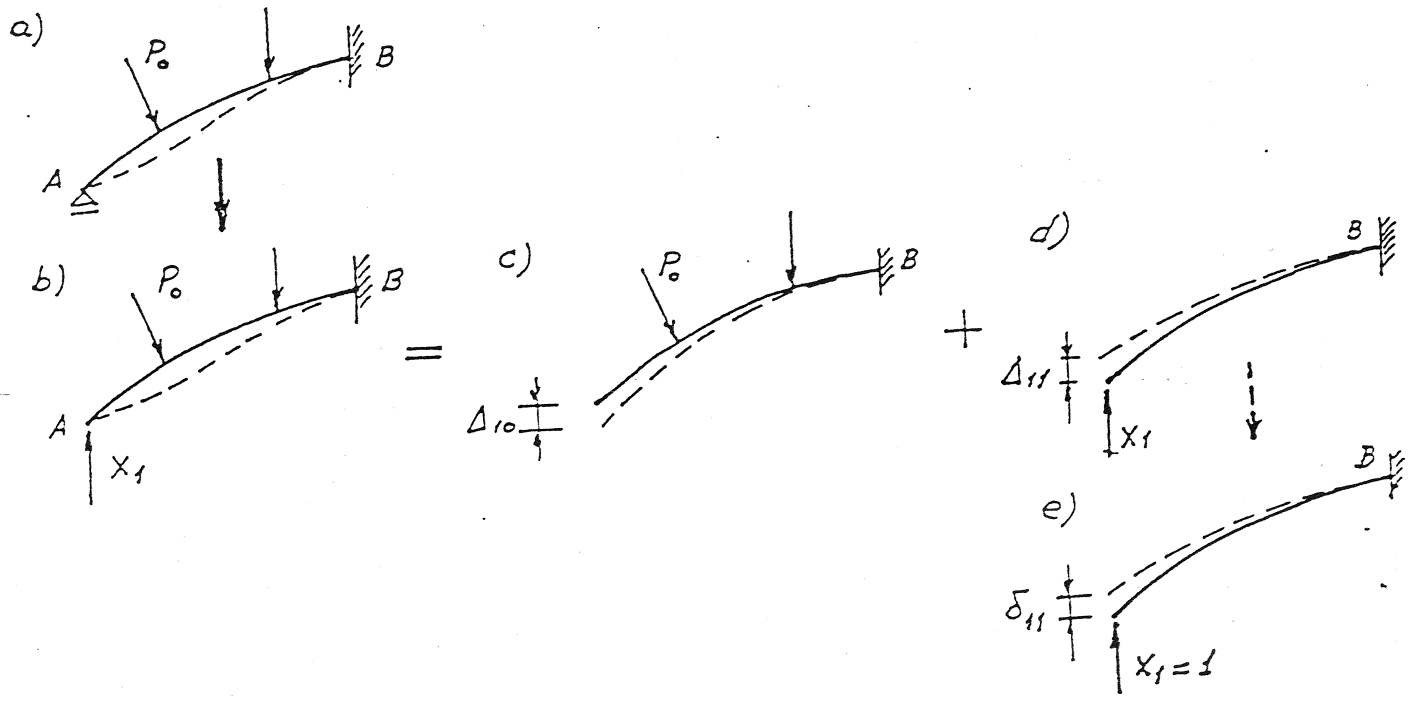


Figura 51

El primer paso para encarar su resolución será poner en evidencia la incógnita a calcular, a la que se denominará X_1. Para ello (figura 51b) se elimina una condición de vínculo (el apoyo móvil A en este caso), quedando así transformada la estructura en un isostático, al que se conoce como *isostático equivalente*, el que en consecuencia puede definirse como cualquier isostático derivado del hiperestático dado y en el que se han puesto en evidencia la (o en general las) incógnitas.

Para poder plantear la ecuación necesaria que permita la resolución del problema, se considera (aplicando el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos) actuando sobre la estructura el sistema exterior de cargas P_o, por una parte, y la incógnita X_1, por otra (figuras 51c) y d). Cada uno de estos efectos producirá en la dirección de la incógnita

hiperestática un desplazamiento (Δ_{10} y Δ_{11}, respectivamente), de modo tal que la suma de ambos debe corresponder al desplazamiento real producido en la estructura en la dirección considerada, que por tratarse de un vínculo en la dirección normal a su posibilidad de movimiento es igual a cero. O sea que

$$\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0 \qquad (117)$$

Al no conocerse el valor de la incógnita X_1, no se puede calcular el de Δ_{11}. Para levantar la indeterminación se considera aplicada en la dirección de la incógnita una acción unitaria $X_1 = 1$, la que producirá en su dirección un desplazamiento δ_{11} (figura 51e). Asumida por hipótesis la proporcionalidad entre acciones y desplazamientos, resultará

$$\Delta_{11} = X_1 . \delta_{11}$$

Reemplazando en la (117) se tendrá

$$\Delta_{10} + \delta_{11} . X_1 = 0 \quad \text{luego} \quad X_1 = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \qquad (118)$$

Cabe observar que existen múltiples opciones para la conformación del isostático equivalente, pero en cada caso los desplazamientos a calcular (Δ_{10} y δ_{11}), deben ser congruentes con la incógnita planteada, de forma tal de permitir el planteo correcto de la ecuación de compatibilidad de los desplazamientos, de la que luego se despeja el valor de X_1. Así por ejemplo, si se opta por conformar el isostático equivalente transformando el empotramiento B en un apoyo articulado fijo (figura 52), los valores de los desplazamientos Δ_{10} y δ_{11} a calcular, corresponderán a los giros experimentados por la sección B.

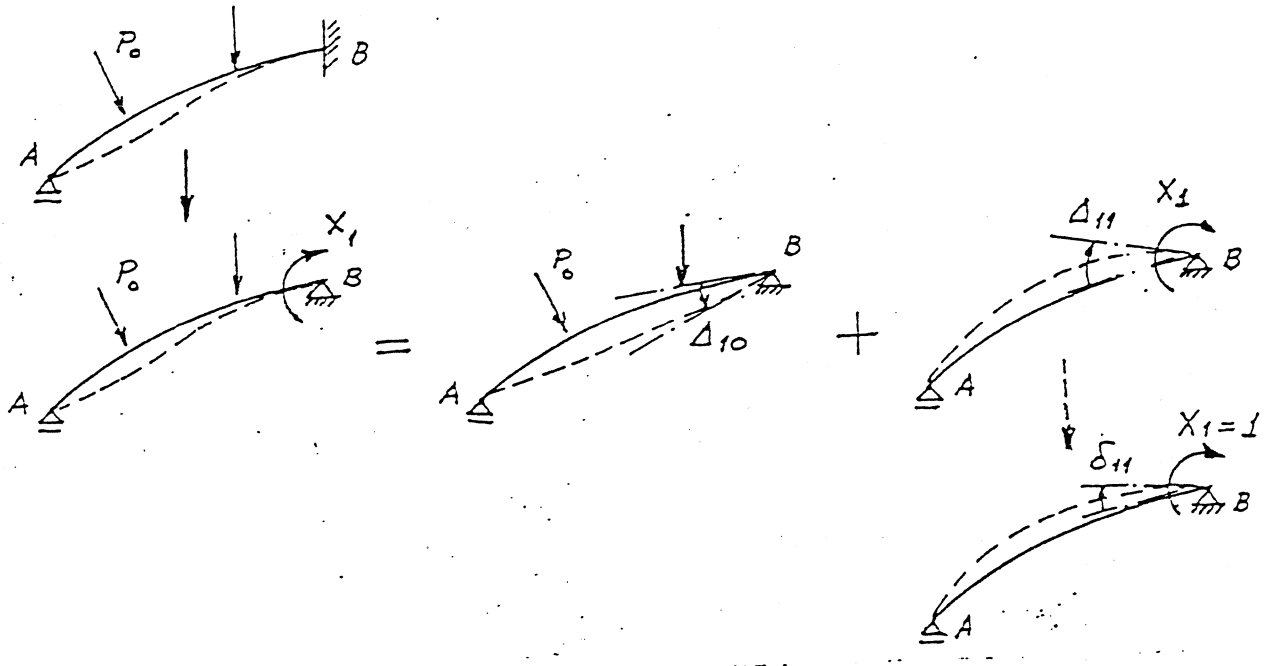


Figura 52

6.2. Casos de aplicación.

Se pasan a considerar una serie de casos particulares, que permiten obtener expresiones que resultarán de permanente aplicación en los capítulos siguientes.

6.2.1. Viga simplemente apoyada solicitada por un par M en un extremo.

Sea la viga de la figura 53a), de la que se desean calcular los valores de las rotaciones extremas θ_A y θ_B.

a) Sistema deformante

Sistemas no deformantes

b) Para calcular θ_A c) Para calcular θ_B

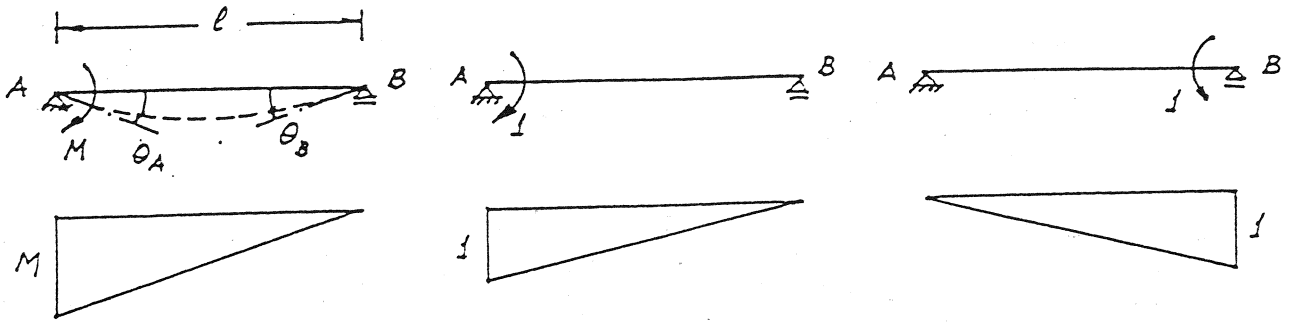


Figura 53

plicando por ejemplo el TTV, el estado de cargas constituido por el momento M, corresponderá al sistema deformante, mientras que los sistemas no deformantes o auxiliares, serán respectivamente los indicados en las figuras 53b) y c). Por integración de los diagramas de momentos se tendrá

$$\theta_A = \frac{M.l}{3\ E.J} \quad ; \quad \theta_B = -\frac{M.l}{6\ E.J} \qquad (119)$$

A igual resultado se llega aplicando el segundo teorema de Mohr sobre la viga conjugada, cuyas reacciones de vínculo corresponderán a los valores de las rotaciones θ_A y θ_B buscadas (figura 54).

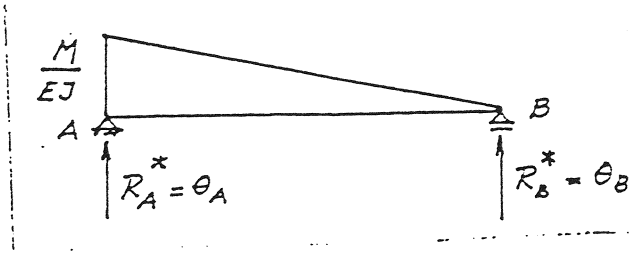


Figura 54

6.2.2. Viga simplemente apoyada solicitada por pares M (de igual efecto) en cada extremo.

Sea la viga de la figura 55a), de la que, al igual que en el caso anterior, se desean calcular las rotaciones extremas.

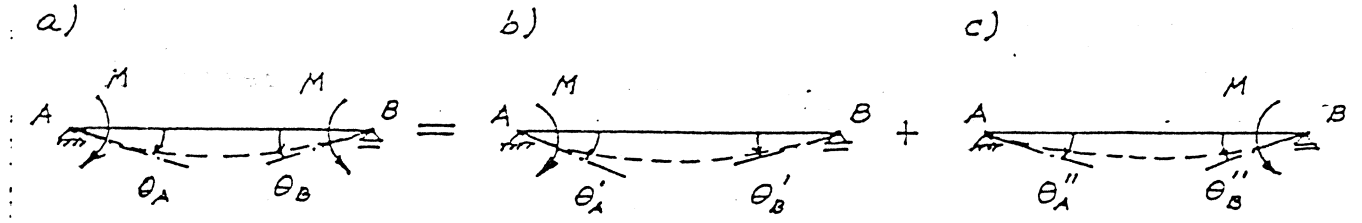


Figura 55

La resolución puede encararse siguiendo diversos caminos. Por ejemplo, si se aplica el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos (figuras 55b) y c), teniendo en cuenta las (119)

$$\theta_A = \theta_A' + \theta_A'' = \frac{M.l}{3\,E.J} + \frac{M.l}{6\,E.J} = \frac{M.l}{2\,E.J} = -\theta_B \qquad (120)$$

A idéntico resultado se llega aplicando el TTV, integrando el diagrama rectangular de M del sistema deformante con el del sistema auxiliar correspondiente (figura 53b) o c), o bien, mediante el empleo de la viga conjugada.

6.2.3. Viga simplemente apoyada solicitada por pares M (de efecto contrario) en cada extremo.

Sea la viga de la figura 56a), de la que, al igual que en ambos casos anteriores, se desean calcular las rotaciones extremas. Para este sistema de cargas resulta también como vía de solución más expeditiva la aplicación del principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos. Teniendo en cuenta las figuras 56b) y c) y las expresiones (119)

$$\theta_A = \theta_A' - \theta_A'' = \frac{M.l}{3\,E.J} - \frac{M.l}{6\,E.J} = \frac{M.l}{6\,E.J} = \theta_B \qquad (121)$$

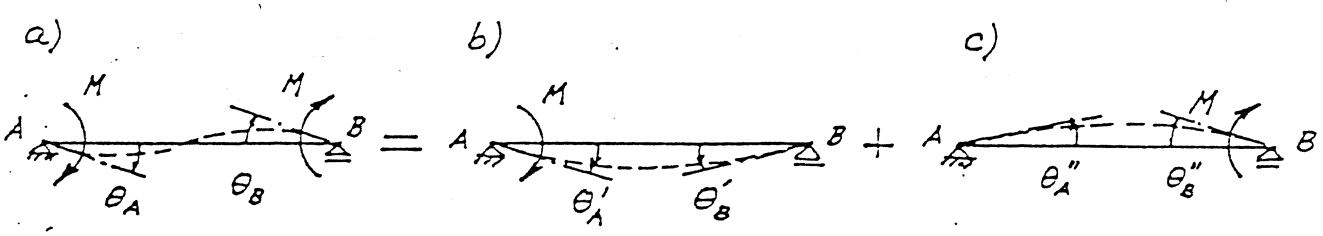


Figura 56

A igual resultado se llega aplicando el TTV o la viga conjugada, cuya utilización se propone a los fines de la ejercitación.

6.2.4. Viga apoyada/empotrada, solicitada por un par M.

Se trata de un hiperestático sencillo (figura 57a), del que se desean calcular, en primer lugar la incógnita hiperestática X, y luego la rotación θ_A y las reacciones verticales de vínculo. Se considerará como isostático equivalente el que resulta de sustituir el empotramiento B por una articulación, poniendo así en evidencia como incógnita el momento que en aquél se produce.

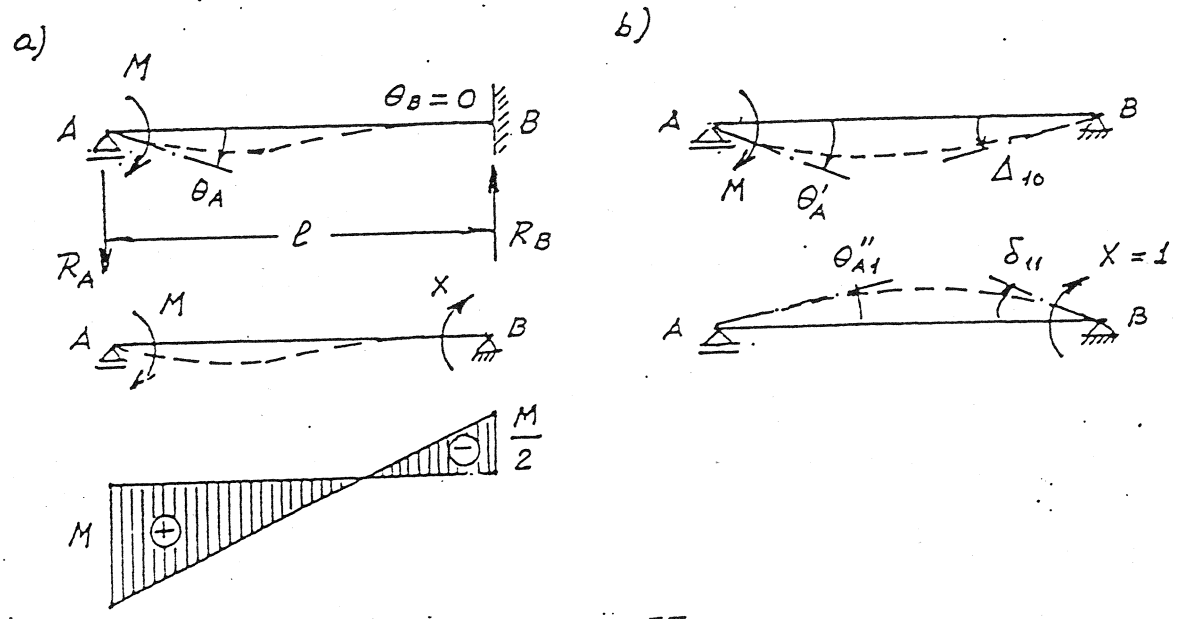


Figura 57

Para aplicar la (118), se plantean los estados P_o (M en este caso) y X = 1 (figura 57b). En base a las expresiones (119) resulta

$$\Delta_{10} = - \frac{M.l}{6\ E.J} \qquad y \qquad \delta_{11} = \frac{1}{3\ E.J}$$

con lo que

$$X = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{-(Ml/6EJ)}{(1/3EJ)} = \frac{M}{2} \qquad (122)$$

El diagrama de momentos se observa en la figura 57a).

Cabe observar que se hubiese arribado a igual resultado con cualquier otro isostático equivalente. Por ejemplo, si se elimina el apoyo móvil A, la incógnita X puesta en evidencia será la reacción de dicho vínculo, resultando (figura 58)

$$\Delta_{10} = \frac{1}{2} . \frac{M.l^2}{E.J} \qquad ; \qquad \delta_{11} = \frac{1}{3} . \frac{l^3}{E.J}$$

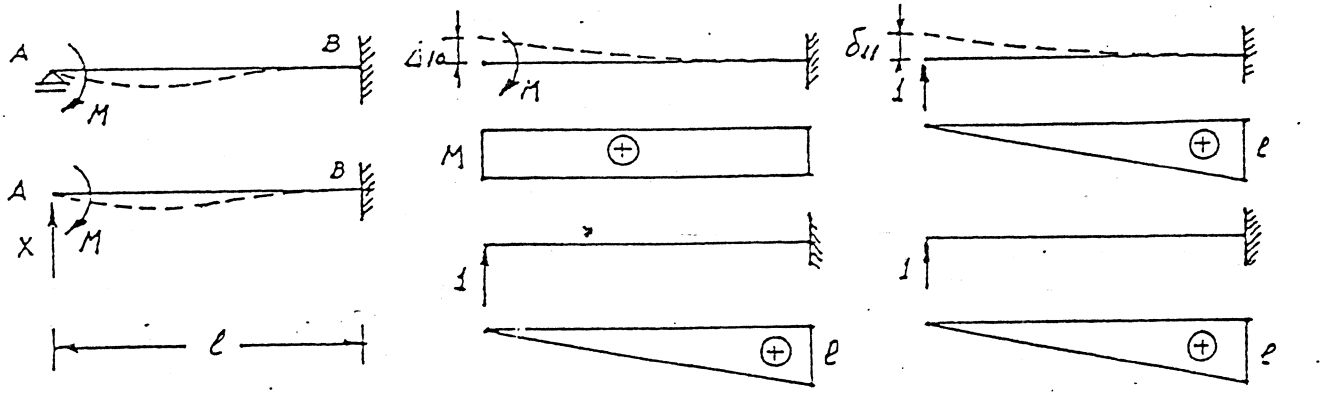


Figura 58

Estos valores surgen de aplicar para el cálculo de cada desplazamiento el TTV, consignando la figura 58 los sistemas deformante y no deformante a considerar en cada caso y sus respectivos diagramas de momentos. Llevando a la expresión básica

$$X = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{(M1^2/2EJ)}{(1^3/3EJ)} = - \frac{3}{2} \frac{M}{1} \qquad (123)$$

indicando el signo negativo que la reacción real tiene sentido contrario al supuesto al plantear la ecuación de compatibilidad. Calculando ahora el momento de empotramiento M_B se obtiene

$$- \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{1} 1 + M + M_B = 0 \quad ; \quad M_B = \frac{3}{2} M - M = \frac{M}{2}$$

valor coincidente con el dado por la (122).

De la comparación del procedimiento de cálculo con cada uno de los isostáticos equivalentes elegidos, surge, por su mayor simplicidad y rapidez en obtener el resultado deseado (generalmente los momentos de extremo de barra), la ventaja de adoptar como tal el que resulta de articular los extremos de las barras en lugar de eliminar directamente vínculos exteriores.

Al valor de $X = R_A$ obtenido según la (123) se hubiera llegado también en forma más directa, considerando que el par total actuante sobre la viga (M + M/2) (figura 57a) debe ser equilibrado por la cupla generada por las reacciones de vínculo, o sea

$$|R_A| = |R_B| = (M + \frac{M}{2}) / 1 = \frac{3}{2} \frac{M}{1}$$

6.2.4.1. Valor de la rotación θ_A.

Aplicando el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos producidos por los momentos M y X =

M/2 respecto a las rotaciones individuales que cada uno de ellos produce en A, se obtiene, teniendo en cuenta las (119) y (122) y la figura 57b), observando que $\theta_A = \theta_A' + X.\theta_{A1}''$

$$\theta_A = \frac{M.l}{3\,E.J} - \frac{(M/2).l}{6\,E.J} = \frac{M.l}{3\,E.J} - \frac{M.l}{12\,E.J} = \frac{M.l}{4\,E.J} \qquad (124)$$

6.2.5. Viga simplemente apoyada solicitada con carga uniformemente distribuida q.

Si se desean calcular las rotaciones θ_A y θ_B que se producen en los extremos de una viga simplemente apoyada solicitada por una carga uniformemente distribuida q, se tienen los sistemas deformante y auxiliar que muestran respectivamente las figuras 59a) y b), con sus correspondientes diagramas de momentos. Aplicando la Tabla Nº 2

$$\theta_A = \frac{1}{3}.im.k.s = \frac{1}{3}.\frac{q.l^2}{8}.\frac{1.1}{E.J} = \frac{q.l^3}{24\,E.J} = -\theta_B \qquad (125)$$

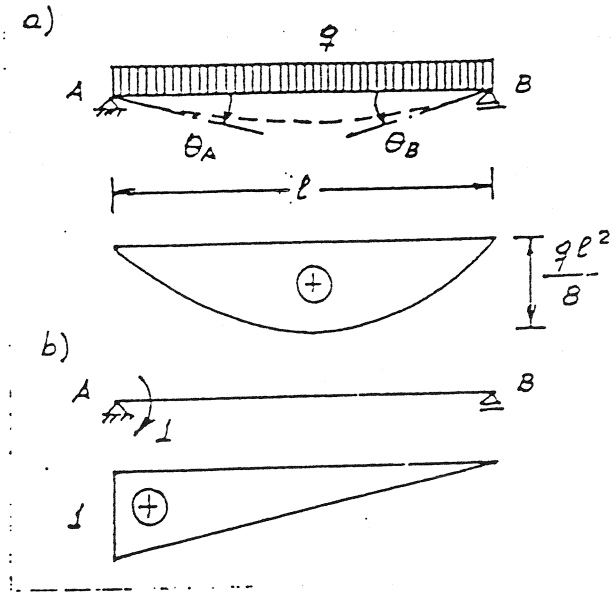


Figura 59

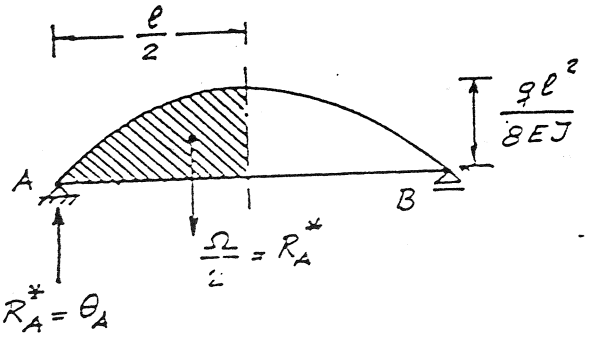


Figura 60

A igual resultado se hubiera llegado aplicando el concepto de la viga conjugada (figura 60) y la Tabla Nº 3

$$\theta_A = R_A^* = \frac{2}{3}.\frac{q.l^2}{8\,E.J}.\frac{1}{2} = \frac{q.l^3}{24\,E.J}$$

6.2.6. Viga apoyada/empotrada, solicitada con carga uniformemente distribuida q.

En este caso (figura 61), resulta el valor de δ_{11} de la primera de las (119) y el de Δ_{1o} de la (125). En consecuencia

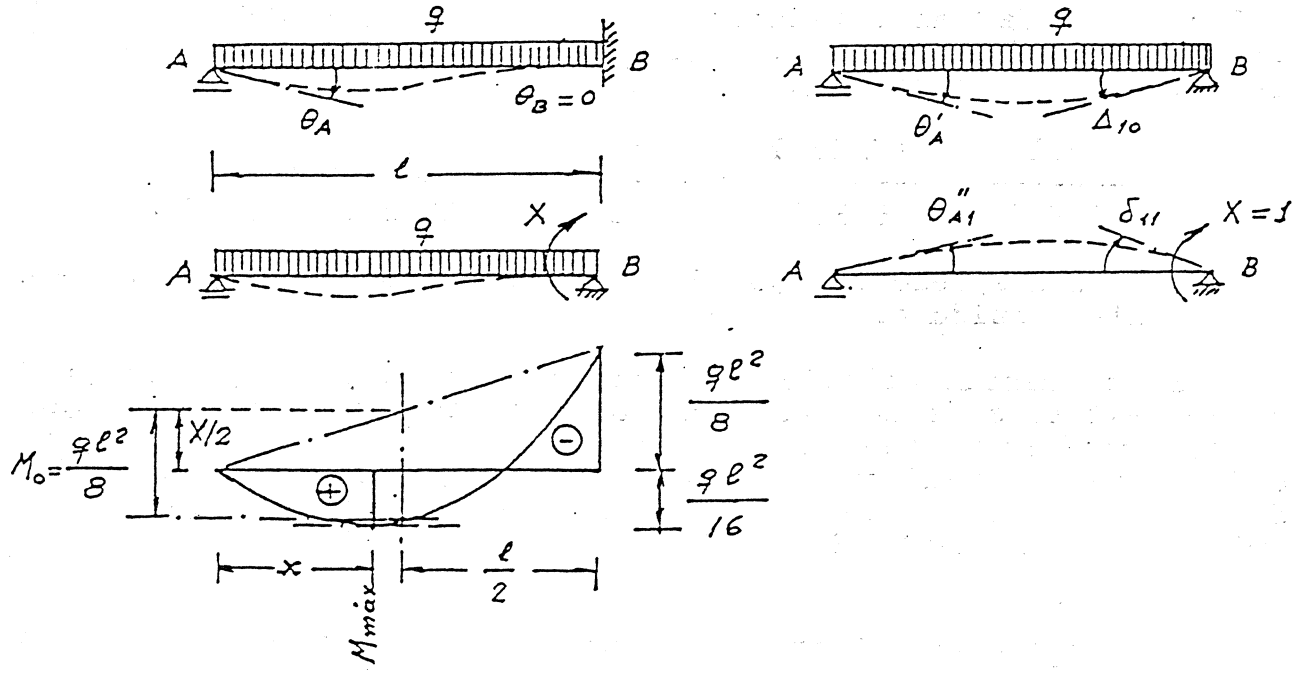


Figura 61

$$\Delta_{10} = -\frac{q.l^3}{24\ E.J} \qquad y \qquad \delta_{11} = \frac{1}{3\ E.J}$$

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-(ql^3/24EJ)}{(1/3EJ)} = \frac{q.l^2}{8} \qquad (126)$$

mostrando la misma figura 61 el diagrama de momentos resultante y las pautas que guían su construcción.

El momento a la mitad de la luz resulta de sumar algebraicamente M_o y X/2, siendo M_o el valor del momento en dicha sección de la viga supuesta isostática. O sea

$$M_{1/2} = \frac{q.l^2}{8} - \frac{1}{2}.\frac{q.l^2}{8} = \frac{q.l^2}{16}$$

Cabe observar que este momento no es el momento máximo del tramo, el que corresponde a la ordenada de tangencia horizontal del diagrama de momentos y que se produce a una distancia $x < l/2$, tal como se desprende de la figura. La determinación de este valor y el de M_{max} se desarrolla en el apartado 3.5.4. del Capítulo III.

Para calcular la rotación θ_A (figura 61), se tendrá, aplicando las (125), (126) y la segunda de las (119)

$$\theta_A = \theta_A' + X.\theta_{A1}'' = \frac{q.l^3}{24\ E.J} - \frac{q.l^2}{8}.\frac{1}{6\ E.J} = \frac{q.l^3}{48\ E.J}$$

6.2.7. Viga biempotrada, solicitada con carga uniformemente distribuida q.

De la figura 62 y las (120) y (125), aplicadas al apoyo A

$$\Delta_{10} = \frac{q.l^3}{24\ E.J} \qquad y \qquad \delta_{11} = -\frac{1}{2\ E.J}$$

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(ql^3/24EJ)}{-(1/2EJ)} = \frac{q.l^2}{12} \qquad (127)$$

El diagrama de momentos se indica en la figura 62. El momento máximo de tramo vale

$$M_{1/2} = M_o - X = \frac{q.l^2}{8} - \frac{q.l^2}{12} = \frac{q.l^2}{24}$$

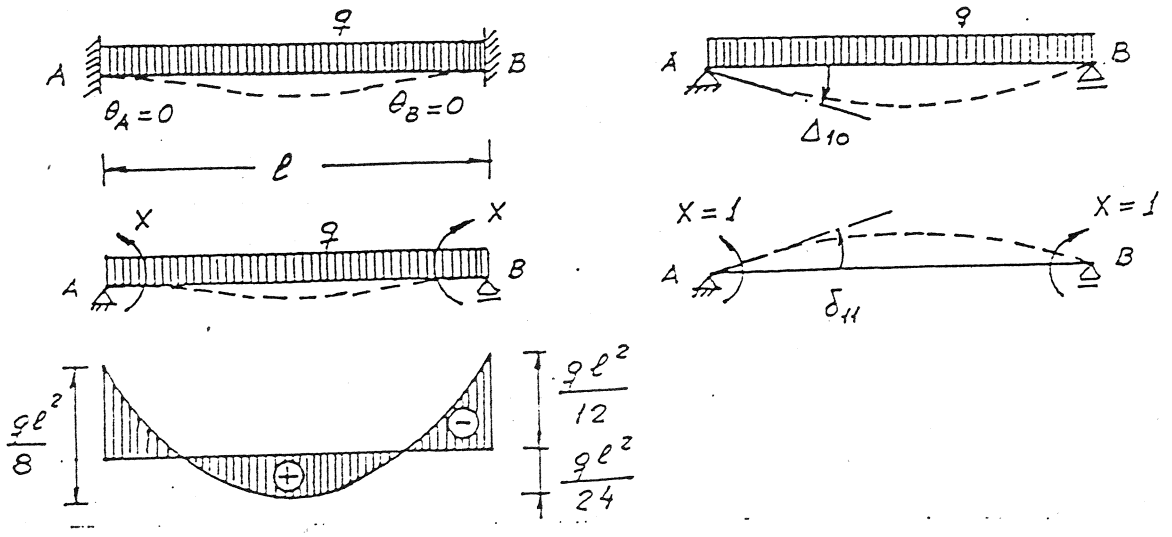


Figura 62

6.2.8. Viga simplemente apoyada solicitada con carga concentrada en el punto medio.

Para calcular las rotaciones θ_A y θ_B que se producen en los extremos de una viga simplemente apoyada solicitada por una fuerza P actuando en su punto medio, se tienen los sistemas deformante y auxiliar que se muestran respectivamente, en las figuras 63a) y b) con sus correspondientes diagramas de momentos.

Aplicando la Tabla Nº 2

$$\theta_A = \frac{1}{6}(1+\alpha)iks = \frac{1}{6}.(1+\frac{1}{2}).\frac{P.l}{4}.\frac{1.l}{E.J} = \frac{P.l^2}{16\ E.J} = -\theta_B \qquad (128)$$

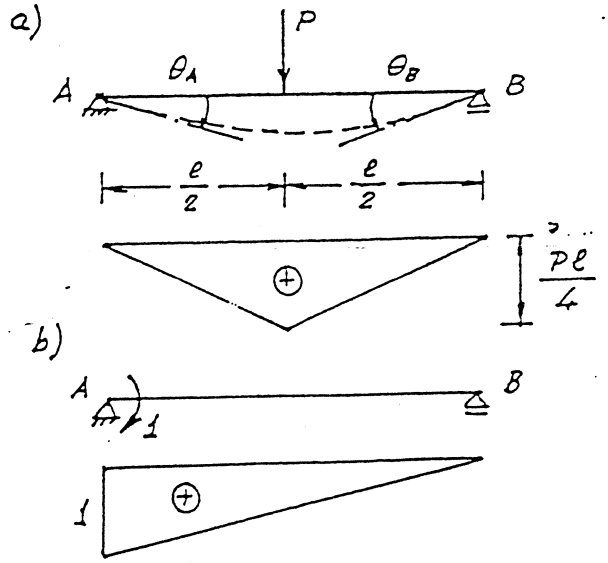


Figura 63

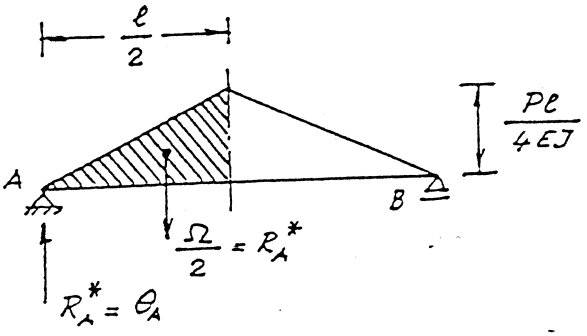


Figura 64

A igual resultado se hubiera llegado aplicando el concepto de la viga conjugada (figura 64)

$$\theta_A = R_A^* = \frac{1}{2}.\frac{P.l}{4\,E.J}.\frac{l}{2} = \frac{P.l^2}{16\,E.J}$$

6.2.9. Viga apoyada/empotrada, solicitada con carga concentrada en el punto medio.

En este caso (figura 65), resulta el valor de δ_{11} de la primera de las (119) y el de Δ_{1o} de la (128). En consecuencia

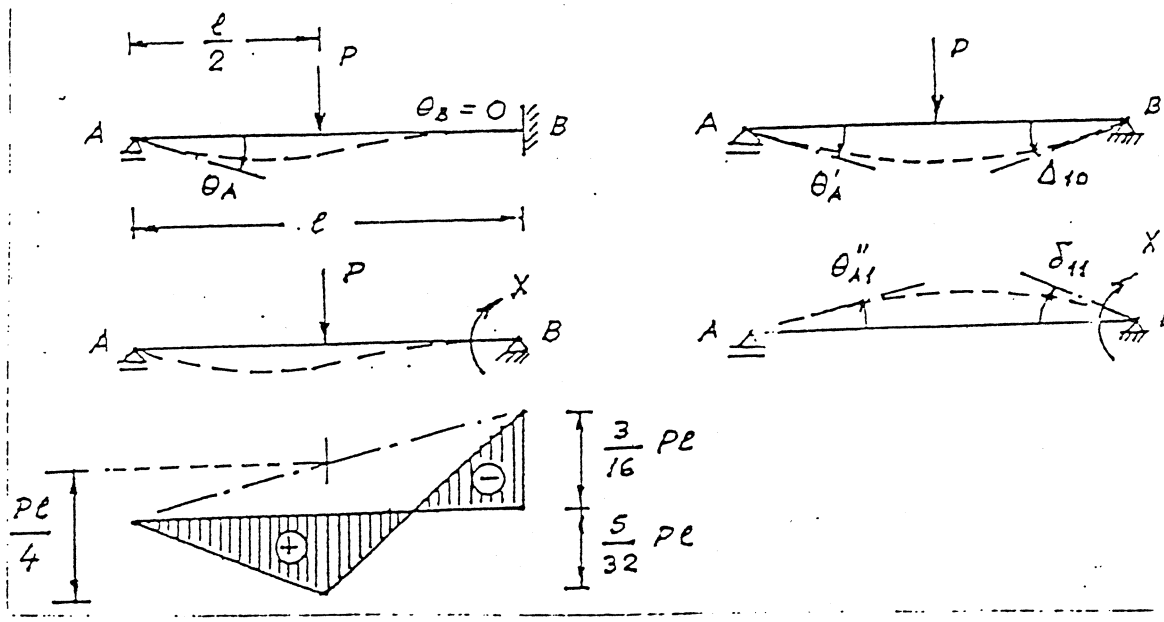


Figura 65

$$\Delta_{10} = -\frac{P.l^2}{16\,E.J} \qquad y \qquad \delta_{11} = \frac{l}{3\,E.J}$$

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-(Pl^2/16EJ)}{(l/3EJ)} = \frac{3}{16}\,P.l \qquad (129)$$

mostrando la figura 65 el diagrama de momentos resultante.

El momento máximo de tramo resulta

$$M_{l/2} = M_o - \frac{X}{2} = \frac{P.l}{4} - \frac{1}{2}.\frac{3}{16}\,P.l = \frac{5}{32}\,P.l$$

Para calcular la rotación θ_A (figura 65), se tendrá, aplicando las (128), (129) y la segunda de las (119)

$$\theta_A = \theta_A' + X.\theta_{A1}'' = \frac{P.l^2}{16\,E.J} - \frac{3\,P.l}{16}.\frac{l}{6\,E.J} = \frac{P.l^2}{32\,E.J}$$

6.2.10. Viga biempotrada, solicitada con carga concentrada en el punto medio.

De la figura 66 y las (120) y (128), aplicadas al apoyo A

$$\Delta_{10} = \frac{P.l^2}{16\,E.J} \qquad y \qquad \delta_{11} = -\frac{l}{2\,E.J}$$

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(Pl^2/16EJ)}{-(l/2EJ)} = \frac{P.l}{8} \qquad (130)$$

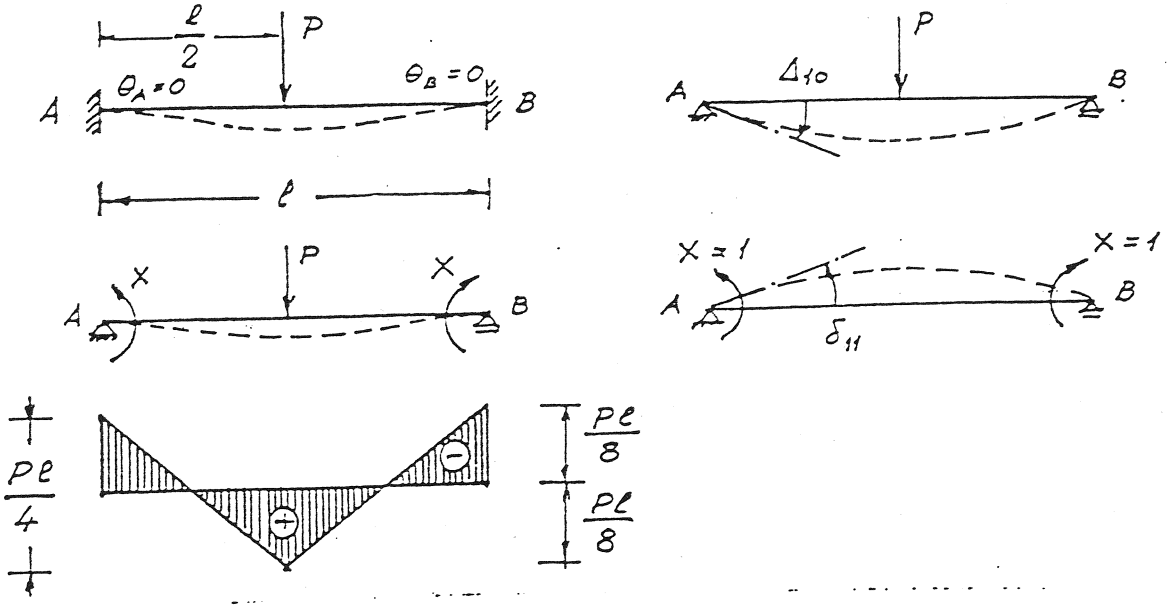


Figura 66

El diagrama de momentos se indica en la figura 66. El momento máximo de tramo vale

$$M_{1/2} = M_o - X = \frac{P.l}{4} - \frac{P.l}{8} = \frac{P.l}{8}$$

6.2.11. Viga apoyada/empotrada, con un desplazamiento relativo Δ entre los extremos.

Sea el caso de la viga de la figura 67a) sobre la cual no actúan cargas exteriores directamente aplicadas, de la que se desea calcular el valor del momento de empotramiento que se produce cuando el extremo empotrado experimenta un desplazamiento normal al eje de la viga de magnitud Δ. En la figura 67b) se pone de manifiesto la incógnita a calcular y se le presupone un sentido.

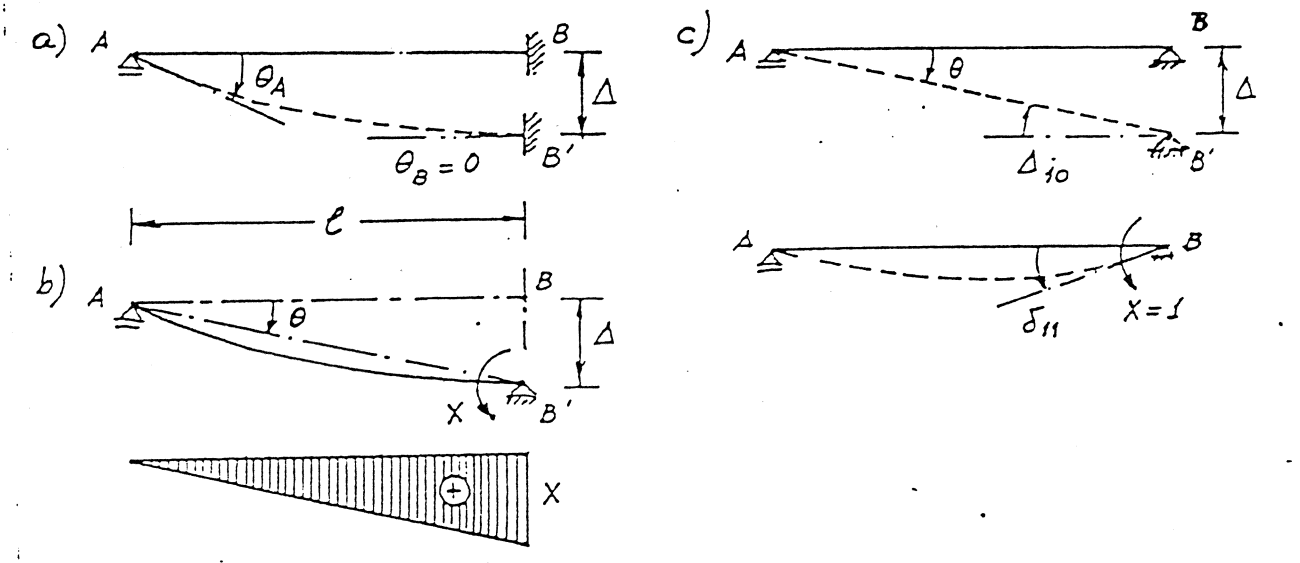


Figura 67

Al ángulo θ que forma el eje de la viga en su posición no deformada (AB), con la recta ideal que une los puntos A y B' (figura 67b), se lo denomina *ángulo del eje de la barra*, o simplemente *ángulo de barra*, el que valdrá

$$\theta = \Delta / l \qquad (131)$$

Para aplicar la expresión general de resolución, se observa de la figura 67c) que Δ_{10} se obtiene por consideraciones geométricas y δ_{11} por la primera de las (119), aplicadas ambas al apoyo B

$$\Delta_{10} = \frac{\Delta}{l} \qquad \text{y} \qquad \delta_{11} = -\frac{l}{3\,E.J}$$

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(\Delta/l)}{-(l/3EJ)} = \frac{3\,E.J.\Delta}{l^2} \qquad (132)$$

El diagrama de momentos se indica al pie de la figura 67b).

Esta expresión se puede escribir también, en base a la (131)

$$X = \frac{3\ E.J.\theta}{l} \qquad (133)$$

El mismo valor de X se produce si el descenso lo hubiera experimentado el apoyo articulado A, en cuyo caso X toma sentido contrario (figura 68).

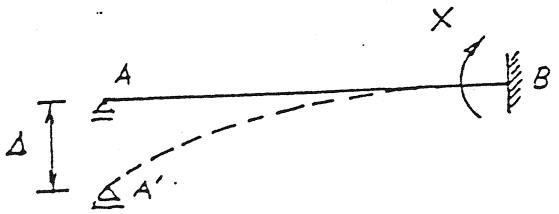


Figura 68

6.2.12. Viga biempotrada, con un desplazamiento relativo Δ entre los extremos.

Si se extiende ahora el caso anterior a una viga biempotrada, aparecerán en cada extremo incógnitas hiperestáticas X, las que deben ser iguales en valor absoluto por la simetría de la deformación.

De la figura 69, teniendo en cuenta que en este caso Δ_{10} también se obtiene por consideraciones geométricas y δ_{11} por la (121), aplicadas ambas al apoyo A

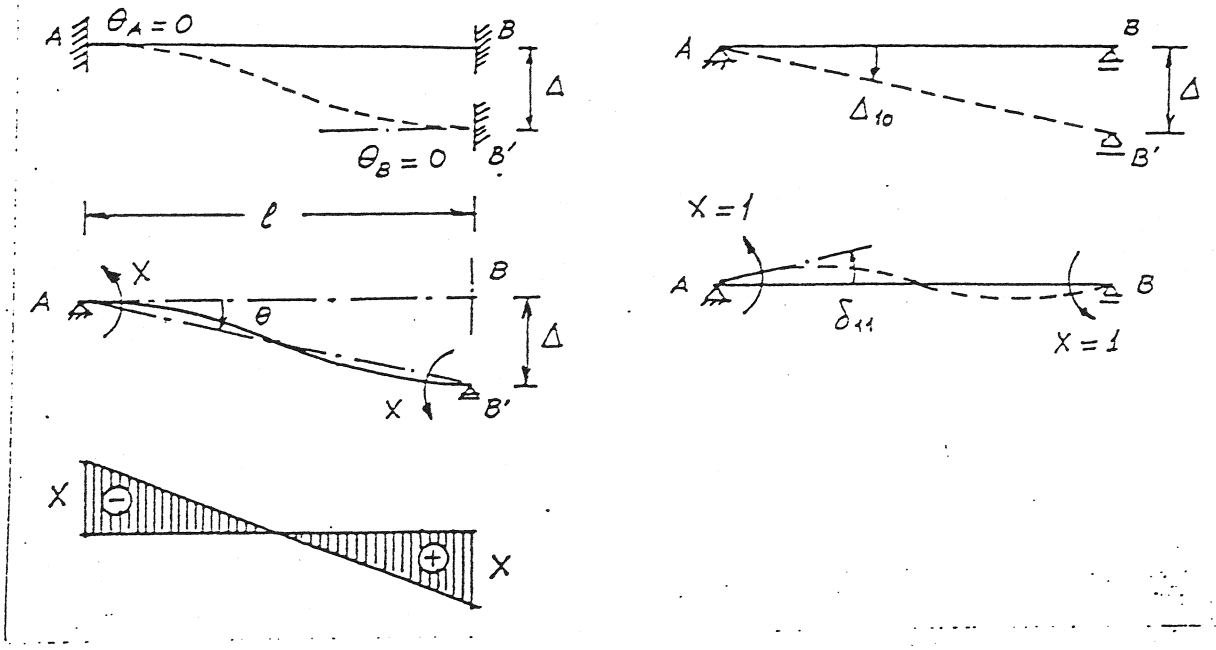


Figura 69

$$\Delta_{10} = -\frac{\Delta}{1} \qquad y \qquad \delta_{11} = -\frac{1}{6\ E.J}$$

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(\Delta/1)}{-(1/6EJ)} = \frac{6\ E.J.\Delta}{1^2} \qquad (134)$$

El diagrama de momentos se indica en la figura 69.

La (134) puede escribirse también, en base a la (131)

$$X = \frac{6\ E.J.\theta}{1} \qquad (135)$$

6.2.13. Observación respecto a las vigas biempotradas.

Cabe tener presente que si bien una viga biempotrada no es un hiperestático sencillo en el concepto asumido para los mismos en el apartado 6.1., por presentar 3 incógnitas hiperestáticas, se la incluye como tal dado que, al considerarse sólo cargas verticales en el caso de los apartados 6.2.7. y 6.2.10., es nula la incógnita correspondiente a la reacción horizontal, mientras que las dos restantes son iguales por la simetría que presentan las cargas en los estados considerados. Por su parte, en el caso del apartado 6.2.12. tampoco existen reacciones horizontales y ambas incógnitas X son iguales por la simetría de las deformaciones.

Por las causales expuestas, casos como los formulados pueden resolverse mediante el planteo de una sola ecuación de compatibilidad.

6.3. Tablas de momentos de empotramiento para diversos estados de solicitación.

Para la aplicación de numerosos métodos de resolución de estructuras hiperestáticas, deben conocerse los valores de los momentos de empotramiento de las barras o elementos que conforman la estructura, individualmente considerados, ya sea se hallen rígidamente empotrados en un extremo y posibilitados de rotar en el otro, ya sea estén rígidamente empotrados en ambos extremos. Dichos elementos se hallan solicitados por las cargas o acciones de servicio, que pueden adquirir muy variadas configuraciones.

A los fines de evitar efectuar en cada caso la resolución particular, se incluye en el Anexo del presente Capítulo la Tabla Nº 5, que presenta los momentos de empotramiento X para barras rígidamente empotradas en el extremo A y articuladas en el B, para cada uno de los estados de carga que se indican en la columna respectiva. En su empleo debe prestarse especial atención de no invertir la sección empotrada con respecto a la distribución y posición de la carga, cuando ésta no es simétrica. Asimismo, en las dos últimas columnas se consignan los momentos de

empotramiento X_A y X_B para barras empotradas rígidamente en ambos extremos, para los mismos estados de solicitación.

En todos los casos los valores de los momentos son válidos para barras de momento de inercia constante.

El signo positivo de los momentos (o sea cuando no se hace mención al mismo), indica que el momento tiene el sentido indicado en el esquema del encabezamiento de la tabla, es decir que produce momento flector negativo en la sección de empotramiento. En cambio, el signo negativo indica momentos contrarios a los dibujados, o sea que producen momento flector positivo en la sección de empotramiento.

En todos los casos los valores de los momentos indicados, o algún estado no consignado, pueden ser calculados siguiendo los criterios expuestos en los ejemplos desarrollados en el apartado 6.2.

7. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

3. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

4. "MECANICA DE CONSTRUCCION" - Tomos I y II - V. A. Kiseliov - Editorial Mir - Moscú - 1972.

5. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana - México - 1997.

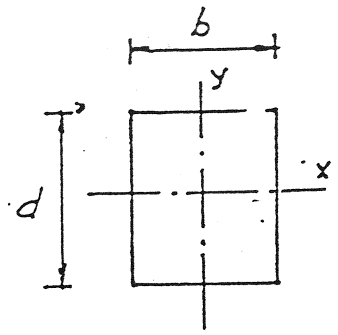
6. "ESTATICA EN LA CONSTRUCCION" - Kurt Hirschfeld - Editorial Reverté S.A. - Barcelona - 1975.

7. "ESTABILIDAD III - Capítulo 2: Análisis de las Deformaciones y Rigideces de las Estructuras Planas - Teoremas Fundamentales" - Carlos D. Segerer - 1984.

8. "ESTABILIDAD III - Capítulo 2 (Segunda Parte): Teoremas Fundamentales: Mohr, Betti, Maxwell, Castigliano y Menabrea" - Carlos D. Segerer - 1984.

ANEXO: TABLAS

TABLA N° 1. Valores de β para el cálculo de Jr.



d/b	β
1	0,141
1,25	0,171
1,5	0,196
2	0,229
2,5	0,249
3	0,263
4	0,281
5	0,291
6	0,299
8	0,307
10	0,313
∞	0,333

TABLA N° 2. Valores de las integrales $\int i.k.ds$.

		k (s)	k (s)	k_1 … k_2 (i_m) (s)	k_1 … k_2 (k_m) (s)
1	i (s)	iks	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{2}i(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}i(k_2-k_1)s$
2	i (s)	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{6}i(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}i(2k_2-k_1)s$
3	i (s)	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}iks$	$\frac{1}{6}i(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}i(k_2-2k_1)s$
4	i_1 … i_2 (s)	$\frac{1}{2}(i_1+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(i_1+2i_2)ks$	$\frac{1}{6}(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)s$	$\frac{1}{6}[(2i_2+i_1)k_2-(i_2+2i_1)k_1]s$
5	i_1 … i_2 (s)	$\frac{1}{2}(i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{6}(2i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{6}[i_2(2k_2+k_1)-(k_2+2k_1)i_1]s$	$\frac{1}{6}[(2i_1-i_2)k_1+(2i_2-i_1)k_2]s$
6	αs βs i_c (s)	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)iks$	$\frac{1}{6}i[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]s$	$\frac{1}{6}[k_2(1+\alpha)-k_1(1+\beta)]is$
7	2° i_m (s)	$\frac{2}{3}i_mks$	$\frac{1}{3}i_mks$	$\frac{1}{3}i_m(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{3}i_m(k_2-k_1)s$
8	2° i (s)	$\frac{2}{3}iks$	$\frac{5}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+5k_2)s$	$\frac{1}{12}i(5k_2-3k_1)s$
9	i 2° (s)	$\frac{2}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(5k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-5k_1)s$
10	i_1 … i_m 2° … i_2 (s)	$\frac{1}{6}(i_1+4i_m+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(2i_m+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(i_1k_1+4i_mk_m+i_2k_2)s$	$\frac{1}{6}(i_2k_2+4i_mk_m-i_1k_1)s$
11	2° i (s)	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-k_1)s$
12	i 2° (s)	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+k_2)s$	$\frac{1}{12}i(k_2-3k_1)s$
13	$\int k^2 ds$	k^2s	$\frac{1}{3}k_1^2s$	$\frac{1}{3}(k_1^2+k_1k_2+k_2^2)s$	$\frac{1}{3}(k_1^2-k_1k_2+k_2^2)s$

TABLA N° 2 (Continuación). Valores de las integrales $\int i.k.ds$.

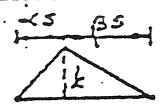
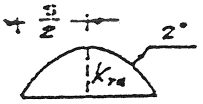
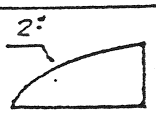
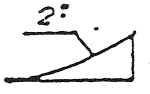
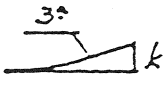
					
$\frac{1}{2} iks$	$\frac{2}{3} i k_m s$	$\frac{2}{3} iks$	$\frac{1}{3} iks$	$\frac{1}{4} iks$	1
$\frac{1}{6}(1+\alpha) iks$	$\frac{1}{3} i k_m s$	$\frac{5}{12} iks$	$\frac{1}{4} iks$	$\frac{1}{5} iks$	2
$\frac{1}{6}(1+\beta) iks$	$\frac{1}{3} i k_m s$	$\frac{1}{4} iks$	$\frac{1}{12} iks$	$\frac{1}{20} iks$	3
$\frac{1}{6}[(1+\beta) i_1 + (1+\alpha) i_2] ks$	$\frac{1}{3}(i_1+i_2) k_m s$	$\frac{1}{12}(3i_1+5i_2) ks$	$\frac{1}{12}(i_1+3i_2) ks$	$\frac{1}{20}(i_1+4i_2) ks$	4
$\frac{1}{6}[i_2(1+\alpha) - i_1(1+\beta)] ks$	$\frac{1}{3}(i_2-i_1) k_m s$	$\frac{1}{12}(5i_2-3i_1) ks$	$\frac{1}{12}(3i_2-i_1) ks$	$\frac{1}{20}(4i_2-i_1) ks$	5
$\frac{1}{3} iks$	$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta) i k_m s$	$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2) iks$	$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2) iks$	$\frac{1}{20}(1+\alpha)(1+\beta)^2 iks$	6
$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta) i_m ks$	$\frac{8}{15} i_m k_m s$	$\frac{7}{15} i_m ks$	$\frac{1}{5} i_m ks$	$\frac{2}{15} iks$	7
$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2) iks$	$\frac{7}{15} i k_m s$	$\frac{8}{15} iks$	$\frac{3}{10} iks$	$\frac{7}{30} iks$	8
$\frac{1}{12}(5-\alpha-\alpha^2) iks$	$\frac{7}{15} i k_m s$	$\frac{11}{30} iks$	$\frac{2}{15} iks$	$\frac{1}{12} iks$	9
$\frac{1}{6}[i_1\beta^2 + 3 i_m(1+\beta) + i_2\alpha^2] ks$	$\frac{1}{15}(i_1 + 8 i_m + i_2) k_m s$	$\frac{1}{60}(i_1 + 28 i_m + 11 i_2) ks$	$\frac{1}{60}(12 i_m + 9 i_2 - i_1) ks$	$\frac{1}{60}[8(i_m+i_2) - i_1] ks$	10
$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2) iks$	$\frac{1}{5} i k_m s$	$\frac{3}{10} iks$	$\frac{1}{5} iks$	$\frac{1}{6} iks$	11
$\frac{1}{12}(1+\beta+\beta^2) iks$	$\frac{1}{5} i k_m s$	$\frac{2}{15} iks$	$\frac{1}{30} iks$	$\frac{1}{60} iks$	12
$\frac{1}{3} k^2 s$	$\frac{2}{15} k_m^2 s$	$\frac{8}{15} k^2 s$	$\frac{1}{5} k^2 s$	$\frac{1}{7} k^2 s$	13

TABLA N° 3. Propiedades de áreas de uso frecuente.

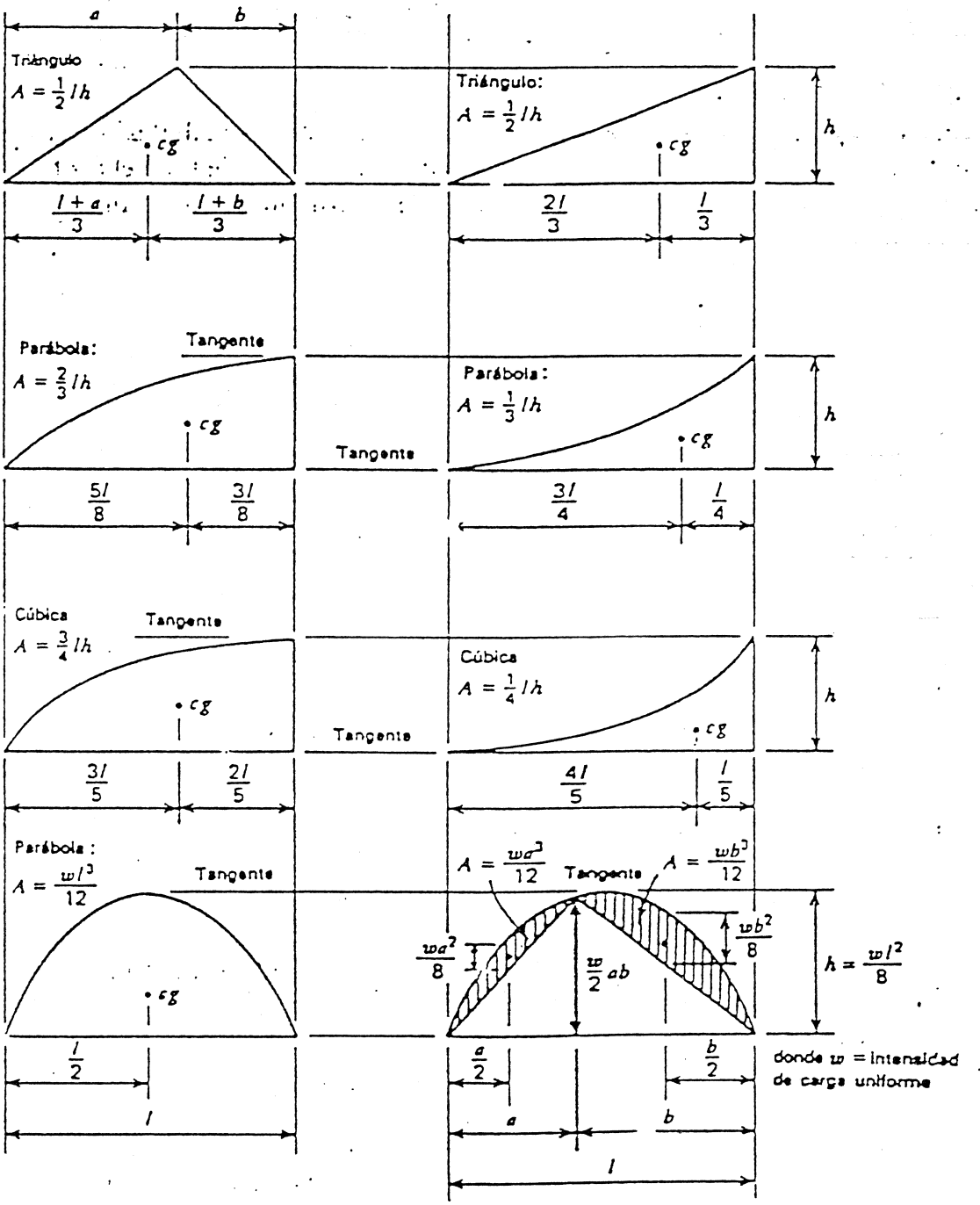


TABLA N° 4. Transformación de la viga real a la viga conjugada.

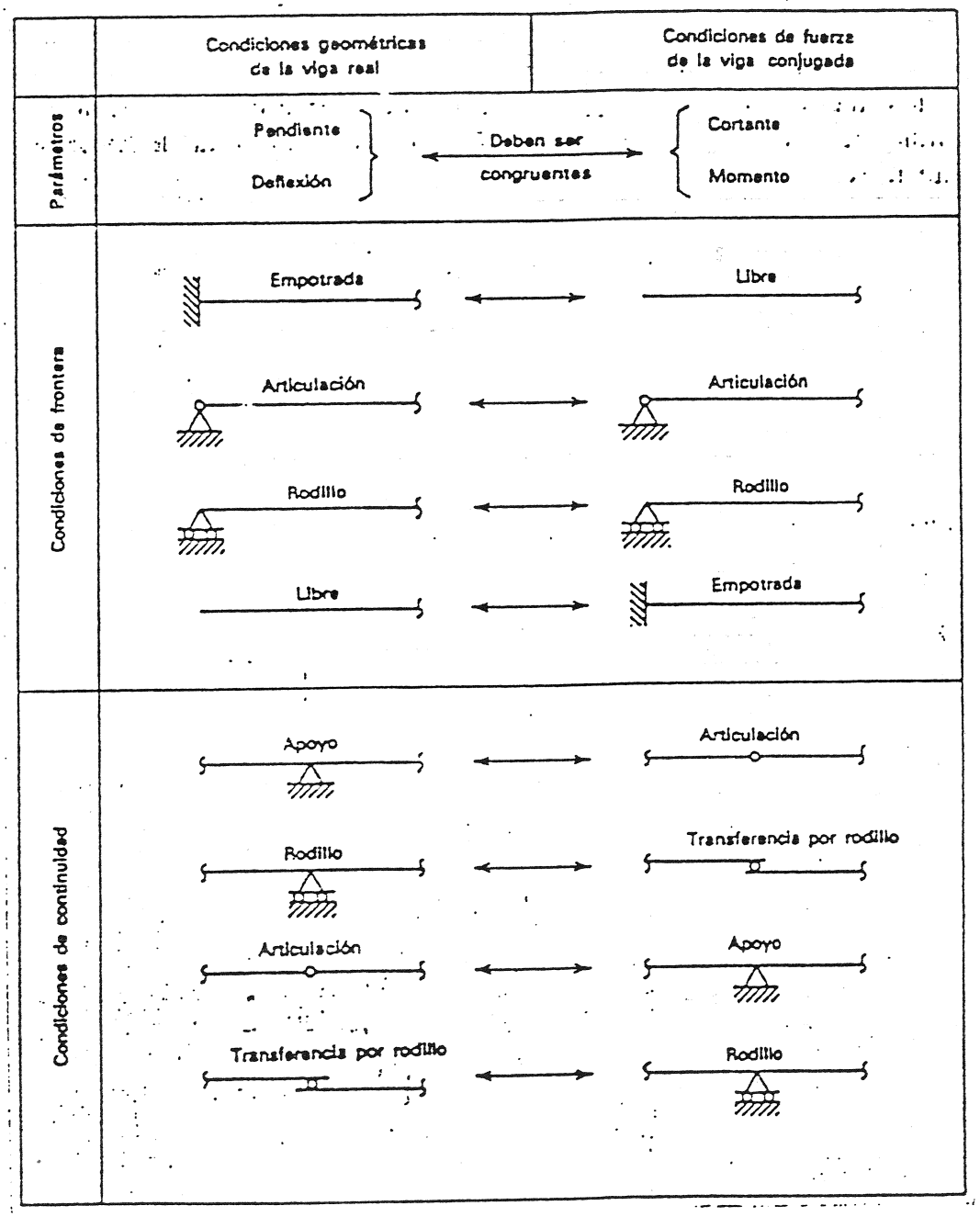


TABLA N° 5. Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

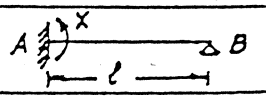
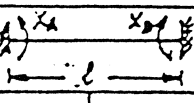
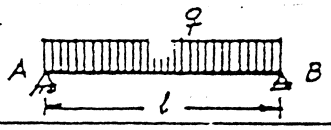
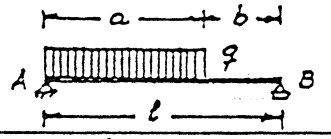
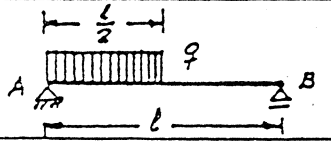
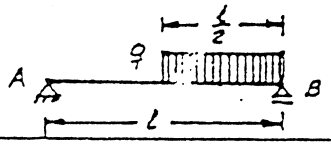
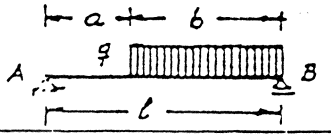
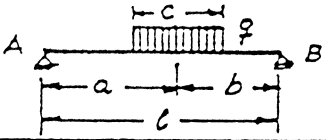
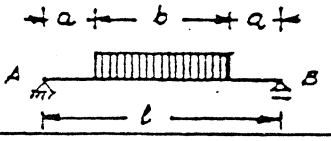
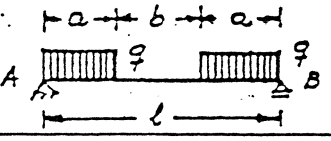
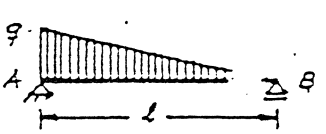
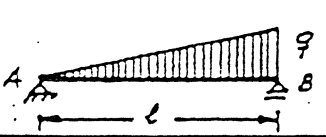
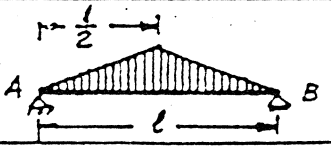
N°	Estado de carga			
		X	X_A	X_B
1		$\frac{q l^2}{8}$	$\frac{q l^2}{12}$	$\frac{q l^2}{12}$
2		$\frac{q a^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$	$\frac{q a^2}{4}\left[2-\frac{a}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q a^3}{12 l^2}(4l-3a)$
3		$\frac{9}{128} q l^2$	$\frac{11}{192} q l^2$	$\frac{5}{192} q l^2$
4		$\frac{7}{128} q l^2$	$\frac{5}{192} q l^2$	$\frac{11}{192} q l^2$
5		$\frac{q b^2}{8}\left(2-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q b^3}{12 l^2}(4l-3b)$	$\frac{q b^2}{4}\left[2-\frac{b}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{b}{l}\right)\right]$
6		$\frac{q a b c}{2 l^2}\left(l+b-\frac{c^2}{4a}\right)$	$\frac{qc}{l^2}\left[ab^2-\frac{1}{6}\left(b-\frac{a}{2}\right)\right]$	$\frac{qc}{l^2}\left[a^2b-\frac{c^2}{6}\left(a-\frac{b}{2}\right)\right]$
7		$\frac{q b l}{16}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q b l}{24}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q b l}{24}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$
8		$\frac{q a^2}{4}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$	$\frac{q a^2}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$	$\frac{q a^2}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$
9		$\frac{q l^2}{15}$	$\frac{q l^2}{20}$	$\frac{q l^2}{30}$
10		$\frac{7 q l^2}{120}$	$\frac{q l^2}{30}$	$\frac{q l^2}{20}$
11		$\frac{5 q l^2}{64}$	$\frac{5 q l^2}{96}$	$\frac{5 q l^2}{96}$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

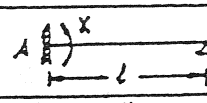
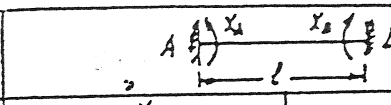
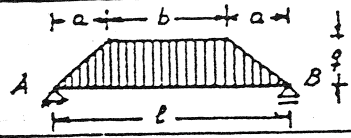
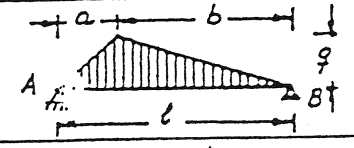
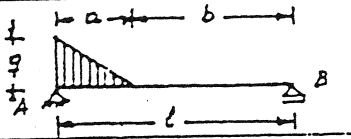
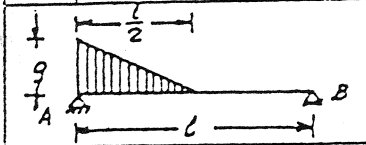
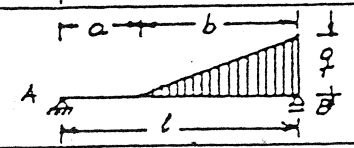
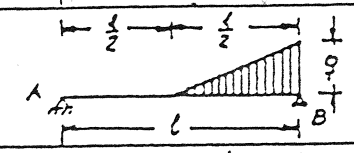
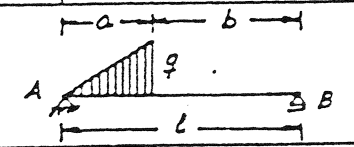
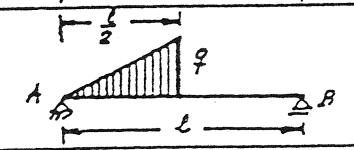
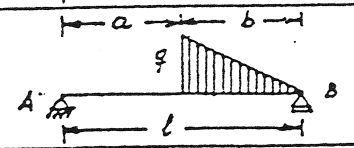
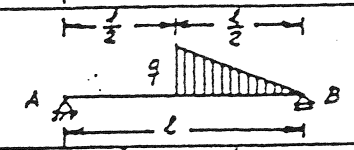
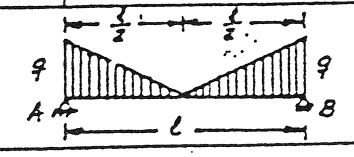
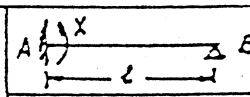
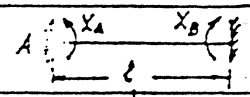
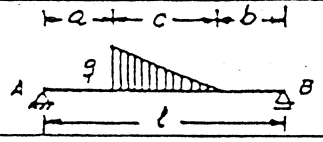
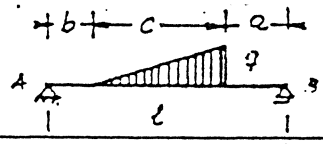
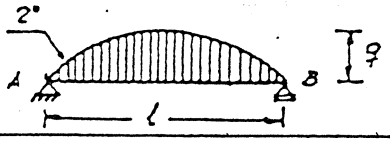
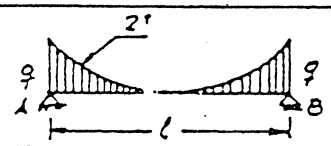
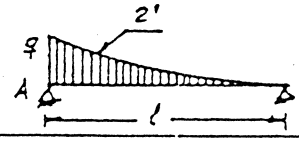
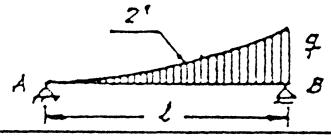
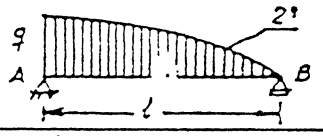
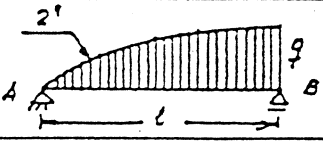
N°	Estado de carga			
		X	X_A	X_B
12		$\frac{q}{8}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$
13		$\frac{q(l+b)}{120\,l}\left(7l^2-3b^2\right)$	$\frac{ql^2}{30}\left(1+\frac{b}{l}+\frac{b^2}{l^2}-\frac{3b^2}{2l^3}\right)$	$\frac{ql^2}{30}\left(1+\frac{a}{l}+\frac{a^2}{l^2}-\frac{3a^3}{2l^3}\right)$
14		$\frac{qa^2}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{4l}+\frac{a^2}{20l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{6}\left(1-\frac{a}{l}+\frac{3a^2}{10l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{60}\frac{a}{l}\left(5-3\frac{a}{l}\right)$
15		$\frac{53}{1920}\,q\,l^2$	$\frac{23}{960}\,q\,l^2$	$\frac{7}{960}\,q\,l^2$
16		$\frac{qb^2}{120}\left[10-3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$\frac{qb^2}{60}\frac{b}{l}\left(5-3\frac{b}{l}\right)$	$\frac{qb^2}{6}\left(1-\frac{b}{l}+\frac{3b^2}{10l^2}\right)$
17		$\frac{37}{1920}\,q\,l^2$	$\frac{7}{960}\,q\,l^2$	$\frac{23}{960}\,q\,l^2$
18		$qa^2\left(\frac{1}{3}-\frac{3a}{8l}+\frac{a^2}{10l^2}\right)$	$qa^2\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2l}+\frac{a^2}{5l^2}\right)$	$\frac{qa^3}{l}\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{5l}\right)$
19		$\frac{41}{960}\,q\,l^2$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{3ql^2}{160}$
20		$\frac{qb^2}{30}\left[5-3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$\frac{qb^3}{l}\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{5l}\right)$	$qb^2\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{2l}+\frac{b^2}{5l^2}\right)$
21		$\frac{17}{480}\,q\,l^2$	$\frac{3ql^2}{160}$	$\frac{ql^2}{30}$
22		$\frac{3}{64}\,q\,l^2$	$\frac{ql^2}{32}$	$\frac{ql^2}{32}$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

N°	Estado de carga	 X	 X_A	X_B
23		(*)	(**)	(***)
24		(****)	(***)	(**)
25		$\frac{ql^2}{10}$	$\frac{ql^2}{15}$	$\frac{ql^2}{15}$
26		$\frac{ql^2}{40}$	$\frac{ql^2}{60}$	$\frac{ql^2}{60}$
27		$\frac{ql^2}{24}$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{60}$
28		$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{60}$	$\frac{ql^2}{30}$
29		$\frac{11ql^2}{120}$	$\frac{ql^2}{15}$	$\frac{ql^2}{20}$
30		$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{20}$	$\frac{ql^2}{15}$

23/24

(*) $\frac{qc}{108l^2}(3b-2c)\left[9(l^2-b^2)-12bc-c^2\left(4+\frac{45b-28c}{30a+20c}\right)\right]$

(**) $\frac{qc}{540l^2}\left[10(3a+c)(3b+2c)^2-15c^2(3b-l)-28c^3\right]$

(***) $\frac{qc}{540l^2}\left[10(3a+c)^2(3b+2c)-15c(3a-l)-17c^3\right]$

(****) $\frac{qc(3a+c)}{108l^2}\left[9(l^2-a^2)-6ac-c^2\left(1+9\frac{45a+17c}{270a+90c}\right)\right]$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

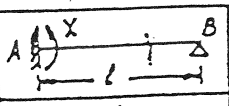
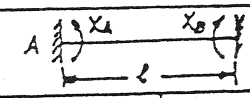
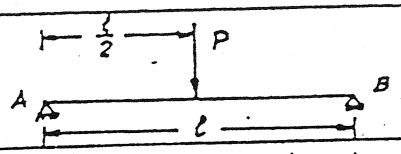
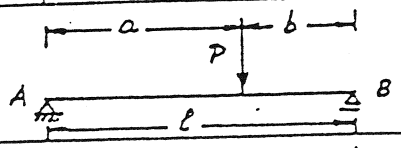
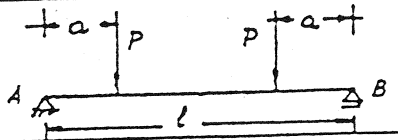
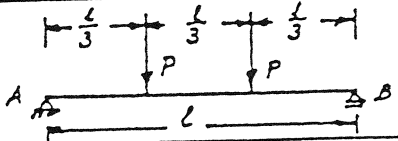
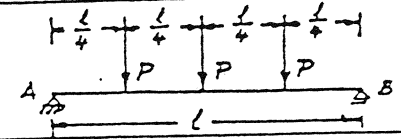
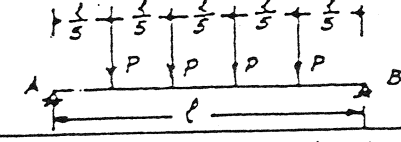
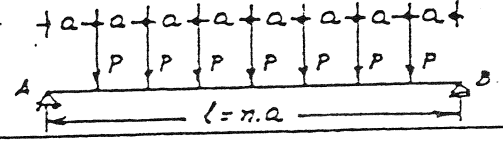
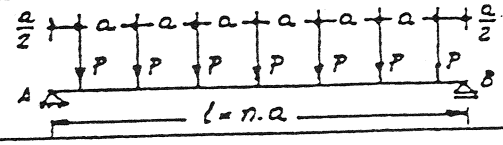
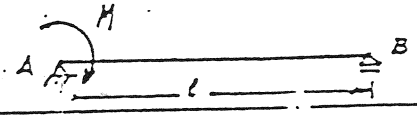
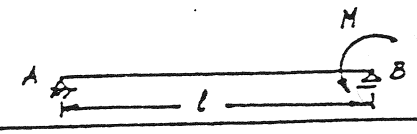
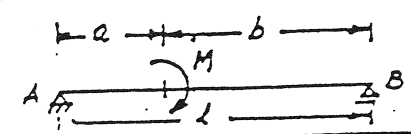
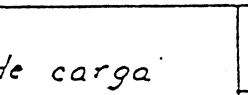
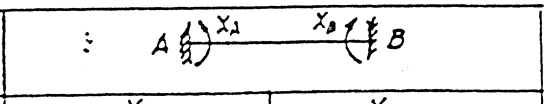
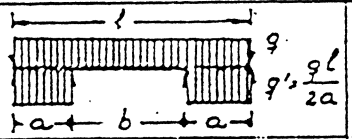
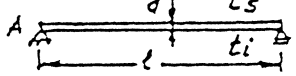
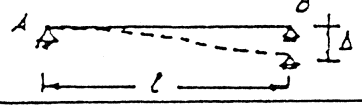
N°	Estado de carga	 X	 X_A	X_B
31		$\frac{3Pl}{16}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$
32		$\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$	$\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pba^2}{l^2}$
33		$\frac{3Pa}{2l}(l-a)$	$\frac{Pa}{l}(l-a)$	$\frac{Pa}{l}(l-a)$
34		$\frac{Pl}{3}$	$\frac{2}{9}Pl$	$\frac{2}{9}Pl$
35		$\frac{15}{32}Pl$	$\frac{5}{16}Pl$	$\frac{5}{16}Pl$
36		$\frac{3}{5}Pl$	$\frac{2}{5}Pl$	$\frac{2}{5}Pl$
37		$\frac{Pl}{8n}(n^2-1)$	$\frac{Pl}{12n}(n^2-1)$	$\frac{Pl}{12n}(n^2-1)$
38		$\frac{Pl}{16n}(2n^2+1)$	$\frac{Pl}{24n}(2n^2+1)$	$\frac{Pl}{24n}(2n^2+1)$
39		M	M	0
40		$\frac{M}{2}$	0	M
41		$\frac{M}{2}\left[1-3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$-M\frac{b}{l}\left(2-3\frac{b}{l}\right)$	$M\frac{a}{b}\left(2-3\frac{a}{l}\right)$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

N°	Estado de carga			
		X	X_A	X_B
42		$\frac{q\ell^2}{8}\left(1-\frac{3a}{\ell}+\frac{2a^2}{\ell^2}\right)$	$\frac{q\ell^2}{12}\left(\frac{2a^2}{\ell^2}-3\frac{a}{\ell}+1\right)$	$\frac{q\ell^2}{12}\left(\frac{2a^2}{\ell^2}-3\frac{a}{\ell}+1\right)$
43	Variación de temperatura $\Delta t = t_i - t_s$ 	$\frac{3}{2} EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$	$EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$	$EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$
44	Descenso de apoyo 	$3EJ\frac{\Delta}{\ell^2}$	$6EJ\frac{\Delta}{\ell^2}$	$-6EJ\frac{\Delta}{\ell^2}$

INDICE

Página

1. Deformaciones y desplazamientos. 1
   1.1. Conceptos básicos y definiciones 1
   1.2. Tipos de desplazamientos. 2
   1.3. Nomenclatura y desplazamientos unitarios. 3
   1.4. Relación entre solicitaciones internas y deformaciones. 4
   1.5. Determinación de los desplazamientos. 5

2. Trabajo de las acciones exteriores e interiores. 13
   2.1. Objeto de su estudio. Tipos de trabajo. 13
   2.2. Trabajo producido por fuerzas y pares 14
   2.3. Trabajo efectivo de las acciones exteriores e interiores. 16

3. Trabajo virtual de las acciones exteriores e interiores. . 22
   3.1. Conceptos básicos 22
   3.2. Principio de los Trabajos Virtuales 22
   3.3. Teorema de los Trabajos Virtuales. Demostración . . . 24
   3.4. Expresión de cálculo del TTV. 28
   3.5. Causas que producen la deformación. 29
   3.6. Aplicación del TTV al cálculo de desplazamientos. . . 33
   3.7. Métodos auxiliares para el cálculo de las integrales. 37

4. Teoremas y leyes fundamentales deducidos a partir del TTV. 43
   4.1. Teoremas de Mohr. Demostración aplicando el TTV . . . 43
   4.2. Ley de Betti. 48
   4.3. Teorema de Maxwell. 49
   4.4. Fundamentos de los métodos energéticos. 53

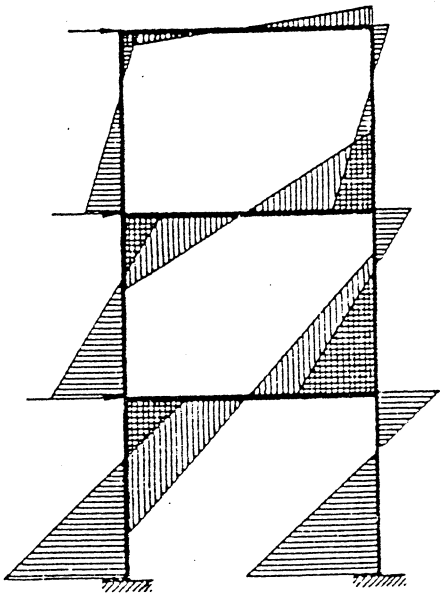
5. Desplazamientos en estructuras hiperestáticas. 56
   5.1. Desplazamientos debidos a cargas. 56
   5.2. Desplazamientos debidos a variación de temperatura. . 59
   5.3. Desplazamientos debidos a movimientos de vínculos . . 60

6. Resolución de hiperestáticos sencillos 61
   6.1. Formulación general 61
   6.2. Casos de aplicación 63
   6.3. Tablas de momentos de empotramiento para diversos estados de solicitación 74

7. Bibliografía consultada. 75

   Anexo. Tablas. 76

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO III

METODO DE LAS FUERZAS

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO III

METODO DE LAS FUERZAS

1. INTRODUCCION A LA RESOLUCION DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS.

En las modernas construcciones de hormigón armado o metálicas, son usuales las estructuras complicadas, con numerosos vínculos superabundantes, tanto exteriores como interiores.

Uno de los objetivos del Análisis Estructural es poder resolver cualquier estructura hiperestática, sea cual fuere el número de incógnitas estáticamente indeterminadas que la misma presente. Sin embargo, en la práctica, cuando estas incógnitas son numerosas, corrientemente conviene abandonar los métodos clásicos, que resultarían extremadamente laboriosos, para recurrir a métodos específicos, incomparablemente más sencillos e igualmente exactos.

En el apartado 5.4. del Capítulo I se evalúan las ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas, mientras que en el apartado 6.3. se efectúa un análisis crítico confrontando los métodos denominados "clásicos", entre los que se cuentan el método de las fuerzas y el de los desplazamientos, y los métodos matriciales modernos, que se tratarán en los Capítulos V y VI.

La amplitud con que será tratado el presente tema está justificada, además de la base conceptual involucrada, la que sirve de sustento a los restantes métodos, por el hecho que el estudio de estructuras con muchas incógnitas hiperestáticas constituye con frecuencia para el proyectista una seria dificultad, que puede reducirse notablemente por la elección del método más conveniente para resolver cada problema. En efecto. Generalmente cada método es adecuado para ciertos tipos de estructuras, e inadecuado para otras. Por consiguiente, no es conveniente disponer de un método único para todos los casos posibles, ya que con frecuencia se torna artificioso y pierde sus características específicas de simplicidad.

Como métodos fundamentales de cálculo de los sistemas estáticamente indeterminados se consideran el **método de las fuerzas** o de las **incógnitas estáticas**, donde por incógnitas se toman *acciones* (fuerzas y/o pares) y el **método de los desplazamientos** o de las **incógnitas elásticas**, donde por incógnitas se toman los *desplazamientos* angulares y lineales de los nudos del sistema. Los dos métodos están ligados por una idea común, que consiste en que el cálculo se efectúa sobre un sistema básico, obtenido a partir de la estructura dada, y en que además, ambos arriban a la resolución de las incógnitas por medio de la formulación de un sistema de ecuaciones.

1.1. Generalización del Método de las Fuerzas.

En el **método de las fuerzas**, el sistema básico se obtiene excluyendo los vínculos superabundantes (interiores y/o de apoyo), de modo tal que el sistema obtenido resulte simple y accesible para determinar en él los esfuerzos y los desplazamientos, aplicando los métodos estudiados en el Capítulo II. Ante todo, tal sistema básico será un sistema estáticamente determinado, al que se denomina *isostático equivalente*.

Por cuanto, en las condiciones dadas, "superabundantes" se pueden considerar distintos vínculos, entonces el sistema básico en el método de las fuerzas, no es único, sino que pueden ser varios, y por lo general, diferentes entre sí. Por ejemplo, las figuras 1b), c) y d) muestran distintos sistemas básicos a que se puede reducir la estructura hiperestática que se indica en la figura 1a). La eliminación de los vínculos superfluos debe ser efectuada en forma tal que el sistema básico sea siempre estable, tanto en su conjunto como en cada una de sus partes.

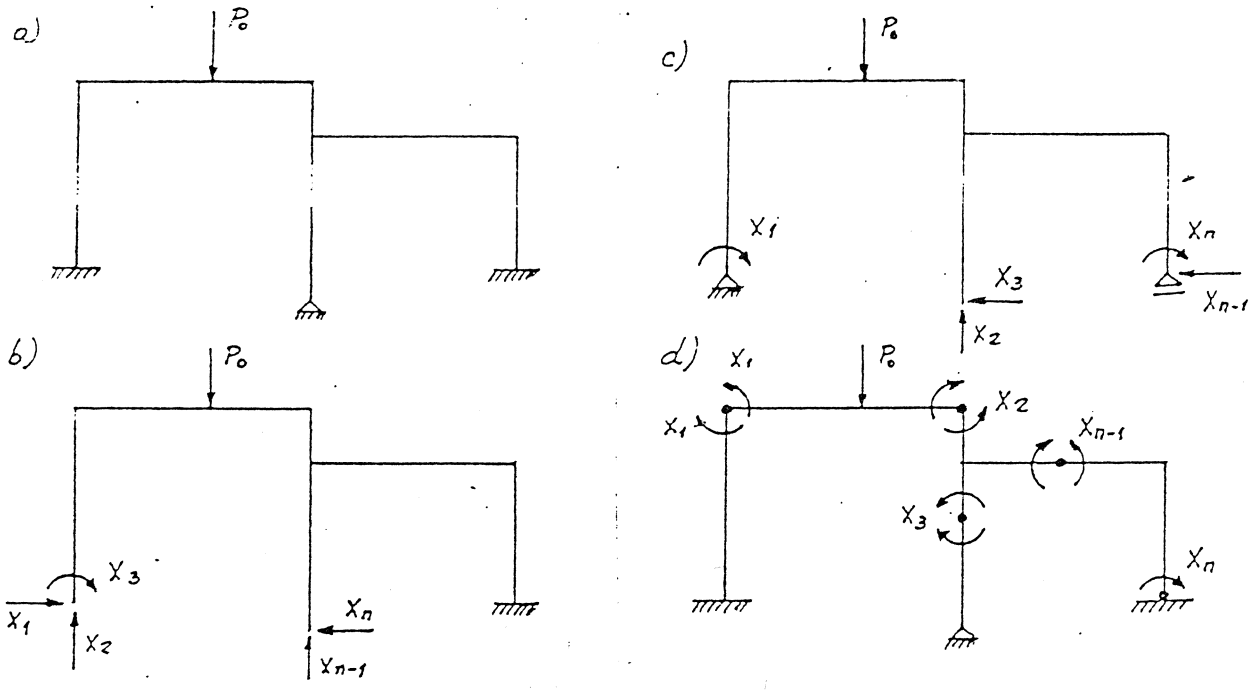


Figura 1

Al sistema isostático equivalente, además del sistema exterior de cargas P_o, en lugar de los vínculos eliminados, se le aplican las reacciones incógnitas de los mismos X_1, X_2, ... X_n, sujetas a determinación, las cuales se llaman *incógnitas básicas* o *fundamentales* del método de las fuerzas.

Los valores de las reacciones X_1, X_2, ... X_n deberán ser tales que los desplazamientos en sus respectivas direcciones, en el sistema isostático equivalente, sean iguales a los

desplazamientos correspondientes en el hiperestático original. En estas condiciones, el sistema básico no se diferenciará de la estructura dada.

Si los vínculos eliminados son rígidos (o continuos en el caso de los interiores), los desplazamientos en sus direcciones en el sistema original son iguales a cero, lo que puede expresarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 (P_o, X_1, X_2, \ldots X_n) = 0 \\ &\Delta_2 (P_o, X_1, X_2, \ldots X_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Delta_n (P_o, X_1, X_2, \ldots X_n) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

donde cada ecuación corresponde a la suma de los desplazamientos en la dirección indicada por el subíndice, debidos sucesivamente a cada una de las acciones consignadas entre paréntesis.

Si los vínculos eliminados fuesen deformables, los desplazamientos en sus direcciones en el sistema original no son iguales a cero y se determinan por las deformaciones de los vínculos, debiéndose entonces igualar la ecuación respectiva al valor correspondiente del desplazamiento. Ejemplo de este caso sería una barra superabundante que se suprima (figura 2b), del reticulado hiperestático de la figura 2a).

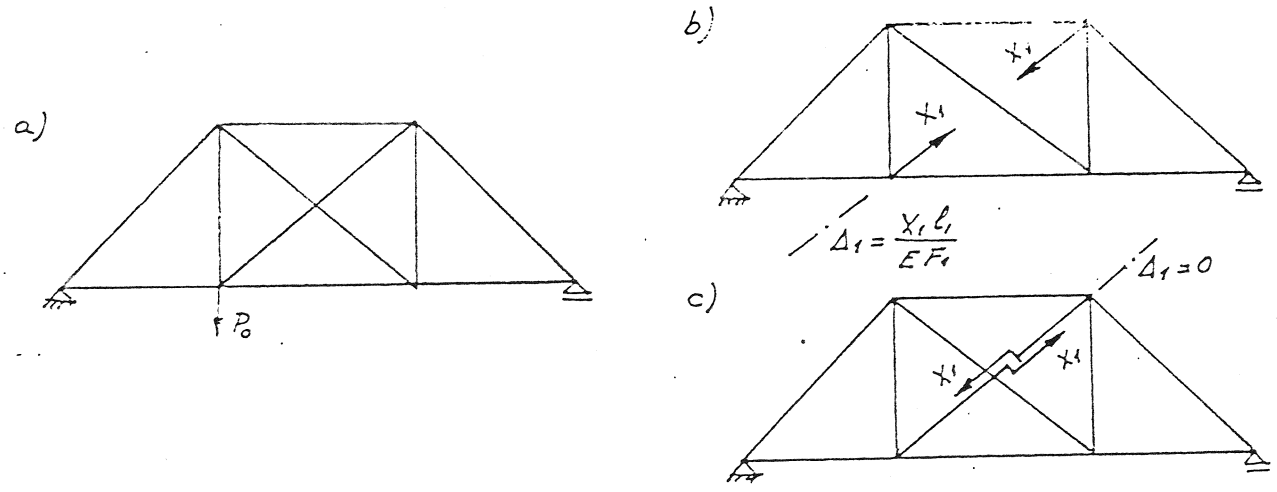


Figura 2

Sin embargo, aún en este caso, las ecuaciones (1) pueden ser empleadas en la forma planteada si el vínculo flexible no se elimina, sino que se secciona y sus reacciones incógnitas se aplican en el corte efectuado, en forma de dos fuerzas (figura 2c). En este caso el desplazamiento en la dirección de la incógnita será el desplazamiento relativo entre las caras seccionadas del vínculo, que es siempre nulo.

Las ecuaciones del sistema (1) son las ecuaciones básicas del método de las fuerzas, válidas para cualquiera de las fases de trabajo de la estructura.

1.2. Grado de indeterminación estática.

La indeterminación estática de una estructura fue tratada en el apartado 5.2. del Capítulo I (a cuyo contenido se remite), quedando definida por medio del denominado **grado de hiperestaticidad** de la estructura, que se corresponde con el total de vínculos superabundantes que la misma presenta, cantidad que coincide con el número de ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos que es necesario plantear para resolver estructuras hiperestáticas por el método de las fuerzas.

En el apartado 5.3. del mismo Capítulo, se expusieron los criterios para la determinación del valor del grado de hiperestaticidad, llegándose a la siguiente expresión básica

$$X = I - E$$

siendo $I = I_e + I_i$ la cantidad de componentes reactivas (exteriores más interiores) desconocidas y E la cantidad de ecuaciones de equilibrio estático.

Si se denomina mediante Vs a la cantidad de vínculos simples a que equivalen los vínculos de apoyo (exteriores) que presenta la estructura; por B al número de barras solicitadas sólo por esfuerzos axiles; por $A^{(1)}$ a las articulaciones de primera especie; por R a la cantidad de recintos cerrados o uniones rígidas; por $A^{(2)}$ a las articulaciones de segunda especie; por N el número de chapas y por V al número de vértices a los que convergen dos o más barras, aplicando los conceptos expuestos en los mencionados apartados del Capítulo I

$$I = Vs + B + 2.A^{(1)} + 3.R + 4.A^{(2)} \quad ; \quad E = 3.N + 2.V$$

En consecuencia se tendrá como expresión general

$$X = Vs + B + 2.A^{(1)} + 3.R + 4.A^{(2)} - (3.N + 2.V) \qquad (2)$$

la que adoptará las siguientes formas particulares:

a) Estructuras compuestas por una única chapa.

En este caso E = 3, e I es igual a la cantidad de incógnitas de vínculo, equivalente a Vs. En consecuencia

$$X = Vs - 3 \qquad (3)$$

b) Cadenas cinemáticas abiertas.

Si se denomina por A el número de articulaciones entre chapas con que cuenta una cadena cinemática constituida por N chapas, por Estática E = 3 + A, dado que las condiciones de nulidad de la suma de momentos de las acciones obrantes a un lado de cada

articulación se constituyen en ecuaciones complementarias, y como además, para cadenas abiertas es: A = N - 1, resulta

$$X = Vs - (3 + N - 1) = Vs - (N + 2) \qquad (4)$$

A igual resultado se hubiera llegado aplicando directamente la expresión general (2)

$$X = Vs + 2.A^{(1)} - 3.N = Vs + 2.(N - 1) - 3.N = Vs - (N + 2)$$

c) Reticulados.

Para estructuras de barras, será I = Vs + B, y E = 2.V; luego

$$X = Vs + B - 2.V \qquad (5)$$

d) Estructuras cerradas.

Si se tiene una estructura continua, ya sea formando un marco o un entramado rígido, limitado por ejemplo, por dos vigas y dos columnas, su resolución no puede ser encarada por medio de los postulados de la Estática, al no tenerse un origen para calcular las solicitaciones internas M, N y Q y su variación, lo que equivale que a cada recinto cerrado R que presente una estructura, le corresponden 3 incógnitas hiperestáticas, constituidas por las 3 componentes de las solicitaciones internas en una sección cualquiera del recinto. También puede interpretarse esta sección en la que se efectúa la determinación como una unión rígida.

En consecuencia, siendo las ecuaciones de equilibrio estático disponibles iguales a 3 (una única chapa), se tendrá que

$$X = Vs + 3.R - 3 = (Vs - 3) + 3.R \qquad (6)$$

e) Caso general de estructuras de alma llena.

La expresión de aplicación resulta, al ser B = V = 0

$$X = Vs + 2.A^{(1)} + 3.R + 4.A^{(2)} - 3.N \qquad (7)$$

2. FORMULACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA EL CALCULO.

2.1. Elección del sistema isostático equivalente.

Tal como se expresara en el apartado anterior, en el método de las fuerzas al sistema hiperestático dado se le suprimen los vínculos superabundantes, sustituyéndolos por las correspondientes fuerzas y momentos, que se constituyen en las incógnitas del método. La magnitud de estas fuerzas y momentos se escoge de manera tal que los desplazamientos correspondan a las limitaciones que los vínculos retirados imponen al sistema dado.

Para cualquier estructura hiperestática se pueden elegir, como norma general, un número infinito de sistemas básicos. Por ejemplo, en el caso del pórtico de la figura 3a), que constituye

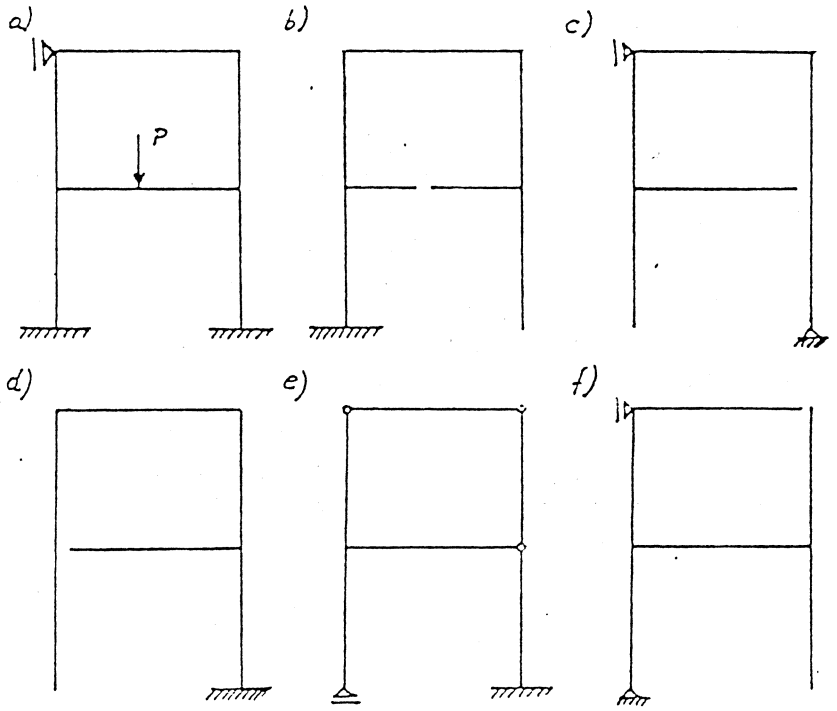


Figura 3

un hiperestático de grado 7 (empleando la (6) con Vs = 7 y R = 1), pueden proponerse entre muchos otros, los isostáticos equivalentes que muestran las figuras 3b) a 3f), que se obtuvieron suprimiendo siete vínculos superabundantes en diversas combinaciones.

Cabe observar que en los isostáticos equivalentes de las figuras b), c), d) y f), se verifica en todos los casos, por aplicación directa de la (3) que X = 0, mientras que para el conformado en la figura 3e), por la (7) resulta

$$X = Vs + 2.A^{(1)} + 3.R + 4.A^{(2)} - 3.N = 4 + 4 + 0 + 4 - 12 = 0$$

Debe tenerse muy en cuenta que no todo sistema liberado en 7 vínculos puede ser admitido como isostático equivalente. En las figuras 4a), b) y c) se indican tres ejemplos correspondientes al mismo pórtico, en los cuales también se eliminan 7 vínculos, pero

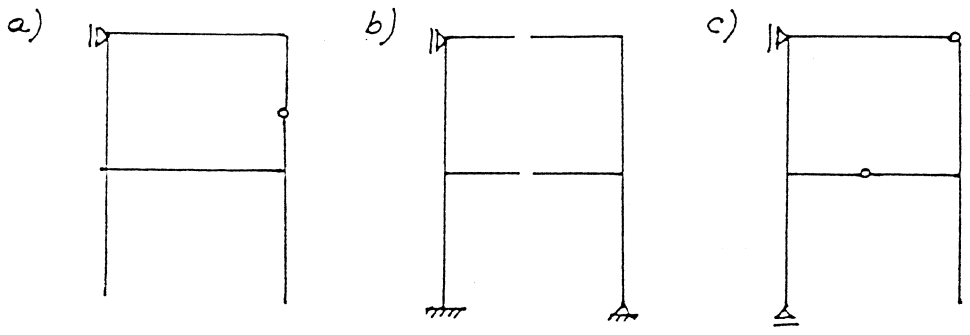


Figura 4

de manera incorrecta, puesto que los vínculos remanentes no garantizan la estabilidad del sistema, por una parte, y la isostaticidad de todas las partes, por otra.

Una vez eliminados los vínculos adicionales y convertido el sistema en isostático, es necesario introducir en su lugar los factores de fuerza desconocidos. En los puntos en los que en la estructura primitiva no existen desplazamientos lineales se colocan fuerzas y en las secciones donde no existen rotaciones, momentos. Tanto en un caso como en el otro, los factores de fuerza desconocidos se designarán por X_i, variando *i* de *1* a *n*, siendo *n* el número de incógnitas, el que coincide con el grado de hiperestaticidad de la estructura. Obsérvese que en el caso de los vínculos interiores, las acciones X_i son mutuas, es decir que si se secciona una barra del pórtico en un plano determinado, deben aplicarse fuerzas y momentos iguales, pero de sentidos opuestos, tanto a la parte izquierda como a la parte derecha de la barra.

En las figuras 5b) a f) se representan cinco maneras posibles de aplicar las acciones incógnitas, las que se corresponden con los sistemas básicos de las figuras 3b) a f).

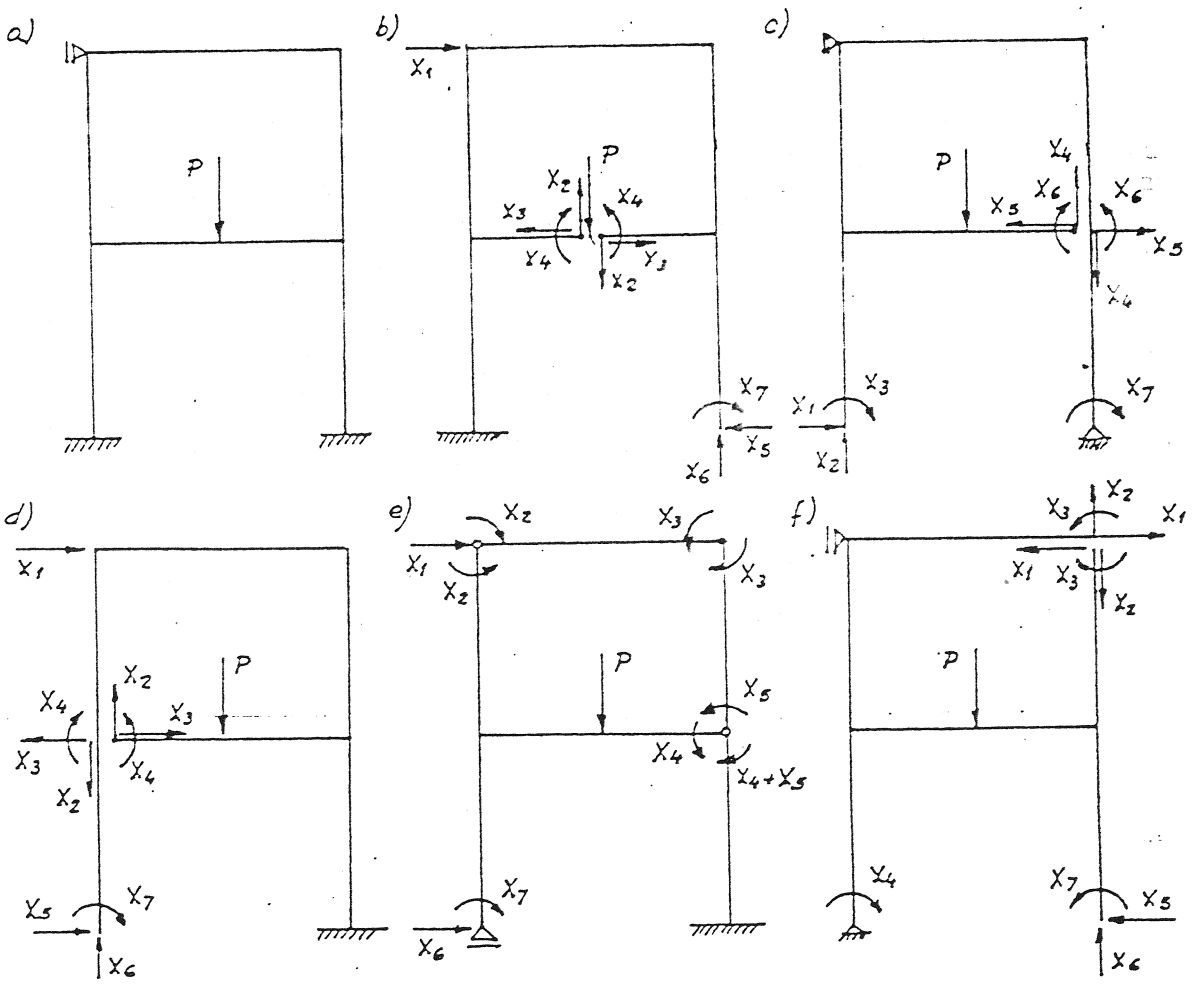


Figura 5

2.2. Planteo de las ecuaciones de compatibilidad.

El criterio general que guía la formulación del sistema de ecuaciones fundamentales o ecuaciones canónicas del método de las fuerzas fue expuesto en el apartado 1.1., por lo que se lo analizará tomando como base una aplicación concreta.

Sea la estructura biempotrada que muestra la figura 6a), sometida a la acción de un sistema exterior de cargas cualquiera (P_o). Se trata evidentemente de una estructura hiperestática de tercer grado. Para poner en evidencia las incógnitas y dejar constituido el sistema isostático equivalente, se suprime, por ejemplo, el empotramiento A, y en su reemplazo se colocan las reacciones que en el mismo genera el sistema P_o, o sea X_1, X_2 y X_3, que serán las incógnitas hiperestáticas del problema (figura 6b). La estructura así puesta de manifiesto es equivalente a la de la figura 6a).

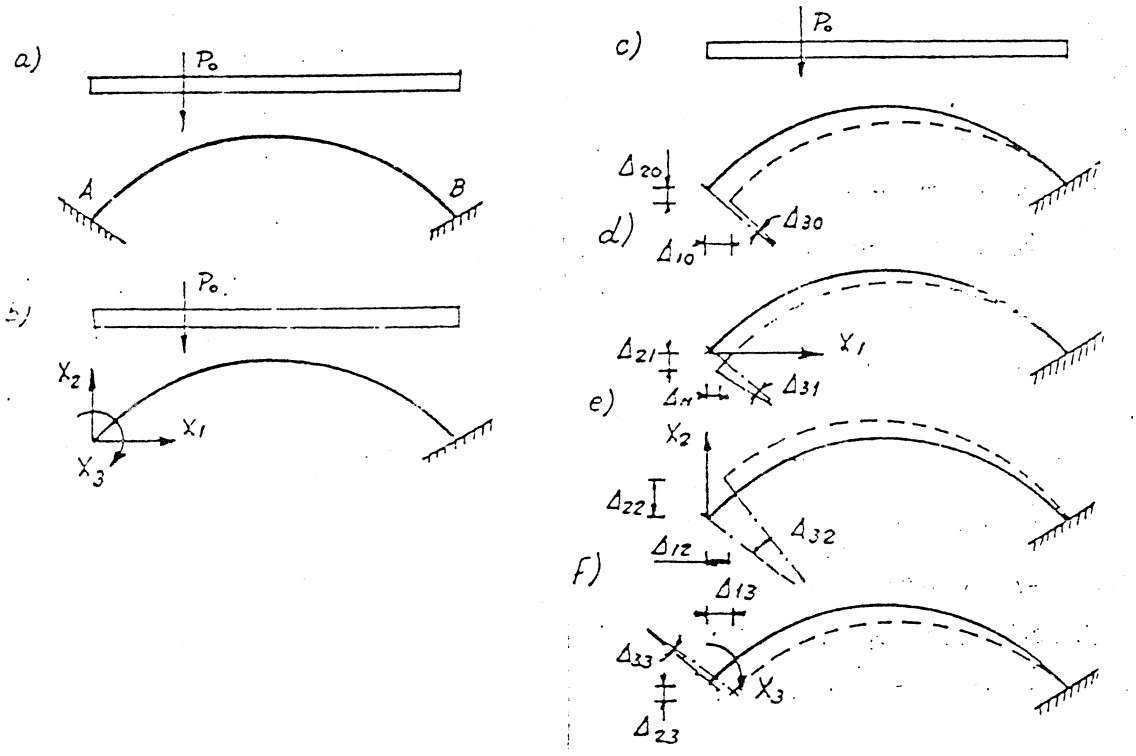


Figura 6

Para formular el sistema de ecuaciones de compatibilidad se aplicará el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos.

Primeramente se supone $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, o sea, que se hace actuar sobre la estructura únicamente el sistema exterior de cargas (figura 6c). En estas condiciones el isostático equivalente se deformará y en la dirección de las incógnitas se producirán desplazamientos que valdrán, respectivamente, Δ_{1o}, Δ_{2o} y Δ_{3o} (Debe

recordarse que siempre el primer subíndice indica "en la dirección de la incógnita ..." y el segundo indica "debido a la acción de ...". Así Δ_{1o} debe leerse "Desplazamiento producido en la dirección de la incógnita X_1 debido a la acción del sistema exterior de cargas P_o").

Siguiendo con la aplicación del principio de independencia de las acciones y como segundo paso, se elimina el sistema exterior de cargas y se aplica como única acción exterior actuante, la incógnita X_1 con su verdadero valor (figura 6d), estado que producirá respectivamente, los desplazamientos Δ_{11}, Δ_{21} y Δ_{31}, según la dirección de cada incógnita.

Análogamente, en forma independiente y sucesiva se aplican las incógnitas X_2 y X_3 (figuras 6e) y f), que dan lugar en cada caso a los desplazamientos que se indican en las respectivas figuras.

Aplicando ahora la superposición de los efectos, se observa que la suma de los estados representados en las figuras 6c), d), e) y f), es equivalente a la estructura en su estado original. En consecuencia, pueden escribirse las ecuaciones de compatibilidad como suma de los desplazamientos producidos en cada dirección por cada una de las causas actuantes. Es decir que:

$$\begin{aligned} &\text{- En la dirección 1:} && \Delta_{1o} + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} = 0 \\ &\text{- En la dirección 2:} && \Delta_{2o} + \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} = 0 \\ &\text{- En la dirección 3:} && \Delta_{3o} + \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Cada suma de desplazamientos es igual a cero porque el empotramiento, como vínculo rígido, impide todo corrimiento o rotación en su plano.

Se observa en el sistema planteado, que si bien puede calcularse el primer sumando de cada ecuación, no puede hacerse lo propio con los desplazamientos restantes, que son función de los verdaderos valores de las incógnitas, los que obviamente se desconocen de antemano. Para levantar esta indeterminación, se proceden a aplicar, en forma sucesiva, valores unitarios de las incógnitas y a determinar los desplazamientos que en cada caso los mismos producen, los que se indican en las figuras 7a), b) y c), y que se denominarán δ_{ik}.

Considerando un desplazamiento cualquiera, Δ_{11} por ejemplo, el mismo será igual al desplazamiento δ_{11} que produce una acción unitaria, por el verdadero valor de dicha acción. O sea

$$\Delta_{11} = \delta_{11}.X_1$$

Análogamente $\Delta_{12} = \delta_{12}.X_2$; $\Delta_{13} = \delta_{13}.X_3$

y en las restantes direcciones:

$\Delta_{21} = \delta_{21}.X_1$; $\Delta_{22} = \delta_{22}.X_2$; $\Delta_{23} = \delta_{23}.X_3$

$\Delta_{31} = \delta_{31}.X_1$; $\Delta_{32} = \delta_{32}.X_2$; $\Delta_{33} = \delta_{33}.X_3$

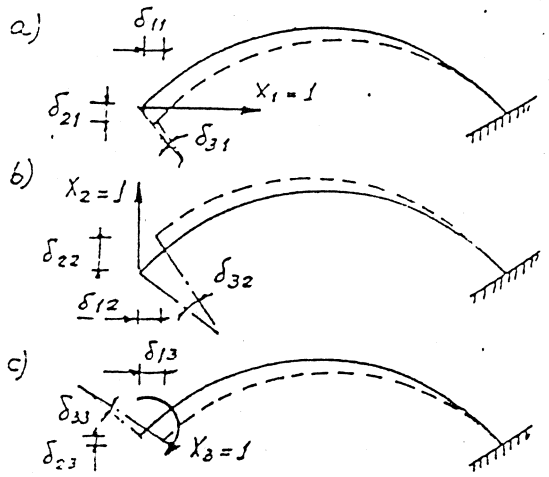


Figura 7

Reemplazando valores en el sistema de ecuaciones (8) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 &= 0 \\ \Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 &= 0 \\ \Delta_{3o} + \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Estas ecuaciones son definitivas y se denominan **ecuaciones de compatibilidad** o ecuaciones canónicas del método de las fuerzas. El número de ecuaciones coincide con el grado de hiperestaticidad de la estructura.

A pesar que la formulación de las ecuaciones se efectuó para un caso particular, los criterios empleados para plantearlas son completamente generales. Por ejemplo, para el caso de la estructura de la figura 5a), suponiendo las incógnitas establecidas en la figura 5b), para X_1, X_5, X_6 y X_7 el criterio es idéntico al expuesto. Para las solicitaciones internas X_2, X_3 y X_4, se aplicarán en cada caso sistemas de fuerzas o pares unitarios (según corresponda) iguales y contrarios y se determinará el desplazamiento (corrimiento o giro) relativo entre ambas secciones extremas que limitan el seccionamiento efectuado en el miembro estructural.

2.3. Determinación de los coeficientes.

Para formular el sistema de ecuaciones (9), es necesario calcular el valor de todos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes.

Ya se expresó en la demostración anterior, que todos estos coeficientes y términos son desplazamientos (absolutos o relativos), por lo que pueden ser calculados utilizando cualquiera de los procedimientos estudiados al efecto en el Capítulo II.

Si por ejemplo, se aplica el Teorema de los Trabajos Virtuales, deberán (para la estructura de la figura 6), trazarse

los diagramas de momentos flectores (y de esfuerzos normales y de corte, si deben ser considerados) de la estructura isostática equivalente, para los estados de carga siguientes: P_o; $X_1 = 1$; $X_2 = 1$ y $X_3 = 1$, aplicando luego las expresiones conocidas. Se observa que en diversos casos, el sistema deformante para un determinado estado coincide exactamente con el sistema no deformante de otro. Además, del teorema de Maxwell se deduce directamente la igualdad de los desplazamientos recíprocos, o sea que siempre $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, lo que reduce la cantidad de coeficientes a calcular.

De lo anterior surge también la importancia que adquiere una adecuada elección del isostático equivalente, dado que en algunos casos pueden resultar más fáciles de determinar y con trazados más sencillos, los diagramas de solicitaciones internas (en especial los de momentos flectores), lo que traerá como consecuencia una integración más directa, reduciendo cálculos y paralelamente, posibilidades de cometer errores.

3. RESOLUCION DE VIGAS CONTINUAS.

3.1. Conceptos generales.

Se denomina **viga continua** a una viga hiperestática, de alma llena, con tres o más puntos de sustentación y que, por consiguiente, cubre un mínimo de dos tramos, sin presentar interrupción alguna en su forma estructural. En su concepción más general, se considera que todos los apoyos son móviles, menos uno, constituido por una articulación fija, para impedir el desplazamiento horizontal de la viga (figura 8a). Los extremos de la viga pueden hallarse en coincidencia con dos apoyos, en cuyo caso se trata de una viga continua simple, o bien pueden presentarse uno o ambos extremos en voladizo (figura 8b). Como casos particulares, la viga puede tener uno (o ambos) extremos empotrados (figura 8c).

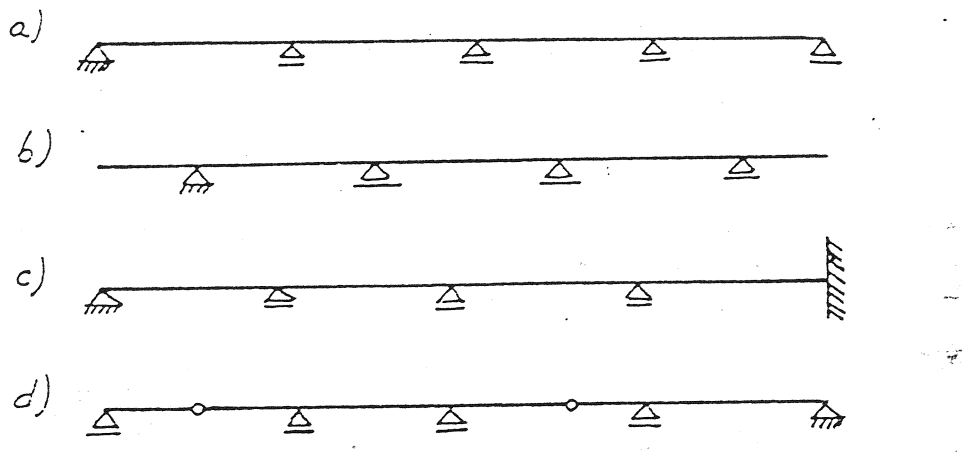


Figura 8

Tratándose de una única chapa, el grado de indeterminación estática puede ser hallado por la (3), o sea X = Vs - 3. Cabe observar que para el caso más general (un apoyo fijo articulado y los restantes apoyos móviles, figuras 8a) y b), el número de incógnitas hiperestáticas es igual al número de vínculos intermedios que presente la viga continua.

Si se introducen articulaciones en una viga continua (figura 8c), cada una de ellas disminuye el grado de indeterminación en una unidad. En este caso, al convertirse la estructura en una cadena cinemática abierta, su grado de hiperestaticidad se determina por la expresión (4).

Las vigas continuas resultan más económicas que una serie de tramos independientes, ya que a igualdad de longitudes y de cargas, están sometidas a momentos flectores menores; además presentan mayor rigidez a la acción de cargas dinámicas. Por el contrario, como todas las estructuras hiperestáticas, son sensibles a los descensos de los apoyos, que pueden alterar de modo peligroso sus condiciones estáticas, incrementando notoriamente los momentos flectores; por ello, deben evitarse en el caso de terrenos poco seguros. A pesar de ser estructuras hiperestáticas, las solicitaciones internas no se hallan influidas por una variación uniforme de temperatura, como consecuencia de la presencia de los apoyos móviles, mientras que sí lo están por las variaciones no uniformes de temperatura en la altura de la viga.

La característica fundamental de este tipo de vigas la constituye la continuidad de su línea elástica, la que en ningún punto presenta cambios bruscos de inclinación (figura 9).

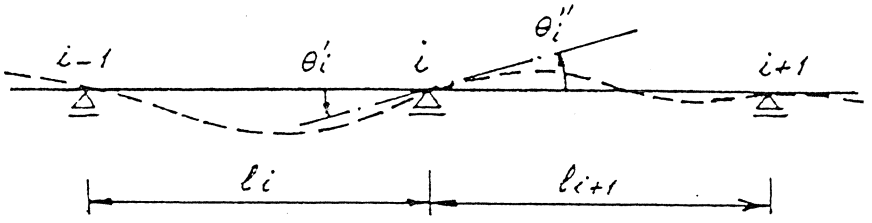


Figura 9

El ángulo de deformación θi' del extremo derecho del tramo l_i sobre el apoyo i, es igual y opuesto por el vértice al θ_i'', del extremo izquierdo del tramo l_{i+1} sobre el mismo apoyo.

La suposición clásica de considerar que en las vigas continuas sólo uno de los apoyos es fijo y todos los demás móviles, generalmente no se ajusta al estado real de vinculación de la viga, excepto algunos casos en estructuras de puentes. En la mayoría de las situaciones prácticas, las vigas están unidas a sus apoyos, formando pórticos múltiples. Si las columnas son relativamente flexibles, puede prescindirse, con cierta aproximación, de su resistencia a la flexión, y considerar una viga sobre apoyos que pueden trasladarse y girar, permitiendo la

adopción de tal esquema teórico, una notable simplificación de los procedimientos de cálculo, el que se inclina bajo esta hipótesis, para la viga continua, hacia el lado de la seguridad.

3.2. Discusión sobre la elección del isostático equivalente.

Al sólo efecto de simplificar las figuras y la nomenclatura de las expresiones resultantes, se efectuará el análisis sobre una viga continua de 4 tramos, de las características que se indican en la figura 10a), siendo luego fácilmente extrapolables las conclusiones que se obtengan a vigas continuas de cualquier número de vanos.

3.2.1. Eliminación de los apoyos intermedios.

Una primera forma que surge para constituir el sistema básico, puede ser obtenida eliminando todos los apoyos intermedios, adoptando como incógnitas hiperestáticas las reacciones de dichos vínculos (figura 10b).

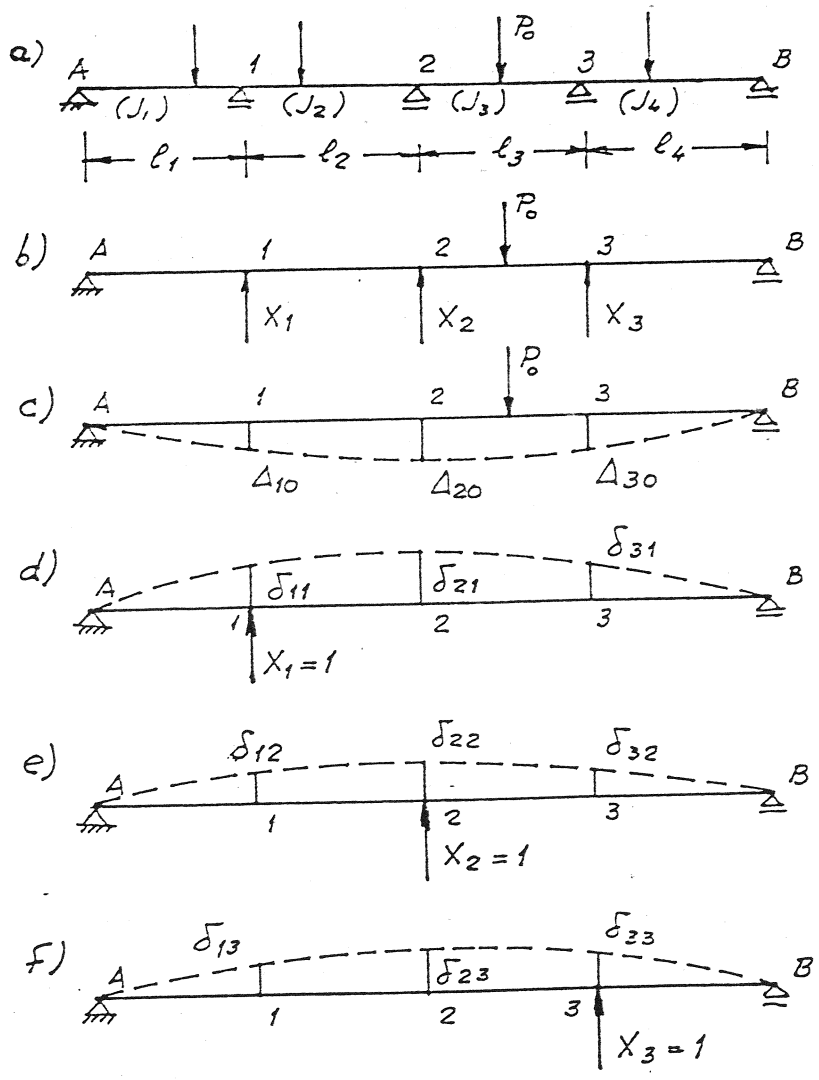


Figura 10

Siguiendo para este caso, paso a paso, el procedimiento general expuesto en el apartado 2.2. y que queda puesto de manifiesto en las figuras 10c) a f), puede plantearse un sistema de ecuaciones idéntico al (9), reflejando las mencionadas figuras todos los desplazamientos que corresponden, tanto a los términos independientes como a los coeficientes de las incógnitas.

Se observa en las figuras 10c) a f), que para el sistema básico adoptado, tanto el sistema exterior de cargas P_o, como todos los sistemas $X_1 = 1$, originan desplazamientos lineales en la dirección de la totalidad de las incógnitas, y en consecuencia, todos los términos y coeficientes de las ecuaciones de compatibilidad serán distintos de cero y el sistema de ecuaciones será completo.

Otro inconveniente que presenta la adopción de este isostático equivalente se deriva de la configuración que presentan los diversos diagramas de momentos flectores, por lo que su integración resulta de desarrollo bastante complicado y poco menos que imposible de generalizar.

Un tercer problema surge del hecho que, como resultado, se obtienen las reacciones de vínculo, por lo que para dimensionar o verificar la viga, es necesario efectuar cálculos complementarios para la obtención de los valores característicos que permitan el trazado del diagrama de momentos flectores requerido a tales fines.

3.2.1. Articulación de las secciones ubicadas sobre los apoyos intermedios.

Todos los inconvenientes precedentemente referidos pueden salvarse conformando el isostático equivalente introduciendo articulaciones sobre los apoyos intermedios (sin eliminar los mismos) y adoptando como incógnitas básicas los momentos flectores que en tales secciones se producen, tal como se indica en la figura 11a), referida a la misma viga continua de la figura 10a). Teniendo en cuenta que la estructura se ha convertido en una cadena cinemática abierta, resulta en tales condiciones, aplicando la expresión (4), que $X = 6 - (4 + 2) = 0$. Así, la viga continua inicialmente dada, se transforma en un sistema de vigas simples de un solo tramo, unidas en los apoyos mediante articulaciones. Esto trae como consecuencia directa, que las deformaciones producidas en un tramo no se transmiten a los tramos adyacentes.

Las figuras 11b) a 11e) refieren el proceso de aplicación del principio de independencia de las acciones al hacer actuar sobre este sistema básico los estados de carga P_o y $X_1 = 1$.

Para calcular los desplazamientos que en la dirección de las incógnitas se producen para el isostático equivalente adoptado, tanto los Δ_{1o} bajo la acción de las cargas exteriores, como los δ_{1k} debidos a las incógnitas consideradas con valor unitario, debe tenerse en cuenta lo anteriormente expresado, en el sentido que para cada apoyo intermedio, las dos vigas que concurren al mismo se deforman independientemente una de la otra.

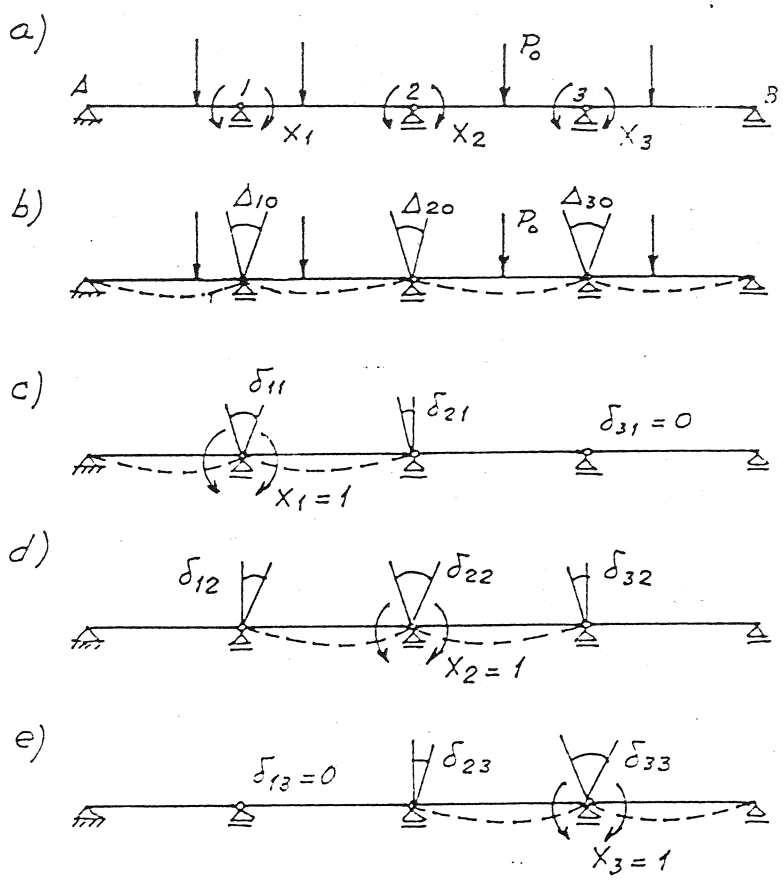


Figura 11

Como consecuencia de lo anterior, las secciones extremas de dos vigas contiguas que limitan a una articulación, sustentada sobre el apoyo i por ejemplo (figura 12), pueden girar individualmente un cierto ángulo Δ_i' y Δ_i'', resultando el giro relativo entre ambas $\Delta_i = \Delta_i' + \Delta_i''$.

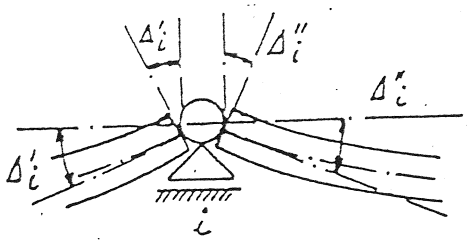


Figura 12

Como en la viga continua hiperestática inicial, por sus condiciones de continuidad, cada par de tales secciones constituyen una sección única, se desprende que su ángulo de giro relativo debe ser nulo. Esta consideración permite la formulación del sistema de ecuaciones de compatibilidad, que siguen manteniendo la conformación de las (9).

Se observa, con la adopción de este sistema básico, que si bien las cargas exteriores P_o pueden producir deformaciones en la totalidad de las direcciones incógnitas, los sucesivos estados $X_1 = 1$, deforman únicamente a los dos tramos contiguos a ambos lados del apoyo donde se halla aplicada la acción unitaria, originando así desplazamientos sólo en dos direcciones para las incógnitas extremas (X_1 y X_3 en este caso) y en tres direcciones consecutivas para las incógnitas intermedias, siendo los restantes valores de δ_{1k} iguales a cero cuando la viga tenga cinco tramos o más. Así, generalizando el sistema (9) para cualquier número de incógnitas, la primera y la última ecuación tendrán sólo dos coeficientes δ_{1k} distintos de cero, mientras que todas las intermedias contarán con sólo tres coeficientes en tales condiciones. De esta manera las ecuaciones canónicas serán incompletas, simplificando su resolución.

Una segunda ventaja que brinda este sistema básico es que los diagramas de momentos flectores son independientes por tramos. Por otra parte, los debidos a las acciones $X_1 = 1$ son siempre triangulares con valor unitario en un extremo y cero en el otro, constituyendo diagramas de integración sumamente sencilla e inmediata, lo que además permite generalizar su resolución, tal como se analizará en los apartados 3.3. y 3.4.

Finalmente, otro factor que avala la adopción de este sistema básico, es que como incógnitas se obtienen directamente los momentos flectores en los apoyos, que son generalmente los máximos que se producen en la estructura, permitiendo así un inmediato dimensionado de la misma o la verificación del predimensionado efectuado.

3.2.2.1. Convención de signos.

Se considerarán positivas las rotaciones que implican descensos de las vigas, adoptándose el signo negativo para el caso contrario (figura 13a). En consecuencia, los Δ_{1o} y los δ_{1k} serán positivos cuando la rotación relativa tenga su abertura hacia arriba y negativos cuando la misma se oriente hacia abajo.

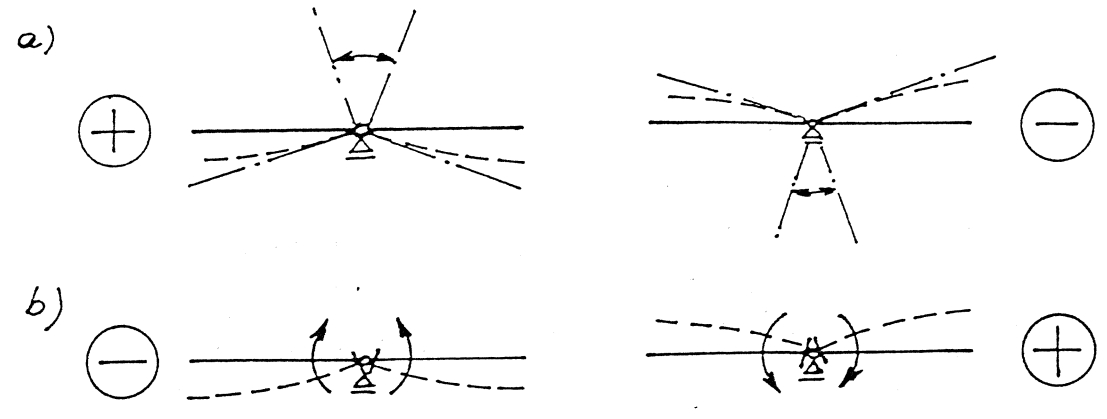


Figura 13

Para analizar los signos de los momentos flectores que se producen en cada caso en la estructura continua real (figura 13b), debe considerarse que en el primer caso (secciones que tienden a abrirse hacia arriba o sea fibras traccionadas en la parte superior), los pares que corresponden a los momentos flectores generados se dirigen también hacia arriba, pues deben impedir la formación de la abertura, lo que equivale a un momento flector *negativo* en la sección. Por el contrario, en el segundo caso (secciones que tienden a abrirse hacia abajo o sea fibras traccionadas en la parte inferior), los pares que corresponden a los momentos flectores desarrollados deberán dirigirse también hacia abajo, lo que equivale a un momento flector *positivo* en la sección.

Como consecuencia de lo anterior, se observa que si para los sistemas de pares X_1 que constituyen las incógnitas se adoptan los sentidos indicados en la figura 11a), o sea hacia abajo, el signo resultante para las incógnitas a partir de la resolución algebraica del sistema de ecuaciones, coincidirá con el signo del momento flector a que tales incógnitas corresponden, eliminando toda confusión respecto a signos. Por tal motivo se adoptará este criterio en lo sucesivo.

3.3. Ecuación de los tres momentos.

Por idénticos motivos a los expresados en el apartado 3.2. se efectuará la demostración sobre una viga continua de 4 tramos, tal como la de la figura 10a). Se supondrá momento de inercia (J_1) constante en cada tramo y que para la determinación de los desplazamientos se desprecia la influencia del esfuerzo de corte.

Se examinarán dos tramos contiguos, el segundo y el tercero, de la viga continua (figura 14a), mostrando la figura 14b) el isostático equivalente adoptado en base a las consideraciones precedentemente efectuadas. La ecuación que liga las tres incógnitas presentes en tales tramos es la segunda del sistema (9), es decir

$$\Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = 0 \qquad (10)$$

En las figuras 14c), d) y e) se han construido los diagramas de momentos imprescindibles para la determinación de los coeficientes de las incógnitas, la que se efectuará aplicando el TTV. En esta primera etapa del desarrollo, el término independiente Δ_{2o} será pasado al segundo miembro.

Para el cálculo de δ_{21}, la acción deformante la constituye el sistema de pares $X_1 = 1$, cuyo diagrama de momentos, en su parte atinente, está representado en la figura 14c), mientras que el sistema auxiliar corresponde al de las acciones $X_2 = 1$, cuyo diagrama de momentos se halla indicado en la figura 14d). Efectuando la integración pertinente

$$\delta_{21} = \frac{l_2}{6\ E.J_2} \qquad (11)$$

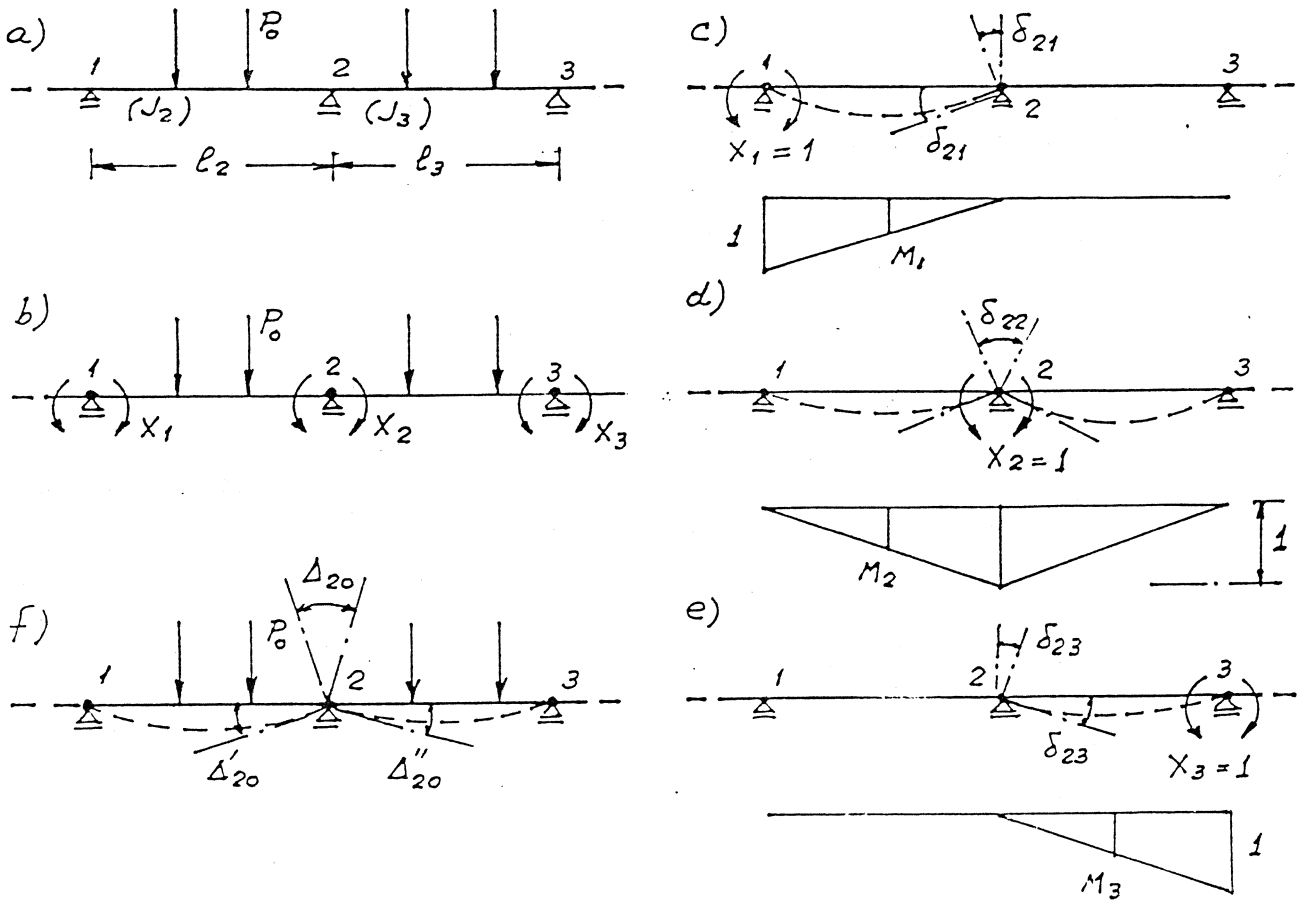


Figura 14

Para la determinación de δ_{23}, el sistema deformante está constituido por las acciones $X_3 = 1$, con diagrama de momentos representado en la figura 14e), coincidiendo por su parte el sistema auxiliar con el del caso anterior

$$\delta_{23} = \frac{l_3}{6\ E.J_3} \qquad (12)$$

Finalmente, para calcular el valor de δ_{22}, el sistema deformante corresponde a las acciones $X_2 = 1$ aplicadas en 2, cuyo diagrama de momentos corresponde al de la figura 14d), mientras que el sistema no deformante es análogo al del cálculo de los desplazamientos anteriores, y que en este caso coincide con el sistema deformante en cuanto a su conformación, y por ende, con su diagrama de momentos

$$\delta_{22} = \frac{l_2}{3\ E.J_2} + \frac{l_3}{3\ E.J_3} \qquad (13)$$

Reemplazando los valores dados por las (11), (12) y (13) en la ecuación general (10)

$$\frac{l_2}{6\ E.J_2} X_1 + \left(\frac{l_2}{3\ E.J_2} + \frac{l_3}{3\ E.J_3}\right) X_2 + \frac{l_3}{6\ E.J_3} X_3 = -\Delta_{20} \qquad (14)$$

Eligiendo un momento de inercia de comparación J_o, y multiplicando miembro a miembro la (14) por 6 E.J_o, se obtiene

$$l_2.\frac{J_o}{J_2} X_1 + 2.(l_2.\frac{J_o}{J_2} + l_3.\frac{J_o}{J_3}) X_2 + l_3.\frac{J_o}{J_3} X_3 = - 6\ E.J_o.\Delta_{2o}$$

Llamando $J_o/J_1 = r_1$ y: $l_1.r_1 = \rho_1$, resulta

$$\rho_2.X_1 + 2.(\rho_2 + \rho_3).X_2 + \rho_3.X_3 = - 6\ E.J_o\Delta_{2o} \qquad (15)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación de Clapeyron** o **ecuación de los tres momentos**, dado que relaciona tres momentos incógnitos correspondientes a otros tantos apoyos sucesivos.

Para su aplicación práctica, resta efectuar la determinación del valor de Δ_{2o}, que es el giro relativo entre las secciones que limitan a la articulación introducida en el apoyo 2 (figura 14f), y que resultará $\Delta_{2o} = \Delta_{2o}' + \Delta_{2o}''$.

Observando la figura 15, en la que se han separado los tramos 1-2 y 2-3 para mayor claridad, resulta que, por aplicación del segundo teorema de Mohr es

$$\Delta_{2o}' = R_{2der}^* \qquad y \qquad \Delta_{2o}'' = R_{3izq}^*$$

Para establecer sus valores se trazan los diagramas de momentos producidos en cada tramo por el sistema de cargas P_o, de los que se calculan sus respectivas áreas A_2 y A_3, se determinan sus centros de gravedad G_2 y G_3 y las distancias de éstos a los apoyos, a_2 y b_2 para el tramo 1-2 y a_3 y b_3 para el tramo 2-3.

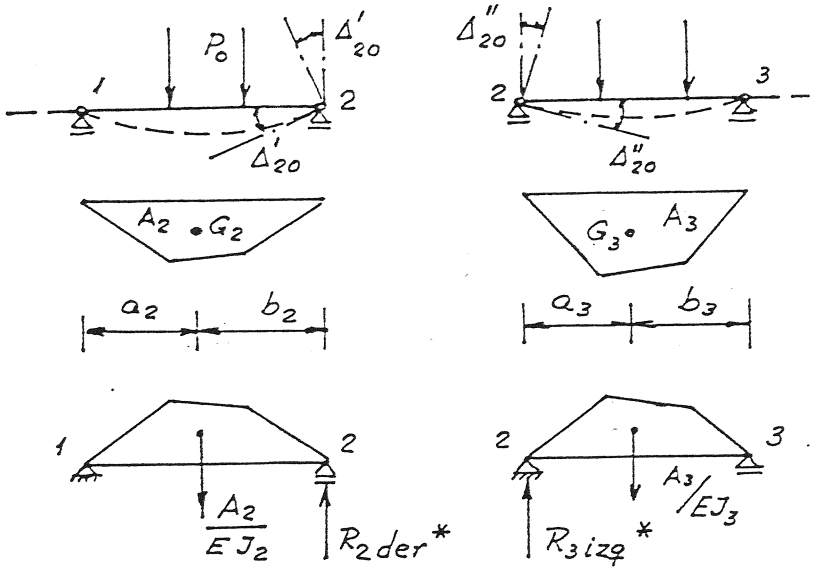


Figura 15

Para calcular los valores de R_{2der}^* y R_{3izq}^*, deberán conformarse las correspondientes vigas conjugadas (figura 15), y tomar momentos respecto a 1 para el tramo 1-2 y respecto a 3 para el tramo 2-3, lo que permite despejar

$$\Delta_{2o}' = R_{2der}^* = \frac{A_2.a_2}{E.J_2.l_2} \quad ; \quad \Delta_{2o}'' = R_{3izq}^* = \frac{A_3.b_3}{E.J_3.l_3}$$

Recordando que $\Delta_{2o} = \Delta_{2o}' + \Delta_{2o}''$, y considerando los valores precedentes, el término independiente de la (15) se transforma en

$$- 6\ E.J_o.\Delta_{2o} = - 6\ E.J_o.\frac{A_2.a_2}{E.J_2.l_2} - 6\ E.J_o.\frac{A_3.b_3}{E.J_3.l_3}$$

Simplificando E, y teniendo en cuenta que $J_o/J_1 = r_1$

$$- 6\ E.J_o.\Delta_{2o} = - \frac{6\ A_2.a_2.r_2}{l_2} - \frac{6\ A_3.b_3.r_3}{l_3}$$

Finalmente, en el segundo miembro puede multiplicarse y dividirse el primer sumando por l_2 y el segundo por l_3, y como $l_1.r_1 = \rho_1$, resulta en definitiva

$$- 6\ E.J_o.\Delta_{2o} = - \frac{6\ A_2.a_2}{(l_2)^2}.\rho_2 - \frac{6\ A_3.b_3}{(l_3)^2}.\rho_3 \qquad (16)$$

Aparecen en esta expresión los parámetros

$$R = \frac{6\ A.a}{l^2} \quad ; \quad L = \frac{6\ A.b}{l^2} \qquad (17)$$

a los que se denomina **términos de carga**, y que dependen sólo del sistema de cargas actuante y de la luz de la viga. Su valor corresponde a los séxtuplos de las reacciones de la viga cargada con el diagrama de momentos de la carga externa, divididos por la luz l. El término de carga que se denomina con *R* se refiere a la reacción del extremo derecho de la viga, mientras que *L* identifica a la reacción del extremo izquierdo.

En la Tabla N° 1 del Anexo del presente Capítulo se consignan los valores de los términos de carga L y R, para los estados de carga numerados en la Tabla N° 5 del Capítulo II.

LLevando, con los subíndices correspondientes, los valores dados por las (17) a la expresión (16), el término independiente se transforma en

$$- 6\ E.J_o.\Delta_{2o} = - R_2.\rho_2 - L_3.\rho_3$$

Efectuando el reemplazo en la (15). se obtiene la expresión final de la ecuación de los tres momentos para vigas continuas. para los dos tramos contiguos analizados

$$\rho_2.X_1 + 2.(\rho_2 + \rho_3).X_2 + \rho_3.X_3 = - R_2.\rho_2 - L_3.\rho_3 \qquad (18)$$

Si se diese el caso particular (bastante frecuente) de que toda la viga tuviese la misma sección, sería J = cte., resultando en consecuencia: $r_1 = 1$, y: $\rho_1 = l_1.r_1 = l_1$, con lo que la ecuación toma la forma

$$l_2.X_1 + 2.(l_2 + l_3).X_2 + l_3.X_3 = - R_2.l_2 - L_3.l_3 \qquad (19)$$

De esta expresión se desprende que la resolución de una viga continua de sección constante puede ser efectuada sin necesidad de realizar previamente el predimensionado de la misma.

Extendiendo el concepto a una viga continua con cualquier número de tramos, y teniendo en cuenta que de acuerdo a las discusiones precedentes, como máximo sólo tres coeficientes de incógnitas consecutivas son distintos de cero, puede expresarse la ecuación general de los tres momentos para los tramos (i-1 ; i) e (i ; i+1), de longitudes l_i y l_{i+1} respectivamente, de la siguiente manera

$$\rho_i.X_{i-1} + 2.(\rho_i + \rho_{i+1}).X_i + \rho_{i+1}.X_{i+1} = - R_i.\rho_i - L_{i+1}.\rho_{i+1} \qquad (20)$$

y para una viga continua de sección constante

$$l_i.X_{i-1} + 2.(l_i + l_{i+1}).X_i + l_{i+1}.X_{i+1} = - R_i.l_i - L_{i+1}.l_{i+1} \qquad (21)$$

3.3.1. Casos particulares en el empleo de la ecuación de los tres momentos.

La formulación del sistema de ecuaciones por este método se efectúa en forma mecánica, sin necesidad de pasar por los distintos pasos propios del método de las fuerzas (formar el isostático equivalente, trazar los diagramas de momentos, integrarlos, etc.), dependiendo sólo de las condiciones de los extremos de la viga. Se analizan a continuación los diversos casos que al respecto pueden presentarse.

3.3.1.1. Apoyos articulados en los extremos.

Para estos casos la ecuación de los tres momentos puede ser formulada en forma directa tantas veces cuantas sean las ternas de apoyos consecutivos; esto es, como es fácil reconocer, cuantos apoyos intermedios, o sea momentos incógnitos, existan. Por consiguiente, se obtiene un sistema de *n* ecuaciones lineales no homogéneas con *n* incógnitas, que resuelve el problema. La primera y la última ecuación de este sistema contienen sólo dos incógnitas, ya que $M_A = M_B = 0$.

Así por ejemplo, en el caso de una viga sobre seis apoyos, por ende con 4 incógnitas (figura 16), se tiene, aplicando sucesivamente la (20)

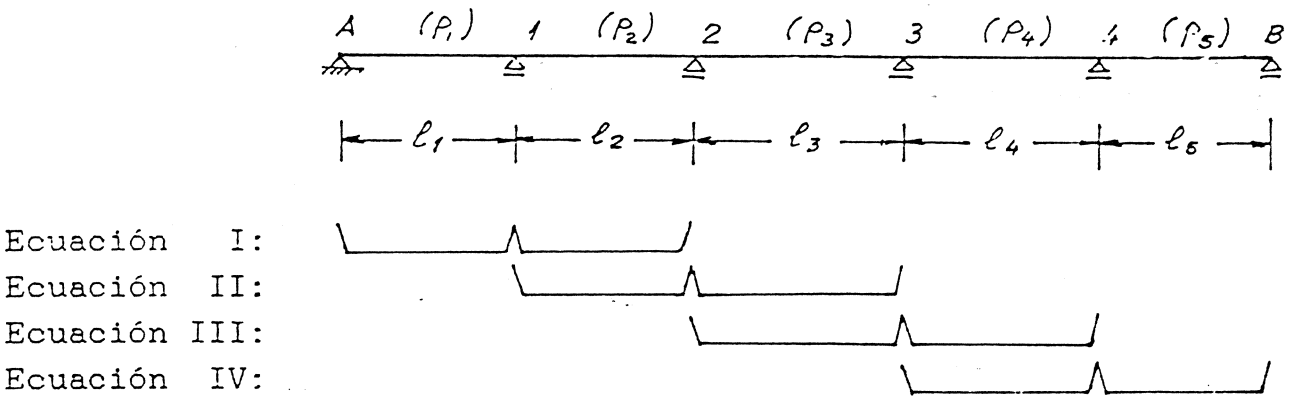


Figura 16

Tramo A-1-2: $2.(\rho_1 + \rho_2).X_1 + \rho_2.X_2 = - R_1.\rho_1 - L_2.\rho_2$

Tramo 1-2-3: $\rho_2.X_1 + 2.(\rho_2 + \rho_3).X_2 + \rho_3.X_3 = - R_2.\rho_2 - L_3.\rho_3$

Tramo 2-3-4: $\rho_3.X_2 + 2.(\rho_3 + \rho_4).X_3 + \rho_4.X_4 = - R_3.\rho_3 - L_4.\rho_4$

Tramo 3-4-B: $\rho_4.X_3 + 2.(\rho_4 + \rho_5).X_4 = - R_4.\rho_4 - L_5.\rho_5$

3.3.1.2. Viga continua con voladizos.

Si la viga posee voladizos (figura 17a), pueden eliminarse los mismos, sustituyendo su acción por los pares correspondientes (figura 17b) y formulando luego las ecuaciones de los tres momentos para una viga cuyos extremos descansan sobre apoyos.

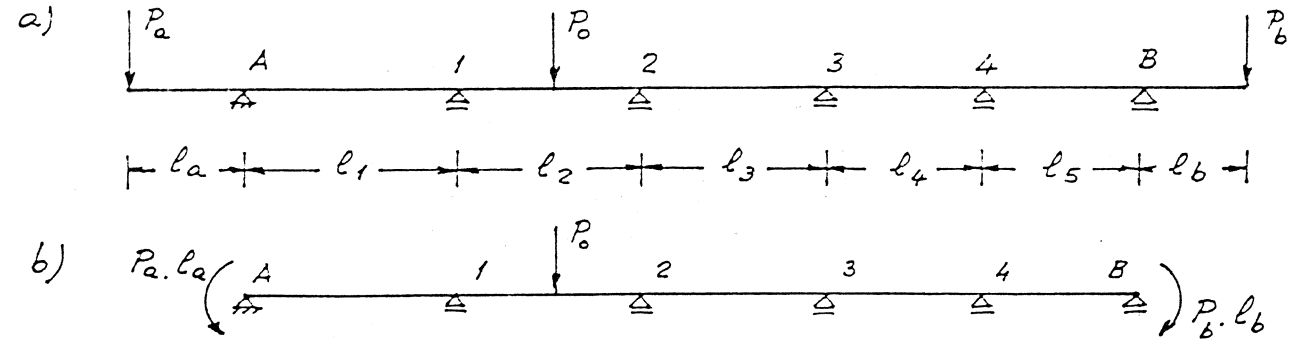


Figura 17

Para el caso de la figura 17, por ejemplo, es $M_A = P_a.l_a$, y $M_B = P_b.l_b$. Además, al plantear el sistema de ecuaciones fundamentales (de conformación análoga al desarrollado en el apartado anterior), en el cálculo de los valores de R_1 y de L_{n+1} (L_5 para la viga de la figura), deberán considerarse a los pares $P_a.l_a$ y $P_b.l_b$, respectivamente, como acciones exteriores (casos 39 y 40 en la Tabla N° 1), cuyo efecto debe agregarse al del sistema de cargas P_o directamente aplicado sobre los tramos extremos.

3.3.1.3. Viga continua con extremos empotrados.

Sean l_0 y l_1 los dos tramos iniciales (0-A y A-1), de una viga continua simplemente apoyada en sus extremos (figura 18a).

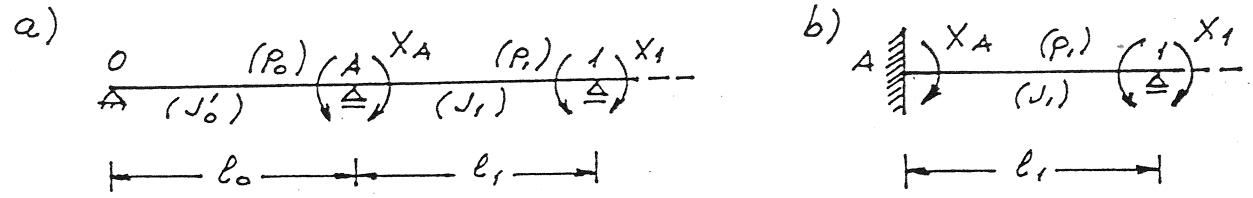


Figura 18

Para la misma, la primera ecuación de los tres momentos toma la forma

$$2.(\rho_0 + \rho_1).X_A + \rho_1.X_1 = - R_0.\rho_0 - L_1.\rho_1 \qquad (22)$$

Teniendo presente que

$$\rho_0 = r_0.l_0 = \frac{J_0}{J'_0}.l_0$$

y si se considera que J'_0 es infinitamente grande, resulta $\rho_0 = 0$. Esto equivale a que la deformación en el tramo 0-A será nula y la viga continua tendrá en empotramiento perfecto en A (figura 18b). En virtud de ello la ecuación (22) se reduce a

$$2.\rho_1.X_A + \rho_1.X_1 = - L_1.\rho_1 \quad \text{o bien:} \quad 2.X_A + X_1 = - L_1 \qquad (23)$$

En consecuencia, cada empotramiento extremo equivale a una incógnita adicional, y por ende, hace necesario plantear igual número de ecuaciones complementarias de los tres momentos, del tipo de la (23). Para la formulación de las mismas se supone la presencia, externamente al empotramiento, de un tramo ficticio en el que $\rho_0 = 0$, y se aplica la ecuación general (20) o (21) según el caso.

A nivel de ejemplo, supóngase la viga continua de la figura 16, pero con los extremos A y B empotrados, lo que introduce como incógnitas también a X_A y X_B. El sistema de ecuaciones en tal caso resultará

Tramo A-1: $2.X_A + X_1 = - L_1$

Tramo A-1-2: $\rho_1.X_A + 2.(\rho_1 + \rho_2).X_1 + \rho_2.X_2 = - R_1.\rho_1 - L_2.\rho_2$

Tramo 1-2-3: $\rho_2.X_1 + 2.(\rho_2 + \rho_3).X_2 + \rho_3.X_3 = - R_2.\rho_2 - L_3.\rho_3$

Tramo 2-3-4: $\rho_3.X_2 + 2.(\rho_3 + \rho_4).X_3 + \rho_4.X_4 = - R_3.\rho_3 - L_4.\rho_4$

Tramo 3-4-B: $\rho_4.X_3 + 2.(\rho_4 + \rho_5).X_4 + \rho_5.X_B = - R_4.\rho_4 - L_5.\rho_5$

Tramo 4-B : $X_4 + 2.X_B = - R_5$

3.3.2. Efecto de la variación de temperatura.

Tal como se expresara en el apartado 3.1., las solicitaciones internas en una viga continua se hallan influenciadas sólo en caso de una variación de temperatura no uniforme en la altura de la viga, como consecuencia de las restricciones que los apoyos intermedios imponen a la libre deformación de la estructura.

Si se supone que la temperatura experimenta un incremento Δt_s en el trasdós de la viga y Δt_i en el intradós, considerando además que $\Delta t_i > \Delta t_s$, al plantear la ecuación canónica de un par de dos tramos consecutivos (por ejemplo los tramos genéricos 1-2 y 2-3, figura 19a) y prescindiendo del sistema exterior de cargas eventualmente actuante, se tiene que

$$\Delta_{2t} + \delta_{21}.X_{1t} + \delta_{22}.X_{2t} + \delta_{23}.X_{3t} = 0 \qquad (24)$$

donde el subíndice t indica en cada caso que las incógnitas X o el desplazamiento Δ son debidos al efecto de la variación de temperatura.

Analizando las figuras 14c), d) y e) se observa que los desplazamientos δ_{21}, δ_{22} y δ_{23} no modifican su expresión, pues son independientes de la acción deformante.

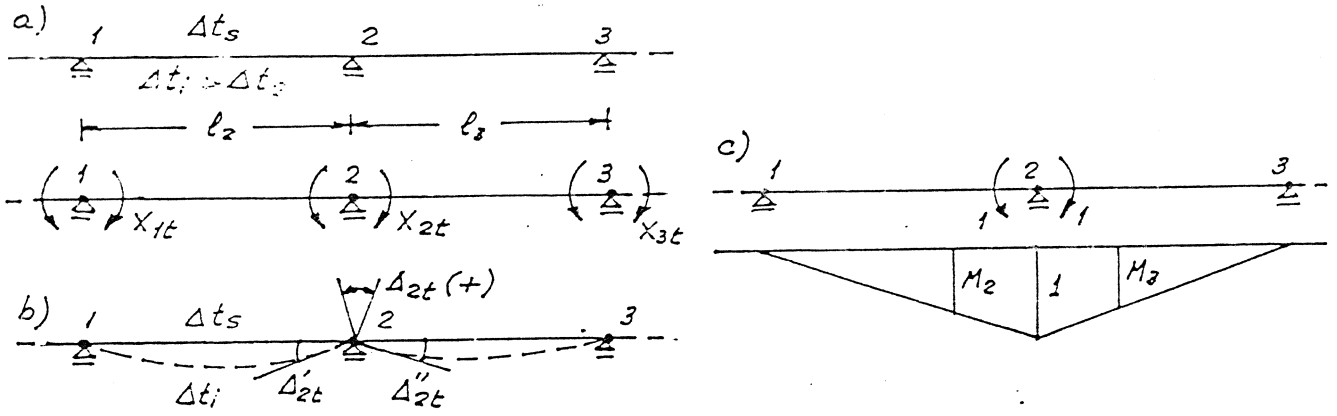


Figura 19

En cambio, para calcular el término independiente Δ_{2t}, considerando las figuras 19b) y 19c), donde se indican, respectivamente, el sistema deformante constituido por la variación de temperatura y el no deformante, correspondiente al sistema de pares unitarios aplicados en la dirección del desplazamiento relativo que se desea calcular, resulta

$$\Delta_{2t} = \Delta'_{2t} + \Delta''_{2t} = \int_0^{l_2} M_2.d\theta_2 + \int_0^{l_3} M_3.d\theta_3$$

donde M_2 y M_3 indican las ordenadas del diagrama de momentos flectores del sistema auxiliar en los tramos indicados, mientras que los valores de $d\theta$, suponiendo que la sección transversal de la viga sea rectangular, están dados por la (34) del Capítulo II

$$d\theta_2 = \frac{\alpha.(\Delta t_1 - \Delta t_3)}{d_2}.dx \quad ; \quad d\theta_3 = \frac{\alpha.(\Delta t_1 - \Delta t_3)}{d_3}.dx$$

En estas expresiones d_2 y d_3 son las alturas de la sección transversal de la viga en los tramos 1-2 y 2-3, respectivamente. Llamando a $\Delta t_1 - \Delta t_3 = \Delta t$, se tiene

$$\Delta_{2t} = \int_0^{l_2} M_2.\frac{\alpha.\Delta t.dx}{d_2} + \int_0^{l_3} M_3.\frac{\alpha.\Delta t.dx}{d_3} =$$

$$= \alpha.\Delta t.(\frac{1}{d_2}\int_0^{l_2} M_2.dx + \frac{1}{d_3}\int_0^{l_3} M_3.dx)$$

y teniendo en cuenta las leyes de variación de M_2 y M_3

$$\Delta_{2t} = \alpha.\Delta t.(\frac{1.l_2}{2.d_2} + \frac{1.l_3}{2.d_3}) = \frac{\alpha.\Delta t}{2}.(\frac{l_2}{d_2} + \frac{l_3}{d_3}) \qquad (25)$$

Reemplazando en la expresión general (24), y teniendo en cuenta los valores de δ_{21}, δ_{22} y δ_{23} deducidos respectivamente según las (11), (13) y (12), se tiene

$$\frac{l_2}{6\,E.J_2} X_{1t} + (\frac{l_2}{3\,E.J_2} + \frac{l_3}{3\,E.J_3}) X_{2t} + \frac{l_3}{6\,E.J_3} X_{3t} =$$

$$= -\frac{\alpha\Delta t}{2}.(\frac{l_2}{d_2} + \frac{l_3}{d_3})$$

Siguiendo análogo criterio al adoptado en el desarrollo general, en el sentido de elegir un momento de inercia de comparación J_o; y llamar $J_o/J_1 = r_1$, y: $l_1.r_1 = \rho_1$, resulta, multiplicando además por $6\,E.J_o$

$$l_2.\frac{J_o}{J_2} X_{1t} + 2.(l_2.\frac{J_o}{J_2} + l_3.\frac{J_o}{J_3}) X_{2t} + l_3.\frac{J_o}{J_3} X_{3t} =$$

$$= -\frac{6\,E.J_o.\alpha.\Delta t}{2}.(\frac{l_2}{d_2} + \frac{l_3}{d_3})$$

$$\rho_2.X_{1t} + 2.(\rho_2+\rho_3).X_{2t} + \rho_3.X_{3t} = -3\,E.J_o.\alpha.\Delta t.(\frac{l_2}{d_2} + \frac{l_3}{d_3}) \qquad (26)$$

expresión general de la ecuación de los tres momentos para los tramos l_2 y l_3 cuando se produce una variación no uniforme de temperatura.

Si la sección es uniforme para toda la viga, será J = cte, resultando también $d_2 = d_3$, transformándose la ecuación en

$$l_2.X_{1t} + 2.(l_2 + l_3).X_{2t} + l_3.X_{3t} = -\frac{3\ E.J.\alpha.\Delta t}{d}.(l_2 + l_3) \quad (27)$$

3.3.2.1. Discusión sobre los signos y la forma del diagrama de M_t.

Las variaciones no uniformes de temperatura pueden producirse bajo dos situaciones, a saber: que $\Delta t_1 > \Delta t_3$ o que $\Delta t_1 < \Delta t_3$.

En el primer caso (figura 19), el ángulo correspondiente al giro relativo Δ_{2t} abre hacia arriba, o sea que de acuerdo a la convención de signos adoptada será positivo, y como también lo son los ángulos δ_{21}, δ_{22} y δ_{23}, el segundo miembro será negativo, tal como surgió para las (26) y (27), y al resolver el sistema de ecuaciones se obtendrá para todas las incógnitas X_{1t} signo negativo.

En el segundo caso, con $\Delta t_3 > \Delta t_1$ (figura 20), la variación térmica curva los tramos del isostático equivalente hacia arriba; en consecuencia el ángulo Δ_{2t} abre hacia abajo y será negativo. En virtud de ello pasa al segundo miembro como positivo y deberá cambiarse el signo de dicho miembro respecto al indicado en las (26) y (27). Al resolver el sistema de ecuaciones, las incógnitas X_{1t} resultarán todas con signo positivo.

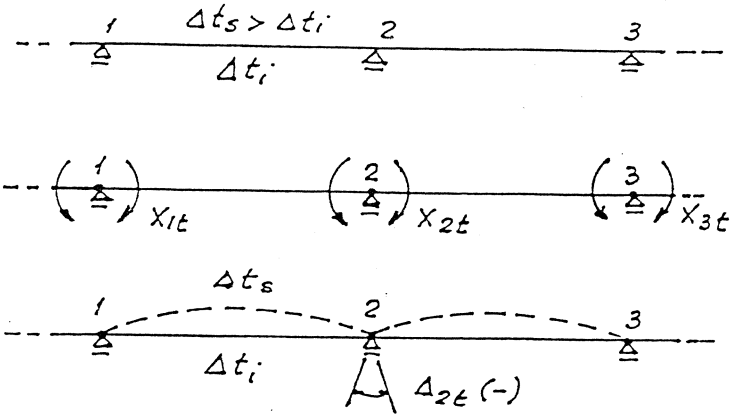


Figura 20

El signo que toman las incógnitas hiperestáticas puede ser deducido también directamente, considerando la forma que deben tener las elásticas de deformación de las vigas continuas reales, que para los dos casos considerados, se muestran respectivamente en las figuras 21a) y b). En efecto, cuando $\Delta t_1 > \Delta t_3$, en las secciones ubicadas sobre los apoyos intermedios, se hallan

traccionadas las fibras superiores, lo que implica en la misma la presencia de momentos flectores negativos. Lo contrario ocurre en el segundo caso.

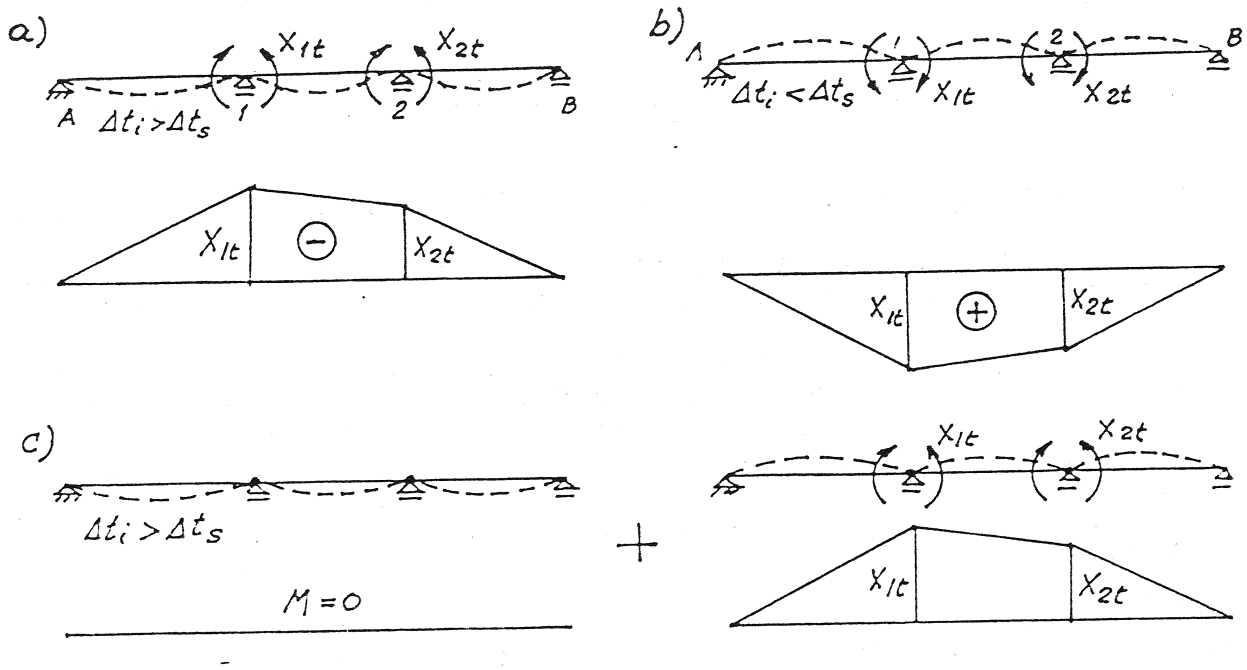


Figura 21

Las citadas figuras indican para cada uno de los dos casos, las configuraciones que adoptan los diagramas de momentos flectores. Para interpretar los mismos frente a la forma de las respectivas elásticas de deformación, cabe tener presente el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos, aplicado sobre el isostático equivalente. Al actuar sobre éste la variación térmica (cualquiera sea su sentido), si bien cada tramo adquiere una determinada curvatura (figura 21c), referida al caso de la figura 21a), la misma no se halla restringida por los vínculos, por lo que no se originan momentos flectores. Al superponer a este estado la acción de las incógnitas hiperestáticas X_{it} (siempre sobre el isostático equivalente), éstas producen un diagrama de momentos como el indicado en la figura, y como el mismo debe ser sumado a un diagrama nulo, se corresponderá con el diagrama total resultante.

En conclusión, debe tenerse presente que las variaciones de temperatura, al actuar sobre estructuras isostáticas, si bien las deforman, no originan solicitaciones internas (deformaciones sin tensión); mientras que en el caso de las estáticamente indeterminadas, sí se presentarán solicitaciones internas, que serán, únicamente, las producidas por las reacciones hiperestáticas. En otras palabras, las solicitaciones internas aparecen sólo cuando la libre deformabilidad de la estructura frente a una acción térmica se halla restringida por la presencia de vínculos superabundantes.

3.3.3. Efecto del descenso de apoyos.

Si no todos los apoyos de la viga continua se encuentran a un mismo nivel, sino que tiene lugar el desplazamiento vertical de alguno de ellos, surgirán en la viga solicitaciones adicionales, que pueden alcanzar valores significativos, cuya magnitud dependerá de la diferencia entre las cotas de los planos de apoyo y de la rigidez de la viga, incrementándose a medida que aumenta cada uno de los factores señalados. En este caso la ecuación general toma la forma

$$\Delta_{2s} + \delta_{21}.X_{1s} + \delta_{22}.X_{2s} + \delta_{23}.X_{3s} = 0 \qquad (28)$$

donde el subíndice *s* indica en cada caso que las incógnitas X o el desplazamiento Δ son debidos al efecto de descenso de apoyos.

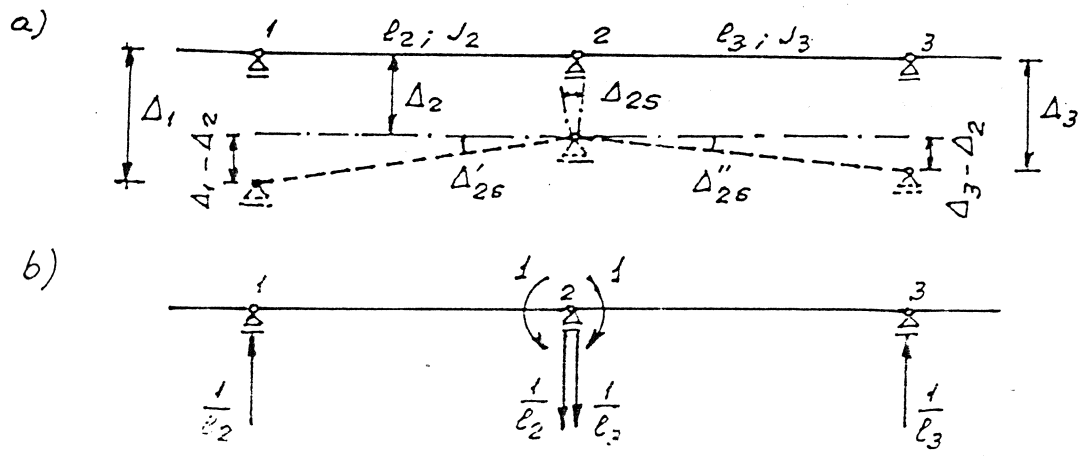


Figura 22

Para el caso de descenso de apoyos que indica la figura 22a)

$$\Delta_{2s} = \Delta'_{2s} + \Delta''_{2s} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{l_3} \qquad (29)$$

con lo que la ecuación de los tres momentos toma la forma

$$\frac{l_2}{6\,E.J_2} X_{1s} + \left(\frac{l_2}{3\,E.J_2} + \frac{l_3}{3\,E.J_3}\right) X_{2s} + \frac{l_3}{6\,E.J_3} X_{3s} = - \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{l_3}\right)$$

O bien, procediendo como en los casos anteriores

$$\rho_2.X_{1s} + 2.(\rho_2+\rho_3).X_{2s} + \rho_3.X_{3s} = - 6\,E.J_o.\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{l_3}\right) \qquad (30)$$

Para J = cte, la expresión de aplicación resulta

$$l_2.X_{1s} + 2.(l_2+l_3).X_{2s} + l_3.X_{3s} = -\ 6\ E.J.\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{l_3}\right) \qquad (31)$$

El valor de Δ_{2s} dado por la (29) puede ser obtenido también mediante la aplicación del TTV. En tal caso, el sistema deformante es el indicado en la figura 22a), mientras que el sistema auxiliar y las reacciones que el mismo produce, se consignan en la figura 22b). En este caso el trabajo interno de deformación es nulo, por lo que el trabajo de las acciones exteriores será

$$1.\Delta_{2s} - \frac{1}{l_2}.\Delta_1 + \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right).\Delta_2 - \frac{1}{l_3}.\Delta_3 = 0$$

Despejando Δ_{2s} y agrupando términos

$$\Delta_{2s} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{l_3}$$

3.3.4. Caso general.

Si la viga continua se halla solicitada simultáneamente por un sistema exterior de cargas, una variación no uniforme de temperatura y se producen descensos de apoyos, la ecuación i-ésima toma la expresión general

$$\rho_i.X_{i-1} + 2.(\rho_i + \rho_{i+1}).X_i + \rho_{i+1}.X_{i+1} = -\ R_i.\rho_i - L_{i+1}.\rho_{i+1} -$$

$$- 3\ E.J_o.\alpha.\Delta t.\left(\frac{l_i}{d_i} + \frac{l_{i+1}}{d_{i+1}}\right) - 6\ E.J_o.\left(\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}}\right)$$

De todos modos, en el supuesto caso de producirse varios efectos simultáneos, resulta más conveniente calcular por separado las incógnitas hiperestáticas que cada uno de ellos genera.

3.4. Resolución general por el método de las fuerzas.

En el apartado 2.2. se efectuó el desarrollo conducente a la formulación del sistema de ecuaciones canónicas que permiten determinar el valor de las incógnitas Xi en estructuras hiperestáticas, y que en general, para una viga continua de *n* apoyos intermedios resulta

$$\begin{aligned}
&\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \ldots + \delta_{1i}.X_i + \ldots + \delta_{1n}.X_n = 0\\
&\Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \ldots + \delta_{2i}.X_i + \ldots + \delta_{2n}.X_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta_{io} + \delta_{i1}.X_1 + \delta_{i2}.X_2 + \ldots + \delta_{ii}.X_i + \ldots + \delta_{in}.X_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta_{no} + \delta_{n1}.X_1 + \delta_{n2}.X_2 + \ldots + \delta_{ni}.X_i + \ldots + \delta_{nn}.X_n = 0
\end{aligned} \qquad (32)$$

Este sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse en forma matricial

$$[\Delta_{xo}] + [\delta_{xxu}].[X] = 0 \qquad (33)$$

donde

$$[\delta_{xxu}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \ldots & \delta_{11} \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \ldots & \delta_{21} \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \delta_{11} & \delta_{12} \ldots & \delta_{11} \ldots & \delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \ldots & \delta_{n1} \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

es la matriz de los coeficientes, y

$$[\Delta_{xo}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1o} \\ \Delta_{2o} \\ \ldots \\ \Delta_{1o} \\ \ldots \\ \Delta_{no} \end{bmatrix} \quad ; \quad [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_1 \\ .. \\ X_n \end{bmatrix} \qquad (35)$$

son los vectores de los términos independientes (término de carga) y de las incógnitas, respectivamente.

El subíndice *xxu* de la (33) indica desplazamientos en la dirección de las incógnitas (*x*) cuando éstas toman valores unitarios (*xu*). Cada columna de esta matriz contiene los desplazamientos que en cada dirección provocan, sucesiva e independientemente, los valores $X_1 = 1$; $X_2 = 1$; .... ; $X_1 = 1$; .... $X_n = 1$.

De acuerdo a lo expuesto en los apartados 3.2. y 3.3. respecto a la elección del isostático equivalente, al adoptar éste la forma de una cadena cinemática abierta con articulaciones sobre los apoyos interiores, sólo existirán dos valores no nulos en la primera y última fila de la $[\delta_{xxu}]$ y tres valores distintos de cero en las restantes.

Para resolver el sistema lineal de ecuaciones simbolizado por la (33), debe procederse a despejar [X] de la referida expresión matricial. Para ello, pasando $[\Delta_{xo}]$ al segundo miembro

$$[\delta_{xxu}].[X] = - [\Delta_{xo}]$$

y premultiplicando ambos miembros por $[\delta_{xxu}]^{-1}$

$$[\delta_{xxu}]^{-1}.[\delta_{xxu}].[X] = - [\delta_{xxu}]^{-1}.[\Delta_{xo}]$$

Como: $[\delta_{xxu}]^{-1}.[\delta_{xxu}] = [I]$ y $[I].[X] = [X]$

resulta entonces

$$[X] = - [\delta_{xxu}]^{-1}.[\Delta_{xo}] \qquad (36)$$

la que también puede expresarse, haciendo: $-[\delta_{xxu}]^{-1} = [\beta]$

$$[X] = [\beta].[\Delta_{xo}] \qquad (37)$$

Por consiguiente, la determinación del vector incógnita es inmediata si se calcula la matriz inversa de $[\delta_{xxu}]$, la cual, por otra parte, está constituida íntegramente por términos no nulos.

Cabe observar que $[\beta]$ depende sólo de la geometría de la viga y del módulo de elasticidad del material constitutivo de la misma, siendo independiente del sistema exterior de cargas. En cambio, el vector $[\Delta_{xo}]$ depende de los 3 factores.

3.4.1. Aplicación a la resolución de casos particulares.

3.4.1.1. Viga continua de tres tramos.

Para el caso de una viga continua de 3 tramos (figura 23), las (34) y (35) toman la forma

$$[\delta_{xxu}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad [\Delta_{xo}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1o} \\ \Delta_{2o} \end{bmatrix} \quad ; \quad [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

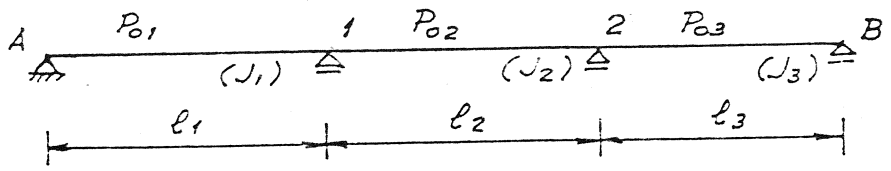


Figura 23

a) Cálculo de $[\beta]$. Teniendo en cuenta que $[\beta] = -[\delta_{xxu}]^{-1}$, debe formularse primeramente la $[\delta_{xxu}]$, cuyos términos han sido calculados en el apartado 3.3., expresiones (11), (12) y (13). Adecuando los subíndices al caso planteado

$$\delta_{11} = \left(\frac{l_1}{3\,E.J_1} + \frac{l_2}{3\,E.J_2}\right) \quad ; \quad \delta_{22} = \left(\frac{l_2}{3\,E.J_2} + \frac{l_3}{3\,E.J_3}\right)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l_2}{6\,E.J_2}$$

Adoptando un momento de inercia de comparación J_o, y multiplicando y dividiendo cada uno de los términos anteriores por él, se tendrá

$$\delta_{11} = \left(\frac{l_1.J_o}{3\,E.J_1.J_o} + \frac{l_2.J_o}{3\,E.J_2.J_o}\right) = \frac{1}{6\,E.J_o}.2.\left(l_1\frac{J_o}{J_1} + l_2\frac{J_o}{J_2}\right)$$

$$\delta_{22} = \left(\frac{l_2.J_o}{3\,E.J_2.J_o} + \frac{l_3.J_o}{3\,E.J_3.J_o}\right) = \frac{1}{6\,E.J_o}.2.\left(l_2\frac{J_o}{J_2} + l_3\frac{J_o}{J_3}\right)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l_2.J_o}{6\ E.J_2.J_o} = \frac{1}{6\ E.J_o}.l_2\ \frac{J_o}{J_2}$$

Reemplazando valores en la $[\delta_{xxu}]$ y sacando factor común el término $1/6\ E.J_o$

$$[\delta_{xxu}] = \frac{1}{6\ E.J_o}.\begin{bmatrix} 2.(l_1\frac{J_o}{J_1} + l_2\frac{J_o}{J_2}) & l_2\ \frac{J_o}{J_2} \\ l_2\ \frac{J_o}{J_2} & 2.(l_2\frac{J_o}{J_2} + l_3\frac{J_o}{J_3}) \end{bmatrix}$$

y llamando ρ_1 a las longitudes reducidas en $J_o/J_1 = r_1$, o sea

$$l_1.(J_o/J_1) = l_1.r_1 = \rho_1$$

$$[\delta_{xxu}] = \frac{1}{6\ E.J_o}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_1 + \rho_2) & \rho_2 \\ \rho_2 & 2.(\rho_2 + \rho_3) \end{bmatrix}$$

Invirtiendo esta matriz y cambiándole el signo se tendrá

$$[\beta] = -[\delta_{xxu}]^{-1} = -\frac{6\ E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_2 + \rho_3) & -\rho_2 \\ -\rho_2 & 2.(\rho_1 + \rho_2) \end{bmatrix}$$

con

$$\Delta = 4(\rho_1 + \rho_2).(\rho_2 + \rho_3) - \rho_2^2 = 4(\rho_1.\rho_2 + \rho_1.\rho_3 + \rho_2.\rho_3) + 3.\rho_2^2$$

Si $J_1 = J_2 = J_3 = J$, constante en toda la viga, resulta que $r_1 = 1$ y en consecuencia $\rho_1 = l_1$, o sea que en las expresiones obtenidas se reemplaza directamente, donde corresponda, ρ_1 por l_1 y J_o por J.

b) Cálculo de $[\Delta_{xo}]$. Tal cual ya se expresara, $[\Delta_{xo}]$ es un vector que depende del sistema exterior de cargas, por lo que deberá ser resuelto en cada caso particular, aplicando los procedimientos desarrollados al efecto en el Capítulo II.

c) Cálculo de [X]. Aplicando la (37)

$$[X] = [\beta].[\Delta_{xo}] = -\frac{6\ E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_2 + \rho_3) & -\rho_2 \\ -\rho_2 & 2.(\rho_1 + \rho_2) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \Delta_{1o} \\ \Delta_{2o} \end{bmatrix}$$

y las incógnitas valdrán

$$X_1 = -\frac{6\ E.J_o}{\Delta}.[\ 2.(\rho_2 + \rho_3).\Delta_{1o} - \rho_2\Delta_{2o}\ ]$$

$$X_2 = - \frac{6\ E.J_o}{\Delta}.[-\rho_2.\Delta_{1o} + 2.(\rho_1 + \rho_2).\Delta_{2o}\ ]$$

3.4.1.2. Viga continua de cuatro tramos.

Para este caso (figura 24), se tendrá

$$[\delta_{xxu}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad [\Delta_{xo}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1o} \\ \Delta_{2o} \\ \Delta_{3o} \end{bmatrix} \quad ; \quad [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

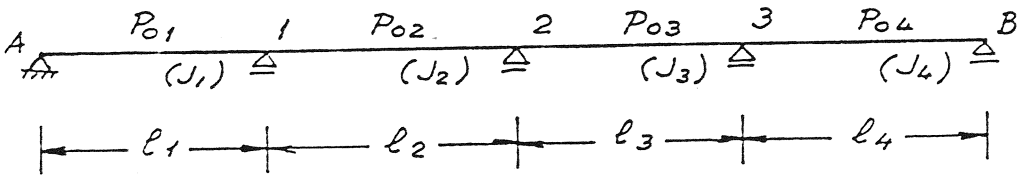


Figura 24

a) **Cálculo de [β].** Se debe formular primero la $[\delta_{xxu}]$, para lo cual, teniendo en cuenta los valores de δ_{ik} calculados en el apartado 3.3., adecuando los subíndices según corresponda, resulta

$$\delta_{11} = (\frac{l_1}{3\ E.J_1} + \frac{l_2}{3\ E.J_2}) \quad ; \quad \delta_{22} = (\frac{l_2}{3\ E.J_2} + \frac{l_3}{3\ E.J_3})$$

$$\delta_{33} = (\frac{l_3}{3\ E.J_3} + \frac{l_4}{3\ E.J_4}) \quad ; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l_2}{6\ E.J_2}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{l_3}{6\ E.J_3} \quad ; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

Llevando los valores a la $[\delta_{xxu}]$ y siguiendo los mismos pasos y reemplazos que los efectuados en el apartado anterior, se tendrá

$$[\delta_{xxu}] = \frac{1}{6\ E.J_o}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_1 + \rho_2) & \rho_2 & 0 \\ \rho_2 & 2.(\rho_2 + \rho_3) & \rho_3 \\ 0 & \rho_3 & 2.(\rho_3 + \rho_4) \end{bmatrix} \qquad (38)$$

Los términos de la matriz inversa serán

$$\beta_{11} = - \frac{6\ E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_2 + \rho_3) & \rho_3 \\ \rho_3 & 2.(\rho_3 + \rho_4) \end{bmatrix} =$$

$$= - \frac{6\ E.J_o}{\Delta}.[4.(\rho_2 + \rho_3).(\rho_3 + \rho_4) - \rho_3^2] \qquad (39)$$

$$\beta_{22} = -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_1+\rho_2) & 0 \\ 0 & 2.(\rho_3+\rho_4) \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.[4.(\rho_1+\rho_2).(\rho_3+\rho_4)] \qquad (40)$$

$$\beta_{33} = -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_1+\rho_2) & \rho_2 \\ \rho_2 & 2.(\rho_2+\rho_3) \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.[4.(\rho_1+\rho_2).(\rho_2+\rho_3) - \rho_2^2] \qquad (41)$$

$$\beta_{12} = \frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} \rho_2 & 0 \\ \rho_3 & 2.(\rho_3+\rho_4) \end{bmatrix} = \frac{6\,E.J_o}{\Delta}.[2.\rho_2.(\rho_3+\rho_4)] = \beta_{21} \qquad (42)$$

$$\beta_{13} = -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} \rho_2 & 0 \\ 2.(\rho_2+\rho_3) & \rho_3 \end{bmatrix} = -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.(\rho_2.\rho_3) = \beta_{31} \qquad (43)$$

$$\beta_{23} = \frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 2.(\rho_1+\rho_2) & 0 \\ \rho_2 & \rho_3 \end{bmatrix} = \frac{6\,E.J_o}{\Delta}.[2.\rho_3.(\rho_1+\rho_2)] = \beta_{32} \qquad (44)$$

En definitiva

$$[\beta] = -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 4(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_4)-\rho_3^2 & -2.\rho_2(\rho_3+\rho_4) & \rho_2\rho_3 \\ -2.\rho_2(\rho_3+\rho_4) & 4(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4) & -2\rho_3(\rho_1+\rho_2) \\ \rho_2\rho_3 & -2\rho_3(\rho_1+\rho_2) & 4(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)-\rho_2^2 \end{bmatrix} \qquad (45)$$

siendo

$$\Delta = 8.(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_4) - 2.(\rho_1+\rho_2).\rho_3^2 - 2.(\rho_3+\rho_4).\rho_2^2 \qquad (46)$$

b) Cálculo de $[\Delta_{xo}]$. Se determina en base a las características del sistema exterior de cargas y la geometría de la estructura.

c) Cálculo de [X]. Se aplica en cada caso la (37), efectuando las operaciones que correspondan.

3.4.2. Solicitaciones por variación de temperatura.

3.4.2.1. Variación uniforme de temperatura.

Tal como se expresara en el apartado 3.1., en el caso más usual de vigas continuas, que cuentan con un apoyo articulado fijo

y los restantes móviles, una variación uniforme de temperatura en todo el entorno que las rodea, producirá igual variación de longitud en todas las fibras de las secciones transversales. Dado que los vínculos del sistema permiten cualquier desplazamiento horizontal uniforme, se producirá libremente la dilatación o contracción longitudinal de la viga, sin dar lugar a la generación de solicitaciones propias.

3.4.2.2. Variación no uniforme de temperatura.

En cambio, cuando en los ambientes superior e inferior que limitan la estructura que integra la viga continua, se producen variaciones distintas de temperatura, que originan deformaciones que no pueden ser libremente absorbidas por los vínculos, dando lugar a la aparición de solicitaciones adicionales, que en la dirección de las incógnitas hiperestáticas se denominarán X_{it}, cuyo valor se determina planteando el sistema de ecuaciones (32) y donde los respectivos términos independientes deben responder a la notación Δ_{it}, la expresión general (33) se expresará como

$$[\Delta_{xt}] + [\delta_{xxu}].[X_t] = 0$$

de donde: $$[X_t] = -[\delta_{xxu}]^{-1}.[\Delta_{xt}] = [\beta].[\Delta_{xt}]$$

La $[\delta_{xxu}]$ no modifica su expresión respecto a la dada por la (34), mientras que por su parte el vector $[\Delta_{xt}]$ será:

$$[\Delta_{xt}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1t} \\ \Delta_{2t} \\ \dots \\ \Delta_{it} \\ \dots \\ \Delta_{nt} \end{bmatrix}$$

Los valores de los desplazamientos Δ_{it} están dados por la (25) del apartado 3.3.2., donde asimismo se indica su forma de obtención. Para el término genérico se tendrá

$$\Delta_{it} = \frac{\alpha.\Delta t}{2}.\left(\frac{l_i}{d_i} + \frac{l_{i+1}}{d_{i+1}} \right)$$

Si J = cte, el término anterior adopta la forma

$$\Delta_{it} = \frac{\alpha.\Delta t}{2.d}.(l_i + l_{i+1})$$

3.4.3. Solicitaciones por descenso de apoyos.

También en este caso es aplicable el sistema de ecuaciones (32), transformando la notación de las incógnitas en X_{is} y la de los términos independientes en Δ_{is}, con lo que

$$[\Delta_{xs}] + [\delta_{xxu}].[X_s] = 0$$

$$[X_s] = -[\delta_{xxu}]^{-1}.[\Delta_{xs}] = [\beta].[\Delta_{xs}]$$

Dado que $[\delta_{xxu}]$ no depende de la acción deformante, se mantiene su expresión general, dada por la (34), mientras que por su parte el vector $[\Delta_{xs}]$ será:

$$[\Delta_{xs}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1s} \\ \Delta_{2s} \\ \dots \\ \Delta_{is} \\ \dots \\ \Delta_{ns} \end{bmatrix}$$

Los valores de los desplazamientos angulares Δ_{is} fueron desarrollados en el apartado 3.3.3., y su valor genérico queda dado por la (29), según la cual

$$\Delta_{is} = \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}}$$

3.5. Trazado de diagramas y cálculo de las reacciones.

3.5.1. Expresiones de Mr y de Q en cualquier tramo.

Cada tramo de una viga continua puede ser examinado como una viga simplemente apoyada, bajo la acción de la carga exterior actuante sobre ese tramo y los momentos extremos de apoyo hallados resolviendo las ecuaciones de compatibilidad (figura 25a).

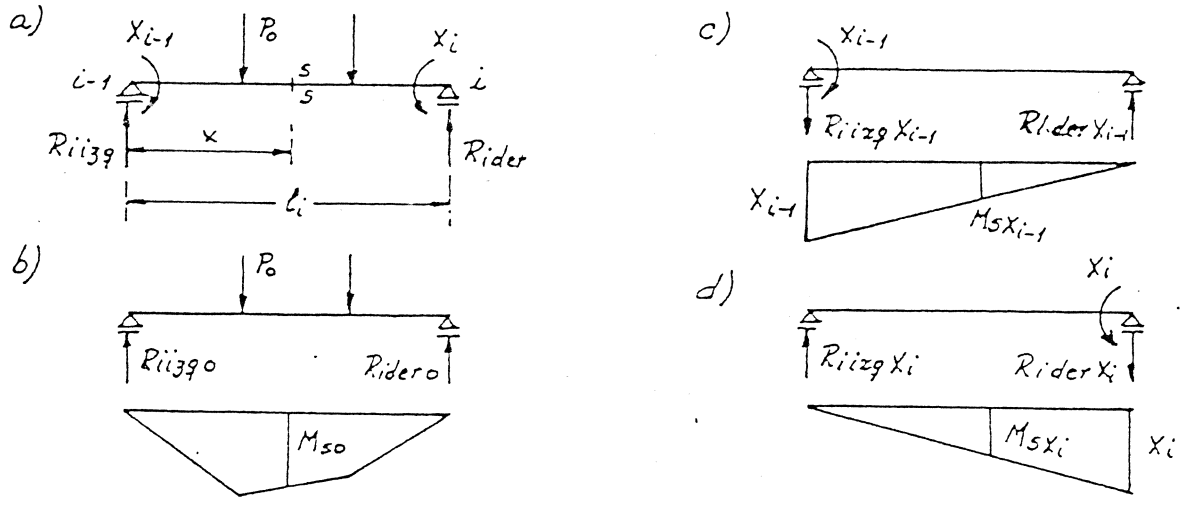


Figura 25

El momento flector en cualquier sección s-s, resultará de la suma algebraica de los momentos flectores que en dicha sección producen las acciones actuantes independientemente consideradas, es decir, lo sistemas P_o, X_{i-1} y X_i, respectivamente (figuras 25b), c) y d), es decir que

$$M_s = M_{so} + M_{sx_{i-1}} + M_{sx_i}$$

De las figuras 25c) y d), por semejanza de triángulos resulta

$$\frac{Msx_{i-1}}{X_{i-1}} = \frac{l_i - x}{l_i} \qquad \text{de donde:} \qquad Msx_{i-1} = X_{i-1}.\frac{l_i - x}{l_i}$$

$$\frac{Msx_i}{X_i} = \frac{x}{l_i} \qquad \text{de donde:} \qquad Msx_i = X_i.\frac{x}{l_i}$$

Luego

$$Ms = Ms_o + X_{i-1}.\frac{l_i - x}{l_i} + X_i.\frac{x}{l_i}$$

donde Ms_o es el momento flector en la sección s considerada, de la viga simplemente apoyada, debido a la carga actuante.

El esfuerzo de corte, por su parte, puede hallarse análogamente aplicando el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos, o bien, directamente, derivando la expresión del momento flector

$$Qs = \frac{dMs}{dx} = Qs_o - \frac{X_{i-1}}{l_i} + \frac{X_i}{l_i} = Qs_o + \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i}$$

donde Qs_o es el esfuerzo de corte en la sección considerada correspondiente a una viga simplemente apoyada bajo la acción de la carga dada.

3.5.2. Cálculo de las reacciones de vínculo.

Para calcular las reacciones en los vínculos extremos debidas a las solicitaciones que actúan en el tramo considerado, se tendrá, aplicando el mismo principio de superposición (figuras 25 a), b) c) y d)

$$R_{i izq} = R_{i izq_o} + R_{i izq x_{i-1}} + R_{i izq x_i}$$

$$R_{i der} = R_{i der_o} + R_{i der x_{i-1}} + R_{i der x_i}$$

siendo $R_{i izq_o}$ y $R_{i der_o}$ las reacciones de la viga isostática por la acción del sistema de cargas dado, y

$$R_{i izq x_{i-1}} = -\frac{X_{i-1}}{l_i} \quad ; \qquad R_{i der x_{i-1}} = \frac{X_{i-1}}{l_i}$$

$$R_{i izq x_i} = \frac{X_i}{l_i} \quad ; \qquad R_{i der x_i} = -\frac{X_i}{l_i}$$

En consecuencia

$$R_{i\,izq} = R_{i\,izq_o} + \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i} \quad ; \quad R_{i\,der} = R_{i\,der_o} - \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i} .$$

La reacción en el apoyo i será

$$R_i = R_{i\,der} + R_{i+1\,izq} \qquad (47)$$

Las reacciones de vínculo en cualquier apoyo de una viga continua, pueden calcularse también en función del valor de los esfuerzos de corte en las secciones ubicadas infinitamente a la izquierda y a la derecha de la sección correspondiente al apoyo considerado, $Q_{i\,der}$ y $Q_{i+1\,izq}$, respectivamente (figura 26).

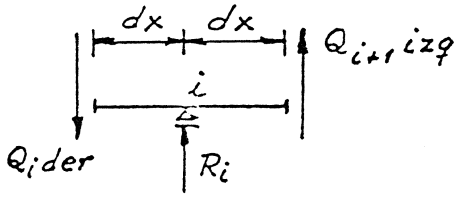


Figura 26

Teniendo en cuenta la mencionada figura y las expresiones deducidas en el apartado anterior

$$Q_{i\,der} = Q_{s_o} + \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i} = - R_{i\,der_o} + \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i} = - R_{i\,der}$$

$$Q_{i+1\,izq} = Q_{s_o} + \frac{X_{i+1} - X_i}{l_{i+1}} = R_{i+1\,izq_o} + \frac{X_{i+1} - X_i}{l_{i+1}} = R_{i+1\,izq}$$

En definitiva, la (47) también puede expresarse

$$R_i = - Q_{i\,der} + Q_{i+1\,izq}$$

En todas las expresiones desarrolladas, los valores de X_{i-1}; X_i y X_{i+1}, deben introducirse con el signo correspondiente, de acuerdo con la convención adoptada.

3.5.3. Trazado de los diagramas.

Para el trazado del diagrama de momentos flectores, una vez calculadas las incógnitas hiperestáticas, se llevan los valores obtenidos, con su signo y en una escala adecuada, sobre los apoyos correspondientes y a partir de una horizontal de referencia. Uniendo sus extremos, se tiene una poligonal auxiliar, a partir de la cual se trazan los diagramas de momentos de cada tramo, supuestos isostáticos. Las ordenadas ubicadas por sobre la recta horizontal de referencia adoptada, corresponderán a la parte negativa del diagrama y viceversa (figura 27a).

Si bien la forma indicada es la más usualmente empleada para el trazado del diagrama de momentos flectores, en ocasiones puede resultar conveniente llevar todas las ordenadas, tanto las positivas como las negativas hacia abajo a partir de la horizontal de referencia y efectuar la diferencia gráfica entre ambos diagramas (figura 27b).

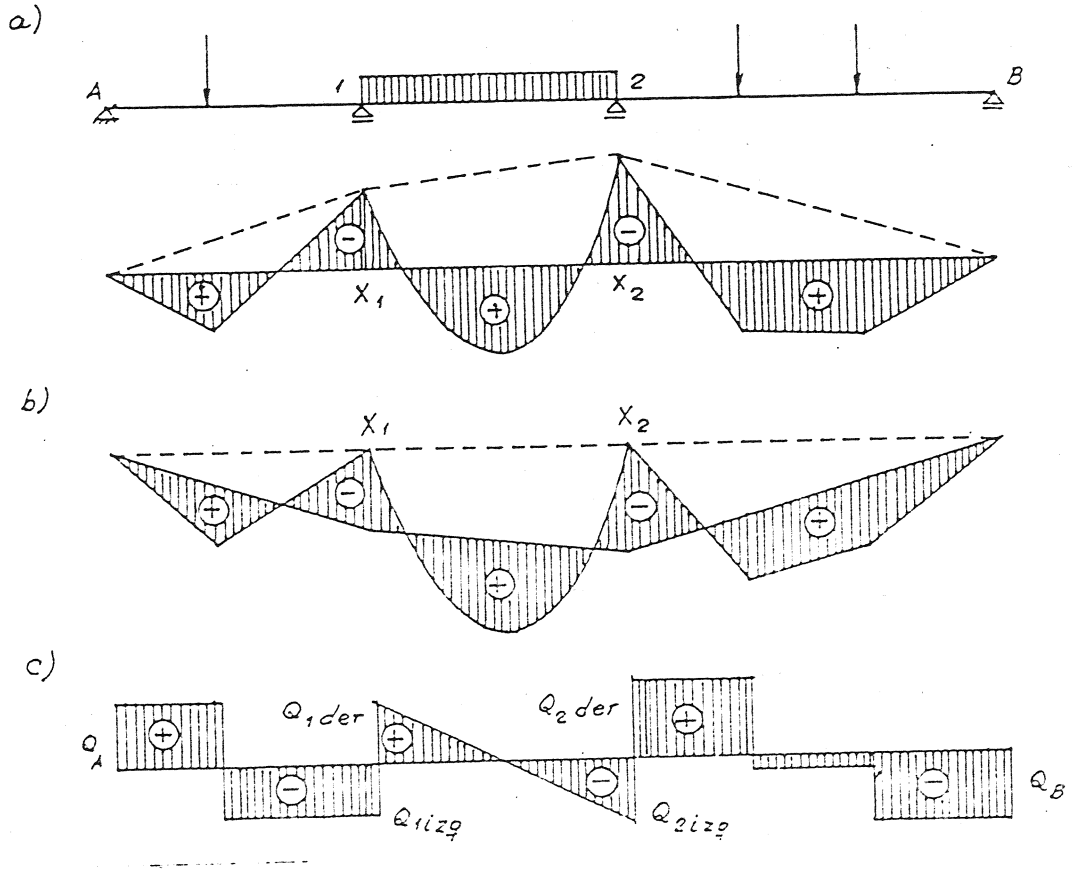


Figura 27

Para el trazado del diagrama de esfuerzos de corte debe partirse de los valores de Q obtenidos según lo desarrollado en el apartado precedente para los extremos de cada tramo. La ley de variación de Q entre tales valores se ajustará a las características del sistema exterior de cargas P_o (figura 27c).

3.5.4. Cálculo exacto del momento flector máximo de tramo para el caso de cargas uniformemente distribuidas.

Sea un tramo genérico de una viga continua, tal como el que se consigna en la figura 28a), de longitud l, sometido a la acción de una carga uniformemente distribuida q. Una vez resueltas las incógnitas hiperestáticas, los momentos obtenidos en ambos extremos se denominan por M_1 y M_d, habiéndose supuesto en la figura $M_1 > M_d$. El momento máximo del tramo, bajo la consideración de una viga isostática simplemente apoyada, se produce en la mitad de la luz, y vale $M_o = q.l^2/8$. Además, puede expresarse

$$\Delta M = M_1 - M_d$$

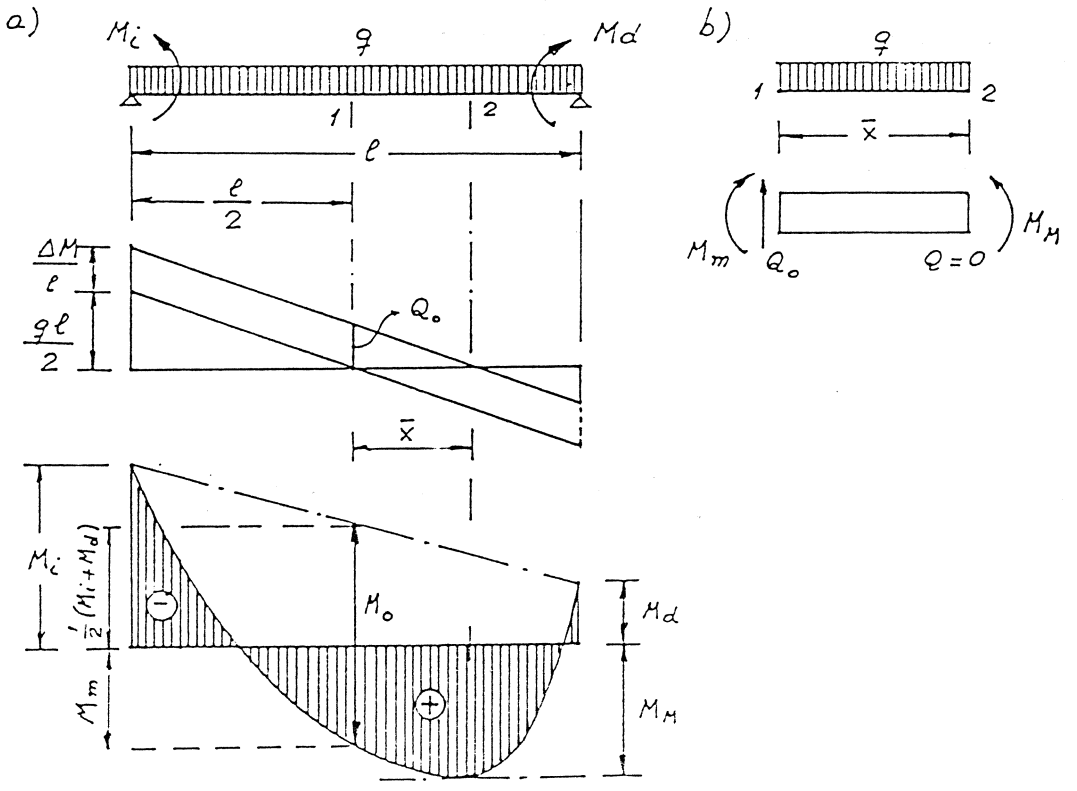


Figura 28

Del diagrama de esfuerzos de corte se observa que el mismo surge de la superposición del que corresponde a la carga q sobre el isostático (doble triangular con valor nulo para l/2), más el de los momentos extremos, de configuración rectangular y de ordenada

$$\Delta M/l = Q_o$$

Si se aisla ahora el tramo 1-2 de la viga, de longitud x, que se extiende entre el centro de la viga y la sección en la que el esfuerzo de corte es igual a cero (figuras 28a) y b), en los extremos del mismo actuarán M_m (momento flector en la sección media) y M_M, que será el momento máximo del tramo, por corresponderse con la sección en la que Q = 0. De las mencionadas figuras

$$Q_o = \frac{\Delta M}{l} = \bar{x}.q$$

Despejando $\bar{x}$, y recordando el valor de M_o

$$\bar{x} = \frac{\Delta M}{l.q} = \frac{\Delta M}{l.q}.\frac{8}{8}.\frac{l}{l} = \frac{\Delta M.l}{8}.\frac{8}{q.l^2} = \frac{\Delta M.l}{8.M_o}$$

De la figura 28b) se desprende el valor de M_M, y teniendo en cuenta las expresiones precedentemente consignadas

$$M_M = M_m + Q_o.\bar{x} - \frac{q.\bar{x}^2}{2} = \left(-\frac{M_1 + M_d}{2} + M_o\right) + Q_o.\bar{x} - \frac{q.\bar{x}^2}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}.(M_1 + M_d) + M_o + \frac{\Delta M}{1}.\frac{\Delta M.l}{8.M_o} - \frac{q}{2}.\frac{(\Delta M)^2.l^2}{64.M_o^2}$$

En el último sumando era $q.l^2/8 = M_o$, luego

$$M_M = -\frac{1}{2}.(M_1 + M_d) + M_o + \frac{(\Delta M)^2}{8.M_o} - \frac{(\Delta M)^2}{16.M_o} =$$

$$= -\frac{1}{2}.(M_1+M_d) + M_o + \frac{(\Delta M)^2}{16.M_o} = -\frac{1}{2}.(M_1+M_d) + M_o.\left[1 + \frac{(\Delta M)^2}{16.M_o^2}\right]$$

Llamando

$$\bar{k} = 1 + \frac{(\Delta M)^2}{16.M_o^2}$$

resulta para el valor buscado de M_M

$$M_M = -\frac{1}{2}.(M_1 + M_d) + \bar{k}.M_o \qquad (48)$$

3.5.5. Caso de un par actuando en una sección de apoyo.

Si en una sección que se corresponde con un apoyo intermedio i de una viga continua, actúa, integrando el sistema exterior de cargas P_o, un par de momento $M = P.a$, tal como se indica en la figura 29a), se podrá considerar como esquema de cargas a los efectos del cálculo el consignado en la figura 29b).

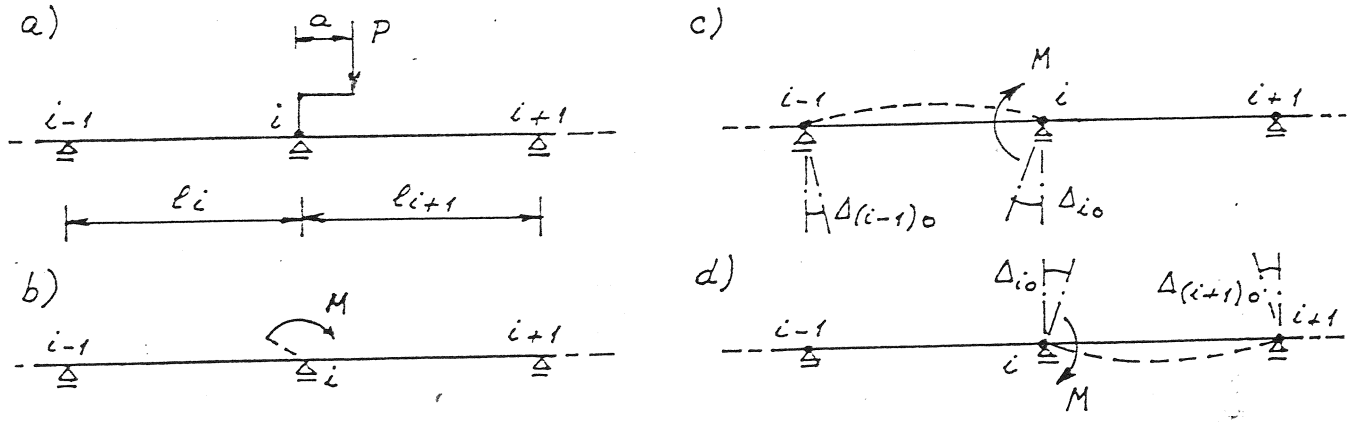


Figura 29

Al conformar el isostático equivalente siguiendo el criterio elegido como más conveniente de articular las secciones de apoyo,

el par que precisamente actúa sobre una de ellas, deberá ser distribuido arbitrariamente (manteniendo su valor total), sobre las secciones extremas de las barras que convergen a la articulación, o más sencillamente, haciéndolo actuar con todo su valor a izquierda o a derecha de la referida articulación (figuras 29c) y d), respectivamente).

Si para la resolución se aplica la ecuación de los tres momentos, empleando la Tabla N° 1, con los estados 40 (cambiado de signo) y 39, respectivamente, se tendrá

- Para el caso de la figura 29c): $L_1 = -M$; $R_1 = -2M$

- Para el caso de la figura 29d): $L_{1+1} = 2M$; $R_{1+1} = M$

Si en cambio se opta por la resolución según la formulación general del método de las fuerzas, será

- Primer caso: $\Delta_{(1-1)o} = -M.l_1/6\ E.Ji$; $\Delta_{1o} = -M.l_1/3\ E.Ji$

- Segundo caso: $\Delta_{1o} = M.l_{1+1}/3\ E.J_{1+1}$

$$\Delta_{(1+1)o} = M.l_{1+1}/6\ E.J_{1+1}$$

El valor que se obtendrá para X_1 al resolver el sistema de ecuaciones en uno y otro caso (par a la izquierda o a la derecha), diferirá exactamente en M, de modo tal que al sumarle a dicho valor de la incógnita el del par exterior actuante en el extremo en que se lo colocó, se arribará en ambos casos a igual diagrama de momentos.

3.6. Vigas continuas de sección variable.

El cálculo de las vigas continuas cuya sección varía en forma gradual a lo largo de todo el tramo (figura 30), se efectúa sobre la base de las mismas ecuaciones canónicas desarrolladas para el cálculo de las vigas con tramos de sección constante, o sea

$$\delta_{1(1-1)}.X_{1-1} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{1(1+1)}.X_{(1+1)} + \Delta_{1o} = 0$$

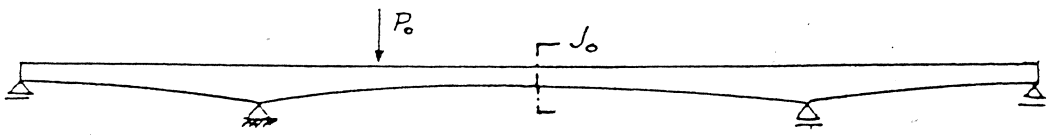


Figura 30

Multiplicando la ecuación anterior por $E.J_o$, siendo J_o el momento de inercia de cualquier sección de la viga, se tendrá

$$d_{1(1-1)}.X_{1-1} + d_{11}.X_1 + d_{1(1+1)}.X_{(1+1)} + D_{1o} = 0$$

donde, aplicando el TTV resulta

$$d_{i(i-1)} = EJ_o.\delta_{i(i-1)} = \int_0^{l_i} M_i \frac{M_{i-1}}{E.J_{i(x)}} EJ_o.dx = J_o \int_0^{l_i} \frac{M_i.M_{i-1}}{J_{i(x)}} dx$$

indicando $J_{i(x)}$ que el momento de inercia del tramo no es constante, sino que varía en función de x;

$$d_{ii} = EJ_o\delta_{ii} = \int_0^{l_i} M_i \frac{M_i}{E.J_{i(x)}} EJ_o dx + \int_0^{l_{i+1}} M_i \frac{M_i}{E.J_{i+1(x)}} EJ_o dx =$$

$$= J_o.\int_0^{l_i} \frac{M_i^2}{J_{i(x)}} dx + J_o.\int_0^{l_{i+1}} \frac{M_i^2}{J_{i+1(x)}} dx$$

$$d_{i(i+1)} = EJ_o\delta_{i(i+1)} = \int_0^{l_{i+1}} \frac{M_i.M_{i+1}}{E.J_{i+1(x)}} EJ_o dx = J_o.\int_0^{l_{i+1}} \frac{M_i.M_{i+1}}{J_{i+1(x)}} dx$$

$$D_{io} = E.J_o.\Delta_{io} = \Sigma \int \frac{M_i.M_o}{E.J_{(x)}} EJ_o.dx = J_o.\Sigma \int \frac{M_i.M_o}{J_{(x)}}.dx$$

Por lo general las integrales anteriormente indicadas no se resuelven en forma analítica al no justificarse la dificultad que ello suele encerrar frente al mayor grado de exactitud alcanzada, o por responder directamente a funciones no integrables, empleándose por lo común a tales efectos, el cálculo mediante métodos de aproximación, los más empleados de los cuales se basan en el reemplazo de la integral por una suma finita. Para el cálculo de $\int_a^b y.dx$, el intervalo desde a = x_o hasta b = x_n se divide en n partes iguales y para los puntos de división x_o, x_1, x_2, ... , x_{n-1}, x_n, se calculan los valores de la función a integrar (figura 31).

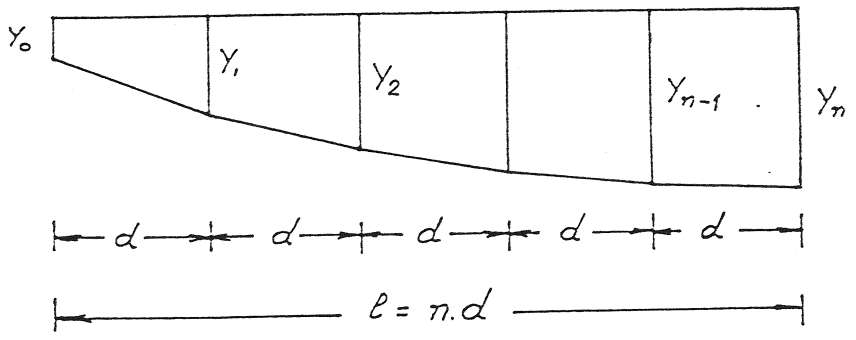


Figura 31

Si se supone a = 0 ; b = 1, llamando

$$M_i.M'/J_{(x)} = y$$

con M' = M_o; = M_{i-1}; = M_i; = M_{i+1}, según corresponda en cada caso

y que entre las divisiones efectuadas se considera variación lineal, resultará, aplicando la fórmula de los trapecios

$$\int_0^l \frac{M_1 . M'}{J_{(x)}} . dx = \int_0^{l=nd} y . dx \approx \frac{y_o + y_1}{2} . d + \frac{y_1 + y_2}{2} . d + \ldots +$$

$$+ \frac{y_{n-1} + y_n}{2} . d = d . \left(\frac{y_o}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \qquad (49)$$

En cambio, si se considera, en forma aproximativa, que la función a integrar varía según una parábola de segundo grado en cada intervalo, adoptando para n un número par, puede aplicarse la fórmula de Simpson, según la cual

$$\int_0^{nd} y . dx \approx \frac{d}{3} . [y_o + 4 . (y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2 . (y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n] \qquad (50)$$

que comúnmente es más exacta que la de los trapecios. De cualquier manera, cualquiera de las fórmulas indicadas son tanto más precisas cuanto mayor sea la cantidad n de divisiones efectuadas.

4. LINEAS DE INFLUENCIA DE VIGAS CONTINUAS.

4.1. Definición y concepto.

Suponiendo la viga recorrida por una carga concentrada unitaria vertical, se define como línea de influencia de un efecto determinado, a un diagrama tal que sus ordenadas en correspondencia con las diversas posiciones de la carga, leídas en una cierta escala, equivalgan al valor del efecto provocado por la carga unitaria móvil.

El "efecto" que se menciona en la definición es, usualmente, una reacción de vínculo; el momento flector, el esfuerzo de corte o el esfuerzo normal en una sección determinada, en las estructuras de alma llena y una reacción de vínculo o el esfuerzo interno en una barra determinada, en las estructuras de reticulado. El concepto es extensivo también al trazado de líneas de influencia del corrimiento de un punto determinado del eje de una estructura.

Si se conoce la ley $\eta = f(x)$ con que varía el efecto al variar la abscisa x que define la ubicación de la carga unitaria, basta para trazar la línea de influencia, con tomar una línea de referencia (generalmente horizontal o vertical, según los casos), y representar en una escala arbitrariamente elegida esa ley, mediante ordenadas llevadas en correspondencia con las distintas posiciones de la carga.

Las características básicas correspondientes a toda línea de influencia son: diagrama, signo y escala.

Las líneas de influencia de una solicitación M_s, Q_s, N_s o del corrimiento vertical δ_s de una sección S, tienen significados opuestos al de los diagramas ordinarios del momento flector M, del esfuerzo de corte Q, del esfuerzo normal N o de la línea elástica de los corrimientos δ. En efecto, mientras los diagramas o la línea elástica dan los valores de M, Q, N o δ para todas las secciones de la viga y para un estado de cargas único y definido, las líneas de influencia dan los valores de M_s, Q_s, N_s o δ_s para una sola sección S y para todas las posiciones posibles de la carga unitaria sobre la estructura.

4.2. Empleo de las líneas de influencia.

Mediante una línea de influencia puede calcularse el efecto provocado por cargas móviles de diversos tipos; por ejemplo, una carga unitaria, una carga P, un sistema de cargas P_1, P_2, ... P_n o una carga distribuida total o parcial, de intensidad uniforme o variable. Además permite determinar los estados de carga que producen los efectos máximo o mínimo y, en todos los casos se cuantifican concretamente (con la exactitud inherente a los métodos gráficos), los valores correspondientes del efecto. En consecuencia se tendrá:

a) En el caso de una carga unitaria que se desplaza sobre la estructura, las ordenadas de la línea de influencia, medidas en correspondencia con la ubicación de la carga y en la escala de la línea de influencia, dan directamente, por definición, el valor del efecto provocado.

Las líneas de influencia muestran como varía el efecto de la carga al variar su posición. El efecto será máximo cuando la carga actúe en correspondencia con la ordenada máxima (η_{max}).

b) Si la viga es recorrida por una carga concentrada cualquiera P, el efecto es proporcional a la intensidad de la fuerza, o sea

$$\text{Efecto} = P \cdot \eta$$

c) Si la viga está sometida a la acción de un sistema de cargas concentradas P_1, P_2, ... P_n, y si η_1, η_2, ... η_n son las ordenadas leídas (en escala) en correspondencia con la posición de las cargas, superponiendo efectos se tendrá (figura 32a)

$$\text{Efecto} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cdot \eta_i$$

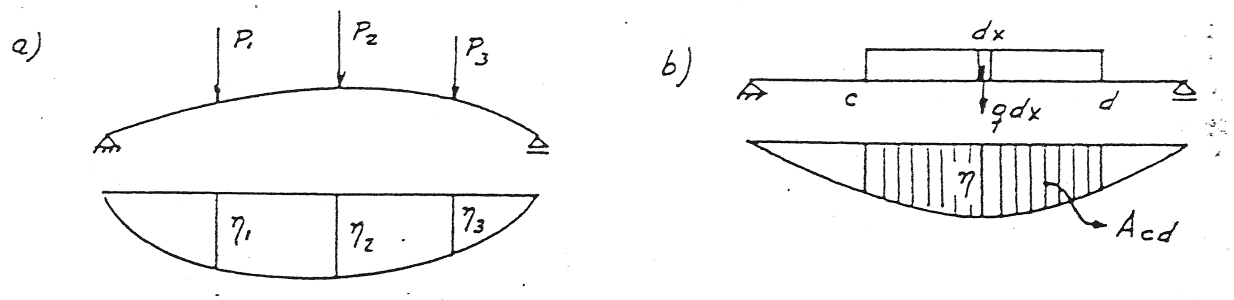


Figura 32

d) Si la estructura se halla sometida a la acción de una carga distribuida q, total o parcial, se la descompone en cargas elementales q.dx, para reducir el caso al anterior (figura 32b). Por consiguiente se tiene

$$\text{Efecto} = \int_c^d q.dx.\eta$$

Si q es una carga uniformemente distribuida

$$\text{Efecto} = q.\int_c^d \eta.dx = q.A_{cd}$$

4.3. Líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas.

4.3.1. Introducción.

Atendiendo a la definición y concepto expuestos en los apartados 3.1. y 3.2., sea la viga continua de la figura 33, sobre la cual se desplaza una carga unitaria, cuya posición en cada caso queda definida por la distancia x.

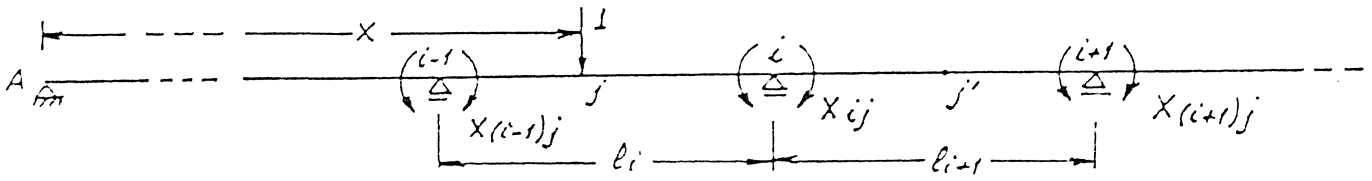


Figura 33

Para una determinada posición de esta carga (j por ejemplo), los momentos flectores en correspondencia con los apoyos genéricos considerados en la figura, valdrán $X_{(i-1)j}$, X_{ij} y $X_{(i+1)j}$.

Cuando la carga unitaria se desplaza a una posición j', las incógnitas hiperestáticas valdrán $X_{(i-1)j'}$, $X_{ij'}$ y $X_{(i+1)j'}$, y así sucesivamente.

Si en estas condiciones, sobre una horizontal de referencia y en una escala determinada, se llevan con su signo, ordenadas que midan los valores de X_{ij}, $X_{ij'}$, ... etc., en correspondencia con las verticales de los puntos j, j', ... etc., y se unen todos los extremos de dichas ordenadas, se conformará un diagrama que constituye la línea de influencia de X_i. Análogamente, desde otra horizontal de referencia, pueden trazarse las líneas de influencia de $X_{(i-1)}$; $X_{(i+1)}$, y las restantes incógnitas.

El procedimiento descripto, si bien hace a la clarificación del concepto de la línea de influencia, es laborioso y no resulta racional para su aplicación en la ingeniería práctica. En consecuencia, para generalizar la resolución, deberán determinarse las expresiones de las leyes de variación de las incógnitas hiperestáticas y proceder luego a su representación.

4.3.2. Leyes de variación de las incógnitas hiperestáticas.

Para conocer las leyes de variación de una incógnita genérica X_i, deberá efectuarse previamente su cálculo, a fin de determinar la expresión general a la cual responde.

En el apartado 3.4. se efectuó la resolución general de las incógnitas hiperestáticas de una viga continua para cualquier sistema exterior de cargas. La única diferencia en cuanto a la utilización y aplicación de las expresiones obtenidas, radica en que en el caso presente, el sistema exterior de cargas está constituido por una fuerza unitaria móvil, por lo que serán variables, de acuerdo a la posición de aquélla, los valores de las incógnitas. De acuerdo a la (33), el sistema general de ecuaciones de compatibilidad, cualquiera fuera la cantidad de incógnitas, queda expresado por

$$[\Delta_{xo}] + [\delta_{xxu}].[X] = 0$$

Para el caso bajo análisis, es constante (para un sistema estructural dado), la matriz $[\delta_{xxu}]$, y variables, según la posición de la carga, las $[\Delta_{xo}]$ y $[X]$. En consecuencia, y dado que las deformaciones Δ_{io} son siempre debidas a una carga unitaria, designando por j a la posición genérica de la misma, se expresará

$$[\delta_{xj}] + [\delta_{xxu}].[X_j] = 0$$

de donde se despeja

$$[X_j] = -[\delta_{xxu}]^{-1}.[\delta_{xj}] = [\beta].[\delta_{xj}] \qquad (51)$$

La matriz $[\beta]$ responderá a la forma general

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \ldots & \beta_{1i} \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \ldots & \beta_{2i} \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} \ldots & \beta_{ii} \ldots & \beta_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \ldots & \beta_{ni} \ldots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (52)$$

Además

$$[\delta_{xj}] = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \ldots \\ \delta_{ij} \\ \ldots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \quad ; \quad [X_j] = \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \ldots \\ X_{ij} \\ \ldots \\ X_{nj} \end{bmatrix} \qquad (53)$$

siendo δ_{1j}, δ_{2j}, ... δ_{ij}, ... δ_{nj} los desplazamientos angulares que experimenta el isostático equivalente en la dirección de las incógnitas, cuando la carga unitaria se encuentra en el punto genérico j, mientras que el segundo de los vectores consignados en la (53), indica las incógnitas cuyas leyes de variación se desean establecer.

Reemplazando las expresiones de las (52) y (53) en la (51)

$$\begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \dots \\ X_{ij} \\ \dots \\ X_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ii} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{ni} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \dots \\ \delta_{ij} \\ \dots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \qquad (54)$$

y el sistema de ecuaciones resultará

$$\begin{aligned} X_{1j} &= \beta_{11}.\delta_{1j} + \beta_{12}.\delta_{2j} + \dots + \beta_{1i}.\delta_{ij} + \dots + \beta_{1n}.\delta_{nj} \\ X_{2j} &= \beta_{21}.\delta_{1j} + \beta_{22}.\delta_{2j} + \dots + \beta_{2i}.\delta_{ij} + \dots + \beta_{2n}.\delta_{nj} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{ij} &= \beta_{i1}.\delta_{1j} + \beta_{i2}.\delta_{2j} + \dots + \beta_{ii}.\delta_{ij} + \dots + \beta_{in}.\delta_{nj} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{nj} &= \beta_{n1}.\delta_{1j} + \beta_{n2}.\delta_{2j} + \dots + \beta_{ni}.\delta_{ij} + \dots + \beta_{nn}.\delta_{nj} \end{aligned} \qquad (55)$$

Cabe observar que, contrariamente a lo que acontecía con el sistema de ecuaciones (32) y según lo expuesto en 3.4., el sistema (55) tendrá todos sus términos no nulos. Además, los primeros miembros y los sumandos de los segundos miembros, constituidos en todos los casos por el producto de un factor constante (β_{ki}) por uno variable (δ_{ij}), son valores variables. Cada una de estas ecuaciones corresponde a la ley de variación de las incógnitas hiperstáticas X_{kj}, por lo que la graficación de las ecuaciones del sistema (55), dará las líneas de influencia buscadas. Para ello debe efectuarse el análisis de la matriz [β] dada por la (52) y del vector $[\delta_{xj}]$ dado por la primera de las (53).

Si bien, a nivel teórico general, dicho análisis debería ser efectuado para una viga continua genérica de n apoyos intermedios y n+1 tramos, a fin de simplificar la escritura de los subíndices, y con ello la interpretación de los conceptos involucrados, aquél se efectuará sobre una viga continua de 4 tramos, tal como la de la figura 34a), y cuya resolución, por aplicación general del método de las fuerzas, se efectuó en 3.4.1.2., cuyo contenido debe tenerse presente para la comprensión del siguiente apartado.

4.3.2.1. Análisis de [β].

Tal como se pusiera de manifiesto oportunamente, los términos que conforman la matriz [β] son independientes del sistema de acciones actuante sobre la viga, dependiendo sólo de sus dimensiones (a través de la longitud de las barras y el momento de inercia de sus secciones transversales) y del material constitutivo a través de E. En consecuencia para la viga continua de 4 tramos supuesta, mantiene validez para el caso bajo análisis la expresión (45), que se vuelve a transcribir

$$[\beta] = -\frac{6\,E.J_o}{\Delta}.\begin{bmatrix} 4(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_4)-\rho_3^2 & -2.\rho_2(\rho_3+\rho_4) & \rho_2\rho_3 \\ -2.\rho_2(\rho_3+\rho_4) & 4(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4) & -2\rho_3(\rho_1+\rho_2) \\ \rho_2\rho_3 & -2\rho_3(\rho_1+\rho_2) & 4(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)-\rho_2^2 \end{bmatrix} \qquad (56)$$

Al analizar los términos que conforman esta expresión se observa que 6, E y J_o son magnitudes siempre positivas, ocurriendo lo mismo para cada valor de $\rho_1 = l_1.(J_o/J_1)$. En consecuencia, observando la incidencia relativa de cada valor de ρ_1 en la (46), resulta evidente, por la predominancia del valor absoluto del primer sumando sobre los dos restantes, que siempre $\Delta > 0$.

Además, razonando de igual manera para cualquier valor de los términos intervinientes resultará

$$\beta_{11} = - 6\ E.J_o/\Delta\ .[4(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_4)-\rho_3^2] < 0$$

$$\beta_{22} = - 6\ E.J_o/\Delta\ .[4(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)] < 0$$

$$\beta_{33} = - 6\ E.J_o/\Delta\ .[4(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)-\rho_2^2] < 0$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = - 6\ E.J_o/\Delta\ .[-2.\rho_2(\rho_3+\rho_4)] > 0$$

$$\beta_{13} = \beta_{31} = - 6\ E.J_o/\Delta\ .[\rho_2\rho_3] < 0$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = - 6\ E.J_o/\Delta\ .[-2\rho_3(\rho_1+\rho_2)] > 0$$

Se desprende así que los signos que indefectiblemente toman los términos de la matriz [β], tendrán el siguiente ordenamiento

$$[\beta] = \begin{bmatrix} - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{bmatrix} \qquad (57)$$

y en general, si la matriz fuera de n x n términos, los de la diagonal principal resultarán siempre negativos, y en cada fila, a partir de dicha diagonal, se alternarán en forma sucesiva, hacia ambos lados, un término positivo con un término negativo.

Si se pasan a analizar ahora los valores absolutos de los términos de cada fila de la matriz [β], dada la constancia del factor 6 E.J_o/Δ, y considerando las (39) a (44), resulta

- Para la primera fila $\quad | \beta_{11} | > | \beta_{12} | > | \beta_{13} |$
- Para la segunda fila $\quad | \beta_{21} | < | \beta_{22} | > | \beta_{23} |$ (58)
- Para la tercera fila $\quad | \beta_{31} | < | \beta_{32} | < | \beta_{33} |$

Generalizando, el mayor valor absoluto en cada fila será siempre el del término que corresponde a la diagonal principal, y a partir del mismo, los valores absolutos serán sucesivamente decrecientes hacia ambos lados.

La (56) puede ser escrita también

$$[\beta] = - \frac{6\ E.J_o}{\Delta} . \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \qquad (59)$$

con lo que un término genérico podrá ser indicado bajo la forma

$$\beta_{ik} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta} B_{ik} \quad (+/-) \qquad (60)$$

correspondiendo el signo + cuando el elemento ocupa fila y columna de distinta paridad y el signo - cuando ocupa fila y columna de igual paridad. Todos los términos ubicados sobre la diagonal principal serán siempre negativos

$$\beta_{ii} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta} B_{ii} \quad (-) \qquad (61)$$

Finalmente, todos los β_{ik} son distintos de cero

$$\beta_{ik} \neq 0 \qquad (62)$$

4.3.2.2. Análisis de $[\delta_{xj}]$.

Del sistema de ecuaciones (55) se observa que si se logra de alguna manera representar gráficamente la ley de variación de los desplazamientos δ_{1j}, δ_{2j} ..., δ_{nj}, las mismas guardarán relaciones directas con las leyes de variación de X_{1j}, X_{2j} ..., X_{nj}, a las cuales se podrá llegar mediante simples operaciones aritméticas.

Sea una viga continua de cuatro tramos A, 1, 2, 3, B (figura 34a), con las luces y momentos de inercia que se indican. Si se supone que la carga unitaria actúa en un punto cualquiera j, el que se supone ubicado sucesivamente en cada uno de los tramos de la viga para generalizar el concepto, se tienen en cada caso los desplazamientos δ_{1j}, δ_{2j} y δ_{3j} que se indican en la figura 34b). Las referencias I, II, III y IV que se consignan en esta figura junto a cada δ, se refieren al tramo en que se supuso colocada la carga unitaria.

Cabe observar que cuando la acción unitaria actúa en el primer tramo, sólo es $\delta_{1j} \neq 0$, siendo nulos todos los restantes desplazamientos angulares. Lo propio ocurre cuando la fuerza unitaria se sitúa en el último tramo, en que solamente toma valor no nulo el giro angular δ_{3j}. Para todas las posiciones de la carga unitaria móvil en los tramos intermedios, tendrán valores no nulos de desplazamiento, sólo las dos secciones extremas que limitan al tramo donde se sitúa la carga.

Por el Teorema de Maxwell, la rotación relativa δ_{1j} que en el apoyo 1 produce la fuerza unitaria actuando en j, es igual al desplazamiento lineal vertical δ_{j1} que en el punto j producen dos pares unitarios aplicados en el apoyo 1 (figura 34c), o sea que $\delta_{1j} = \delta_{j1}$. Análogamente puede razonarse para los restantes desplazamientos, resultando así que $\delta_{2j} = \delta_{j2}$; $\delta_{3j} = \delta_{j3}$, y en general $\delta_{1j} = \delta_{j1}$.

Se observa además que estos desplazamientos resultan siempre positivos (el ángulo abre hacia arriba).

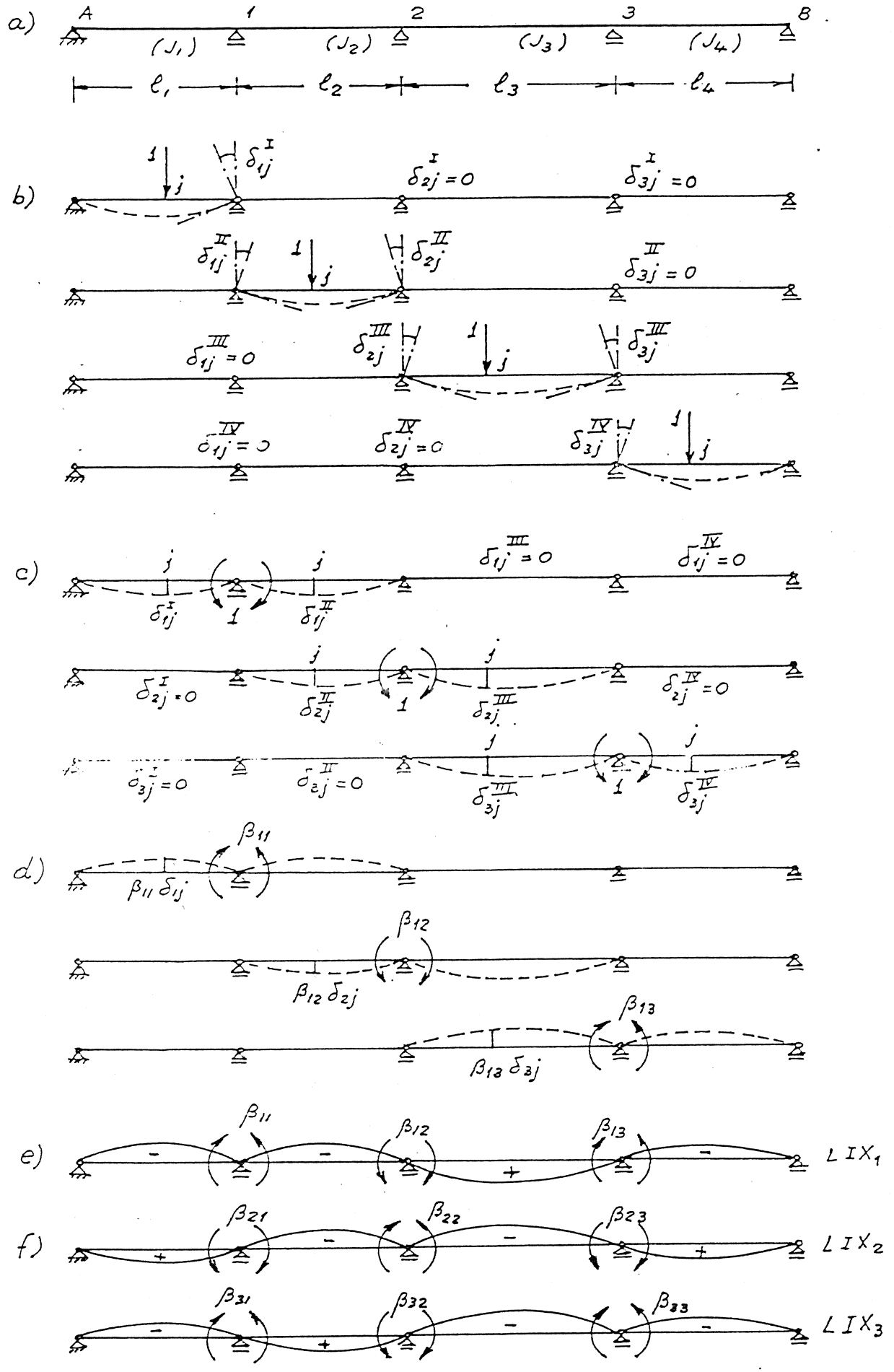


Figura 34

4.3.2.3. Trazado de las líneas de influencia.

Si se analizan ahora las expresiones de X_{1j}, X_{2j} ..., X_{nj} dadas por las (55), reducidas en este caso a X_{1j}, X_{2j} y X_{3j}, surge que las mismas pueden ser obtenidas partiendo de las líneas elásticas de las figuras 34c), puesto que cada coeficiente variable δ_{1j}, δ_{2j} y δ_{3j} de tales ecuaciones, coincide con las ordenadas variables de las elásticas en correspondencia con cada posición de la carga unitaria.

Si en lugar de hacer actuar un sistema de pares unitarios en las articulaciones introducidas en cada apoyo intermedio, se aplican pares con valores determinados, las ordenadas de la elástica variarán proporcionalmente a los valores de dichos momentos. Supóngase como ecuación genérica del sistema (55) la correspondiente a X_{1j}, o sea

$$X_{1j} = \beta_{11}.\delta_{1j} + \beta_{12}.\delta_{2j} + \beta_{13}.\delta_{3j} \qquad (63)$$

Si en el apoyo 1, en lugar de aplicar el sistema de pares unitarios que señala el primer estado de la figura 34c), se hace actuar un sistema β_{11}, con su signo, negativo en este caso en virtud de la (57) (figura 34d), primer estado), las ordenadas de la elástica así obtenida valdrán $\beta_{11}.\delta_{1j}$ (en valor y signo), que constituye precisamente el primer sumando de la (63).

Si se procede en forma análoga aplicando en los sucesivos nudos los respectivos valores de β_{12} y β_{13}, en cada caso con los signos ya conocidos que les corresponden, las ordenadas de las elásticas resultantes valdrán $\beta_{12}.\delta_{2j}$ y $\beta_{13}.\delta_{3j}$ (figura 34d), estados segundo y tercero).

La suma algebraica de las ordenadas correspondientes a los sucesivos estados de carga indicados en la figura 34d), darán, en virtud de la (63), la línea de influencia de X_1.

Si en lugar de efectuar la aplicación de los sistemas de pares β_{k1} en forma independiente, se hacen actuar simultáneamente los pares β_{11}, β_{12} y β_{13} (en cada caso con su signo), respectivamente en los apoyos 1, 2 y 3 del isostático equivalente (figura 34e), la elástica de deformación correspondiente a tal estado de solicitación, tendrá como ordenada en cada punto el valor de X_1 cuando la fuerza unitaria se ubica en el mismo. El diagrama resultante obtenido con la aplicación del procedimiento expuesto, será la línea de influencia de la mencionada incógnita hiperestática.

En conclusión, para la obtención de la línea de influencia de cualquier incógnita hiperestática, basta aplicar sobre la viga sistemas de pares iguales a los coeficientes β_{ik} de la ecuación correspondiente, y hallar la elástica de corrimientos verticales que tal estado de solicitación provoca. La figura 34f) muestra las acciones a aplicar para la viga continua de 4 tramos considerada, para la determinación de las líneas de influencia de X_2 y X_3, y la conformación resultante para las mismas.

Por ejemplo, si se desea trazar la línea de influencia de X_1 de la viga continua de 6 tramos que muestra la figura 35a), se deberán aplicar los pares β que se consignan en la figura, sobre los apoyos de la viga.

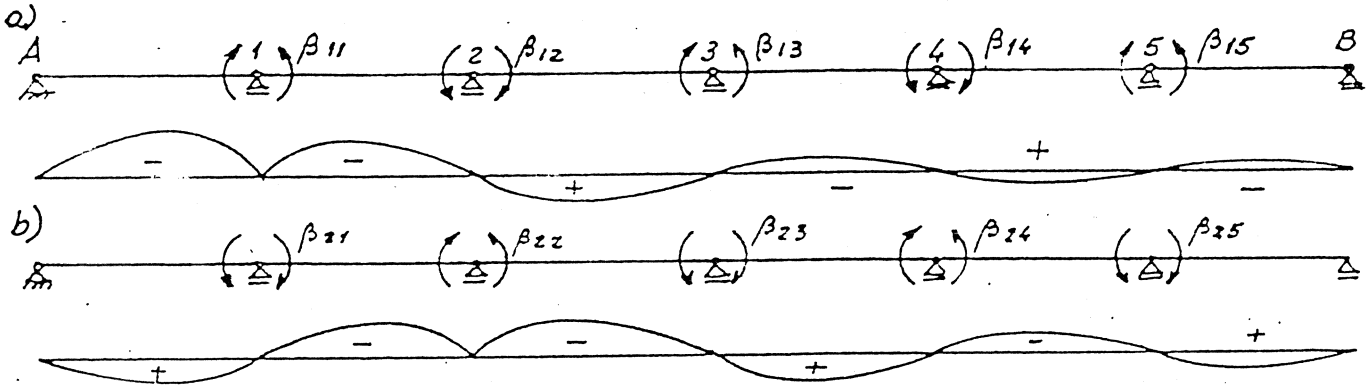


Figura 35

Para analizar la configuración que tendrá la línea de influencia resultante, deben tenerse presentes las conclusiones a que se arribó en los apartados 4.3.2.1. y 4.3.2.2. mediante las expresiones (57), (58), (59) y (60), y que se resumen aplicadas al caso supuesto:

a) Por la (57), los valores de β_{k1} son alternativamente positivos y negativos hacia ambos lados, partiendo con signo negativo para β_{11}. En el caso planteado serán $\beta_{11} < 0$; $\beta_{12} > 0$; $\beta_{13} < 0$; $\beta_{14} > 0$ y $\beta_{15} < 0$, lo que permite dibujarlos ya con su signo sobre la viga, aún cuando no se conozcan sus valores.

b) La consideración anterior permite en consecuencia establecer directamente los sentidos de deformación de la elástica de los tramos extremos A1 y 5B (ambos negativos, o sea hacia arriba, para el ejemplo supuesto).

c) Para establecer cómo se deforman los tramos intermedios, en cada uno de los cuales actúa un par en cada extremo, los que siempre tienden a producir efectos contrarios (uno a deformar en forma positiva, hacia abajo, y el otro en forma negativa, hacia arriba), debe tenerse presente la conclusión expresada mediante la (58), según la que, para cada fila de la [β], el término de mayor valor absoluto es el β_{11}, a partir del cual los valores absolutos de los β_{k1} van disminuyendo gradualmente hacia ambos extremos de la viga, por lo que siempre será mayor el β más cercano al apoyo cuya línea de influencia se desea trazar.

Para la viga bajo análisis será en consecuencia

$$| \beta_{11} | > | \beta_{12} | > | \beta_{13} | > | \beta_{14} | > | \beta_{15} |$$

Por lo tanto, al evaluar la deformación del tramo 1-2 se tiene que en sus extremos actúan, a izquierda y derecha respectivamente, los pares $|\beta_{11}| > |\beta_{12}|$, por lo que tendrá prevalencia en la

definición del sentido de la deformación el ß de la izquierda sobre el de la derecha: en consecuencia la elástica se curva hacia arriba.

Al pasar al tramo siguiente (2-3), tal como se observa en la figura 35a) los pares aplicados resultan $|\beta_{12}| > |\beta_{13}|$, por lo que la curvatura tendrá el sentido del mayor, en este caso hacia abajo, y así sucesivamente, tal como se muestra en la referida figura.

Análogamente, se pueden aplicar los razonamientos efectuados para predeterminar la forma que adoptará la línea de influencia de X_2, que se observa en la figura 35b).

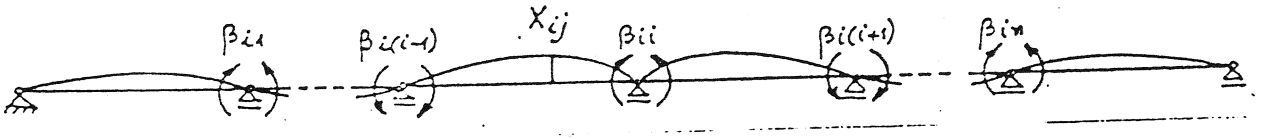


Figura 36

En conclusión y generalizando el concepto (figura 36), las líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas (momentos flectores en las secciones de los apoyos intermedios), adquieren siempre una configuración característica, con dos tramos de ordenadas negativas inmediatamente a ambos lados del apoyo al cual corresponden, para luego irse alternando en forma sucesiva los tramos positivos y negativos, en ambas direcciones, sin llegar nunca a anularse, en virtud de la (62).

Por otra parte, para luces de similar magnitud, las ordenadas son máximas en los dos tramos contiguos negativos precedentemente referidos, y luego se van haciendo cada vez menores hacia ambos lados de los mismos. Sin embargo, esta última conclusión se ve influencia por las luces de los tramos, que la pueden modificar cuando las mismas son muy disímiles.

4.3.3. Forma de obtención práctica.

Conocida la configuración que toman las líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas de una viga continua, se debe proceder a calcular los valores de cada ordenada, en correspondencia con cualquier punto j de aplicación de la carga unitaria. Para ello, en función de los aspectos conceptuales expuestos, deberá desarrollarse el procedimiento que permita el trazado de la elástica de deformación de una viga sobre la que actúa, como única carga, un sistema de pares en ambos extremos o en uno solo.

A los efectos indicados, para el trazado de la línea de influencia del momento en el apoyo genérico k, se analizarán por separado las situaciones en que el punto j se ubica en el primer tramo o en el último (en cuyo caso sobre el tramo se aplica un único par), o en cualquier tramo intermedio (en que se hacen actuar simultáneamente dos pares extremos).

4.3.3.1. Primer tramo.

Debe hallarse la elástica de desplazamientos verticales producida por un par β_{k1} actuando en el nudo 1 de la viga (figura 37), en cuyo caso será $X_{kj} = f_j$. Según la (60)

$$\beta_{k1} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta} B_{k1} \quad (+/-) \qquad (64)$$

pudiendo ser, tal como se indica, el par extremo de sentido positivo o negativo, relativo al efecto que produce (+ cuando la elástica flexiona hacia abajo y - en el caso contrario).

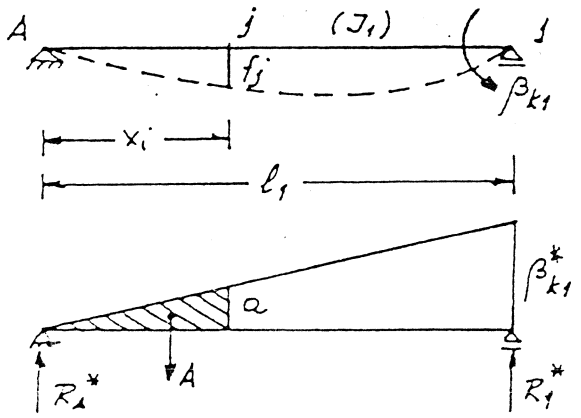


Figura 37

Para resolver el problema planteado se aplicará el Primer Teorema de Mohr, según el cual el corrimiento vertical experimentado por cualquier punto de la viga está determinado por el valor del momento flector que se produce en dicho punto cuando se carga la viga con el diagrama de momentos reducido. Dicho diagrama presenta forma triangular y su ordenada máxima será

$$\beta^*_{k1} = \frac{\beta_{k1}}{E.J_1} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta\ E.J_1} B_{k1} = \frac{6}{\Delta} r_1.B_{k1} \quad (+/-) \qquad (65)$$

Las reacciones de la viga conjugada valdrán

$$R_A^* = \frac{\beta^*_{k1}.l_1}{6} \quad ; \quad R_1^* = \frac{\beta^*_{k1}.l_1}{3} \qquad (66)$$

El momento flector en la sección j valdrá

$$f_j = \beta_{k1}.\delta_{1j} = X_{kj}{}^I = R_A^*.x_1 - A.\frac{x_1}{3} = R_A^*.x_1 - \frac{a.x_1}{2}.\frac{x_1}{3} \qquad (67)$$

resultando el valor de a de

$$\frac{\overset{*}{\beta}_{k1}}{a} = \frac{l_1}{x_1} \qquad \text{o sea que:} \qquad a = \overset{*}{\beta}_{k1}.\frac{x_1}{l_1} \qquad (68)$$

Reemplazando en la (67) las expresiones dadas por la primera de las (66) y la (68)

$$X_{kj}^{I} = \frac{\overset{*}{\beta}_{k1}.l_1}{6}.x_1 - \frac{\overset{*}{\beta}_{k1}.x_1^2}{2.l_1}.\frac{x_1}{3} = \frac{\overset{*}{\beta}_{k1}.l_1^2}{6}.\frac{x_1}{l_1}.\left(1 - \frac{x_1^2}{l_1^2}\right)$$

A fin de independizar el cálculo de los valores de las ordenadas específicas x_1, variables de caso en caso, resulta de mayor practicidad referir las distancias a que se calcularán las ordenadas de las líneas de influencia, a porciones predeterminadas constantes en que se divida el tramo, todas iguales (por ejemplo, a $0,1l_1$; $0,2l_1$, ... etc. del apoyo A, si se lo divide en 10 partes). Para ello se establecen distancias relativas introduciendo el término $x_1/l_1 = \xi_1$, y además recordando la (65)

$$X_{kj}^{I} = \frac{\overset{*}{\beta}_{k1}.l_1^2}{6}.\xi_1.(1 - \xi_1^2) = \frac{6\ r_1.l_1^2}{6.\Delta}.B_{k1}.\xi_1.(1 - \xi_1^2) \qquad (69)$$

O bien, haciendo $\xi_1.(1 - \xi_1^2) = \omega_1$, y como $r_1.l_1 = \rho_1$

$$X_{kj}^{I} = \frac{\rho_1.l_1}{\Delta}.B_{k1}.\omega_1 \quad (+/-) \qquad (70)$$

dependiendo el signo de X_{kj}^{I}, o sea de la línea de influencia del primer tramo, del signo de β_{k1} (que determina el de B_{k1}), dado que todos los restantes términos son eminentemente positivos. Para conocer dicho signo, basta referirse a la conclusión o regla de signos puesta en evidencia mediante la (57), o sea que será positiva en el primer tramo de toda viga continua la línea de influencia de las incógnitas hiperestáticas que se ubican en orden par (apoyos 2, 4, ... etc.) y será negativa cuando el apoyo k ocupe lugar impar (k = 1, 3, ... etc.).

4.3.3.2. Ultimo tramo.

Para este caso el sistema deformante lo constituirá el par β_{kn} actuando en el nudo n de la viga (figura 38), siendo

$$\beta_{kn} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta}\ B_{kn} \quad (+/-) \qquad (71)$$

resultando en consecuencia

$$f_j = \beta_{kn}.\delta_{nj} = X_{kj}^{n+1}$$

Comparando las figuras 37 y 38, se desprende que puede adoptarse íntegramente el desarrollo efectuado en el apartado

precedente para el primer tramo, con sólo medir las abscisas x que fijan la posición de la sección j desde la derecha, o sea desde el apoyo B, denominándolas en consecuencia x_d. En tal caso la (70) se transforma en

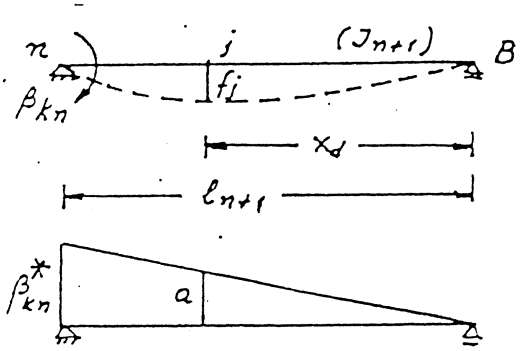


Figura 38

$$X_{kj}^{n+1} = \frac{\overset{*}{\beta}_{kn} \cdot l_{n+1}^2}{6} \cdot \frac{x_d}{l_{n+1}} \cdot \left(1 - \frac{x_d^2}{l_{n+1}^2}\right)$$

Llamando a $x_d/l_{n+1} = \xi_d$, y como en este caso

$$\overset{*}{\beta}_{kn} = \frac{6}{\Delta} \cdot r_{n+1} \cdot B_{kn}$$

$$X_{kj}^{n+1} = \frac{\overset{*}{\beta}_{k1} \cdot l_{n+1}^2}{6} \cdot \xi_d \cdot (1 - \xi_d^2) =$$

$$= \frac{6\ r_{n+1} \cdot l_{n+1}^2}{6 \cdot \Delta} \cdot B_{kn} \cdot \xi_d \cdot (1 - \xi_d^2)$$

O bien, haciendo $\xi_d \cdot (1 - \xi_d^2) = \omega_d$, y como $r_{n+1} \cdot l_{n+1} = \rho_{n+1}$

$$X_{kj}^{n+1} = \frac{\rho_{n+1} \cdot l_{n+1}}{\Delta} \cdot B_{kn} \cdot \omega_d \quad (+/-) \qquad (72)$$

4.3.3.3. Tramos intermedios.

En cualquier tramo intermedio, y de acuerdo a las conclusiones a que se arribó en el apartado 4.3.2.3., siempre deberán aplicarse dos pares de sentido contrario, uno en cada extremo, y hallar la elástica de deformación que los mismos producen (figura 39), siendo

$$\beta_{k(1-1)} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta}\ B_{k(1-1)}\ (+/-) \quad ; \quad \beta_{k1} = \frac{6\ E.J_o}{\Delta}\ B_{k1}\ (-/+)$$

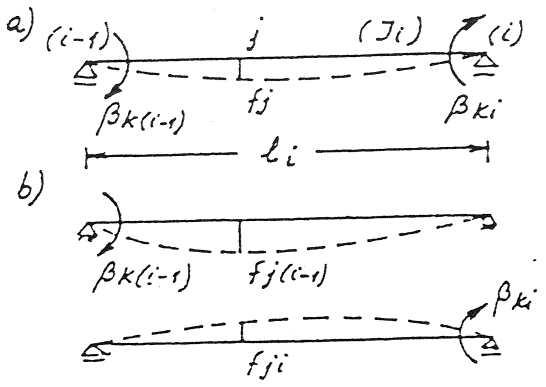


Figura 39

Aplicando el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos, puede considerarse este estado como suma de los dos estados independientes desarrollados en los dos apartados anteriores, por lo que las expresiones de aplicación en cada caso, para hallar los desplazamientos verticales producidos, serán similares a las (70) y (72), o sea, para los signos supuestos en la figura

$$f_{j(i-1)} = \frac{\overset{*}{\beta}_{k(i-1)} . l_i^2}{6} . \frac{x_d}{l_i} . \left(1 - \frac{x_d^2}{l_i^2}\right) \qquad (73)$$

$$f_{ji} = - \frac{\overset{*}{\beta}_{ki} . l_i^2}{6} . \frac{x_i}{l_i} . \left(1 - \frac{x_i^2}{l_i^2}\right) \qquad (74)$$

donde

$$\overset{*}{\beta}_{k(i-1)} = \frac{\beta_{k(i-1)}}{E.J_i} = \frac{6}{\Delta} . r_i . B_{k(i-1)} \; ; \; \overset{*}{\beta}_{ki} = \frac{\beta_{ki}}{E.J_i} = \frac{6}{\Delta} . r_i . B_{ki}$$

Llamando además en forma general

$$x_d/l_i = \xi_d \; ; \; x_i/l_i = \xi_i \; ; \; \xi_d(1 - \xi_d^2) = \omega_d \; ; \; \xi_i(1 - \xi_i^2) = \omega_i$$

Reemplazando valores en las (73) y (74), y sumando

$$X_{kj}{}^i = f_{j(i-1)} + f_{ji} = \frac{\rho_i . l_i}{\Delta} . B_{k(i-1)} . \omega_d + \frac{\rho_i . l_i}{\Delta} . B_{ki} . \omega_i$$

O bien

$$X_{kj}{}^i = \frac{\rho_i . l_i}{\Delta} . (B_{k(i-1)} . \omega_d + B_{ki} . \omega_i) \quad (+/-) \qquad (75)$$

Obsérvese que esta última expresión es totalmente general y engloba a las (70) y (72), dado que si se hace $B_{k(i-1)} = 0$ se obtiene la (70) y si es $B_{ki} = 0$ resulta la expresión (72).

Los valores de ω_i y ω_d, calculados en la forma indicada, se consignan en la Tabla Nº 2 del Anexo al presente Capítulo, en función de $\xi_i = x_i/l_i$, recordando al efecto que $x_d = l_i - x_i$, con lo que $\xi_d = 1 - \xi_i$.

4.4. Líneas de influencia de M y Q en secciones de tramos.

4.4.1. Introducción.

En términos generales, al aplicar el método de las fuerzas a la resolución de una estructura hiperestática cualquiera y obtener el valor de las incógnitas básicas X_1, X_2, ... X_n, pueden calcularse las reacciones de vínculo, las solicitaciones internas y otras magnitudes que permiten el empleo del principio de independencia de las acciones, mediante la expresión

$$S = S_o + S_1.X_1 + S_2.X_2 + \ldots + S_n.X_n \qquad (76)$$

donde S es la magnitud a determinar (solicitación interna M, N, Q; reacción de vínculo R, desplazamiento Δ, etc.) en la estructura hiperestática dada; S_1 es la magnitud a determinar debida a $X_1 = 1$ en el sistema isostático equivalente, y S_o es la magnitud debida al sistema exterior de cargas actuando sobre el isostático equivalente.

La expresión (76) es también aplicable a la determinación de las líneas de influencia de solicitaciones internas (M y Q en este caso). Para ello es necesario tener en cuenta que, para la sección considerada, las magnitudes S_1, S_2, ... S_n son constantes y las X_1, X_2, ... X_n y S_o son variables. Esto significa que la línea de influencia de S se obtiene sumando las líneas de influencia de X_1, X_2, ... X_n, multiplicadas por los coeficientes S_1 y la línea de influencia del mismo efecto S_o en el sistema básico. Lo expuesto se puede representar, en forma general, con la siguiente expresión simbólica

$$\text{L.I. de } S = \text{L.I. de } S_o + (\text{L.I. de } X_1).S_1 + (\text{L.I. de } X_2).S_2 + \ldots + (\text{L.I. de } X_n).S_n \qquad (77)$$

4.4.2. Línea de influencia del momento flector.

Para la determinación de la línea de influencia del momento flector en cualquier sección z de un tramo determinado de una viga continua (figura 40), es de aplicación la expresión (77).

A los efectos de hallar la forma que toma la misma, debe tenerse en cuenta que:

a) Cuando la carga unitaria se desplaza sobre el isostático equivalente, sólo produce momentos flectores en la sección considerada cuando aquella ocupa el tramo i. En consecuencia la línea de influencia del momento flector en esa misma sección del

sistema isostático equivalente, se reduce a dicha línea de influencia para el tramo l_i, considerado como una viga simplemente apoyada en sus extremos (figura 40a), y que se designará LI M_{zo}.

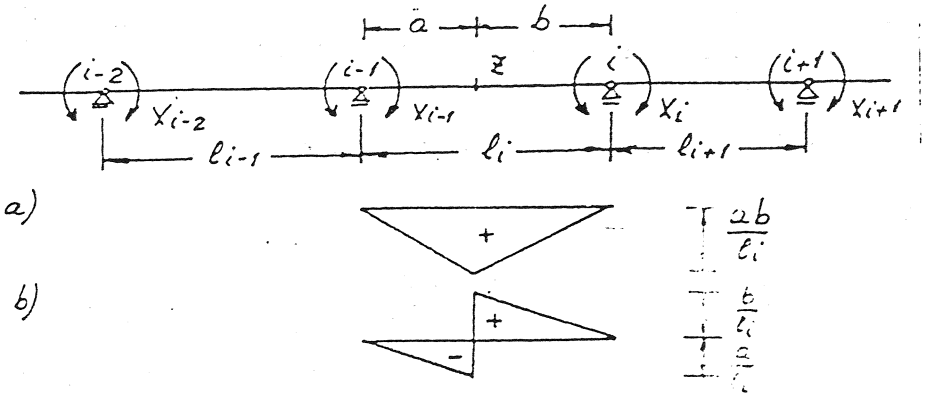


Figura 40

b) De todos los momentos de apoyo (X_1, X_2, ... X_n), sólo producen momentos flectores en z los que corresponden a los dos apoyos que limitan el tramo donde ubica la sección (X_{i-1} y X_i), dado que X_{i-2} flexiona sólo a los tramos l_{i-2} y l_{i-1}, mientras que X_{i+1} hace lo propio sólo con los tramos l_{i+1} y l_{i+2}.

c) Los valores constantes S_{i-1} y S_i a tener en cuenta para formular la expresión general (77) surgen de aplicar independiente y sucesivamente, los pares $X_{i-1} = 1$ y $X_i = 1$ y determinar los valores de los momentos flectores que los mismos producen en z (figura 41), obteniéndose en consecuencia

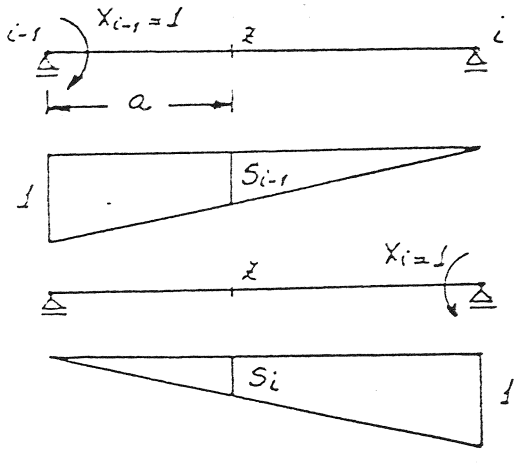


Figura 41

$$\frac{1}{l_i} = \frac{S_{i-1}}{l_i - a} \quad : \quad S_{i-1} = \frac{l_i - a}{l_i} \quad ; \quad \frac{1}{l_i} = \frac{S_i}{a} \quad : \quad S_i = \frac{a}{l_i}$$

En definitiva, la expresión general de aplicación será

$$LI\ M_z = LI\ M_{zo} + (LI\ X_{i-1}).\frac{l_i - a}{l_i} + (LI\ X_i).\frac{a}{l_i} \qquad (78)$$

En todos los casos las líneas de influencia de X_{i-1} y X_i deben considerarse con los signos que les corresponden en cada tramo.

La forma característica que adquieren las líneas de influencia de los momentos flectores en secciones de tramo, se indica en la figura 42, ejemplificadas, respectivamente, para una sección genérica del primer y del segundo tramo.

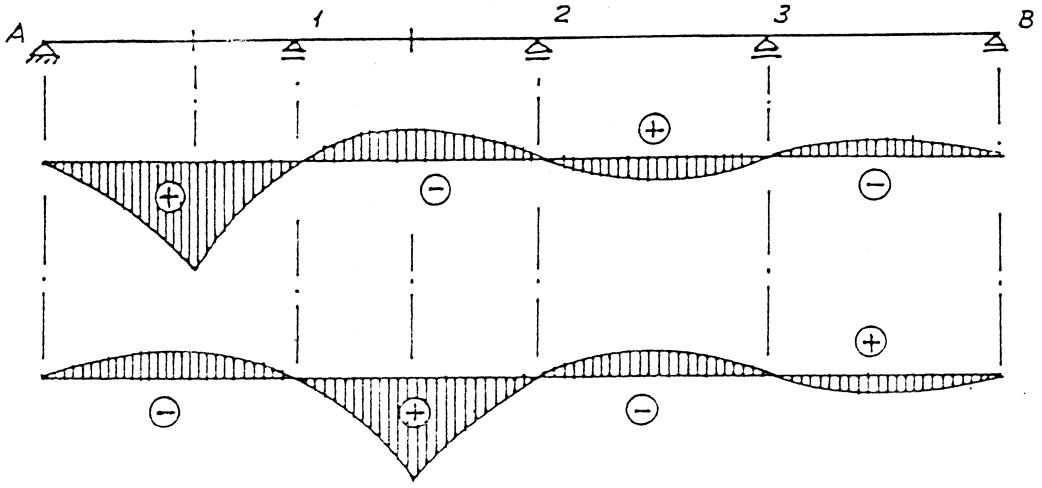


Figura 42

4.4.3. Línea de influencia del esfuerzo de corte.

Para el trazado de la línea de influencia del esfuerzo de corte son extensivas las consideraciones efectuadas en el apartado anterior. En consecuencia, los aspectos a tener en cuenta son:

a) Al desplazarse la carga unitaria sobre el isostático equivalente, sólo produce esfuerzos de corte en la sección z cuando ocupa el tramo i. Por lo tanto la línea de influencia en dicha sección del isostático equivalente, toma la forma indicada en la figura 40b), a la que se designará por LI Q_{zo}.

b) De todos los momentos de apoyo, sólo producen esfuerzos de corte en z los que corresponden a los dos apoyos que limitan el tramo i.

c) Los valores constantes S_{i-1} y S_i a tener en cuenta para aplicar la expresión (77) surgen de los estados de acciones extremas unitarias obrando sobre el tramo i (figura 43), resultando

$$S_{i-1} = -\frac{1}{l_i} \quad ; \quad S_i = \frac{1}{l_i}$$

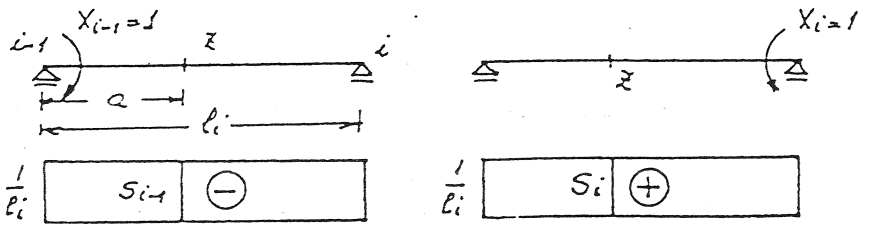


Figura 43

ambos valores constantes e independientes de la ubicación de la sección en el tramo.

En definitiva, la (77) se reduce a

$$LI\ Q_z = LI\ Q_{zo} + (LI\ X_{1-1}).\left(-\frac{1}{l_1}\right) + (LI\ X_1).\frac{1}{l_1}$$

$$LI\ Q_z = LI\ Q_{zo} + \frac{(LI\ X_1 - LI\ X_{1-1})}{l_1} \qquad (79)$$

La forma característica que adquieren las líneas de influencia del esfuerzo de corte se muestra en la figura 44, y corresponden respectivamente, a la línea de influencia en una sección del segundo tramo y en las secciones inmediatamente a la derecha y a la izquierda del apoyo 1.

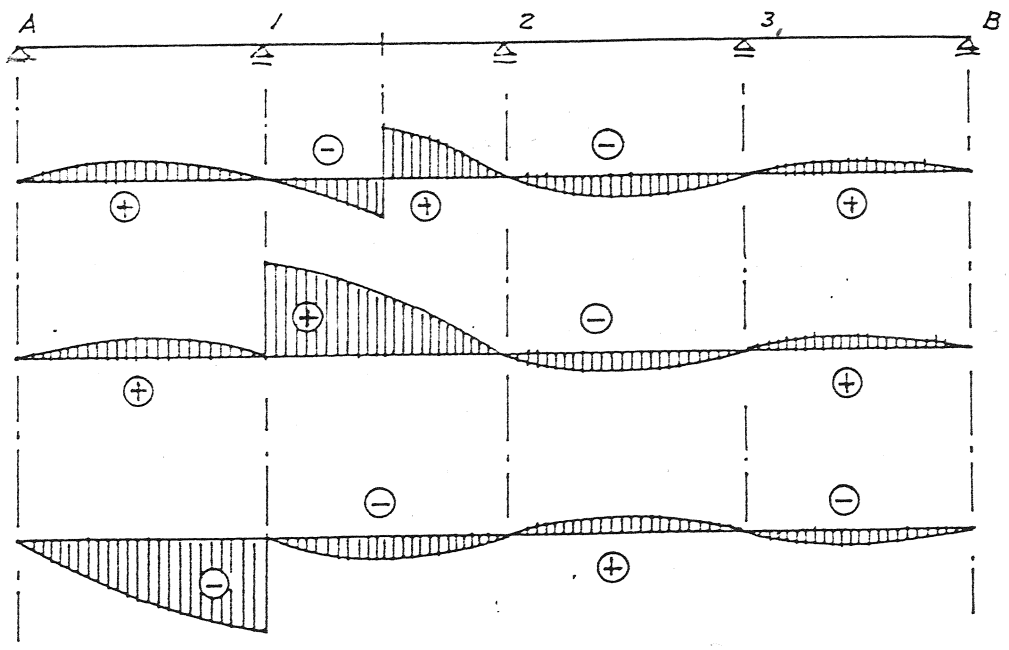


Figura 44

4.5. Línea de influencia de las reacciones de apoyo.

Para el trazado de las líneas de influencia de las reacciones producidas en los apoyos de una viga continua, son extensivas las

consideraciones efectuadas en el apartado anterior respecto a la aplicación del principio de independencia de las acciones, por lo que la expresión de partida es también la (77).

A fin de determinar la expresión de cálculo, debe tenerse en cuenta que para este caso, si se desea trazar la línea de influencia de la reacción en el apoyo i, resulta

a) Cuando la carga unitaria se desplaza sobre el isostático equivalente como única acción, sólo produce reacciones de vínculo en i cuando actúa sobre los tramos l_i y l_{i+1}. En consecuencia la línea de influencia de la reacción de apoyo en i para el isostático equivalente, se compone de la línea de influencia de la reacción derecha $R_{i\,der}$ del tramo l_i y la de la reacción izquierda $R_{i\,izq}$ del tramo l_{i+1}, cuya configuración muestra la figura 45, y que se designará por LI R_{io}, resultando

$$LI\ R_{io} = LI\ R_{i\,der} + LI\ R_{i\,izq}$$

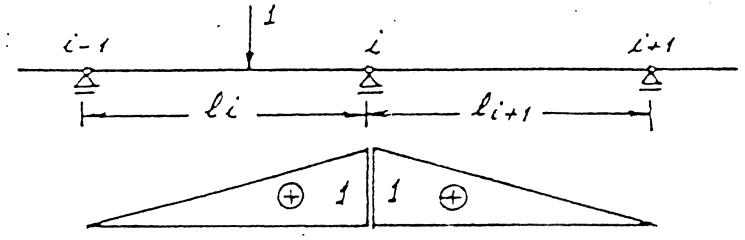


Figura 45

b) De todos los momentos de apoyo (X_1, X_2, ... X_n) actuando sobre el isostático equivalente, sólo producen reacciones de vínculo en i los que corresponden a los apoyos inmediatos anterior y posterior al mismo, además obviamente, de aquel que actúa sobre el apoyo considerado, o sea X_{i-1}, X_i y X_{i+1}.

c) Los valores constantes S_{i-1}, S_i y S_{i+1} a tener en cuenta para formular la expresión general (77), surgen de aplicar independiente y sucesivamente, los pares $X_{i-1} = 1$; $X_i = 1$ y $X_{i+1} = 1$ y calcular las reacciones de vínculo que los mismos provocan en el apoyo i (figura 46), obteniéndose en consecuencia

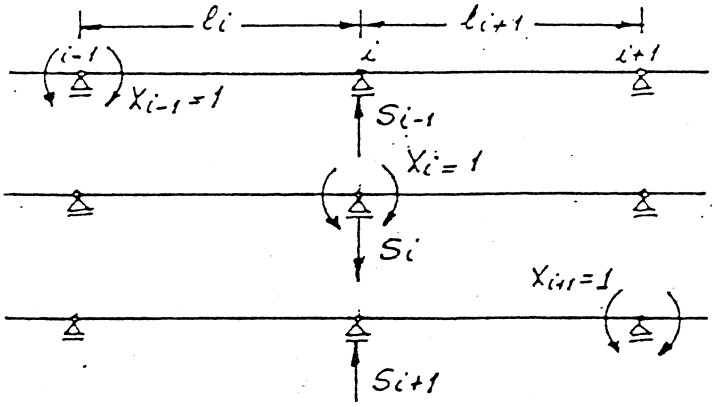


Figura 46

$$S_{i-1} = + \frac{1}{l_i} \quad ; \quad S_i = - \frac{1}{l_i} - \frac{1}{l_{i+1}} \quad ; \quad S_{i+1} = + \frac{1}{l_{i+1}}$$

En definitiva, la expresión general de aplicación será

$$LI\ R_i = LI\ R_{i_o} + (LI\ X_{i-1}).\frac{1}{l_i} + (LI\ X_i).\left(- \frac{1}{l_i} - \frac{1}{l_{i+1}}\right) + (LI\ de\ X_{i+1}).\frac{1}{l_{i+1}}$$

$$LI\ R_i = LI\ R_{i_o} + \frac{LI\ X_{i-1} - LI\ X_i}{l_i} + \frac{LI\ X_{i+1} - LI\ X_i}{l_{i+1}} \qquad (80)$$

La forma característica que presentan las líneas de influencia de una reacción de vínculo extremo y de un apoyo intermedio, se observan en la figura 47.

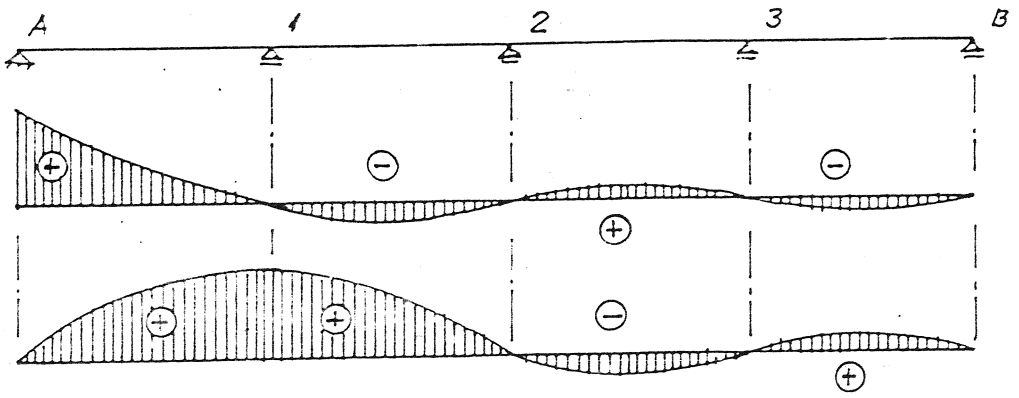


Figura 47

4.6. Diagrama de envolventes de momentos flectores.

Al dimensionar o verificar las secciones transversales de las vigas continuas (como las de cualquier otra estructura), las características dimensionales de las secciones se determinan principalmente, en función de los momentos flectores que en ellas se producen. De allí la necesidad de calcular sus valores máximos.

Si la viga continua se calcula sólo para un estado de cargas determinado, de posición fija, y si en el estado límite la viga se encuentra en fase elástica, el diagrama de momentos flectores debido a esta carga, construido por cualquiera de los métodos disponibles al efecto, será el diagrama de cálculo, mediante el cual se efectúa la elección de las secciones transversales de la viga o la verificación de su resistencia.

Pero, si además de la carga permanente, como corrientemente sucede, actúan sobre la viga diversas cargas accidentales, las cuales pueden encontrarse sobre ella tanto en forma conjunta como separadas, en diferentes combinaciones, resulta imprescindible elegir, para cada sección de la viga, la combinación de los estados de carga para los cuales, en dicha sección, se produce el mayor momento flector, y si hay inversión de sentidos, el mayor de cada signo.

Este problema puede resolverse en la forma más completa y exacta con el trazado de las líneas de influencia de los momentos flectores en algunas secciones características de la viga; pero tal vía es, en la práctica, bastante complicada.

Si se considera que la carga accidental es constante en cada tramo y que actúa en toda su longitud, el problema planteado puede resolverse de una manera más simple, mediante la determinación de los mayores valores teóricos de los momentos flectores en cada sección, cargando por separado cada tramo de la viga continua.

Supóngase que sobre la viga continua actúan cargas uniformemente distribuidas, denominando *g* a la carga permanente y *p* a la accidental, actuando esta última a todo lo largo del tramo, pudiéndose distribuir sobre uno o varios tramos simultáneamente, en forma arbitraria. Si se construyen, para cada sección característica, los diagramas de momentos flectores debidos a las cargas dadas, permanente y accidental, ubicando esta última, sucesivamente en cada tramo de la viga, pueden componerse las expresiones de los valores máximos, en valor absoluto, de los momentos flectores positivos y negativos mediante las expresiones

$$+ Mcalc = Mg + \Sigma(+ Mp)$$
$$- Mcalc = Mg + \Sigma(- Mp) \qquad (80)$$

donde:

Mg es el momento flector debido a la carga permanente en la sección dada;

+ Mp son los momentos flectores debidos a las cargas accidentales que originan en la sección un momento positivo, mientras que

- Mp son los momentos flectores debidos a las cargas accidentales que producen en la sección un momento negativo.

Para el cálculo de los valores de + Mp y - Mp resultan de extrema utilidad las líneas de influencia de momentos flectores en las secciones características. A tales efectos se consideran las secciones correspondientes a todos los apoyos intermedios y las secciones medias de cada tramo (para facilidad de cálculo). Si en base a los valores máximos y mínimos en estas secciones, se completa (gráficamente) el trazado de los diagramas de momentos para todas las secciones de la viga, los contornos de los diagramas extremos definirán el denominado diagrama de envolventes de momentos flectores de la viga dada.

4.6.1. Valores extremos de momentos en secciones de apoyo.

Sea por ejemplo la viga continua de 4 tramos de la figura 48, donde se han trazado las líneas de influencia de X_1 y de X_2.

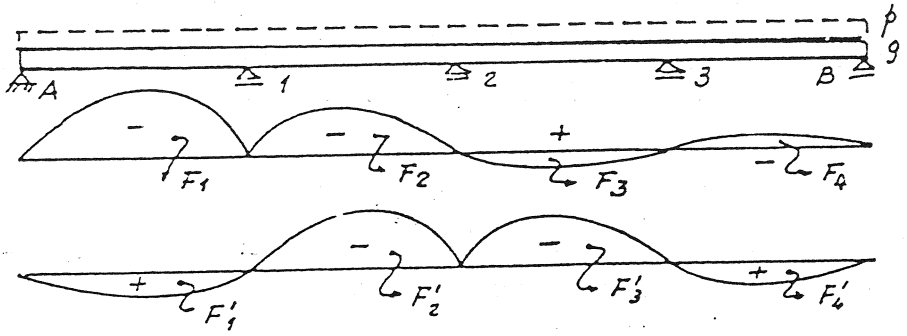


Figura 48

Si se desea obtener el máximo valor posible de X_1 (negativo), aplicando la segunda de las (80), resulta evidente que la sobrecarga p debe hacerse actuar sólo sobre los tramos que presentan momentos flectores en la línea de influencia respectiva (de X_1) de signo negativo. Luego, designando por F_i a las áreas entre tramos de la línea de influencia (figura 48), se tendrá

$$X_1^{max} = - (F_1 + F_2 - F_3 + F_4).g - (F_1 + F_2 + F_4).p \qquad (81)$$

En cambio, para obtener X_1 mínimo (que puede resultar negativo o positivo), deberá cargarse con la sobrecarga p únicamente el tramo cuya línea de influencia sea positiva,

$$X_1^{min} = - (F_1 + F_2 - F_3 + F_4).g + F_3.p \qquad (82)$$

Análogamente se llega a

$$X_2^{max} = - (-F'_1 + F'_2 + F'_3 - F'_4).g - (F'_2 + F'_3).p \qquad (83)$$

$$X_2^{min} = - (-F'_1 + F'_2 + F'_3 - F'_4).g + (F'_1 + F'_4).p \qquad (84)$$

En conclusión, para obtener el máximo (negativo) del momento flector en un apoyo cualquiera i de una viga continua, debe hacerse actuar la sobrecarga p sobre los dos tramos inmediatos anterior y posterior al mismo, dejar libres de cargas accidentales los siguientes (en ambos sentidos) y luego cargar sucesivamente tramo por medio (figura 49a). El estado de distribución inverso de las sobrecargas originará el valor de X_1 mínimo (figura 49b).

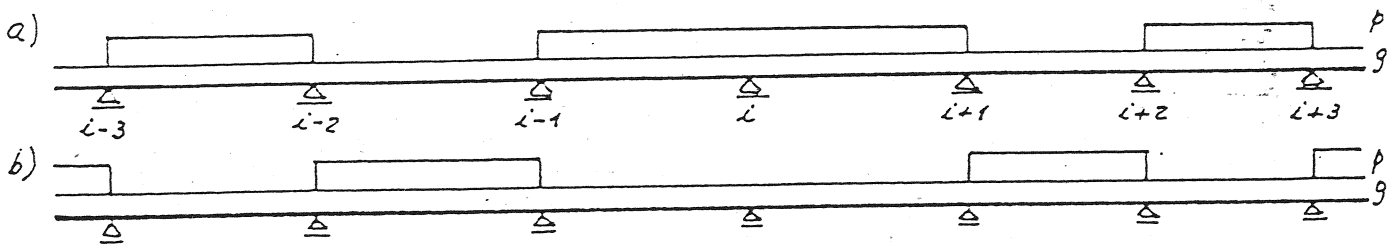


Figura 49

4.6.2. Valores extremos de momentos en secciones de tramos.

Si se trazan las líneas de influencia correspondientes a las secciones medias de los tramos primero y segundo de la viga de 4 tramos considerada en el apartado anterior (figura 50), se observa que el momento flector máximo en la sección central del primer tramo se obtiene cuando se hace actuar la sobrecarga p en los tramos primero y tercero, quedando dado su valor por

$$M_{m1}^{max} = + (F_1'' - F_2'' + F_3'' - F_4'').g + (F_1'' + F_3'').p \qquad (85)$$

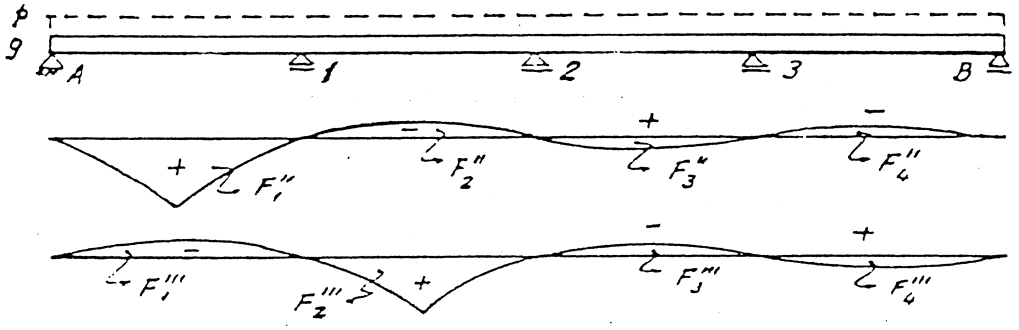


Figura 50

Para calcular el momento flector mínimo, la carga accidental p deberá incidir sobre los tramos cuya línea de influencia presente signo negativo (el segundo y cuarto en este caso), resultando

$$M_{m1}^{min} = + (F_1'' - F_2'' + F_3'' - F_4'').g - (F_2'' + F_4'').p \qquad (86)$$

Análogamente, para la sección central del tramo 1-2

$$M_{m2}^{max} = + (- F_1''' + F_2''' - F_3''' + F_4''').g + (F_2''' + F_4''').p \qquad (87)$$

$$M_{m2}^{min} = + (- F_1''' + F_2''' - F_3''' + F_4''').g - (F_1''' + F_3''').p \qquad (88)$$

En resumen, considerando que la sobrecarga p actúa en cada caso tramo por medio, se obtienen los estados de solicitación extrema (en lo relativo a momentos flectores) en las secciones medias de cada tramo, en la forma que indica la figura 51.

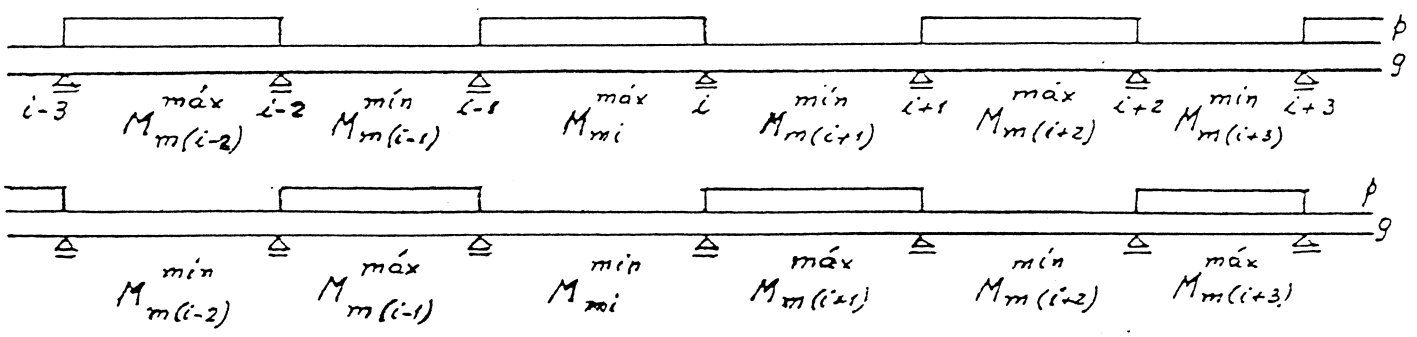


Figura 51

Para posibilitar el trazado de los diagramas de momentos flectores correspondiente a cada uno de los estados analizados. para cada posición de la carga accidental, deben asimismo calcularse los valores (no extremos) en las secciones características restantes. para lo cual pueden también aplicarse las líneas de influencia utilizadas en los restantes casos. Ubicados, en escala, los puntos correspondientes a los apoyos y las secciones medias de cada tramo, las parábolas se trazan gráficamente con los métodos desarrollados a tal fin por la Geometría Analítica.

Para el cálculo de las áreas F_1, F_1', F_1'' y F_1''' , pueden ser utilizadas las expresiones (49) o (50).

En la figura 52 se representa la configuración que adopta el diagrama de envolventes de momentos flectores para los dos primeros tramos de una viga continua de 4 tramos de igual luz, correspondiendo los estados de carga empleados a:

* Estado 1: X_1^{max}, calculado mediante la (81).
* Estado 2: X_1^{min}, calculado mediante la (82).
* Estado 3: X_2^{max}, calculado mediante la (83).
* Estado 4: X_2^{min}, calculado mediante la (84).
* Estado 5: M_{m1}^{max} y M_{m2}^{min}, calculados mediante las (85) y (88) con un mismo estado de ubicación de las cargas accidentales.
* Estado 6: M_{m1}^{min} y M_{m2}^{max}, calculados mediante las (86) y (87) con un mismo estado de ubicación de las cargas accidentales.

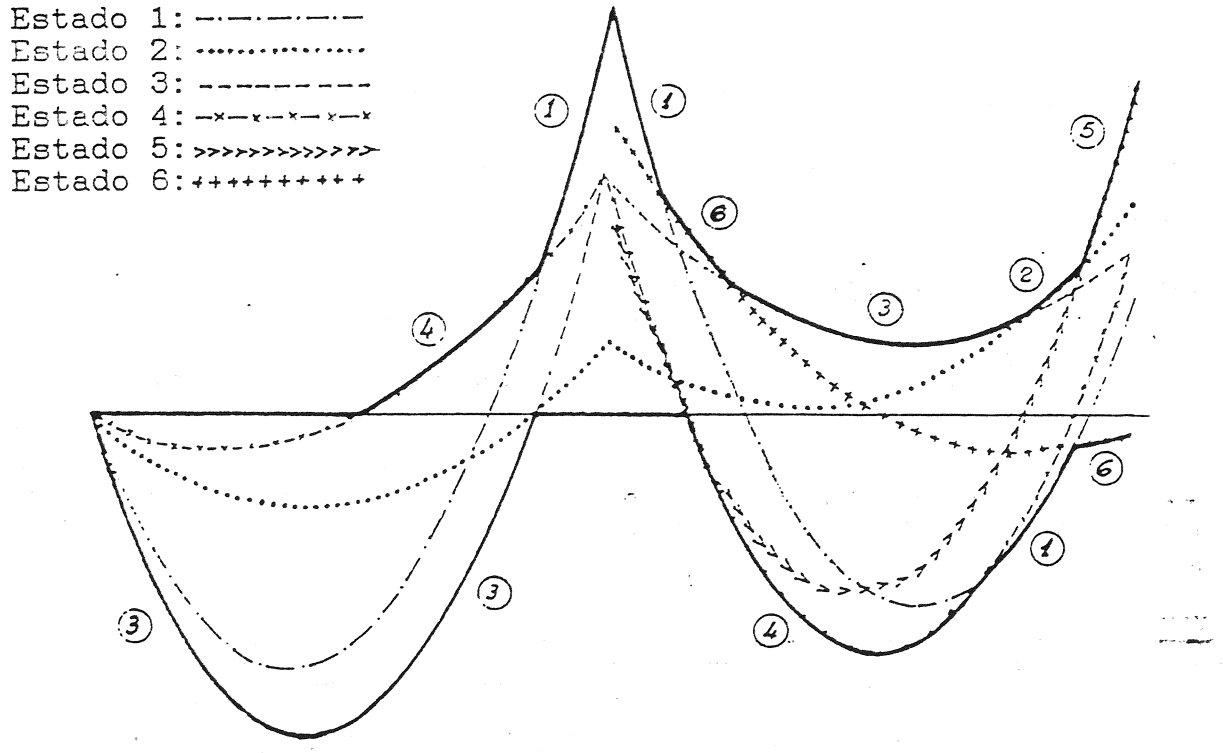


Figura 52

5. RESOLUCION DE ESTRUCTURAS APORTICADAS.

Se designa con el nombre de *entramados de nudos rígidos*, *estructuras aporticadas*, o simplemente **pórticos**, a aquellos sistemas estáticos compuestos por columnas verticales o inclinadas y vigas o dinteles, generalmente horizontales. Pueden diferenciarse los pórticos con dos o más columnas y un sólo dintel (pórticos de un piso o nivel) y aquellos que tienen varios dinteles a diferentes alturas (pórticos de varios pisos o niveles).

Los soportes o columnas de los pórticos pueden ser articulados o empotrados en sus cimientos o bases. En algunos casos los pórticos pueden presentar articulaciones en diversas secciones, constituyendo cadenas cinemáticas.

Por lo general, los pórticos, debido a sus condiciones reales de sustentación, constituyen estructuras estáticamente indeterminadas, cuya resolución puede encararse en función de los diversos métodos desarrollados para hallar el valor de las incógnitas hiperestáticas.

5.1. Planteo de resolución por el método de las fuerzas.

Teniendo en cuenta la generalidad de los conceptos básicos expuestos en los apartados 1. y 2. para encarar la resolución de una estructura hiperestática aplicando el método de las fuerzas, deben seguirse los mismos pasos allí desarrollados.

En consecuencia deberá, en primer lugar, reducirse el pórtico a un sistema isostático equivalente, poner en evidencia las incógnitas y finalmente plantear y resolver el sistema general de ecuaciones (9), extendido a la cantidad de incógnitas que presente la estructura a resolver.

Usualmente, por una parte a los efectos de obtener directamente los momentos en los nudos, y por otra, porque resulta más sencilla la obtención y la integración de los diagramas de solicitaciones internas necesarias para el cálculo de los δ_{ik}, resulta conveniente elegir como isostático fundamental al que se obtiene articulando la cantidad necesaria de nudos para transformar la estructura en estáticamente determinada.

Sea el caso del pórtico que muestra la figura 53a). Introduciendo tres articulaciones, por ejemplo en A, C y D, se obtiene una cadena cinemática de tres chapas, o sea con 3 + 2 = 5 grados de libertad, por lo que con un vínculo fijo en A y un empotramiento en B, el sistema está isostáticamente sustentado.

En la figura 53b) se indican las reacciones hiperestáticas así puestas en evidencia, que serán los momentos X_1, X_2 y X_3 que, actuando sobre las secciones que limitan a las articulaciones, impiden el giro relativo Δ_1 entre las mismas (no el giro absoluto del nudo en el caso de los puntos C y D). En la figura 53c) se muestra un detalle de las articulaciones A, C y D.

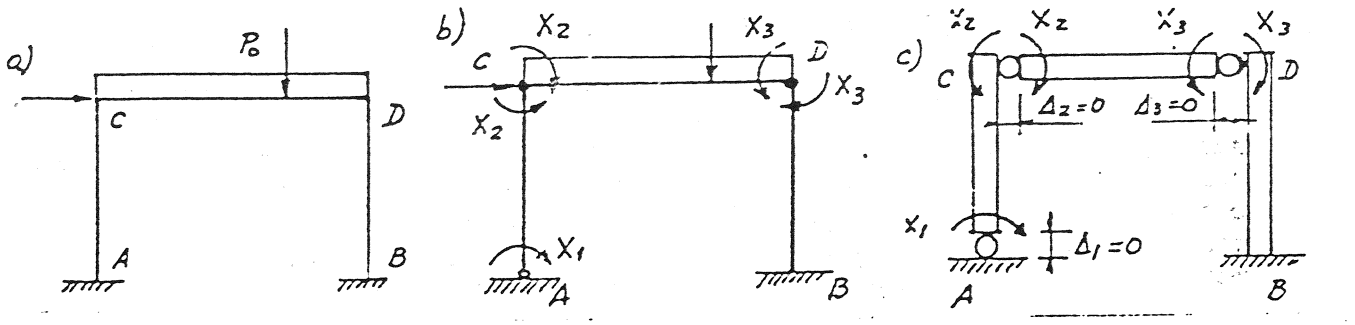


Figura 53

Los valores de X_1, X_2 y X_3 deberán ser tales que aseguren la continuidad estructural, o sea aquellos valores para los cuales se verifique que $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 0$; $\Delta_3 = 0$. Siguiendo los mismos razonamientos que los expuestos en el apartado 2.2., se hace actuar primeramente sobre el isostático equivalente el sistema exterior de cargas, que produce en la dirección de las incógnitas rotaciones relativas Δ_{io} (i = 1, 2, 3). Luego, en forma ordenada y sucesiva, se aplican los sistemas $X_1 = 1$, $X_2 = X_3 = 0$; $X_2 = 1$, $X_1 = X_3 = 0$ y $X_1 = X_2 = 0$, $X_3 = 1$, que permiten obtener todas las rotaciones δ_{ik}, que cada acción unitaria produce en la dirección de cada incógnita.

En definitiva, el sistema de ecuaciones, para el caso del pórtico de la figura 53, será

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = 0 \\ \Delta_3 &= \Delta_{3o} + \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 = 0 \end{aligned} \qquad (89)$$

y en general para cualquier número de incógnitas:

$$[\Delta_{xo}] + [\delta_{xxu}].[X] = 0 \quad ; \quad [X] = -[\delta_{xxu}]^{-1}.[\Delta_{xo}] \qquad (90)$$

siendo

$$[\Delta_{xo}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1o} \\ \Delta_{2o} \\ \dots \\ \Delta_{no} \end{bmatrix} \; ; \; [\delta_{xxu}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \; ; \; [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad (91)$$

El cálculo de las deformaciones puede efectuarse por cualquiera de los métodos estudiados en el Capítulo II, siendo generalmente el más adecuado el basado en el Teorema de los Trabajos Virtuales.

Como resultado de la resolución del sistema de ecuaciones canónicas, se obtiene el valor de las incógnitas básicas X_1, X_2, ... X_n. A continuación, las solicitaciones internas y las reacciones en la estructura hiperestática dada y eventualmente otras magnitudes que permitan el empleo del principio de independencia de las acciones y superposición de los efectos, pueden ser hallados mediante la aplicación de

$$S = S_o + S_1.X_1 + S_2.X_2 + \ldots + S_n.X_n \qquad (92)$$

donde S es la magnitud a determinar (una solicitación interna M, N o Q; una reacción de vínculo R; un desplazamiento Δ, etc.) en la estructura dada; S_i, para i = 1, 2, ... n, es la magnitud a determinar debida a $X_i = 1$ en el sistema isostático equivalente y S_o la magnitud debida al sistema exterior de cargas en el mismo sistema básico.

Los diagramas correspondientes a estas magnitudes pueden ser también construidos sobre la base del mismo principio.

5.1.1. Caso de aplicación.

Sea a nivel de ejemplo tipo el pórtico biempotrado de la figura 54a), para cuya resolución se considera despreciable la influencia de N y Q. (Para el caso que la misma deba ser tenida en cuenta se remite al apartado 5.2.).

El isostático equivalente se conformará de la manera que indica la figura 53b). Haciendo actuar sucesiva e independientemente sobre el mismo el sistema exterior de cargas y los valores unitarios de las incógnitas, se obtienen los diagramas de momentos que se señalan en las figuras 54b), c), d) y e).

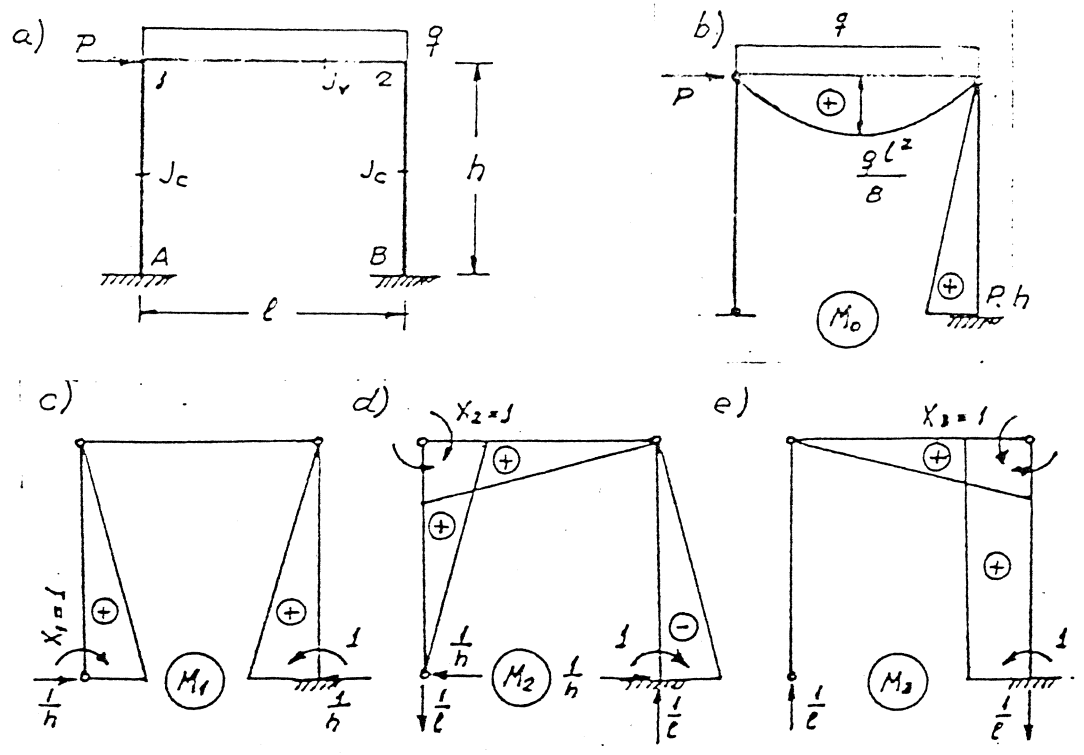


Figura 54

Además se hará (ver Capítulo IV, apartado 2.2.2.1.)

$$k_c = J_c/h \quad ; \quad k_v = J_v/l \quad ; \quad \beta = k_v/k_c$$

Para el cálculo de todos los desplazamientos que constituyen los términos independientes y los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones, se aplicará el TTV y las tablas de integración, según

$$\Delta_{1o} = \Sigma \int M_1 . \frac{M_o}{E.J}\, ds \quad ; \quad \delta_{1k} = \Sigma \int M_1 . \frac{M_k}{E.J}\, ds$$

a) Cálculo de los desplazamientos Δ_{1o}.

$$\Delta_{1o} = \frac{1}{3}.Ph.\frac{h}{E.J_c} = \frac{P.h}{3\,E.k_c}$$

$$\Delta_{2o} = \Delta_{3o} = \frac{1}{3}.\frac{q.l^2}{8}.\frac{l}{E.J_v} = \frac{q.l^2}{24\,E.k_v} = \frac{q.l^2}{24\,E.k_c.\beta}$$

b) Cálculo de los desplazamientos δ_{1k}.

$$\delta_{11} = 2.\frac{1}{3}.\frac{h}{E.J_c} = \frac{2}{3\,E.k_c}$$

$$\delta_{22} = \frac{2\,h}{3\,EJ_c} + \frac{h}{3\,EJ_v} = \frac{1}{3E}.\left(\frac{2}{k_c} + \frac{1}{k_v}\right) = \frac{1}{3\,Ek_c}.\frac{(1+2\beta)}{\beta}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{3\,EJ_v} + \frac{h}{EJ_c} = \frac{1}{3E}.\left(\frac{1}{k_v} + \frac{3}{k_c}\right) = \frac{1}{3\,Ek_c}.\frac{(1+3\beta)}{\beta}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{h}{6\,EJ_c} - \frac{h}{3\,EJ_c} = \frac{1}{6E}.\left(\frac{1}{k_c} - \frac{2}{k_c}\right) = -\frac{1}{6\,Ek_c}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{h}{2\,EJ_c} = \frac{1}{2\,Ek_c}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{6EJ_v} - \frac{h}{2EJ_c} = \frac{1}{6E}.\left(\frac{1}{k_v} - \frac{3}{k_c}\right) = \frac{1}{6Ek_c}.\frac{(1-3\beta)}{\beta}$$

El reemplazo de estos valores en el sistema de ecuaciones (89), permite efectuar el cálculo de las incógnitas X_1.

Para determinar los momentos característicos necesarios a fin de trazar el diagrama de momentos flectores del pórtico, basta con aplicar el principio de independencia de las acciones y superposición de los efectos, resultando, de las figuras 54

$$M_{A1} = X_1 \; ; \; M_{12} = M_{21} = X_2 \; ; \; M_{21} = M_{2B} = X_3 \; ; \; M_{B2} = X_1 - X_2 + X_3$$

El momento en el centro de la viga valdrá

$$M_{1/2} = q.l^2/8 + X_2/2 + X_3/2$$

5.2. Consideración de la influencia de N o Q.

Si en la deformación que experimenta el pórtico no puede ser despreciada la influencia del esfuerzo normal o del esfuerzo de corte, el procedimiento desarrollado en el apartado anterior sigue manteniendo vigencia, con sólo añadir en el cálculo de cada uno de los valores de Δ_{1o} y de δ_{1k}, los sumandos correspondientes a tales influencias, de acuerdo a la expresión general formulada al efecto según la (78) del Capítulo II.

5.3. Cálculo de pórticos por variación de temperatura.

En el caso de un pórtico hiperestático que experimenta una determinada variación de temperatura, ya sea constante o bien diferente entre las fibras exteriores e interiores, el procedimiento descripto en 5.1. y ejemplificado en 5.1.1., sólo se modifica en lo que respecta a los términos independientes de las (89), las que se transforman en

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 &= 0 \\ \Delta_{2t} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 &= 0 \\ \Delta_{3t} + \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (93)$$

Los valores de los desplazamientos Δ_{1t} se obtienen mediante las expresiones del TTV que sean de aplicación según el caso planteado y el isostático equivalente elegido, de entre las (79) y (80) del Capítulo II.

5.4. Casos varios.

El método general expuesto es aplicable a cualquier pórtico hiperestático, cualquiera sea su grado de hiperestaticidad. Sin embargo, resulta más sencilla su formulación en el caso de pórticos con reducido número de incógnitas, dado que al aumentar la cantidad de éstas, suele complicarse el cálculo de los desplazamientos.

5.5. Simplificación en base a las condiciones de simetría.

Sea un pórtico geométricamente simétrico (figura 55a). Su parte derecha se puede interpretar como la imagen sobre un espejo, de la parte izquierda respecto al plano de simetría. Al resolver estructuras con estas características, resulta posible simplificar la solución del problema, reduciendo el número de incógnitas.

Se analizarán los casos de solicitación del pórtico por cargas simétricas y antisimétricas. Se entiende por carga *simétrica* aquella para la cual todas las cargas exteriores aplicadas en la parte derecha de la estructura, coinciden con la imagen especular de las acciones aplicadas en la parte izquierda (figura 55b). Por carga *antisimétrica* (o antimétrica), se entiende aquella para la cual las acciones aplicadas a la parte derecha de la estructura

son también la imagen de las cargas aplicadas a la parte izquierda, pero de signo contrario (figura 55c).

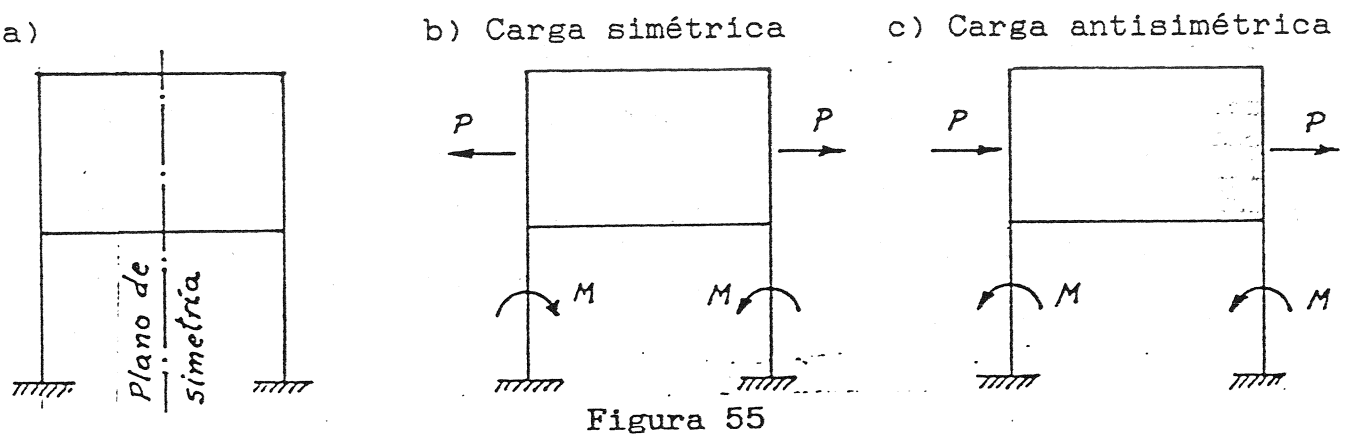


Figura 55

De manera análoga se clasifican las incógnitas, considerando como tales a los esfuerzos internos que se ponen de manifiesto al seccionar la estructura en correspondencia con el plano de simetría, conformación que debe adoptarse para hacer extensivas las propiedades de la simetría al isostático equivalente.

En los planos de la derecha y de la izquierda del corte efectuado (figura 56) actúan fuerzas y momentos iguales. De ellos los momentos flectores y los esfuerzos normales son la imagen especular respecto al plano de la sección; se los denominará en consecuencia *incógnitas simétricas*. Los esfuerzos de corte, según los conceptos antes definidos, serán *incógnitas antisimétricas*, pues cada uno de ellos es de signo opuesto a la imagen del otro.

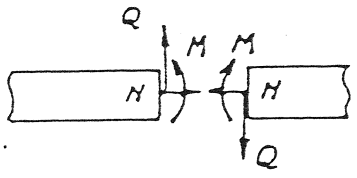


Figura 56

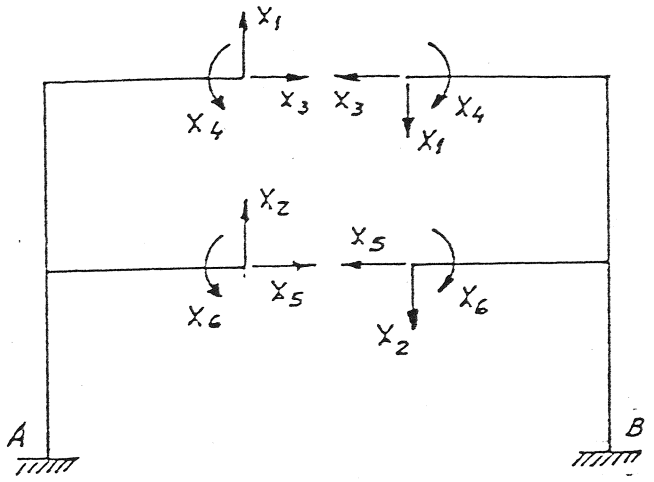


Figura 57

Si en el pórtico de la figura 55a) se elige el isostático equivalente de acuerdo al principio formulado, seccionándolo por su plano de simetría, aquél queda reducido a dos estructuras isostáticas independientes empotradas en A y B (figura 57). En

tales condiciones X_1 y X_2 serán las incógnitas antisimétricas y X_3; X_4; X_5 y X_6 las simétricas.

El sistema de ecuaciones canónicas en tal caso estará compuesto por 6 ecuaciones, de la forma

$$\begin{aligned}
\delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 + \delta_{14}.X_4 + \delta_{15}.X_5 + \delta_{16}.X_6 &= -\Delta_{1o} \\
\delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 + \delta_{24}.X_4 + \delta_{25}.X_5 + \delta_{26}.X_6 &= -\Delta_{2o} \\
\delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 + \delta_{34}.X_4 + \delta_{35}.X_5 + \delta_{36}.X_6 &= -\Delta_{3o} \qquad (94) \\
\delta_{41}.X_1 + \delta_{42}.X_2 + \delta_{43}.X_3 + \delta_{44}.X_4 + \delta_{45}.X_5 + \delta_{46}.X_6 &= -\Delta_{4o} \\
\delta_{51}.X_1 + \delta_{52}.X_2 + \delta_{53}.X_3 + \delta_{54}.X_4 + \delta_{55}.X_5 + \delta_{56}.X_6 &= -\Delta_{5o} \\
\delta_{61}.X_1 + \delta_{62}.X_2 + \delta_{63}.X_3 + \delta_{64}.X_4 + \delta_{65}.X_5 + \delta_{66}.X_6 &= -\Delta_{6o}
\end{aligned}$$

Puede observarse que en estas ecuaciones varios de los coeficientes de las incógnitas son iguales a cero. En efecto, serán nulos los coeficientes que tienen un subíndice correspondiente a una incógnita simétrica y el otro, a una incógnita antisimétrica. Ello resulta debido a que en el pórtico simétrico no existen desplazamientos relativos antisimétricos cuando actúan cargas simétricas. De la misma forma, tampoco aparecen desplazamientos relativos simétricos cuando actúan cargas antisimétricas.

Para una mejor comprensión de lo anterior, debe tenerse en cuenta que en la estructura dada, el diagrama de momentos flectores correspondiente a incógnitas antisimétricas (X_1 por ejemplo, figura 58a) será también antisimétrico, y el diagrama correspondiente a las incógnitas simétricas, será también simétrico (figura 58b).

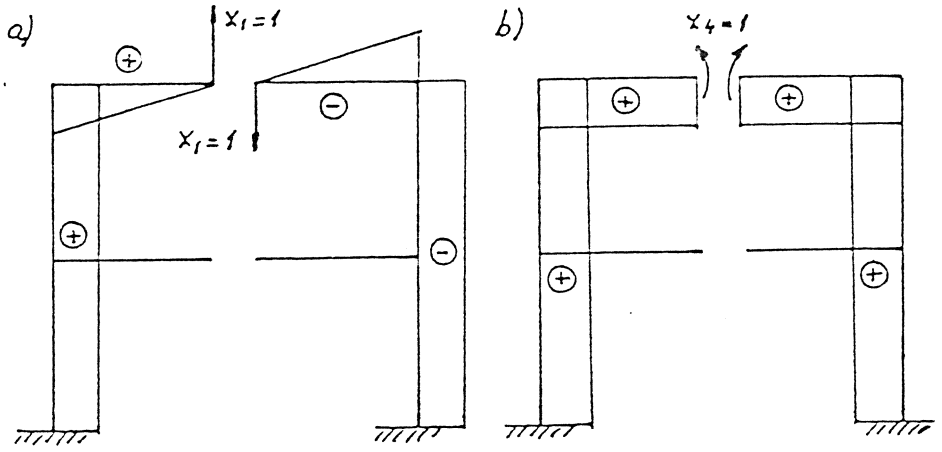


Figura 58

Al aplicar el TTV para calcular los desplazamientos δ_{ik}, se obtendrá como resultado cero al multiplicar un diagrama antisimétrico por uno simétrico. En cambio, al multiplicar entre sí dos diagramas simétricos o dos diagramas antisimétricos, se hallarán para los desplazamientos relativos, valores distintos de cero. Por lo expuesto resulta

$$\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{31} = \delta_{41} = \delta_{51} = \delta_{61} = 0$$
$$\delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{25} = \delta_{26} = \delta_{32} = \delta_{42} = \delta_{52} = \delta_{62} = 0$$

y el sistema original de ecuaciones (94) se reduce a

$$\begin{aligned}
\delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 &= -\Delta_{1o} \\
\delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 &= -\Delta_{2o} \\
\delta_{33}.X_3 + \delta_{34}.X_4 + \delta_{35}.X_5 + \delta_{36}.X_6 &= -\Delta_{3o} \\
\delta_{43}.X_3 + \delta_{44}.X_4 + \delta_{45}.X_5 + \delta_{46}.X_6 &= -\Delta_{4o} \\
\delta_{53}.X_3 + \delta_{54}.X_4 + \delta_{55}.X_5 + \delta_{56}.X_6 &= -\Delta_{5o} \\
\delta_{63}.X_3 + \delta_{64}.X_4 + \delta_{65}.X_5 + \delta_{66}.X_6 &= -\Delta_{6o}
\end{aligned} \qquad (95)$$

Se observa que el sistema de ecuaciones primitivo queda así descompuesto en dos sistemas independientes, uno de 2 ecuaciones que permite calcular las incógnitas antisimétricas X_1 y X_2, y otro de 4 ecuaciones, que dará los valores de las incógnitas simétricas X_3, X_4, X_5 y X_6, solución válida para cualquier estado exterior de cargas.

Además de lo anterior, de aplicación general y siempre válida si la estructura es geométricamente simétrica, se pueden dar distintas simplificaciones adicionales para estados particulares de cargas.

a) Cargas exteriores simétricas.

Si sobre una estructura simétrica actúa un sistema de cargas exteriores que también lo es, serán asimismo simétricos los diagramas de momentos flectores M_o, resultando en consecuencia

$$\Delta_{1o} = \Delta_{2o} = 0$$

por lo que, de las dos primeras ecuaciones de las (95), al ser

$$\delta_{11} \neq 0 \quad ; \quad \delta_{12} = \delta_{21} \neq 0 \quad ; \quad \delta_{22} \neq 0$$

se obtiene $$X_1 = 0 \quad ; \quad X_2 = 0$$

es decir que en estructuras simétricas con cargas exteriores actuantes también simétricas, las incógnitas antisimétricas ubicadas en el plano de simetría son nulas. Para resolver la estructura, el sistema de ecuaciones a emplear se reduce en consecuencia a un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, al eliminarse las dos primeras ecuaciones de las (95).

b) Cargas exteriores antisimétricas.

Para una carga antisimétrica $\Delta_{3o} = \Delta_{4o} = \Delta_{5o} = \Delta_{6o} = 0$, y entonces

$$X_3 = 0 \quad ; \quad X_4 = 0 \quad ; \quad X_5 = 0 \quad ; \quad X_6 = 0$$

anulándose en este caso los valores de las incógnitas simétricas ubicadas en el plano de simetría. La resolución se limita entonces a las dos primeras ecuaciones del sistema (95).

c) Cargas exteriores cualesquiera.

Si las cargas que se aplican a un pórtico simétrico no tienen la propiedad de la simetría o de antisimetría, siempre existirá la

posibilidad de descomponerlas en cargas antisimétricas y simétricas, tal como se indica en la figura 59. La suma de ambos estados de carga equivale a la condición original.

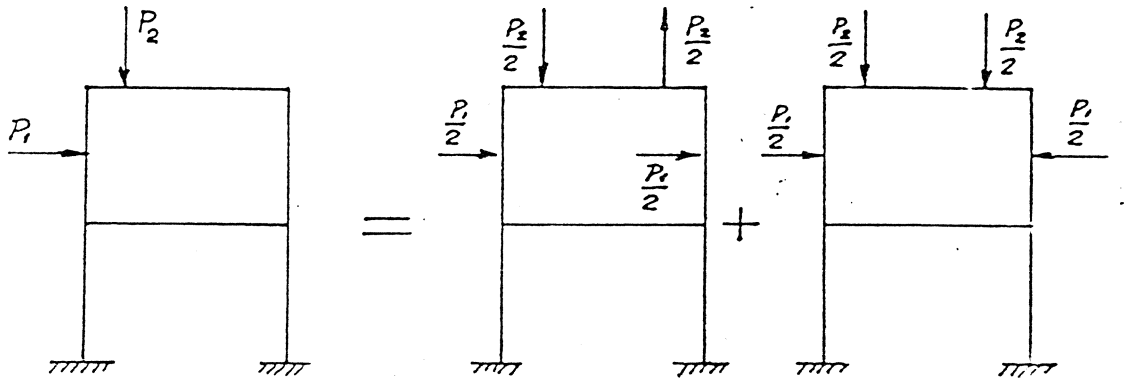


Figura 59

Una vez resueltos los dos casos en forma independiente, uno con 2 ecuaciones y el otro con 4, se obtienen las incógnitas de la estructura con la carga primitiva, sumando los valores resultantes para las mismas en cada estado individual.

Este método sin embargo, ha caído en desuso, dado que no se justifica el mayor trabajo que involucra el doble planteo para reducir la cantidad de incógnitas a resolver, tomando en consideración las modernas herramientas de cálculo disponibles.

5.6. Resolución por aplicación de la ecuación de los 3 momentos.

En el caso particular de pórticos que presentan un eje vertical de simetría geométrica de la estructura y que a su vez se hallan solicitados por estados de carga también simétricos, cada nudo podrá rotar pero no experimentar corrimientos, pues la producción de los mismos no sería compatible con las hipótesis de que la deformada debe ser también simétrica y que a la vez, cada barra mantenga su longitud primitiva tras la deformación. Este hecho permite aplicar a este caso la ecuación de los tres momentos deducida para vigas continuas, sobre la base de igual supuesto (nudos que sólo rotan, pero no se trasladan).

Para estructuras aporticadas en las que se verifican las condiciones antedichas, denominadas *estructuras sin traslación de nudos*, la aplicación de la ecuación de los tres momentos según su expresión general, resulta directa, sin la laboriosidad de cálculo que suele implicar el empleo del método de las fuerzas en su formulación general.

Sin embargo, contrariamente a lo que sucede en vigas continuas, como norma general los pórticos poseen elementos estructurales de secciones diferentes, ante la forma propia de trabajo de las vigas (a flexión) y de las columnas (a flexocompresión). En virtud de ello, para su aplicación al cálculo

de pórticos, se transforma la (20) eliminando los términos ρ_1 e introduciendo el coeficiente de rigidez k_1 de cada elemento.

Recordando la (20)

$$\rho_1.X_{1-1} + 2.(\rho_1 + \rho_{1+1}).X_1 + \rho_{1+1}.X_{1+1} = - R_1.\rho_1 - L_{1+1}.\rho_{1+1}$$

y como además $\rho_1 = l_1.(J_o/J_1)$, puede también escribirse

$$l_1.\frac{J_o}{J_1} X_{1-1} + 2.(l_1.\frac{J_o}{J_1} + l_{1+1}.\frac{J_o}{J_{1+1}}) X_1 + l_{1+1}.\frac{J_o}{J_{1+1}} X_{1-1} =$$

$$= - R_1.l_1.\frac{J_o}{J_1} - L_{1+1}.l_{1+1}.\frac{J_o}{J_{1+1}}$$

Simplificando J_o y como $k_1 = J_1/l_1$, se tendrá

$$\frac{X_{1-1}}{k_1} + 2.(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_{1+1}}) X_1 + \frac{X_{1+1}}{k_{1+1}} = - \frac{R_1}{k_1} - \frac{L_{1+1}}{k_{1+1}} \qquad (96)$$

forma en que se expresa la ecuación de los tres momentos para su aplicación en pórticos simples sin traslación de nudos.

En pórticos simétricos de dos niveles, tal como el de la figura 55a), o pórticos simétricos de un nivel, pero de varios vanos, se presentan nudos en los cuales concurren tres barras, o sea que en los mismos se presentan tres incógnitas X a resolver, por lo que en los mismos no es de aplicación la (96). En tales casos, es fácil demostrar, con la notación de la figura 60, que

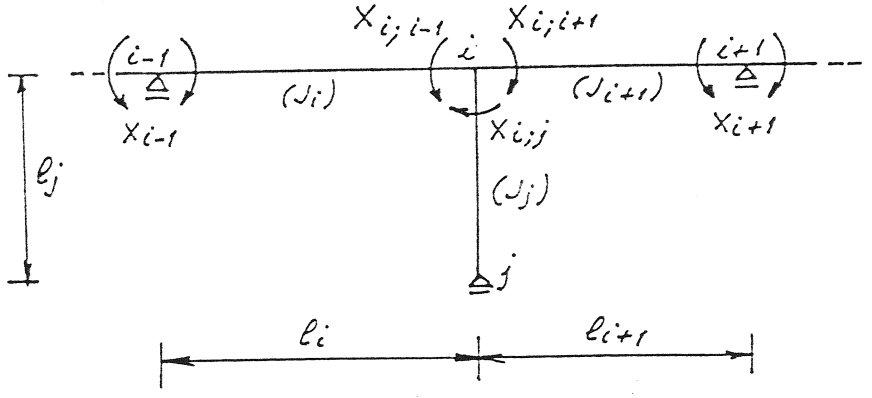


Figura 60

$$\frac{X_{1-1}}{k_1} + 2.\frac{X_{1;1-1}}{k_1} + 2.\frac{X_{1;1+1}}{k_{1+1}} + \frac{X_{1+1}}{k_{1+1}} = - \frac{R_1}{k_1} - \frac{L_{1+1}}{k_{1+1}} \qquad (97)$$

expresión conocida como **ecuación de los cuatro momentos**, cuya aplicación es análoga a la de los tres momentos. Sin embargo, se observa que por cada nudo de concurrencia de tres barras que

presente la estructura, se introduce una nueva incógnita, por lo que el sistema de ecuaciones a formular requerirá una ecuación complementaria en cada caso. La misma surge directamente de la condición de equilibrio del nudo, que para el nudo i será

$$X_{i;i+1} + X_{i;j} - X_{i;i-1} = 0 \qquad (98)$$

6. RESOLUCION DE MARCOS.

6.1. Nociones generales.

Si se tiene una chapa cuyos extremos se unen por medio de una soldadura o unión rígida, se obtiene una estructura comúnmente denominada *marco cerrado* o simplemente *marco* (figura 61a). En estos casos la continuidad del material es total y la unión rígida puede suponerse ubicada en cualquier sección, a los efectos que, efectuando un corte en correspondencia con la misma, puedan ponerse en evidencia las incógnitas hiperestáticas (figura 61b), en un todo de acuerdo a las características propias de este tipo de vinculación, analizada en el apartado 5.3.2. del Capítulo I.

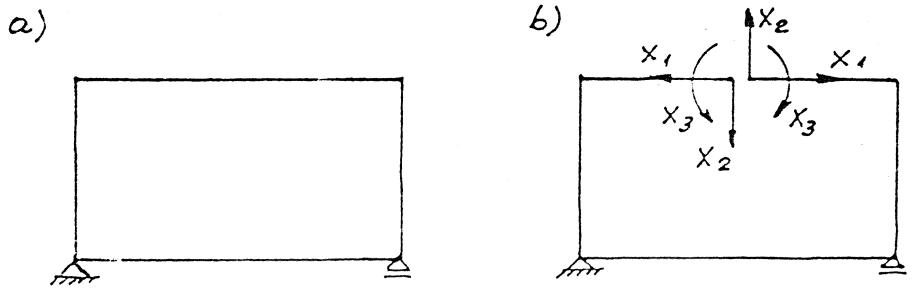


Figura 61

La chapa que conforma el sistema puede tener más de una unión rígida, dando lugar a la formación de varios recintos cerrados, como sería, por ejemplo, la estructura que muestra la figura 62.

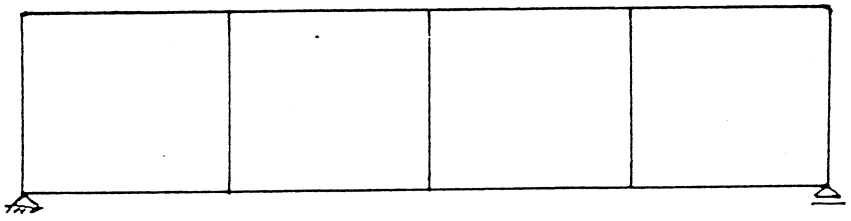


Figura 62

El número de incógnitas hiperestáticas en estas estructuras, queda establecido por la (6), que resulta válida para el caso de los marcos vinculados, como por ejemplo los de las figuras 61 y 62, para los que X es igual a 3 y 12, respectivamente.

Se presentan también en la ingeniería práctica estructuras que responden a la misma configuración, pero que no se hallan sustentadas en la forma tradicional (mediante apoyos fijos y/o

móviles), a las que se denomina *marcos libres*. Para el cálculo de X en este tipo de estructuras, debe tenerse en cuenta que en la (6) desaparece el término *Vs* al no existir condiciones de vínculo, pero se elimina también el término *3* al no ser necesaria la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático ante la inexistencia de los vínculos externos, debiendo quedar asegurado el equilibrio por la propia configuración del sistema exterior de cargas. En definitiva, para este caso es

$$X = 3.R \qquad (99)$$

Por lo general, este tipo de estructuras presenta un desarrollo lineal, cuyo eje principal puede ser horizontal o inclinado (caso de tuberías, alcantarillas, etc.) o vertical (caso de tanques, silos, conductos, etc.). El esquema de cálculo de los marcos libres, será la conformación del eje de las barras que resulta al efectuar un corte con un plano perpendicular a la dirección del eje principal, en cuya dirección se considera, al efectuar el cálculo, una longitud unitaria, reduciendo así la estructura a un sistema plano.

Teniendo en cuenta la forma que toma el esquema de cálculo así constituido, el marco puede ser de lados rectos (cuadrado, rectangular, hexagonal, etc.) o de contorno curvilíneo (circular o elíptico). En cada caso, según que lo conformen una o varias celdas o recintos, podrá ser simple o múltiple. Del análisis de las (6) y (99) surge que los marcos constituyen indefectiblemente estructuras hiperestáticas.

En el caso de tanques o silos, las cargas actuantes serán interiores; mientras que en conductos verticales accesibles, serán exteriores, constituidas por el empuje hidrostático o de suelos, según el medio donde ubique el conducto. Para tanques enterrados o alcantarillas, pueden presentarse empujes interiores (generalmente hidrostáticos) y exteriores (empujes de suelos, cargas debidas al tránsito, etc.), debiendo en estos casos considerarse la combinación de estados de carga que resulte más desfavorable.

Los marcos vinculados pueden utilizarse como vigas constituidas por barras de alma llena rígidamente unidas entre sí, en reemplazo de armaduras, cuando ello resulta conveniente en función del material de construcción a emplear.

Generalmente los marcos presentan uno, y en varios casos dos, ejes de simetría, lo que permite simplificar los planteos conducentes a su resolución, aplicando los criterios expuestos al respecto en el apartado 5.5. Como consecuencia de los mismos, para la resolución de marcos que presenten la condición de simetría geométrica, es aconsejable efectuar la elección de la sección donde se ponen en evidencia las incógnitas en correspondencia con su eje de simetría. De este modo, si las cargas son simétricas, serán nulas las incógnitas antisimétricas, y viceversa. Así por ejemplo, si el marco de la figura 61 tuviese un eje de simetría vertical, ubicando la sección del corte en el punto medio de la barra superior, resultará, para cargas simétricas, $X_2 = 0$, y para cargas antisimétricas, $X_1 = X_3 = 0$.

Para la resolución de marcos puede emplearse el método de las fuerzas, cuyos fundamentos de aplicación no difieren de los desarrollados hasta el presente. Sin embargo, a medida que aumenta la cantidad de incógnitas, se torna más laborioso el cálculo de los desplazamientos que constituyen los términos independientes y los coeficientes de dichas incógnitas, por lo que, en especial para marcos múltiples, es aconsejable el empleo del método de los desplazamientos (Ver Capítulo IV, apartado 8.).

6.2. Resolución por aplicación del método de los fuerzas.

Sea a nivel de ejemplo el marco representado en la figura 63a), que constituye un conducto rectangular sometido en todo su contorno a una presión exterior *p* uniformemente distribuida. El isostático equivalente con las incógnitas hiperestáticas puestas en evidencia, puede reducirse al indicado en la figura 63b).

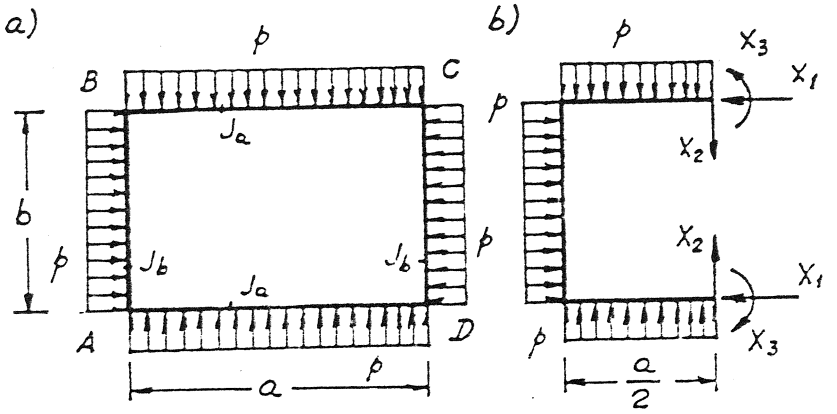


Figura 63

Este isostático equivalente permite aplicar las conclusiones que resultan del análisis de estructuras simétricas bajo la acción de cargas que también lo son. Asimismo, en virtud de estas mismas conclusiones, puede limitarse la construcción de los diagramas a sólo la mitad de la estructura.

Teniendo en cuenta que el plano vertical medio es plano de simetría, las incógnitas antisimétricas ubicadas sobre el mismo serán nulas, por lo que $X_2 = 0$. Además, de las condiciones de equilibrio del semimarco (figura 63b), resulta

$$p.b - 2.X_1 = 0 \quad ; \quad X_1 = p.b / 2$$

Resta en consecuencia como única incógnita a resolver, el momento X_3. Aplicando la expresión fundamental del método

$$\Delta_{3o} + \delta_{33}.X_3 = 0 \quad ; \quad X_3 = - (\Delta_{3o} / \delta_{33})$$

en donde Δ_{3o} es el desplazamiento angular en correspondencia con el seccionamiento efectuado, producido por el sistema de acciones p y X_1 (que debe ser considerada al conocerse ya su valor y reducirse la resolución a una sola incógnita), mientras que δ_{33} es el desplazamiento angular en la misma sección producido por $X_3 = 1$. Teniendo en cuenta los diagramas de M_o y M_3 (figuras 64a) y b)

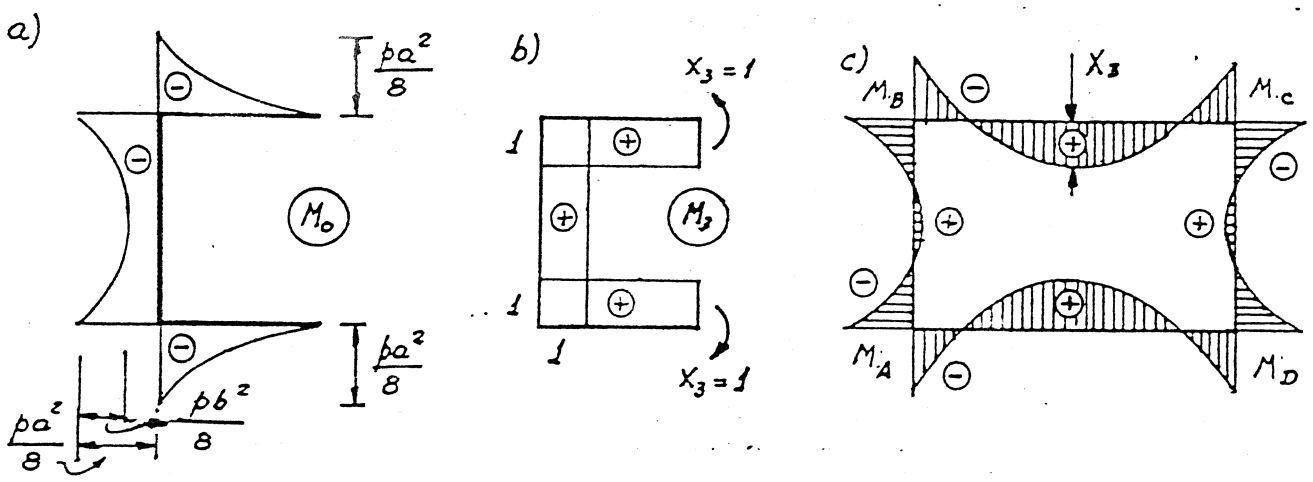


Figura 64

Haciendo: $k_a = J_a/a$: $k_b = J_b/b$: $\beta = k_a/k_b$, se tendrá

$$\Delta_{3o} = -2.\frac{1}{3}.\frac{p.a^2}{8}.\frac{a}{2}.\frac{1}{EJ_a} - \frac{p.a^2}{8}.\frac{1.b}{EJ_b} + \frac{2}{3}.\frac{p.b^2}{8}.\frac{1.b}{EJ_b} =$$

$$= -\frac{p.a^2}{24Ek_a} - \frac{p.a^2}{8Ek_b} + \frac{p.b^2}{12Ek_b} = -\frac{p}{24Ek_a}.(a^2 + 3\,a^2.\beta - 2\,b^2.\beta)$$

$$\delta_{33} = 2.\frac{a}{2}.\frac{1x1}{EJ_a} + \frac{b.1x1}{EJ_b} = \frac{1}{Ek_a} + \frac{1}{Ek_b} = \frac{1}{Ek_a}.(1 + \beta)$$

$$X_3 = -\frac{-p(a^2 + 3\,a^2.\beta - 2\,b^2.\beta)/24Ek_a}{(1 + \beta)/Ek_a} = \frac{p[a^2.(1+3\,\beta) - 2\,b^2.\beta]}{24.(1 + \beta)}$$

El momento en el nudo B, por ejemplo, valdrá, sumando el valor indicado en el diagrama M_o más el valor correspondiente al diagrama M_3 multiplicado por el verdadero valor de X_3

$$M_B = M_o + 1.X_3 = -\frac{p.a^2}{8} + \frac{p.(a^2 + 3\,a^2.\beta - 2\,b^2.\beta)}{24.(1 + \beta)} =$$

$$= \frac{p.(-3a^2 - 3a^2\beta + a^2 + 3a^2\beta - 2\,b^2\beta)}{24.(1 + \beta)} = \frac{p.(-2a^2 - 2b^2\beta)}{24.(1 + \beta)} =$$

$$= -\frac{p.(a^2 + b^2.\beta)}{12.(1 + \beta)}$$

Además, por la doble simetría estructural, será $M_A = M_B = M_C = M_D$, adquiriendo el diagrama de momentos flectores la configuración genérica indicada en la figura 64c).

6.3. Aplicación de las ecuaciones de los 3 y 4 momentos.

En el caso particular de marcos simples o múltiples, que presenten simetría geométrica y de cargas, cada nudo podrá rotar pero no experimentar corrimientos, constituyendo en consecuencia una estructura sin corrimiento de nudos, para cuya resolución serán aplicables las ecuaciones deducidas en el apartado 5.6.

Por ejemplo, si se considera el marco resuelto en el apartado 6.2. (figura 63), como consecuencia de presentar un eje vertical de simetría, debe ser $M_A = M_D$ y $M_B = M_C$. Pero como además también existe simetría respecto a la dirección horizontal, se debe verificar que $M_A = M_B$ y $M_D = M_C$. Combinando ambas condiciones resulta que $M_A = M_B = M_C = M_D$. En consecuencia, tomando dos barras consecutivas cualesquiera, tales como las AB y BC, se tendrá, aplicando la (96)

$$\frac{M_A}{k_b} + 2.\left(\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_a}\right).M_B + \frac{M_C}{k_a} = -\frac{p.b^2}{4.k_b} - \frac{p.a^2}{4.k_a}$$

$$3\,M.\left(\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_a}\right) = \frac{3\,M}{k_a}.(1 + \beta) = -\frac{p.(a^2 + b^2.\beta)}{4\,k_a}$$

$$M = -\frac{p.(a^2 + b^2.\beta)}{12.(1 + \beta)}$$

valor coincidente con el obtenido para M_B en el apartado anterior.

Debe tenerse presente que si la carga fuese una presión interior, o sea para el tramo horizontal superior orientada de abajo hacia arriba, será contraria a la supuesta en la deducción de la ecuación de los tres momentos, por lo que corresponderá cambiar el signo de los términos del segundo miembro, y el momento M resultante será positivo, con igual valor.

6.4. Marco poligonal regular.

Sea el marco poligonal regular de la figura 65, sometido a presión interior uniforme.

Entre dos lados contiguos del polígono que forma el alvéolo, se podrá plantear la (96), y en virtud de ser iguales los momentos de todos los vértices por tratarse de un polígono regular y considerarse también iguales todas las rigideces k, resulta

$$X + 4.X + X = \frac{p.s^2}{4} + \frac{p.s^2}{4}$$

Luego

$$6.X = p.s^2 / 2 \quad ; \quad X = p.s^2 / 12$$

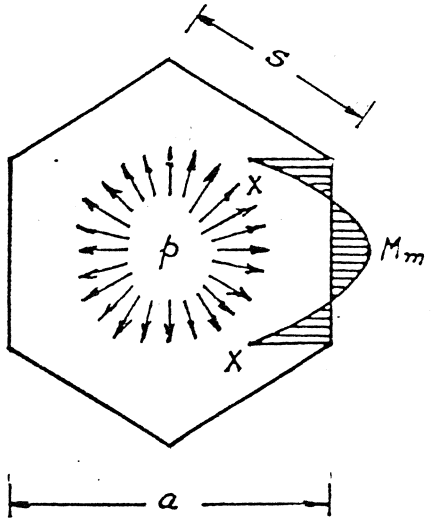


Figura 65

y el momento máximo de tramo será

$$M_m = \frac{p.s^2}{12} - \frac{p.s^2}{8} = -\frac{p.s^2}{24}$$

Llamando *a* al diámetro del círculo inscripto, se tendrá para los polígonos regulares más usuales:

* Cuadrado: $s = a$; $X = p.a^2/12$; $M_m = -p.a^2/24$

* Hexágono: $s = a/\sqrt{3}$; $X = p.a^2/36$; $M_m = -p.a^2/72$

* Octógono: $s = 0{,}414\ a$; $X = 0{,}0143\ p.a^2$; $M_m = -0{,}00716\ p.a^2$

6.5. Cálculo de anillos cerrados.

Para la resolución de estructuras elásticas estáticamente indeterminadas que contienen barras curvilíneas de pequeño espesor, resulta también de aplicación el método de las fuerzas.

Sea el caso de un anillo circular de sección transversal constante, traccionado por dos fuerzas P diametrales, iguales y de sentido contrario, tal como el que indica la figura 66a). Este sistema, al igual que cualquier contorno cerrado, tiene 3 grados de hiperestaticidad. El isostático equivalente puede ser conformado cortando el anillo por cualquier sección, la A_2 por ejemplo (figura 66b).

De la condición de simetría se desprende que la fuerza transversal en esa sección, por ser incógnita antisimétrica, es $X_1 = 0$. Cortando el anillo por el diámetro $A_1 - A_2$ (figura 66c), se determina a partir de las condiciones de equilibrio de la parte seccionada el valor de la fuerza normal $X_2 = P/2$. El momento flector incógnito X_3 se halla al examinar el sistema equivalente señalado en la figura 66d).

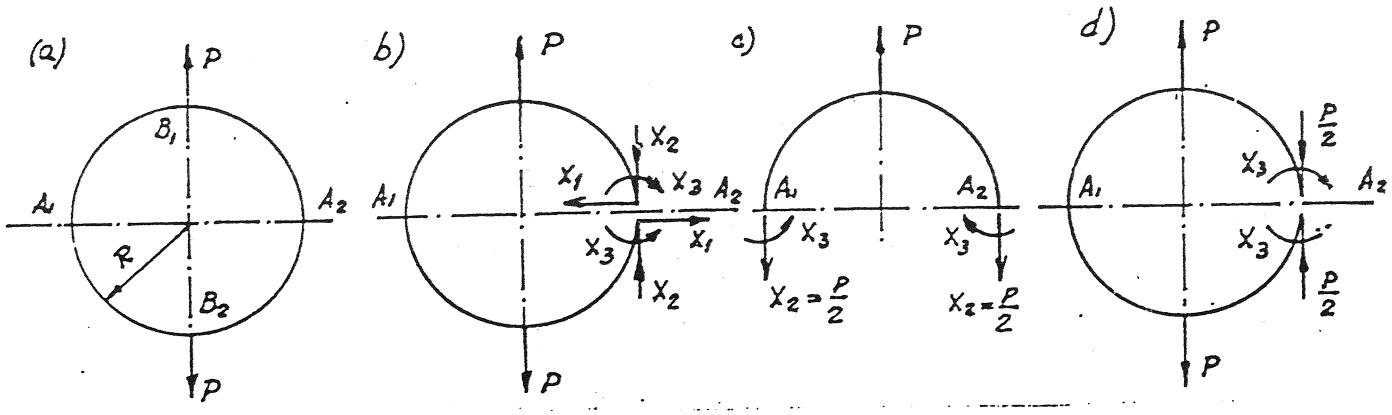


Figura 66

La ecuación canónica de los desplazamientos que expresa la condición de nulidad del ángulo de giro recíproco de las caras de la sección A2 será

$$\Delta_{3o} + \delta_{33}.X_3 = 0 \qquad ; \qquad X_3 = -(\Delta_{3o} / \delta_{33})$$

Para determinar las leyes de variación de M_o y M_3, los estados de carga a considerar se consignan respectivamente en las figuras 67a) y b).

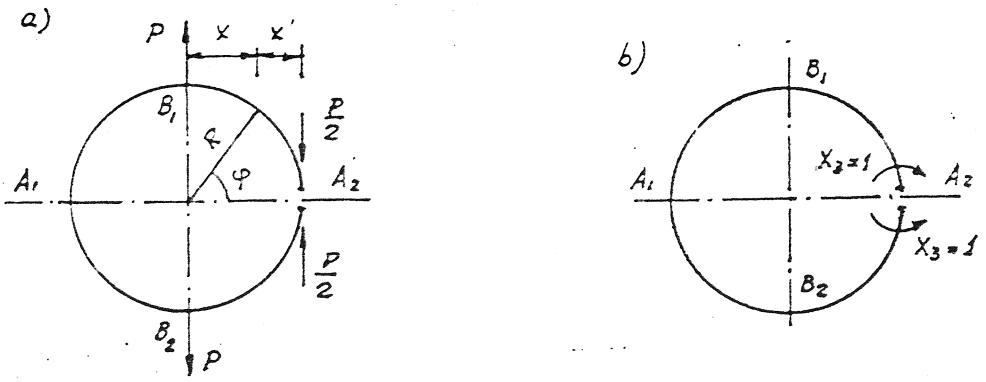


Figura 67

$$M_o = -\frac{P}{2}.x' = -\frac{P}{2}.(R - x) = -\frac{P}{2}.(R - R.\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{P.R}{2}.(1 - \cos\varphi)$$

$$M_3 = -1$$

$$\Delta_{3o} = \int M_3.\frac{M_o}{E.J}.ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P.R}{2}.(1 - \cos\varphi).\frac{R.d\varphi}{E.J} =$$

$$= \frac{2\,P.R^2}{E.J}.\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi.d\varphi\right] = \frac{2\,P.R^2}{E.J}.\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$\delta_{3s} = \int \frac{(M_3)^2}{E.J}.ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R.d\varphi}{E.J} = \frac{2\,\pi.R}{E.J}$$

$$X_3 = -\frac{2\,P.R^2.(0{,}5\,\pi - 1)\,/\,E.J}{2\,\pi.R\,/\,E.J} = -\,0{,}182\,P.R$$

valor que corresponde al momento flector en la sección A_2 (igual a A_1 por simetría). Este momento está dirigido en sentido contrario al supuesto, o sea que tracciona las fibras interiores del anillo.

El momento flector en una sección arbitraria resulta de

$$M(\varphi) = -\frac{P.R}{2}.(1 - \cos\varphi) - 1\,X_3 = -\frac{P.R}{2}.(1 - \cos\varphi) + 0{,}182\,P.R$$

El momento máximo se produce en los puntos B_1 y B_2 (de aplicación de las cargas), y vale

$$M_{max} = -\,(P.R/2) + 0{,}182\,P.R = -\,0{,}318\,P.R$$

El esfuerzo de corte y el esfuerzo normal en cualquier sección resultan de

$$Q(\varphi) = 0{,}5\,P.\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{y} \qquad N(\varphi) = 0{,}5\,P.\cos\varphi$$

La figura 68 muestra la conformación de los diagramas respectivos.

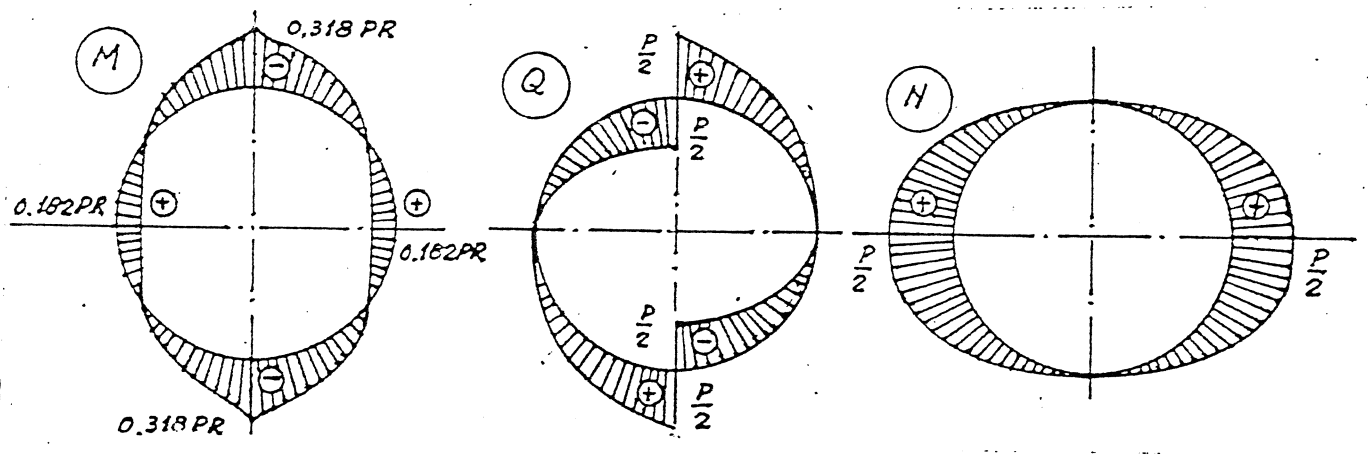


Figura 68

Cabe recordar que para un anillo circular sujeto a una presión uniforme p es: $M(\varphi) = 0$; $N(\varphi) = p.R$; $Q(\varphi) = 0$.

7. RESOLUCION DE RETICULADOS HIPERESTATICOS.

7.1. Consideraciones generales.

Una estructura de reticulado puede ser estáticamente indeterminada, por poseer, tanto vínculos de apoyo como barras superabundantes, o por ambas causas a la vez, quedando determinado el grado de indeterminación por la expresión (5).

Las barras y los vínculos de apoyo de las armaduras hiperestáticas se dividen en: imprescindibles, cuya eliminación torna al sistema inestable, y superfluas, que son todas las restantes. Los esfuerzos que se producen en las barras imprescindibles, como así también las reacciones de vínculo de apoyo imprescindibles son isostáticamente determinables.

Los reticulados que son hiperestáticos sólo por exceso de vínculos de apoyo, pueden ser resueltos aplicando el método de las fuerzas en la forma general expuesta, habida cuenta que la armadura en sí se comporta como una chapa. En cambio, para el cálculo de reticulados con exceso de barras, el isostático equivalente puede ser conformado, ya sea eliminando las barras superfluas, ya sea seccionándolas (figuras 2b) y c), respectivamente). En las barras eliminadas o seccionadas de la armadura, se considerará que las fuerzas longitudinales incógnitas son positivas si son de tracción.

7.2. Reticulados hiperestáticos por exceso de vínculos externos.

En el caso de reticulados hiperestáticos por exceso de vínculos de apoyo, puede constituirse el isostático equivalente suprimiendo los vínculos superabundantes, en cuyo caso las incógnitas hiperestáticas puestas en evidencia serán las reacciones que se producen en dichos vínculos (figura 69c), referida al hiperestático de grado 2 mostrado en la figura 69a).

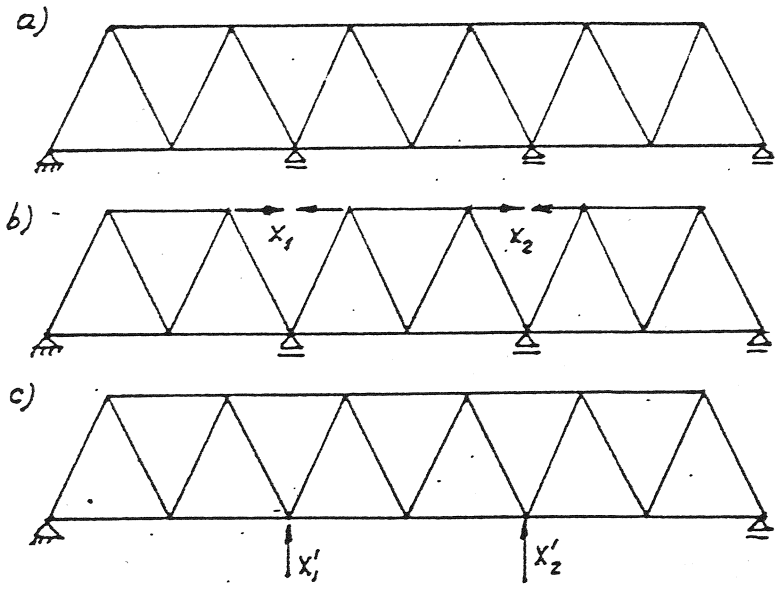


Figura 69

En ocasiones, si la configuración del reticulado lo permite, puede resultar más conveniente a los fines de la resolución, adoptar como isostático equivalente el que se obtiene suprimiendo (o seccionando) barras en la cantidad necesaria (figura 69b). En este caso la estructura queda transformada en una cadena cinemática, cuya resolución es menos complicada que el sistema básico de la figura 69c), porque en aquél, en una serie de barras los esfuerzos debidos a las cargas pueden ser iguales a cero, al tener tramos isostáticos independientes, lo que no sucede en el otro supuesto. Además, en el caso de la figura 69b), en algunas barras los esfuerzos debidos a $X_1 = 1$ son también nulos.

Cabe observar que para el isostático equivalente de la figura 69b), el sistema de ecuaciones de compatibilidad es

$$\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 = \Delta_1 = X_1.l_1/E.F_1$$
$$\Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 = \Delta_2 = X_2.l_2/E.F_2$$

es decir que la suma de los desplazamientos relativos de los extremos de las barras correspondientes a los estados P_o, $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$, debe ser igual a la deformación total que experimenta la barra respectiva en sus condiciones reales en la estructura hiperestática.

En cambio, para el isostático equivalente de la figura 69c), por tratarse de vínculos indesplazables en la dirección de las incógnitas, resulta

$$\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1' + \delta_{12}.X_2' = 0$$
$$\Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1' + \delta_{22}.X_2' = 0$$

En cada caso los valores de Δ_{io} y de δ_{ik} se calculan mediante las expresiones atinentes del Teorema de los Trabajos Virtuales (expresión (76) del Capítulo II).

7.3. Reticulados hiperestáticos por exceso de barras.

7.3.1. Método de la eliminación de las barras.

Sea el reticulado hiperestático de segundo grado de la figura 70a). Eliminando las barras AD y DB y reemplazándolas por los esfuerzos reales que en ellas se producen (X_1 y X_2), aplicados en los vértices de las barras suprimidas, la estructura queda reducida a un sistema isostático (figura 70b). Para el mismo, y prescindiendo de las incógnitas (figura 70c), pueden calcularse los desplazamientos lineales relativos experimentados por los nudos AD y DB (extremos de las barras suprimidas) bajo la acción del sistema exterior de cargas actuante sobre la estructura original. Dado que tales direcciones son las de las incógnitas, los mencionados desplazamientos relativos serán Δ'_{1o} y Δ'_{2o}.

Si se descarga ahora la estructura y se hacen actuar en forma independiente y sucesiva los estados de carga $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$, figuras 70d) y e), se podrán calcular los desplazamientos relativos entre los puntos considerados δ'_{11}; δ'_{21}; δ'_{12}; δ'_{22}, respectivamente.

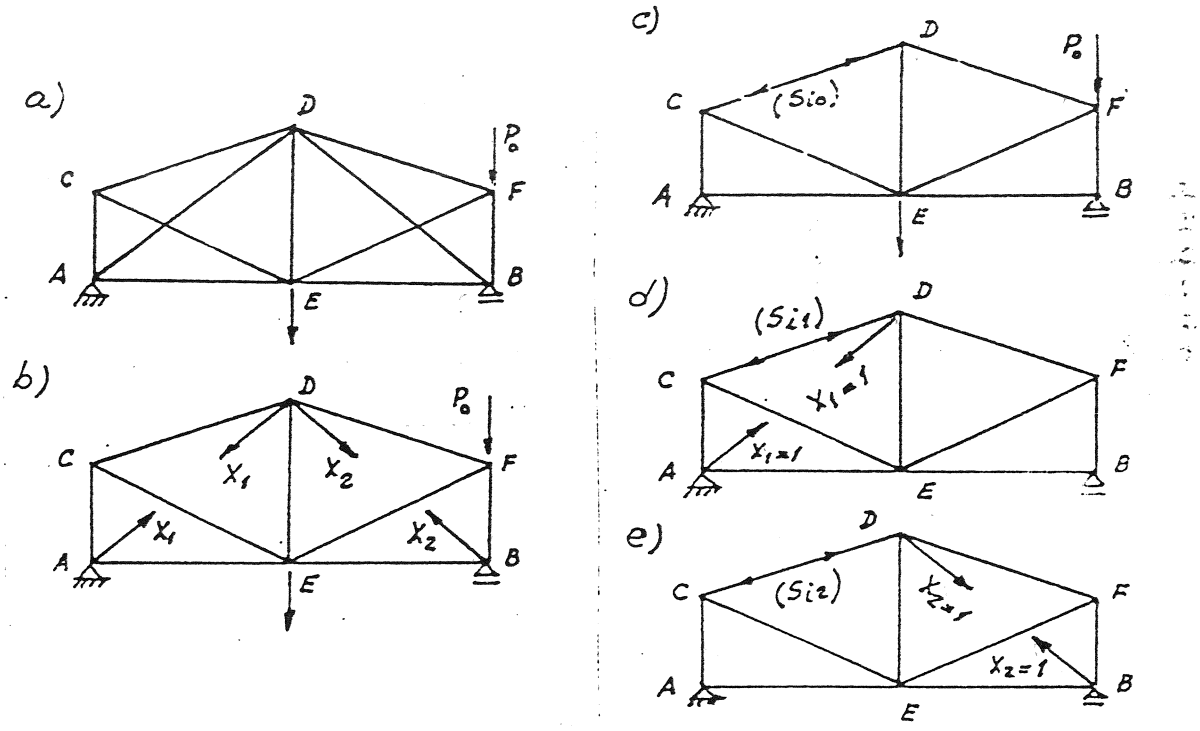


Figura 70

A los efectos de plantear las ecuaciones de compatibilidad debe tenerse presente que la suma de los desplazamientos relativos de los vértices extremos en las direcciones de las incógnitas para el estado de la figúra 70c), más X_1 veces el de la figura 70d), más X_2 veces el de la figura 70e), debe equivaler en cada caso a las variaciones de longitud propias que las barras AD y DB experimentan en la estructura dada, que según la (10) del Capítulo II valdrán, respectivamente

$$\Delta l_{AD} = \frac{X_1 . l_{AD}}{E . F_{AD}} \quad ; \quad \Delta l_{DB} = \frac{X_2 . l_{DB}}{E . F_{DB}}$$

En definitiva, expresando algebraicamente

$$\Delta'_{1o} + \delta'_{11} . X_1 + \delta'_{12} . X_2 + \frac{X_1 . l_{AD}}{E . F_{AD}} = 0$$

$$\Delta'_{2o} + \delta'_{21} . X_1 + \delta'_{22} . X_2 + \frac{X_2 . l_{DB}}{E . F_{DB}} = 0$$

O bien

$$\Delta'_{1o} + \left(\delta'_{11} + \frac{l_{AD}}{E . F_{AD}}\right) . X_1 + \delta'_{12} . X_2 = 0$$

$$\Delta'_{2o} + \delta'_{21} . X_1 + \left(\delta'_{22} + \frac{l_{DB}}{E . F_{DB}}\right) . X_2 = 0 \qquad (100)$$

Sistemas de ecuaciones que permiten hallar el valor de los esfuerzos en las barras superabundantes.

7.3.2. Método del seccionamiento de las barras.

Dado un reticulado hiperestático por exceso de barras, el de la figura 70a) por ejemplo, el isostático equivalente puede ser también conformado seccionando las barras superabundantes y aplicando a las caras del corte las fuerzas incógnitas, tal como indica el detalle de la figura 71. En este caso los desplazamientos lineales relativos a calcular corresponden a la separación que experimentan ambas caras de dicho corte (Δ_1 en la figura 71). Se entiende que un Δ_1 negativo tendrá sólo sentido matemático.

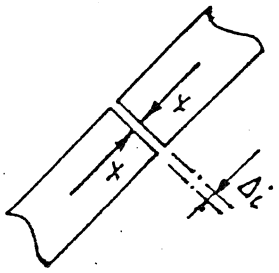


Figura 71

Bajo las condiciones supuestas, el sistema básico tomará la configuración que indica la figura 72a), y los sucesivos pasos a desarrollar para poder efectuar el planteo de las ecuaciones, se señalan en las figuras 72b), c) y d), que responden a conceptos conocidos.

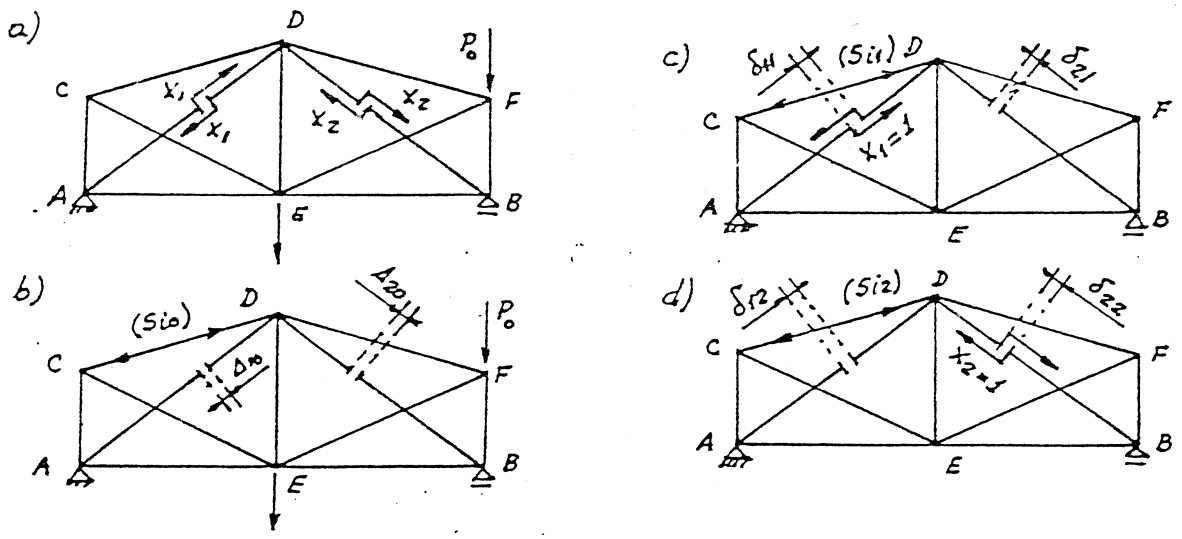


Figura 72

La compatibilidad de los desplazamientos queda ahora expresada teniendo en cuenta que el desplazamiento relativo entre las caras seccionadas para el estado de la figura 72b), más X_1 veces el que

corresponde al estado de la figura 72c) más X_2 veces el de la figura 72d), debe ser igual al acercamiento o alejamiento que experimentan las caras del corte efectuado, en la estructura hiperestática real, que obviamente es igual a cero por el principio de continuidad. En definitiva

$$\begin{aligned} \Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 &= 0 \\ \Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (101)$$

sistema que resuelve el problema planteado.

7.3.3. Comparación entre ambos métodos.

Cotejando los fundamentos de cálculo supuestos en los apartados 7.3.1. y 7.3.2., se observa que:

a) En el cálculo de Δ_{1o}, las barras incógnitas, al no estar solicitadas, experimentan un desplazamiento relativo entre las caras del seccionamiento igual al que se produce en sus extremos. En consecuencia $\Delta_{1o} = \Delta'_{1o}$; $\Delta_{2o} = \Delta'_{2o}$.

b) Por análogo motivo $\delta_{12} = \delta'_{12}$; $\delta_{21} = \delta'_{21}$.

c) En cambio, en los estados $X_1 = 1$ de las figuras 72c) y d), para determinar δ_{11}, se incluye la variación de longitud que experimenta la barra incógnita, pues ésta se considera en la sumatoria para su cálculo, mientras que en el caso de δ'_{11}, la misma no aparece al haber sido totalmente suprimida. En consecuencia, la diferencia que existe entre los desplazamientos de las caras del corte (segundo método) respecto al desplazamiento de los nudos extremos de la barra (primer método), es precisamente el alargamiento propio de la barra (para los sentidos de las incógnitas supuestos), producido por una acción unitaria, o sea

$$\delta_{11} = \delta'_{11} + \frac{l_{AD}}{E.F_{AD}} \quad ; \quad \delta_{22} = \delta'_{22} + \frac{l_{DB}}{E.F_{DB}}$$

Del análisis de lo expuesto en a), b) y c) resulta evidente la equivalencia total del sistema (100) con el (101). Visto que este último sistema no presenta términos complementarios y se corresponde con la expresión genérica del método de las fuerzas, es el que resulta de aplicación más aconsejable en la práctica, por lo que será el único a que se hará referencia en lo sucesivo.

7.3.4. Generalización del método.

Si se presenta un reticulado con n incógnitas hiperestáticas, la ecuación genérica de aplicación será

$$\Delta_{ko} + \delta_{k1}.X_1 + \delta_{k2}.X_2 + \ldots + \delta_{kn}.X_n = 0 \qquad (102)$$

y el sistema puede expresarse en forma matricial

$$[\Delta_{xo}] + [\delta_{xxu}].[X] = 0 \qquad (103)$$

de donde el vector de las incógnitas se calcula por

$$[X] = - [\delta_{xxu}]^{-1}.[\Delta_{xo}] \qquad (104)$$

siendo de aplicación respecto a cada término los conceptos ya estudiados para el caso de vigas continuas y pórticos.

7.3.5. Cálculo de los desplazamientos.

Para el cálculo de los desplazamientos que constituyen los términos independientes y los coeficientes del sistema de ecuaciones canónicas, resulta como más conveniente la aplicación del Teorema de los Trabajos Virtuales, que para el caso de desplazamientos relativos entre dos puntos se halla expuesto como caso 3 en el apartado 3.6. del Capítulo II, donde se consignan las características de los sistemas auxiliares a emplear, que coinciden precisamente con los estados de carga que se producen cuando se hacen actuar sobre la estructura las incógnitas con su valor unitario.

En consecuencia, aplicando la (76) de dicho Capítulo y designando por S_{io}, S_{i1}, S_{i2}, ... S_{ik}, ... S_{in}, a los esfuerzos interiores en una barra genérica i, producidos respectivamente por el sistema exterior de cargas y por los estados $X_1 = 1$; $X_2 = 1$; ... $X_k = 1$; ... $X_n = 1$, será

$$\Delta_{ko} = \Sigma \frac{S_{ik}.S_{io}}{E.F_i}.l_i \; ; \; \delta_{kj} = \Sigma \frac{S_{ik}.S_{ij}}{E.F_i}.l_i \; ; \; \delta_{kk} = \Sigma \frac{S_{ik}^2}{E.F_i}.l_i$$

7.4. Cálculo de los esfuerzos en las barras isostáticas.

Una vez calculados los esfuerzos X_i en las barras hiperestáticas, pueden calcularse los esfuerzos internos en todas las barras restantes de la armadura, aplicando directamente el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos, resultando así, para la barra i

$$S_i = S_{io} + S_{i1}.X_1 + S_{i2}.X_2 + ... + S_{in}.X_n$$

7.5. Caso de variación de temperatura.

Para la resolución de armaduras hiperestáticas solicitadas por la acción de una variación térmica, la ecuación general (102) a aplicar se transforma en

$$\Delta_{kt} + \delta_{k1}.X_{1t} + \delta_{k2}.X_{2t} + ... + \delta_{kn}.X_{nt} = 0$$

siendo, según la (79) del Capítulo II, transformada para el caso de barras solicitadas a esfuerzos normales constantes en toda su longitud

$$\Delta_{kt} = \Sigma \, S_{ik}.\alpha.\Delta t.l_i = \alpha.\Delta t.\Sigma \, S_{ik}.l_i$$

7.6. Trazado de las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras hiperestáticas.

Para el trazado de las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras superabundantes de un reticulado hiperestático, son de aplicación los mismos conceptos generales desarrollados al tratar análogo tema para vigas continuas, en el apartado 4.

Planteada la expresión general (103), que para este caso toma la forma, designando por j a la posición genérica de la carga unitaria

$$[\delta_{xj}] + [\delta_{xxu}].[X_j] = 0$$

$$[X_j] = -[\delta_{xxu}]^{-1}.[\delta_{xj}] = [\beta].[\delta_{xj}]$$

donde la matriz [β] adquiere análoga configuración matemática a la expuesta en la expresión (52), calculada partiendo de los valores δ_{xxu} que responden a los conceptos de los desplazamientos lineales relativos desarrollados en 7.3.2. Puede así llegar a formularse, también para el caso de reticulados, un sistema de ecuaciones análogo al de la (55), que expresan las leyes de variación que definen analíticamente las líneas de influencia buscadas, que serán de la forma

$$\begin{aligned} X_{1j} &= \beta_{11}.\delta_{1j} + \beta_{12}.\delta_{2j} + \ldots + \beta_{1n}.\delta_{nj} \\ X_{2j} &= \beta_{21}.\delta_{1j} + \beta_{22}.\delta_{2j} + \ldots + \beta_{2n}.\delta_{nj} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (105)$$

A los factores β se los suele denominar coeficientes de influencia. La gráfica de los valores de δ_{kj} es el diagrama de desplazamientos verticales del cordón cargado debidos a $X_k = 1$. Por consiguiente, las líneas de influencia de las incógnitas X_{1j}, X_{2j}, ... X_{nj} están formadas por la suma de las ordenadas de los diagramas de desplazamientos δ_{kj} multiplicados por los coeficientes de influencia correspondientes.

A fin de clarificar el concepto anterior, supóngase el caso del reticulado hiperestático de la figura 73a), para el que el sistema de ecuaciones (105) se reduce a

$$\begin{aligned} X_{1j} &= \beta_{11}.\delta_{1j} + \beta_{12}.\delta_{2j} \\ X_{2j} &= \beta_{21}.\delta_{1j} + \beta_{22}.\delta_{2j} \end{aligned}$$

Los desplazamientos relativos δ_{1j} y δ_{2j} son los que se producen en las caras del corte efectuado en las barras hiperestáticas cuando la carga unitaria ocupa la posición j (figura 73b). Se supone como cordón cargado al inferior.

Por el Teorema de Maxwell dichos corrimientos pueden ser calculados en la forma que se indica en las figuras 73c) y d). En consecuencia, las elásticas de corrimientos verticales del cordón inferior para los estados de carga indicados en dichas figuras, coinciden con los valores de los desplazamientos relativos de las caras del corte, que se producen para cada posición de la carga unitaria.

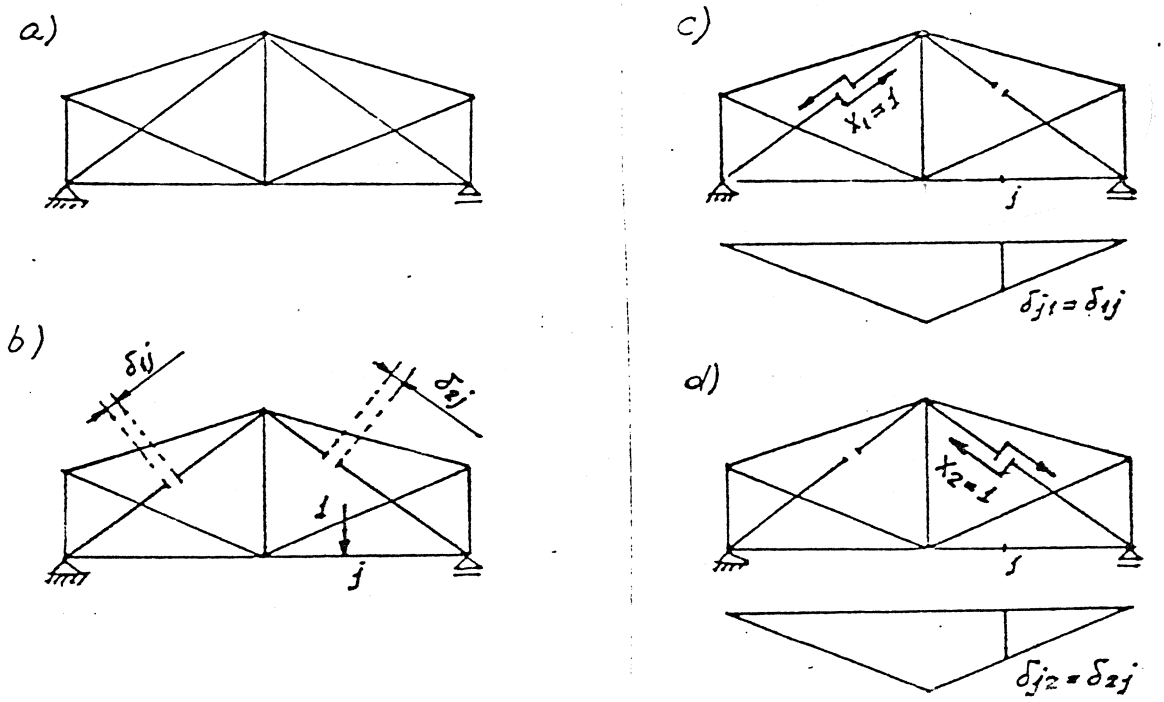


Figura 73

Si en lugar de aplicar en dichas caras cargas unitarias, se aplican acciones β_{11} y β_{12} respectivamente, las ordenadas de cada elástica se multiplican por dichos valores (figuras 74a) y b).

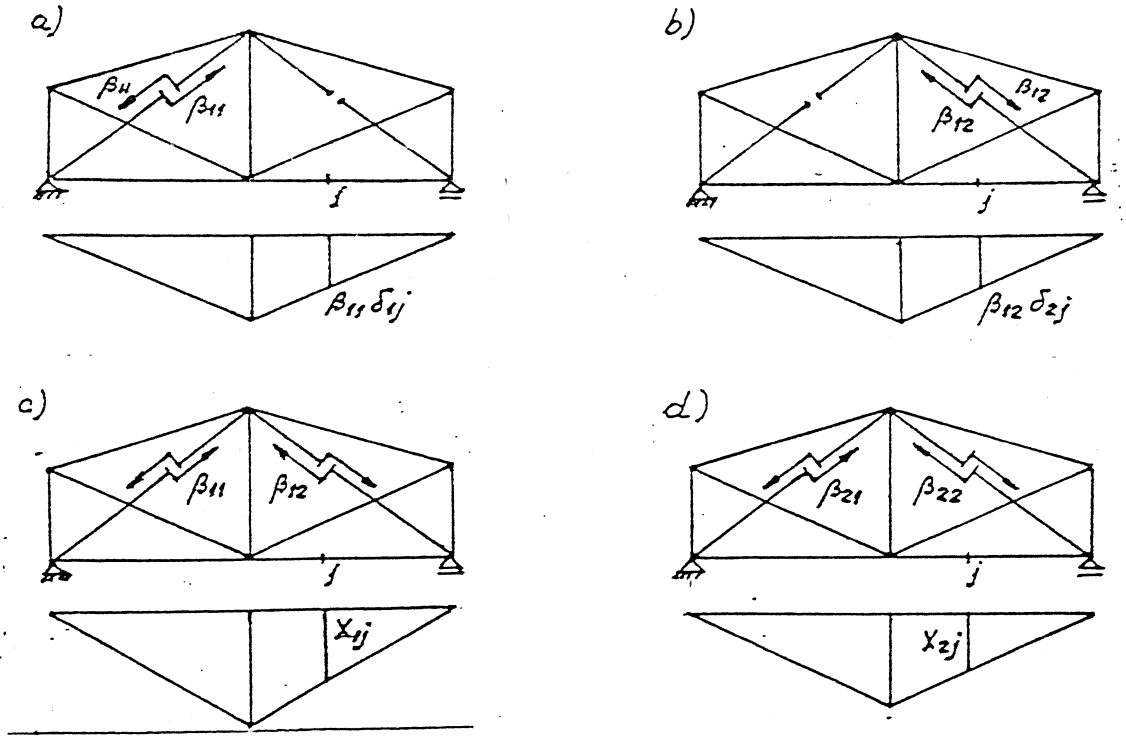


Figura 74

Finalmente, si se suponen actuando simultáneamente ambos estados de carga (figura 74c), la elástica (o diagrama de corrimientos verticales) del cordón cargado, coincide con la línea de influencia de X_1.

Análogamente, cargando la estructura en la forma indicada en la figura 74d) y trazando la elástica de corrimientos verticales del cordón cargado, se obtiene directamente la línea de influencia de X_2, en un todo de acuerdo a los conceptos expuestos para el caso anteriormente descripto.

7.6.1. Trazado de las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras isostáticas.

Una vez determinadas las líneas de influencia de las barras hiperestáticas, las de las barras restantes pueden hallarse aplicando la expresión (102), que es extensiva al caso estudiado. En consecuencia, para la barra i

$$\text{L.I. de } S_i = \text{L.I. de } S_{io} + (\text{L.I. de } X_1).S_{i1} + (\text{L.I. de } X_2).S_{i2} + \ldots + (\text{L.I. de } X_n).S_{in}$$

en donde el primer sumando corresponde a las ordenadas de la línea de influencia de la barra i en el isostático equivalente, mientras que S_{ik} responde a los mismos conceptos que para tales términos se expusieron en el apartado 7.3.5.

8. ARCOS HIPERESTATICOS.

8.1. Nociones generales.

En general se denomina *arco* a una estructura de eje curvo, que cargada verticalmente produce reacciones oblicuas en los apoyos, y cuyas características dependen principalmente del tipo de sustentación que se disponga.

Los arcos hiperestáticos suelen ser biarticulados (figura 75a), biempotrados (figura 75b), y además, aunque de uso poco frecuente, biempotrados con una articulación intermedia (figura 75c), constituyendo así estructuras que presentan respectivamente, única, triple y doble indeterminación estática.

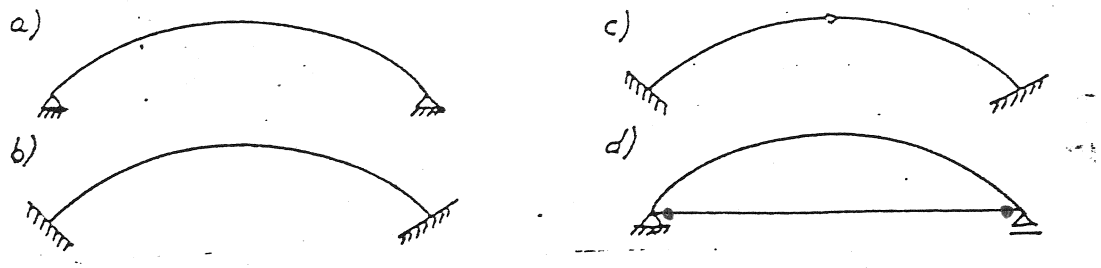


Figura 75

La componente horizontal de la reacción se denomina *empuje del arco* y es transmitida por los estribos y macizos de cimentación al subsuelo, pudiendo también absorberse por medio de tensores horizontales o inclinados, dando lugar a los denominados arcos atirantados (figura 75d), los que presentan así un grado de hiperestaticidad.

Las barras curvas cerradas (anillos), si no poseen articulaciones, son también de triple indeterminación estática.

Los arcos pueden ser simétricos o asimétricos.

El eje y las secciones transversales de una barra curva determinan la forma del arco, que se elige sobre la base de distintos razonamientos. La consideración principal requiere que el arco sea racional. Para valores de carga, luz y flechas conocidos, se considera como forma teórica racional del arco del tipo dado, a la forma que asegura la necesaria solidez y estabilidad del arco con el volumen mínimo. El eje del arco racional y sus secciones se determinan mediante investigaciones especiales. La distribución del material a lo largo del arco responde a la de las solicitaciones internas, fundamentalmente los momentos flectores y esfuerzos normales. La segunda consideración al elegir la forma de los arcos, se basa en la conveniencia de conseguir que los resultados del cálculo tomen la forma de expresiones simples. En concordancia con ello, es necesario establecer las leyes de variación de las áreas y momentos de inercia de las secciones transversales, partiendo de dos condiciones:

a) Las dimensiones y la forma de las secciones deberán corresponder a la distribución de las solicitaciones internas de cálculo, y

b) Las integrales en las expresiones de los desplazamientos deberán poder expresarse, en forma finita, por medio de funciones elementales, para configuraciones simples del eje del arco.

8.1.1. Observaciones para el cálculo de arcos.

Por cuanto un arco es una barra curva, para calcularlo con exactitud es necesario considerar su radio de curvatura ρ, o sea determinar las tensiones y los desplazamientos por medio de las expresiones que tienen en cuenta tal incidencia.

No obstante, los arcos generalmente empleados en la construcción, presentan reducida curvatura, o sea que como límite genérico resulta en ellos $\rho/d > 10$. Para tales arcos, no tiene significación práctica la consideración de la curvatura en las expresiones de aplicación, por lo que su cálculo puede efectuarse empleando las fórmulas generales, criterio que se adoptará en los desarrollos sucesivos.

En comparación con los momentos flectores M, la influencia de las solicitaciones internas N y Q sobre los desplazamientos en los

arcos, como norma, es mayor que en los pórticos. Usualmente, a igualdad de condiciones, la influencia de N y Q para los arcos biempotrados es mayor que para los biarticulados.

Si los momentos flectores M en el arco son grandes, la influencia de N y Q, en comparación con la de M, disminuye, y viceversa. En aquellos casos en que la configuración del eje del arco sigue la curva de presiones para el arco triarticulado, la influencia de M y Q se reduce a cero. Cuando la configuración del arco es próxima a dicha curva de presiones, lo que sucede particularmente en los arcos de pendiente suave, la fuerza longitudinal N ejerce una influencia preponderante sobre los desplazamientos, o por lo menos, igual a la influencia del momento flector.

8.2. Arcos biarticulados.

Una estructura cuyo eje adopta forma de arco y que se halle vinculada mediante dos apoyos fijos (figura 76a), constituye un hiperestático de primer grado.

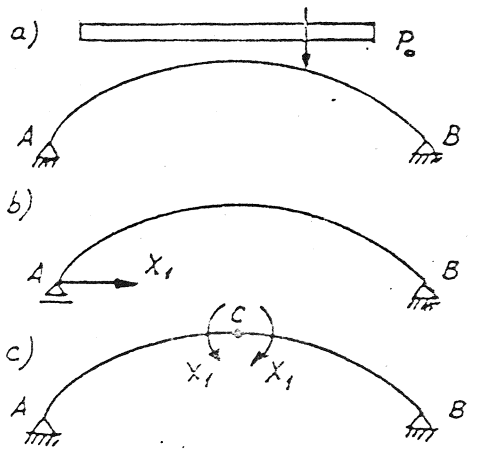


Figura 76

El sistema isostático equivalente puede ser constituido, ya sea reemplazando una de las articulaciones de vínculo (la A por ejemplo), por un apoyo móvil, poniendo así en evidencia la reacción X_1 (orientada en la dirección AB) como incógnita hiperestática (figura 76b), o bien articulando la sección de la clave del arco, transformando la estructura en un arco de tres articulaciones, en cuyo caso la incógnita hiperestática es el momento allí producido (figura 76c). Si bien este último sistema básico, por su trabajo, se asemeja más al sistema dado, suele utilizarse el primero, por resultar de aplicación más sencilla.

Recurriendo a los criterios generales de resolución de estructuras hiperestáticas por el método de las fuerzas, se obtienen los desplazamientos Δ_{1o} y δ_{11} (figura 77), resultando la ecuación de aplicación

$$\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 = 0 \quad ; \quad X_1 = -(\Delta_{1o} / \delta_{11}) \qquad (106)$$

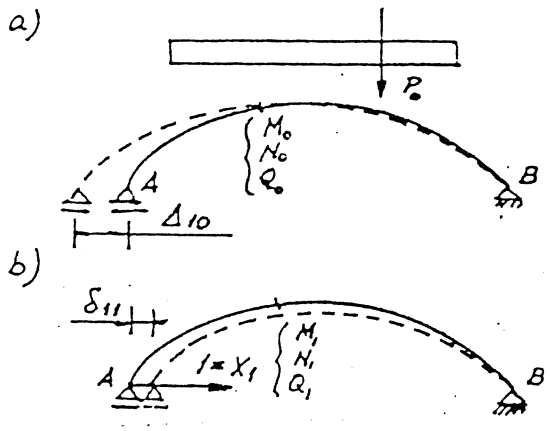


Figura 77

a) Cálculo de δ_{11}.

Aplicando el TTV, llamando M_1, N_1 y Q_1 a las solicitaciones internas genéricas producidas por el sistema deformante $X_1 = 1$ y teniendo en cuenta que éste es coincidente con el sistema auxiliar (figura 77b), se tendrá, según la (78) del Capítulo II

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{E.J}.ds + \int \frac{N_1^2}{E.F}.ds + \Psi \int \frac{Q_1^2}{G.F}.ds \qquad (107)$$

Por su parte, de la figura 78

$$ds = dx \,/\, \cos \alpha \qquad (108)$$

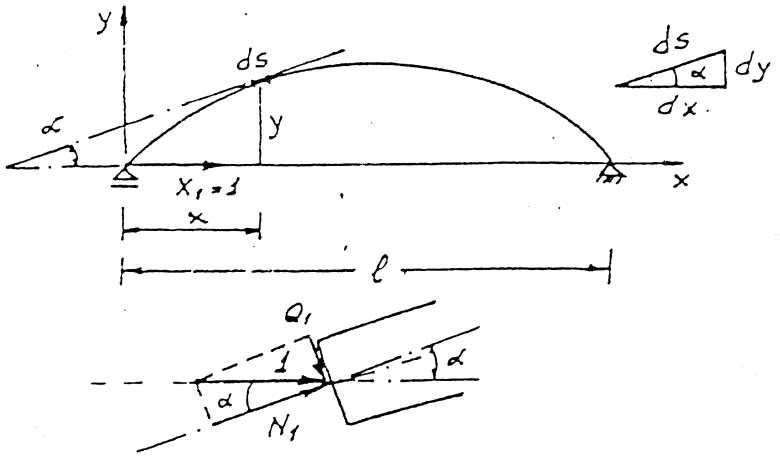


Figura 78

y en la sección genérica considerada

$$\begin{aligned} M_1 &= -\ 1.y \quad\ = -\ y \\ N_1 &= -\ 1.\cos\alpha = -\ \cos\alpha \\ Q_1 &= -\ 1.\operatorname{sen}\alpha = -\ \operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \qquad (109)$$

Reemplazando los valores obtenidos por la (108) y las (109) en la expresión (107)

$$\delta_{11} = \int_o^1 \frac{y^2.dx}{E.J.\cos\alpha} + \int_o^1 \frac{\cos^2\alpha.dx}{E.F.\cos\alpha} + \psi \int_o^1 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha.dx}{G.F.\cos\alpha} \qquad (110)$$

b) Cálculo de Δ_{1o}.

Llamando M_o, N_o y Q_o a las ordenadas genéricas de los diagramas de momentos flectores, esfuerzos normales y de corte, respectivamente, debidos al sistema P_o (sistema deformante) (figura 77a), y dado que el sistema no deformante coincide con el que se señala en la figura 77b) (prescindiendo de la deformación dibujada), se tendrá aplicando la expresión (78) del Capítulo II

$$\Delta_{1o} = \int M_1.\frac{M_o}{E.J}.ds + \int N_1.\frac{N_o}{E.F}.ds + \psi \int Q_1.\frac{Q_o}{G.F}.ds$$

y teniendo en cuenta la (108) y las (109)

$$\Delta_{1o} = -\int_o^1 \frac{y.M_o.dx}{E.J.\cos\alpha} - \int_o^1 \frac{\cos\alpha.N_o.dx}{E.F.\cos\alpha} - \psi \int_o^1 \frac{\operatorname{sen}\alpha.Q_o.dx}{G.F.\cos\alpha} \qquad (111)$$

c) Cálculo de X_1.

Por lo general, en la resolución práctica de este tipo de estructuras, de acuerdo a lo expresado en 8.1.1., puede despreciarse la influencia de Q en ambos desplazamientos (Δ_{1o} y δ_{11}). Además, en el caso de cargas verticales (con reacciones también verticales en el isostático equivalente) y arcos rebajados (valores de α pequeños), también son pequeños los valores de N_o y por ende irrelevante su efecto en el desplazamiento Δ_{1o}; no así el de N_1 en δ_{11}, que corresponde a una acción horizontal, que en consecuencia se proyectará con valores próximos al valor unitario aplicado, según la segunda de las (109).

En definitiva, las (110) y (111) pueden considerarse con suficiente aproximación iguales a

$$\delta_{11} = \int_o^1 \frac{y^2.dx}{E.J.\cos\alpha} + \int_o^1 \frac{\cos\alpha.dx}{E.F} \; ; \; \Delta_{1o} = -\int_o^1 \frac{y.M_o.dx}{E.J.\cos\alpha}$$

Reemplazando ambos valores en la segunda de las (106), se obtiene para la incógnita hiperestática

$$X_1 = \frac{\displaystyle\int_o^1 \frac{y.M_o.dx}{J.\cos\alpha}}{\displaystyle\int_o^1 \frac{y^2.dx}{J.\cos\alpha} + \int_o^1 \frac{\cos\alpha.dx}{F}} \qquad (112)$$

Si las cargas exteriores son verticales y el arco simétrico, las dos componentes según el eje x de las reacciones de vínculo (empuje del arco) serán iguales y contrarias entre sí y de valor X_1, mientras que las componentes de las reacciones según la dirección y (R_A^y y R_B^y), son las mismas que se obtendrían para una viga simplemente apoyada de luz igual a l (figura 79).

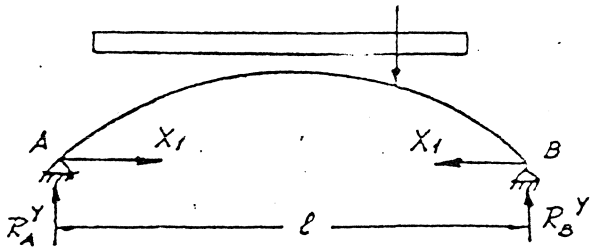


Figura 79

Una vez obtenido el valor de X_1, las expresiones de las solicitaciones internas efectivas en cualquier sección serán

$$\begin{aligned} M &= M_o - X_1.y \\ N &= N_o - X_1.\cos\alpha \\ Q &= Q_o - X_1.\operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \qquad (113)$$

Es conveniente observar que el momento flector M en una sección genérica, se calcula mediante la diferencia indicada en la primera de las (113), cuyos dos términos difieren poco entre sí (y a veces poquísimo si la curva de presiones es muy próxima al eje), por lo que la diferencia es mucho menor que los términos en sí. Se deduce de ello que para obtener una buena aproximación relativa del valor de M es necesario determinar X_1 con aproximación mucho más elevada, tomando en consideración una cantidad adecuada de cifras.

8.2.1. Arco parabólico simétrico.

Previo a encarar la resolución de las integrales incluidas en la expresión (112), resulta necesario establecer la ecuación de la directriz del arco. A tales efectos debe partirse de la ecuación general de una parábola de eje vertical referida a un sistema de ejes coordenados x´ - y´ con origen en su vértice C, y con la dirección de uno de ellos coincidente con el eje de la parábola (figura 80). La referida ecuación responde a la forma

$$y' = k.x'^2 \qquad (114)$$

donde k es el parámetro de la parábola, cuyo valor queda determinado sustituyendo en la ecuación general las coordenadas genéricas por las de un punto conocido, por ejemplo el B(l/2; -f). Luego

$$k = \frac{y'}{x'^2} = -\frac{4\,f}{l^2}$$

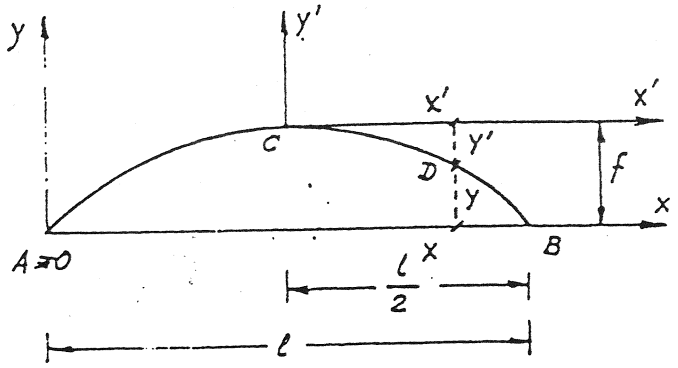


Figura 80

Para referir ahora el arco a un sistema de ejes x - y, con origen en el extremo izquierdo A, se tendrá, para las coordenadas de un punto cualquiera D(x,y), o bien D(x´,-y´)

$$x = l/2 + x' \qquad ; \qquad x' = x - l/2$$

$$y = f + y' \qquad ; \qquad y' = y - f$$

Sustituyendo en la ecuación general (114) los valores de k; x´e y´ obtenidos

$$y - f = -\frac{4f}{l^2}.(x^2 - x.l + \frac{l^2}{4}) = -\frac{4f}{l^2}.x^2 + \frac{4f}{l}.x - f$$

$$y = \frac{4f}{l^2}.(l.x - x^2) \qquad (115)$$

que constituye la ecuación de la directriz que se utilizará en los desarrollos sucesivos.

8.2.2. Resolución general.

En el apartado 8.1. se indicaron las pautas que debían guiar la elección de la distribución de las secciones transversales del arco. Por lo general, el momento de inercia de dichas secciones transversales aumenta desde un mínimo (que se designará por J_o) en la sección del arco en la clave, aumentando hacia los apoyos (figura 81).

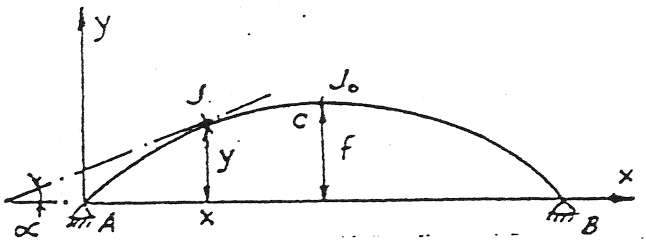


Figura 81

Si se supone que esa ley de variación es

$$J = J_o \,/\, \cos\alpha \quad : \quad \text{o sea} \quad J.\cos\alpha = J_o \tag{116}$$

que se denomina *ley de inercia* de las secciones, se tendrá, recordando también la (115), para las integrales de la (112)

$$\int_o^1 \frac{y^2.dx}{J.\cos\alpha} = \int_o^1 \frac{y^2.dx}{J_o} = \frac{1}{J_o}\int_o^1 y^2.dx = \frac{16\,f^2}{J_o.l^4}\int_o^1 (l.x - x^2)^2.dx$$

$$= \frac{16f^2}{J_o l^4}.\left(l^2.\frac{l^3}{3} - 2l.\frac{l^4}{4} + \frac{l^5}{5}\right) = \frac{16f^2.l^5}{J_o.l^4}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{16\,f^2.l}{J_o}.\left(\frac{10 - 15 + 6}{30}\right) = \frac{8\,f^2.l}{15\,J_o} \tag{117}$$

Llamando F a la sección media y siendo el arco simétrico resulta, con suficiente aproximación para el arco rebajado

$$\int_c^1 \frac{\cos\alpha.dx}{F} = \frac{1}{F}\int_o^1 \cos\alpha.dx \approx \frac{1}{F}$$

Finalmente

$$\int_o^1 \frac{y.M_o.dx}{J.\cos\alpha} = \int_o^1 \frac{y.M_o.dx}{J_o} = \frac{1}{J_o}\int_o^1 y.M_o.dx$$

En consecuencia, reemplazando en la (112)

$$X_1 = \frac{\dfrac{1}{J_o}\displaystyle\int_o^1 y.M_o.dx}{\dfrac{8\,f^2.l}{15\,J_o} + \dfrac{1}{F}} = \frac{\dfrac{1}{J_o}\displaystyle\int_o^1 y.M_o.dx}{\dfrac{8\,f^2.l}{15\,J_o}.\left(1 + \dfrac{15}{8}.\dfrac{J_o}{f^2.F}\right)}$$

Siendo $J_o/F = i^2$, y llamando

$$1 + \frac{15}{8}.\frac{J_o}{f^2.F} = 1 + \frac{15}{8}.\left(\frac{i}{f}\right)^2 = \frac{1}{\eta} \tag{118}$$

resulta en definitiva

$$X_1 = \frac{15}{8\,f^2.l}.\eta.\int_o^1 y.M_o.dx \tag{119}$$

Cuando se trata de arcos esbeltos, i es insignificante comparado con la flecha f, luego puede adoptarse en los cálculos prácticos $\eta \approx 1$. Para espesores y luces corrientes, en arcos de hormigón armado, el cociente $(i/f)^2$ de ordinario no alcanza a valer 0,001.

Para avanzar en el desarrollo de la (119), es necesario considerar los posibles estados de carga exterior, determinar la ley de variación de M_o y resolver la integral de la expresión.

8.2.3. Caso de carga uniformemente distribuida sobre todo el arco.

Cuando se tiene una carga uniformemente distribuida en horizontal, actuando sobre toda la longitud del arco (figura 82), resulta para una sección genérica

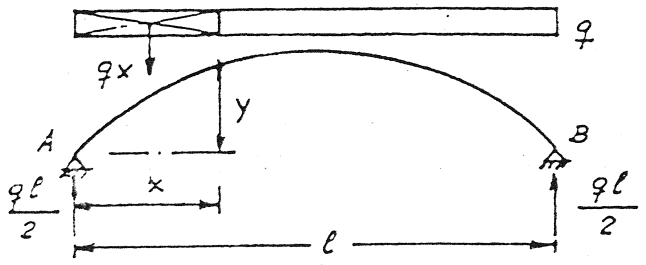


Figura 82

$$M_o = \frac{q.l}{2}.x - \frac{q.x^2}{2} = \frac{q}{2}.(l.x - x^2)$$

La integral de la (119) valdrá

$$\int_o^l y.M_o.dx = \int_o^l \frac{4\ f}{l^2}.(l.x - x^2).\frac{q}{2}.(l.x - x^2).dx =$$

$$= \frac{4\ f.q}{2\ l^2} \int_o^l (l.x - x^2)^2.dx$$

La integral $\int_o^l (l.x - x^2)^2.dx$, fue resuelta en el apartado anterior, en el desarrollo que condujo a la obtención de la expresión (117), siendo su resultado $l^5/30$. En consecuencia

$$\int_o^l y.M_o.dx = \frac{4\ f.q}{2\ l^2}.\frac{l^5}{30} = \frac{q.f.l^3}{15}$$

Reemplazando en la expresión general (119)

$$X_1 = \frac{15}{8}.\frac{\eta}{f^2.l}.\frac{q.f.l^3}{15} = \frac{q.l^2}{8\ f}\ \eta \qquad (120)$$

En una sección cualquiera del arco, definida por sus coordenadas (x,y), el momento flector valdrá, aplicando la primera de las (113)

$$M = M_o - X_1.y = \frac{q.l}{2}.x - \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.l^2}{8\,f}.\eta.\frac{4\,f}{l^2}.(l.x - x^2) =$$

$$= \frac{q.l}{2}.x - \frac{q.x^2}{2} - \frac{q}{2}.\eta.l.x + \frac{q}{2}.\eta.x^2$$

$$M = \frac{q.x}{2}(l - x - \eta.l + \eta.x) = \frac{q.x}{2}.(1 - \eta).(l - x) \qquad (121)$$

De la (115) para x = l/4: $y = \frac{4\,f}{l^2}.(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}) = \frac{3}{4}\,f$

Luego, reemplazando en la (121)

$$M_{1/4} = M_{3/4} = \frac{q.l}{2x4}.(1 - \eta).(l - \frac{l}{4}) = \frac{3\,q.l^2}{32}.(1 - \eta)$$

En la sección de la clave es x = l/2, luego y = f. De la (121) resulta

$$M_{1/2} = \frac{q.l}{4}.(1 - \eta).(l - \frac{l}{2}) = \frac{q.l^2}{8}.(1 - \eta)$$

Obsérvese que si se admite $\eta = 1$, de la (120) se tendrá

$$X_1 = q.l^2 / 8\,f \qquad (122)$$

y de la (121) surge a su vez que el momento flector será constantemente nulo a lo largo de la directriz del arco. Es decir que los arcos parabólicos biarticulados, se comportan exactamente igual que los arcos parabólicos de tres articulaciones simétricos, estudiados en Estática, y para los cuales el valor del empuje H era idéntico al valor de X_1 dado por la (122).

8.2.4. Otros casos de carga.

En caso de otros estados de carga, la resolución se efectúa siguiendo idéntico procedimiento al desarrollado en el apartado anterior. Se consignan a continuación los resultados que se obtienen para los más usuales en la práctica.

8.2.4.1. Carga uniformemente distribuida sobre la mitad de la luz.

Si se considera el arco parabólico simétrico biarticulado con una carga uniformemente distribuida en horizontal q´, actuando

sólo en la semiluz AC (figura 83a), el valor resultante para la incógnita hiperestática X_1 es

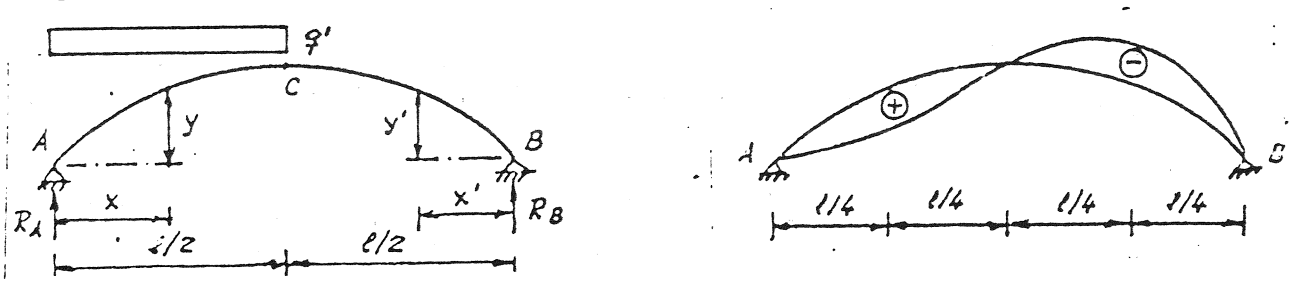


Figura 83

$$X_1 = \frac{q'.l^2}{16\ f}.\ \eta$$

Los momentos flectores característicos valen

$$M_{1/4} = \frac{q'.l^2}{64}.(4 - 3\ \eta)\ ;\ M_{1/2} = 0\ ;\ M_{3/4} = -\frac{q'.l^2}{64}.(3\ \eta - 2)$$

y el diagrama de momentos flectores toma la configuración que muestra la figura 83b).

8.2.4.2. Carga distribuida según una ley de variación parabólica.

Para una carga creciente de la clave hacia los arranques que responde a una ley parabólica (figura 84), se tiene

$$X_1 = \frac{p.l^2}{42\ f}.\ \eta$$

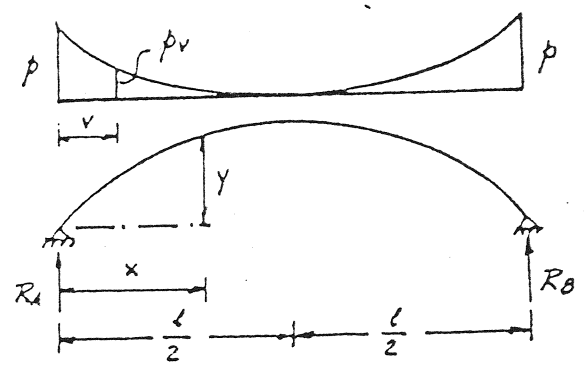


Figura 84

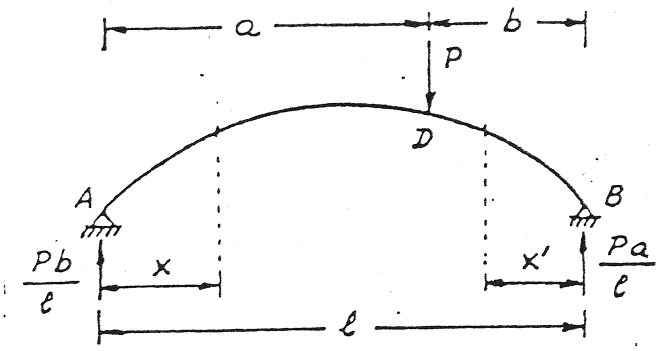


Figura 85

8.2.4.3. Cargas concentradas.

Si en el arco parabólico simétrico biarticulado incide una carga concentrada P, a distancias a y b de los apoyos A y B,

respectivamente (figura 85), se obtiene para el valor de la incógnita hiperestática X_1

$$X_1 = \frac{5}{8}.\frac{\eta}{f.l^3}.P.a.(l^3 - 2\,a^2.l + a^3)$$

Si la carga P actúa sobre la clave del arco a = b = l/2, y el valor anterior se transforma en

$$X_1 = \frac{25}{128}.\eta\,.\,\frac{P.l}{f}$$

Si sobre el arco actúan varias cargas concentradas simultáneamente, resulta conveniente considerar la acción de cada una por separado, y obtener el valor de X_1 como suma de las reacciones individuales.

8.2.4.4. Acción de la temperatura.

En caso de actuar, como sistema deformante, una variación uniforme de temperatura Δt, el valor resultante de X_1 para un arco parabólico simétrico es

$$X_{1t} = \frac{15\,\eta.E.J_o.\alpha.\Delta t}{8\,f^2}$$

A los cuartos de la luz

$$M_{1/4} = M_{3/4} = -X_1.y = -\frac{15\,\eta E J_o \alpha \Delta t}{8\,f^2}.\frac{3f}{4} = -\frac{45}{32}.\frac{\eta.E.J_o.\alpha.\Delta t}{f}$$

Al centro del arco y = f

$$M_{1/2} = -X_1.y = -\frac{15\,\eta.E.J_o.\alpha.\Delta t}{8\,f}$$

8.3. Arco atirantado.

Si el arco, en lugar de ser biarticulado, tiene un apoyo fijo y otro móvil, pero vinculados por medio de un tensor de sección transversal F_t y material de módulo de elasticidad E_t (figura 86a), seccionando dicho tensor puede obtenerse el sistema isostático equivalente y poner en evidencia la incógnita hiperestática X_1 (figura 86b).

La ecuación de compatibilidad y la incógnita serán

$$\Delta_{1o} + X_1.\delta_{11} + X_1.\frac{1}{E_t.F_t} = 0 \quad ; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1o}}{\delta_{11} + 1/E_t.F_t} \qquad (123)$$

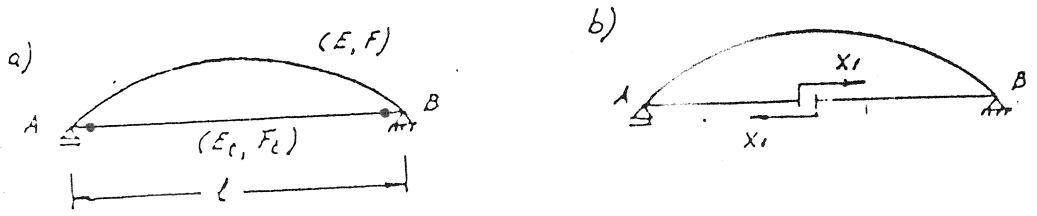


Figura 83

Considerando los valores de Δ_{1o} y de δ_{11} obtenidos en el punto c) del apartado 8.2., resulta, teniendo en cuenta que el valor de E en este caso no se simplifica

$$X_1 = \frac{\int_o^l \frac{y.M_o.dx}{E.J.\cos\alpha}}{\int_o^l \frac{y^2.dx}{E.J.\cos\alpha} + \int_o^l \frac{\cos\alpha.dx}{E.F} + \frac{l}{E_t.F_t}} \qquad (124)$$

8.3.1. Arco atirantado parabólico.

Reemplazando en la (124) los valores obtenidos al efectuar la resolución de cada integral en el apartado 8.2.2.

$$X_1 = \frac{\frac{1}{E.J_o}.\int_o^l y.M_o.dx}{\frac{8\,f^2 l}{15\,EJ_o} + \frac{1}{EF} + \frac{1}{E_tF_t}} = \frac{\frac{1}{E.J_o}.\int_o^l y.M_o.dx}{\frac{8\,f^2.l}{15\,E.J_o}.\left(1 + \frac{15\,J_o}{8\,f^2.F} + \frac{15\,J_o\;E}{8\,f^2.E_t.F_t}\right)}$$

$$X_1 = \frac{\int_o^l y.M_o.dx}{\frac{8}{15}\,f^2.l.\left[1 + \frac{15}{8\,f^2}.\frac{J_o}{F}.\left(1 + \frac{E.F}{E_t.F_t}\right)\right]}$$

Haciendo

$$1 + \frac{15}{8\,f^2}.\frac{J_o}{F}.\left(1 + \frac{E.F}{E_t.F_t}\right) = \frac{1}{\eta'}$$

resulta

$$X_1 = \frac{15}{8\,f^2.l}.\eta'.\int_o^l y.M_o.dx$$

expresión similar a la (119), por lo que la resolución del arco atirantado para cualquier estado de cargas, se desarrolla en forma

idéntica a la tratada en 8.2.3. y 8.2.4, reemplazando únicamente el valor de η dado por la (118), por el de η'.

8.4. Arcos biempotrados.

Un arco biempotrado que carece de articulaciones constituye una estructura hiperestática de tercer grado; por consiguiente su resolución exige la determinación de tres incógnitas estáticamente indeterminadas, que se reducen a dos cuando el arco y las cargas son simétricas respecto a un eje vertical.

La elección del isostático equivalente puede efectuarse de diversos modos, según el método de cálculo que se adopte:

a) Se libera completamente uno de los extremos (usualmente el izquierdo) y se ponen así en evidencia las tres componentes desconocidas de la reacción de vínculo suprimida (figura 87a), transformando la estructura en una viga empotrada en voladizo. Este sistema básico permite una resolución más sencilla si se efectúa el traslado de las incógnitas a un punto denominado *centro elástico* de la estructura, procedimiento que se desarrollará en el apartado siguiente.

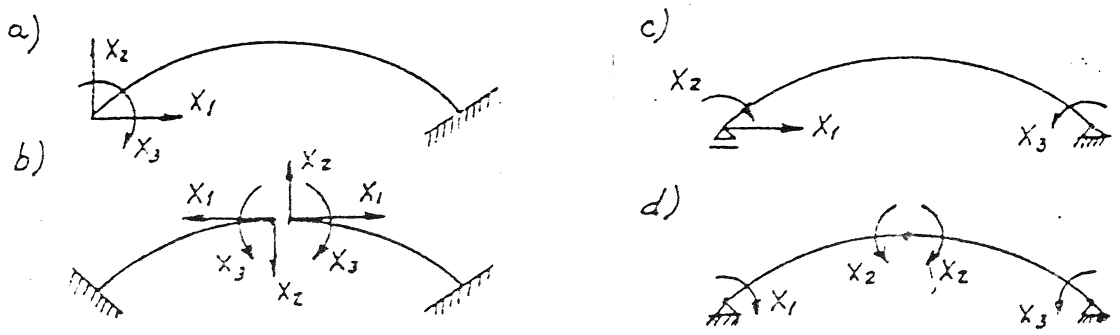


Figura 87

b) Se practica un corte en la clave, transformando el arco en dos ménsulas isostáticas (figura 87b) y se añaden a las dos caras del corte las tres solicitaciones internas desconocidas. También en este caso pueden trasladarse las incógnitas al centro elástico del arco.

c) Se transforma el arco en una estructura isostática simplemente apoyada (figura 87c), resultando las incógnitas a determinar la reacción horizontal del apoyo móvil y los pares en ambos vínculos.

d) Se transforma la estructura en un arco de tres articulaciones y se añaden los tres pares desconocidos que actúan en correspondencia con las secciones articuladas (figura 87d).

Los sistemas básicos presentados en a), b) y c) exigen mayor precisión en los cálculos que en el caso de adoptar el del arco d), por las mismas razones expuestas en el último párrafo del apartado 8.2.

El arco biempotrado tiene, respecto de los arcos articulados, la ventaja de ser menos deformable y, por consiguiente, menos sensible a la acción perjudicial de las cargas dinámicas. Por el contrario, resulta muy sensible a la influencia nociva de las deformaciones o desplazamientos de los cimientos, de los movimientos de los arranques, de la retracción del hormigón y de las variaciones térmicas.

8.4.1. Resolución por reducción al centro elástico.

Corrientemente la noción de centro elástico se aplica a los sistemas cerrados (marcos) o con los dos extremos empotrados. Se considerará este último caso.

Si se admite como isostático equivalente el indicado en la figura 87a), el desarrollo que conduce al planteo de las ecuaciones de compatibilidad fue efectuado en el apartado 2.2., adoptando el sistema definitivo la forma dada por las (9), o sea

$$\begin{aligned} \Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 &= 0 \\ \Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 &= 0 \\ \Delta_{3o} + \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (125)$$

Se observan en este sistema de ecuaciones los desplazamientos secundarios $\delta_{12} = \delta_{21}$; $\delta_{13} = \delta_{31}$ y $\delta_{23} = \delta_{32}$.

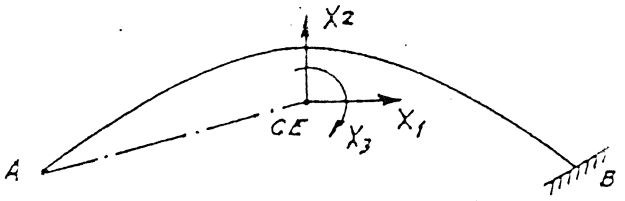


Figura 88

En lugar de tomar el arranque A como origen del sistema de ejes referenciales, pueden trasladarse las incógnitas a un punto CE (figura 88), del que, al poder disponer libremente de dos de sus coordenadas, la elección puede efectuarse de modo de reducir a cero dos de los desplazamientos secundarios. Una vez determinado dicho punto, puede fijarse la dirección de las fuerzas incógnitas X_1 y X_2 (aplicadas en el mismo), de modo tal de anular también el tercer desplazamiento secundario.

Sea un sistema de ejes $x_o - y_o$ que pasa por CE y cuya dirección cincide con las fijadas para X_1 y X_2. Considerando un punto genérico D(x,y), los momentos que en el mismo producen los valores unitarios de las incógnitas, individualmente consideradas, serán (figura 89)

$$M_1 = - y \quad ; \quad M_2 = x \quad ; \quad M_3 = 1 \qquad (126)$$

En forma concordante con el razonamiento antes expuesto, se fijarán las coordenadas del punto CE de modo de satisfacer las condiciones $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$.

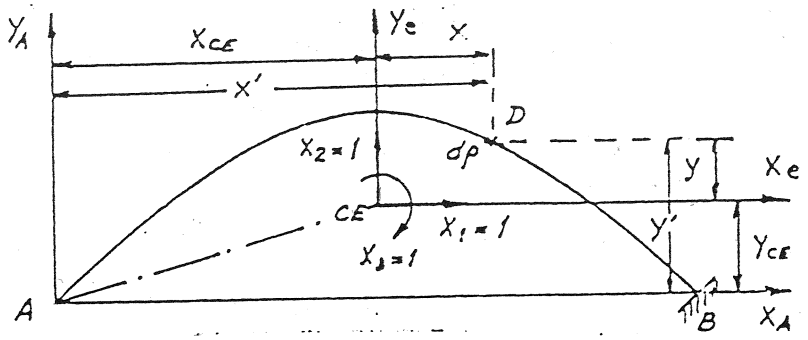


Figura 89

Considerando $N_3 = Q_3 = 0$, aplicando el TTV y teniendo en cuenta los valores dados por las (126)

$$\delta_{13} = \int M_1 . \frac{M_3}{E.J}\, ds = \int \frac{-y}{E.J}\, ds ; \quad \delta_{23} = \int M_2 . \frac{M_3}{E.J}\, ds = \int \frac{x}{E.J}\, ds$$

Si se supone toda la estructura constituida de un mismo material (E = cte) y se elige para la resolución un momento de inercia de comparación cualquiera (J_o por ejemplo), las expresiones anteriores pueden escribirse

$$\delta_{13} = \int \frac{-y}{E.J} . \frac{J_o}{J_o}\, ds = -\frac{1}{E.J_o} \int y . \frac{J_o}{J}\, ds$$

$$\delta_{23} = \int \frac{x}{E.J} . \frac{J_o}{J_o}\, ds = \frac{1}{E.J_o} \int x . \frac{J_o}{J}\, ds$$

En estas condiciones puede designarse a

$$J_o/J = r \quad ; \quad r.ds = d\rho \qquad (127)$$

Al producto $r.ds = d\rho$ se lo denomina carga elástica o *masa elástica*, y se la define como el producto de la longitud de un elemento de estructura (finita o infinitesimal) por la relación de momentos de inercia r. Reemplazando en las expresiones anteriores e introduciendo las condiciones de nulidad impuestas

$$\delta_{13} = -\frac{1}{E.J_o} \int y.d\rho = 0 \quad ; \quad \int y.d\rho = 0$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{E.J_o} \int x.d\rho = 0 \quad ; \quad \int x.d\rho = 0$$

Las condiciones halladas determinan que los momentos estáticos de las masas elásticas, con respecto a los ejes ortogonales x_e - y_e, deberán ser iguales a cero. Esto significa que dichos ejes

pasan por el centro de gravedad de las masas elásticas, al que se denomina *centro elástico*. Para hallar sus coordenadas partiendo de cualquier sistema de ejes primitivo (x_A - y_A por ejemplo, de la figura 89), se aplican las expresiones básicas de la Estática de masas

$$x_{CE} = \frac{\int x'.d\rho}{\int d\rho} \quad ; \quad y_{CE} = \frac{\int y'.d\rho}{\int d\rho}$$

En estas condiciones las incógnitas hiperestáticas se obtienen referidas al centro elástico, el que se supone (a los fines conceptuales), conectado a la estructura por medio de una barra ficticia unida rígidamente al arranque A (figura 90).

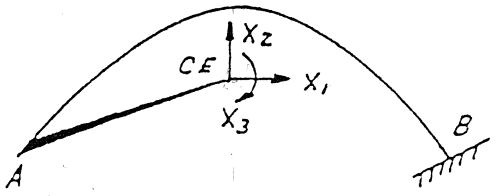


Figura 90

Durante la deformación del sistema isostático equivalente debida al momento $X_3 = 1$, al ser $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$, el punto CE del extremo de la barra rígida permanecerá en su sitio. Esto significa que los desplazamientos δ_{13} y δ_{23} serán nulos, independientemente de la dirección de las incógnitas X_1 y X_2. Por consiguiente, las ecuaciones canónicas expresadas por las (125), para las incógnitas X_1, X_2 y X_3 aplicadas en el centro elástico, cualquiera sea la dirección de X_1 y X_2, adoptan la forma siguiente

$$\begin{aligned} \Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 &= 0 \\ \Delta_{2o} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 &= 0 \\ \Delta_{3o} + \delta_{33}.X_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (128)$$

La tercera ecuación canónica es independiente de X_1 y X_2.

Si se pretende ahora hacer $\delta_{12} = 0$, será, despreciando la influencia de N y Q

$$\delta_{12} = \int M_1 . \frac{M_2}{EJ}\, ds = \int (-y)\, \frac{x}{EJ} . \frac{J_o}{J_o}\, ds = -\frac{1}{E.J_o} \int x.y.d\rho = 0$$

De esta expresión resulta que para lograr $\delta_{12} = 0$, deben referirse los cálculos a un sistema de ejes ξ y η que pasen por el centro elástico y respecto a los cuales el momento de inercia centrífugo de las masas elásticas sea nulo, lo cual significa que los ejes ξ y η deberán ser principales de inercia de las masas elásticas, cuya inclinación respecto a los ejes x_e - y_e surge de

$$tg\ 2\alpha = -\frac{2\, J_{xe-ye}}{J_{xe} - J_{ye}}$$

En estas condiciones, el sistema (128) se reduce a

$$\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 = 0 \quad ; \quad X_1 = -\Delta_{1o}/\delta_{11}$$

$$\Delta_{2o} + \delta_{22}.X_2 = 0 \quad ; \quad X_2 = -\Delta_{2o}/\delta_{22} \qquad (129)$$

$$\Delta_{3o} + \delta_{33}.X_3 = 0 \quad ; \quad X_3 = -\Delta_{3o}/\delta_{33}$$

Es necesario señalar que la determinación del centro elástico no presenta dificultades. En cambio, suele resultar mucho más laborioso determinar las direcciones de los ejes principales de inercia. Frecuentemente el procedimiento de reemplazar el sistema (128) por las ecuaciones independientes (129), no compensa el tiempo empleado en su determinación, por lo que, en casos generales, no es aconsejable introducir en el cálculo la simplificación que deriva de $\delta_{12} = 0$.

Indudablemente, en cambio, es necesario utilizar la propiedad de los ejes principales de inercia en las estructuras simétricas, donde la posición de los mismos es conocida, por cuanto uno de ellos coincide con el eje de simetría.

Una vez calculados los valores de X_1, X_2 y X_3, las expresiones de las solicitaciones internas en cualquier sección del hiperestático dado serán

$$M = M_o - X_1.y + X_2.x + X_3$$

$$N = N_o - X_1.\cos\alpha + X_2.\operatorname{sen}\alpha$$

El valor de las reacciones en el empotramiento A será, efectuando la traslación de las incógnitas del centro elástico al arranque (figura 89)

$$X_{1A} = X_1 \quad ; \quad X_{2A} = X_2 \quad ; \quad X_{3A} = X_1.y_{CE} - X_2.x_{CE} + X_3$$

8.4.2. Aplicación al arco biempotrado parabólico simétrico.

8.4.2.1. Estado de cargas verticales cualesquiera.

Para este caso (figura 91), aplicando los conceptos precedentemente expuestos se puede demostrar que

$$X_1 = \frac{45}{4}.\frac{\eta}{f^2.l}.\int M_o.y.dx \qquad \text{con:} \quad \frac{1}{\eta} = 1 + \frac{45}{4}.\left(\frac{i}{f}\right)^2$$

$$X_2 = -\frac{12\ F_o.a}{l^3} \quad ; \quad X_3 = -\frac{F_o}{l}$$

donde por F_o se designa al área del diagrama de momentos de la figura 91c) correspondiente al arco isostático empotrado en B (figura 91b), y por "a" a la distancia entre su centroide y el eje vertical que pasa por el centro elástico.

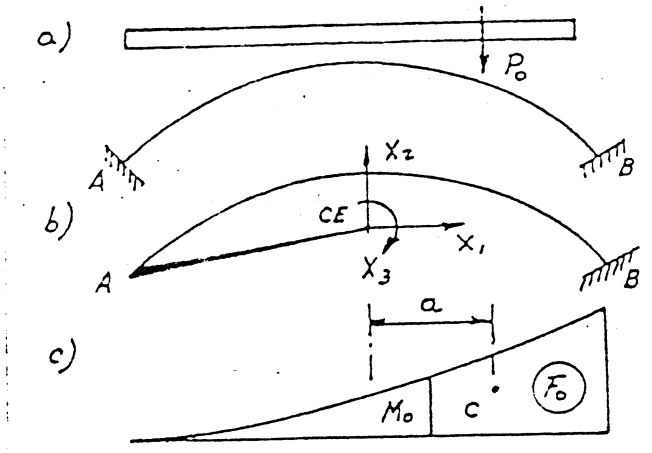


Figura 91

8.4.2.2. Carga uniformemente distribuida sobre el semiarco.

Si sobre el arco parabólico simétrico actúa una carga q´, uniformemente distribuida sobre la semiluz, tal como se consigna en la figura 92a), los valores de los momentos característicos serán:

- *Momentos en los empotramientos:*

$$M_A = \frac{q'.l^2}{192}.(-5 + 8\eta) \quad ; \quad M_B = -\frac{q'.l^2}{192}.(11 - 8\eta)$$

- *Momentos máximos de tramo.* El momento máximo del tramo cargado se produce para x = (3/16)l, y en el descargado para x = -(3/16)l, debiendo tenerse presente el origen del sistema de ejes en CE. Sus valores son, respectivamente:

$$M_{3/16} = \frac{q'.l^2}{3.072}.(64 - 37\eta) \quad ; \quad M_{-3/16} = \frac{q'.l^2}{3.072}.(10 - 37\eta)$$

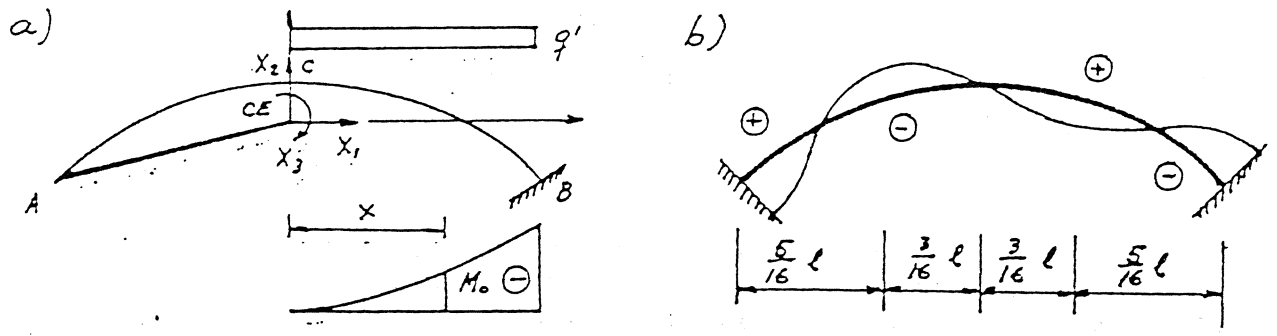


Figura 92

- *Momento en la clave* (x = 0):

$$M_C = \frac{q'.l^2}{48}.(1 - \eta)$$

La figura 92b) muestra la configuración del diagrama de M_x.

8.4.2.3. Carga uniformemente distribuida sobre todo el arco.

$$M_A = M_B = -\frac{q.l^2}{12}.(1 - \eta) \quad ; \quad M_C = \frac{q.l^2}{24}.(1 - \eta)$$

En arcos esbeltos (i < f), es $\eta \approx 1$, con lo que todos los momentos serán nulos (arco antifunicular) y $X_1 = q.l^2/8f$, como ocurre también en los arcos isostáticos y biarticulados de igual conformación.

8.4.2.4. Acción de la temperatura.

Si se produce una variación uniforme de temperatura Δt en el medio en que se encuentra el arco, resulta

$$X_{1t} = \frac{45}{4}.\frac{\eta.E.J_o.\alpha.\Delta t}{f^2} \quad ; \quad X_{2t} = 0 \quad ; \quad X_{3t} = 0$$

$$M_A = M_B = \frac{15}{2}.\frac{\eta.E.J_o.\alpha.\Delta t}{f} \quad ; \quad M_C = -\frac{15}{4}.\frac{\eta.E.J_o.\alpha.\Delta t}{f}$$

El diagrama de momentos flectores se indica en la figura 93.

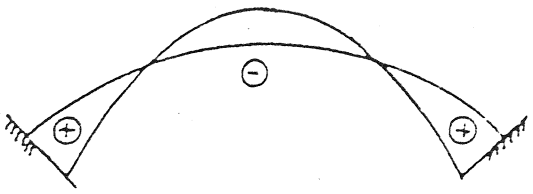


Figura 93

9. ESTRUCTURAS ESPACIALES.

9.1. Nociones generales.

Hasta el presente se estudiaron estructuras con sus ejes geométricos contenidos en un plano y sometidas a fuerzas y pares actuantes en ese mismo plano. En estas condiciones, las solicitaciones internas en cada sección se reducían a tres (figura 94): el esfuerzo normal Nz, el esfuerzo de corte Qy y el momento flector Mx, normal al plano de la sección. Además, la elástica es tal que el eje geométrico deformado permanece en el plano de la estructura (y-z en el caso de la figura).

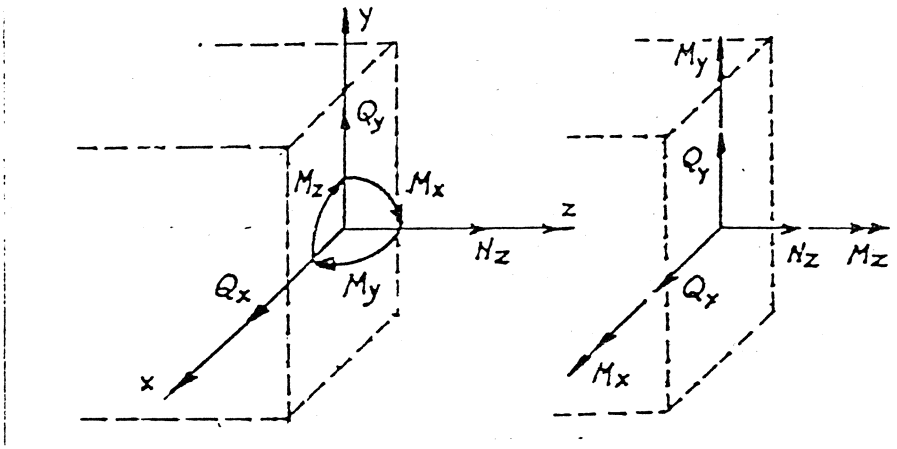


Figura 94

En la situación más general de sistemas espaciales, en las secciones de las barras, actuarán las seis componentes de las solicitaciones internas, a saber: el esfuerzo normal Nz, las componentes del esfuerzo de corte Qx y Qy, las componentes del momento flector Mx y My y el momento torsor Mz. Estas solicitaciones también pueden ser representadas, en el caso de los pares, por sus vectores correspondientes.

El cálculo de los sistemas espaciales hiperestáticos se efectúa sobre la base de los mismos criterios con los cuales se fundamentó el de los sistemas planos hiperestáticos, de modo que todos los métodos de cálculo de estos últimos pueden ser extendidos a los espaciales, sin ninguna modificación de los principios en que se sustentan. No obstante, salvo estructuras sencillas, la resolución de los sistemas espaciales es considerablemente más complicada que el de los planos, debido a:

1°) El número de incógnitas hiperestáticas, que tanto para el método de las fuerzas como para el de los desplazamientos, es apreciablemente mayor en los sistemas espaciales que en los planos, y

2°) El mayor número de solicitaciones internas, con lo que el cálculo de todas las magnitudes dependientes de la deformación de las barras se torna mucho más laborioso y complicado.

9.2. Resolución por el método de las fuerzas.

9.2.1. Grado de hiperestaticidad de sistemas espaciales.

El grado de hiperestaticidad de una estructura, que es igual al número de incógnitas del método de las fuerzas, puede ser determinado mediante las expresiones de las correlaciones cuantitativas entre las características de los elementos estructurales y sus tipos de vinculación, las que para sistemas planos fueron desarrolladas en el apartado 1.2. Para establecer la expresión general aplicable a sistemas espaciales compuestos por

barras rígidamente unidas entre sí, partiendo por analogía de la (6), debe tenerse presente que:

- a los efectos de cuantificar Vs en el espacio, el empotramiento equivale a 6 vínculos simples; una articulación fija a 3 y un apoyo móvil a un vínculo simple;

- cada unión rígida (o recinto cerrado R) en el espacio, equivale a la necesidad de poner en evidencia las 6 solicitaciones internas que a través de ella se transmiten, y

- el número de ecuaciones de equilibrio estático para sistemas espaciales de acciones es 6.

En consecuencia

$$X = Vs + 6\,R - 6 \qquad (130)$$

Por ejemplo, la barra quebrada de la figura 95a) presenta 6 grados de indeterminación estática, mientras que para el pórtico espacial de la figura 95b) es X = 24 + 6 - 6 = 24.

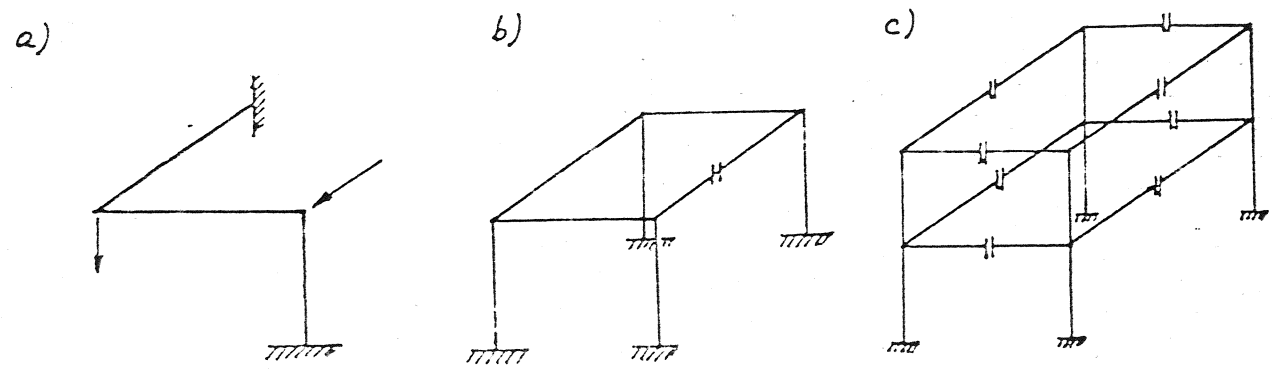


Figura 95

A los efectos de evitar inconvenientes en la correcta cuantificación de R, puede resultar más cómodo y seguro determinar el grado de hiperestaticidad transformando el sistema dado en isostático, determinando la cantidad de condiciones de vínculo internas y externas que debieron suprimirse para lograrlo. Así, por ejemplo para la estructura de la figura 95c), efectuando 4 cortes en cada nivel, el sistema se transforma en 4 isostáticos independientes, con lo que X = 6 x 8 = 48.

9.2.2. Cálculo de los desplazamientos en estructuras espaciales.

Para la determinación de los desplazamientos que experimentan puntos o secciones pertenecientes a estructuras espaciales, es de aplicación también el TTV, introduciendo los términos que corresponden a la totalidad de las solicitaciones que se presenten. En forma genérica, aplicando la (73) del Capítulo II

$$\Delta = \int \overline{M_f}.d\theta + \int \overline{N}.d\xi + \int \overline{Q}.d\eta + \int \overline{M_t}.d\varphi \qquad (131)$$

Teniendo en cuenta los conceptos inherentes expuestos en el Capítulo II, y considerando las componentes de las solicitaciones internas indicadas en la figura 94

$$\Delta_{1k} = \Sigma \int Mx_1 \frac{Mx_k}{E.J_x}.ds + \Sigma \int My_1 \frac{My_k}{E.J_y}.ds + \Sigma \int Mz_1 \frac{Mz_k}{G.J_T}.ds +$$

$$+ \Sigma \psi_x \int Qx_1 \frac{Qx_k}{G.F}.ds + \Sigma \psi_y \int Qy_1 \frac{Qy_k}{G.F}.ds + \Sigma \int Nz_1 \frac{Nz_k}{E.F}.ds \quad (132)$$

siendo el significado de todos los términos el mismo que en los sistemas planos.

9.2.3. Elección del isostático equivalente.

Se sobreentiende que, como en los sistemas planos, al formar el sistema básico, no es obligatorio eliminar todos los vínculos superabundantes externos. En lugar de ello, se pueden también poner en evidencia como incógnitas, las solicitaciones internas generadas en secciones elegidas de forma que permitan facilitar la resolución. En muchos casos suele ser conveniente reducir la estructura llevándola a dos o más estructuras isostáticas independientes. Por ejemplo, para la estructura de la figura 96a) puede optarse por el isostático equivalente de la figura 96b), o bien por el de la figura 96c). Este último sistema puede ser de mayor utilidad, por ejemplo, en aquellos casos en que las condiciones de simetría que se presenten, permitan reducir la cantidad de incógnitas.

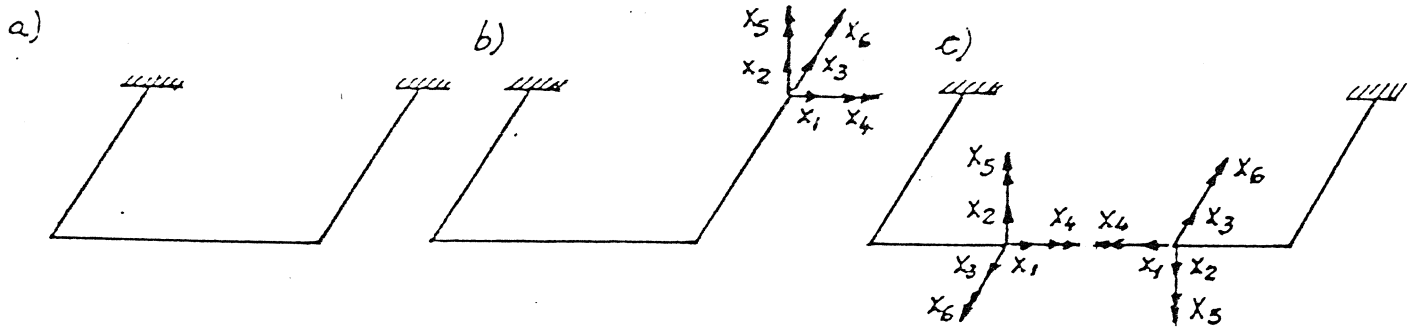


Figura 96

9.2.4. Planteo de las ecuaciones.

Las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas no modifican su expresión ni su concepto respecto al caso de sistemas planos, o sea que la ecuación genérica toma la forma

$$\Delta_{ko} + \delta_{k1}.X_1 + \delta_{k2}.X_2 + \ldots + \delta_{kn}.X_n = 0$$

donde los coeficientes y los términos independientes se calculan mediante la expresión (132).

9.2.5. Consideraciones complementarias.

Una vez hallados los valores de las incógnitas hiperestáticas X_1, cualquier reacción de vínculo o solicitación interna puede ser calculada mediante

$$S = S_o + S_1.X_1 + S_2.X_2 + \ldots S_n.X_n$$

donde cada término responde a idénticos criterios a los expuestos para el análisis de la expresión (76). Los diagramas de solicitaciones internas pueden ser construidos en base a esta misma expresión.

Si el sistema es simétrico, su simetría deberá ser empleada en forma análoga a como fue indicado al examinar sistemas planos.

En la resolución de los sistemas espaciales, lo mismo que en el de los planos, corrientemente, a fin de simplificar el cálculo sin que con ello se resienta mayormente la precisión obtenida, se desprecia la influencia de las fuerzas internas Nz, Qx y Qy sobre los desplazamientos. Por ello, para desarrollar el cálculo de estructuras espaciales, lo más frecuente es que sea necesario construir los diagramas de momentos flectores Mx y My y torsores Mz, debidos a los valores unitarios de cada incógnita y al sistema exterior de cargas, con los cuales se determinan los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas.

9.3. Resolución de la viga balcón.

Este tipo de estructura, constituida por dos vigas perpendiculares entre sí, solidariamente vinculadas en el punto de unión y empotradas en los extremos opuestos (figura 97a), se presenta con frecuencia en los cálculos de edificios, en correspondencia con las ochavas de las esquinas.

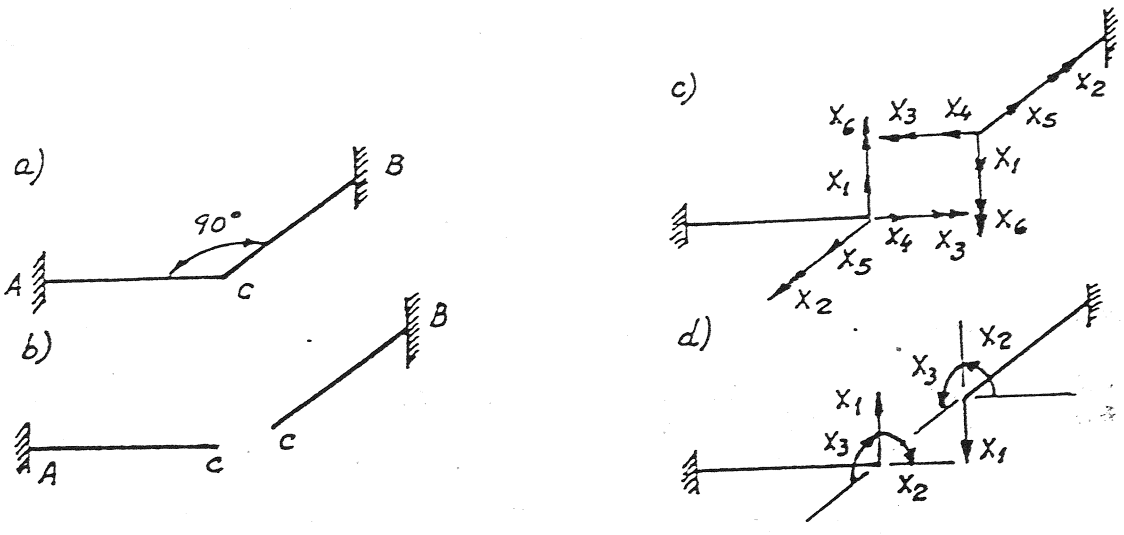


Figura 97

Como isostático equivalente resulta conveniente adoptar el que surge de seccionar al sistema en el punto C, con lo que aquél se transforma en dos vigas empotradas independientes (figura 97b).

Tratándose de un hiperestático de grado 6, el problema presentará igual número de incógnitas, las que se indican en la figura 97c), arbitrariamente numeradas.

Si sólo actúan cargas verticales (normales al plano que contiene el eje de la estructura), no se producirán componentes de reacción horizontales, luego $X_4 = X_5 = 0$. Asimismo, tampoco habrá componente de momento en el plano que contiene la estructura, con lo que también $X_6 = 0$.

En definitiva, en tal situación, el problema presenta tres incógnitas, que se indican en la figura 97d). Obsérvese que X_2 es momento flector para la viga AC y torsor para viga la CB, e inversamente X_3. Las ecuaciones de aplicación serán idénticas a las (9).

9.3.1. Caso de cargas uniformemente distribuidas.

Suponiendo que las condiciones geométricas y de carga sean las que se consignan en la figura 98, los diagramas para el cálculo de los desplazamientos serán los que se han trazado en la figura 99.

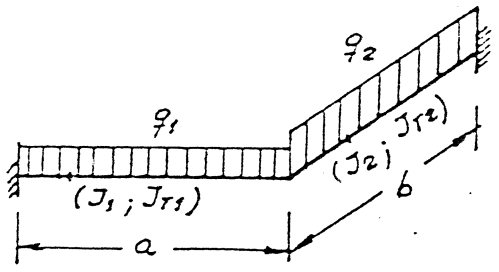


Figura 98

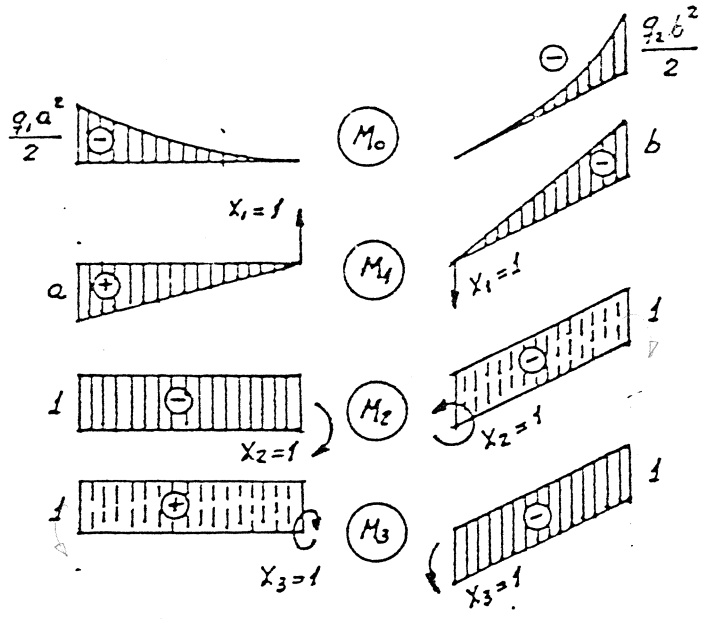


Figura 99

Aplicando la (132) y despreciando la influencia de Q, pueden calcularse las expresiones de Δ_{i0} y δ_{ik}, teniendo en cuenta que las mismas corresponden en todos los casos a los desplazamientos relativos entre ambos extremos de viga en la dirección correspondiente a la incógnita a que se refiere el primer subíndice, debidas a la acción que indica el segundo subíndice.

$$\Delta_{1o} = -\frac{1}{4}.\frac{q_1.a^2}{2}.\frac{a.a}{EJ_1} + \frac{1}{4}.\frac{q_2.b^2}{2}.\frac{b.b}{EJ_2} = -\frac{q_1.a^4}{8\,EJ_1} + \frac{q_2.b^4}{8\,EJ_2}$$

$$\Delta_{2o} = \frac{1}{3}.\frac{q_1.a^2}{2}.\frac{1.a}{EJ_1} = \frac{q_1.a^3}{6\,EJ_1}$$

$$\Delta_{3o} = \frac{1}{3}.\frac{q_2.b^2}{2}.\frac{1.b}{EJ_2} = \frac{q_2.b^3}{6\,EJ_2}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3}.\frac{a.a.a}{EJ_1} + \frac{1}{3}.\frac{b.b.b}{EJ_2} = \frac{a^3}{3\,EJ_1} + \frac{b^3}{3\,EJ_2}$$

$$\delta_{22} = \frac{a}{EJ_1} + \frac{b}{GJ_{T2}} \quad ; \quad \delta_{33} = \frac{a}{GJ_{T1}} + \frac{b}{EJ_2}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{2}.\frac{a.1.a}{EJ_1} = -\frac{a^2}{2\,EJ_1} = \delta_{21}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{2}.\frac{b.1.b}{EJ_2} = \frac{b^2}{2\,EJ_2} = \delta_{31} \quad ; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

Reemplazando en las (9) y haciendo

$$\frac{J_1}{J_2} = r \quad ; \quad \frac{EJ_1}{GJ_{T1}} = \tau_1 \quad ; \quad \frac{EJ_2}{GJ_{T2}} = \tau 2$$

resulta, para la primera ecuación

$$\left(-\frac{q_1.a^4}{8\,EJ_1} + \frac{q_2.b^4}{8\,EJ_2}\right) + \left(\frac{a^3}{3\,EJ_1} + \frac{b^3}{3\,EJ_2}\right).X_1 - \frac{a^2}{2\,EJ_1}.X_2 + \frac{b^2}{2\,EJ_2}.X_3 = 0$$

$$8(a^3 + r.b^3).X_1 - 12\,a^2.X_2 + 12\,b^2.r.X_3 = 3(q_1.a^4 - q_2.r.b^4) \quad (133)$$

Para la segunda ecuación

$$\frac{q_1.a^3}{6\,EJ_1} - \frac{a^2}{2\,EJ_1}.X_1 + \left(\frac{a}{EJ_1} + \frac{b}{GJ_{T2}}\right).X_2 = 0$$

$$-3\,a^2.X_1 + 6\left(a + b.\frac{EJ_1}{GJ_{T2}}.\frac{J_2}{J_2}\right).X_2 = -q_1.a^3$$

$$-3\,a^2.X_1 + 6(a + b.r.\tau_2).X_2 = -q_1.a^3 \quad (134)$$

Y para la tercera ecuación

$$\frac{q_2.b^3}{6\,EJ_2} + \frac{b^2}{2\,EJ_2}.X_1 + \left(\frac{a}{GJ_{T1}} + \frac{b}{EJ_2}\right).X_3 = 0$$

$$3\,b^2.X_1 + 6\left(a.\frac{EJ_2}{GJ_{T1}}.\frac{J_1}{J_1} + b\right).X_3 = -\,q_2.b^3$$

$$3\,b^2.X_1 + 6\left(a.\frac{\tau_1}{r} + b\right).X_3 = -\,q_2.b^3 \qquad (135)$$

Las (133), (134) y (135) resuelven el caso planteado.

9.3.1.1. Casos particulares.

a) Si las dos vigas son iguales, o sea a = b = l; $J_1 = J_2 = J$; r = 1; $J_{T1} = J_{T2} = J_T$; $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, y además con carga uniformemente distribuida $q_1 = q_2 = q$, el sistema básico de ecuaciones se transforma en

- De la (133) $\quad 16\,l^3.X_1 - 12\,l^2.X_2 + 12\,l^2.X_3 = 0$
  o bien $\quad 4\,l.X_1 - 3\,X_2 + 3\,X_3 = 0$
- De la (134) $\quad -3\,l.X_1 + 6.(1+\tau).X_2 = -\,q.l^2$
- De la (135) $\quad 3\,l.X_1 + 6.(1+\tau).X_3 = -\,q.l^2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$X_1 = 0 \quad ; \quad X_2 = X_3 = -\frac{q.l^2}{6.(1+\tau)}$$

El signo (-) indica sentido contrario al supuesto para las incógnitas.

El momento en los empotramientos vale

$$M_A = M_B = -\,q.l^2.\frac{(2+3\tau)}{6.(1+\tau)}$$

Los diagramas de M_f y de M_t se indican en la figura 100.

b) Si para el caso anterior, sólo se halla cargada una de las vigas, por ejemplo $q_1 \neq 0$; $q_2 = 0$, el sistema de ecuaciones será

- De la (133) $\quad 16\,l^3.X_1 - 12\,l^2.X_2 + 12\,l^2.X_3 = 3\,q_1.l^4$
  o bien $\quad 16\,l.X_1 - 12\,X_2 + 12\,X_3 = 3\,q_1.l^2$
- De la (134) $\quad -3\,l.X_1 + 6.(1+\tau).X_2 = -\,q_1.l^2$
- De la (135) $\quad 3\,l.X_1 + 6.(1+\tau).X_3 = 0$

el que una vez resuelto permite obtener

$$X_1 = \frac{q_1.l}{4}.\frac{(1+3\tau)}{(1+4\tau)}$$

$$X_2 = -\frac{q_1 \cdot l^2}{24} \cdot \frac{(1+7\tau)}{(1+\tau)\cdot(1+4\tau)} \quad ; \quad X_3 = -\frac{q_1 \cdot l^2}{24} \cdot \frac{3\cdot(1+3\tau)}{(1+\tau)\cdot(1+4\tau)}$$

En la figura 101 se han dibujado los diagramas de momentos flectores y torsores.

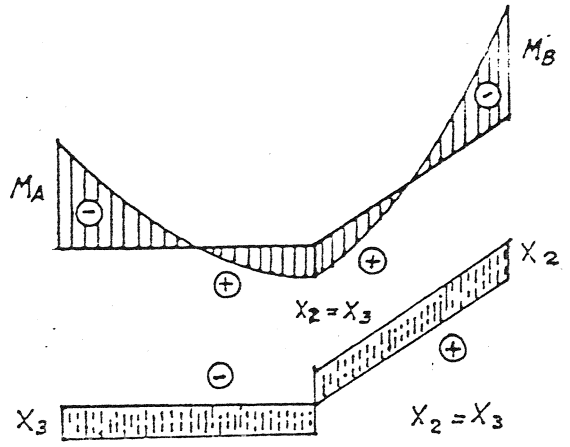


Figura 100

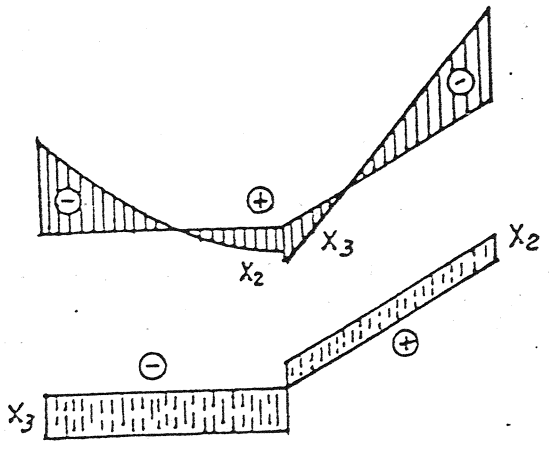


Figura 101

9.3.2. Caso de una carga concentrada en el vértice.

Si sobre la viga balcón actuase una carga concentrada P en el vértice (figura 102a), es decir en la sección en la que se efectúa el corte para dejar constituido el isostático equivalente, se procede en forma análoga a la consignada en el apartado 3.5.5. para el caso de un par actuando en la sección en la que se introduce una articulación. Es decir que la fuerza P podrá ser distribuida arbitrariamente entre ambos extremos (figura 102b), de forma tal que $P_1 + P_2 = P$ como ecuación complementaria, o bien en ocasiones puede resultar más sencillo hacerla actuar con todo su valor en el extremo de una cualquiera de las vigas simples que constituyen el isostático equivalente. En el primer supuesto, el diagrama de M_o es el que muestra la figura 102c).

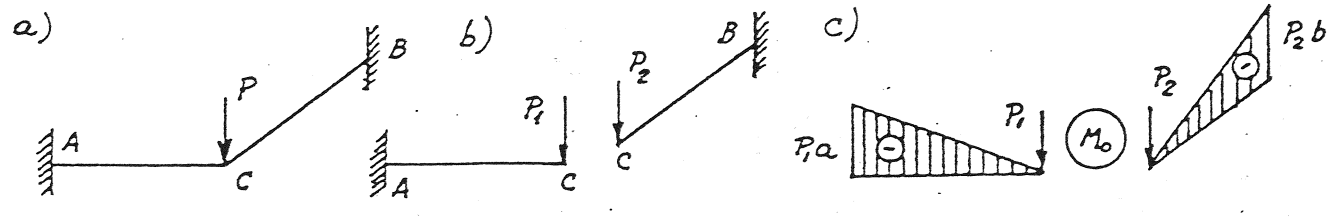


Figura 102

Las ecuaciones se plantean siguiendo los mismos criterios que los empleados en el caso desarrollado en el apartado 9.3.1.

9.3.2.1. Caso particular.

Si se tiene que a = b = l; $J_1 = J_2 = J$; r = 1; $J_{T1} = J_{T2} = J_T$; $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, y se adopta la distribución de la figura 102b) con $P_1 = P_2 = P/2$, en forma análoga a lo que acontece en la viga con carga distribuida uniforme, por las condiciones de simetría impuestas será $X_1 = 0$ (incógnita antisimétrica) y $X_2 = X_3$.

Planteando y resolviendo la ecuación necesaria, se obtiene

$$X_2 = X_3 = -\frac{P.l}{4.(1+\tau)} \quad \text{y además:} \quad M_A = M_B = -P.l.\frac{(1+2\tau)}{4.(1+\tau)}$$

En la figura 103 se consigna el diagrama de momentos.

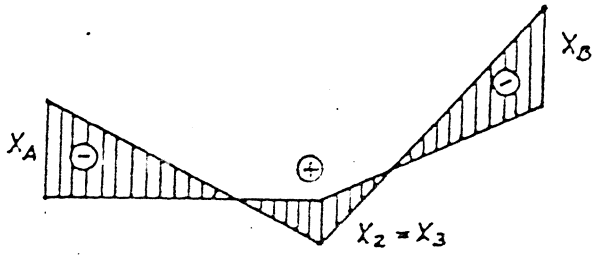


Figura 103

9.3.3. Viga balcón con el extremo común apoyado.

Si se diese el caso de hallarse el extremo común C apoyado (figura 104a), el isostático equivalente se transforma en el indicado en la figura 104b), del cual surge que las incógnitas a resolver serán X_1', X_1'', X_2 y X_3. Para el planteo de las ecuaciones debe tenerse presente que en este caso los desplazamientos verticales de los extremos de cada viga serán nulos, por la condición que impone la presencia del apoyo en C.

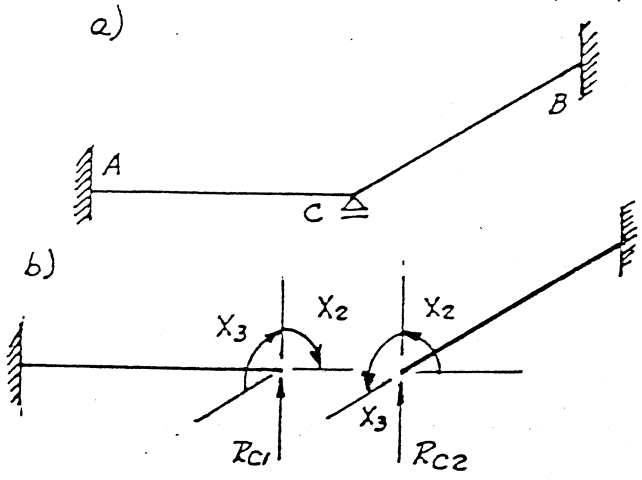


Figura 104

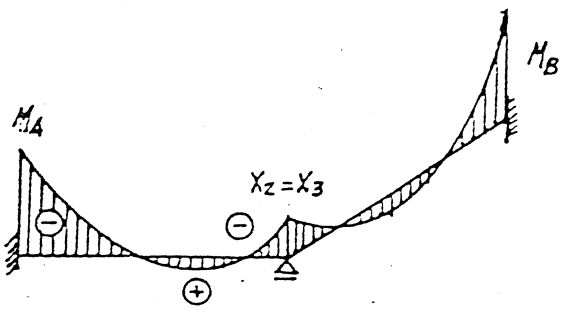


Figura 105

En consecuencia, teniendo en cuenta los diagramas de momentos de la figura 99, y adecuando los signos según corresponda, pueden escribirse, suponiendo análogas condiciones de carga y de geometría estructural a las que señala la figura 98

$$-\frac{q_1.a^4}{8\,E.J_1} + \frac{a^3}{3\,E.J_1}.X_1' - \frac{a^2}{2\,E.J_1}.X_2 = 0$$

$$-\frac{q_2.b^4}{8\,E.J_2} + \frac{b^3}{3\,E.J_2}.X_1'' - \frac{b^2}{2\,E.J_2}.X_3 = 0$$

$$\frac{q_1.a^3}{6\,E.J_1} - \frac{a^2}{2\,E.J_1}.X_1' + \left(\frac{a}{E.J_1} + \frac{b}{G.J_{T2}}\right).X_2 = 0$$

$$\frac{q_2.b^3}{6\,E.J_2} - \frac{b^2}{2\,E.J_2}.X_1'' + \left(\frac{a}{G.J_{T1}} + \frac{b}{E.J_2}\right).X_3 = 0$$

sistema de 4 ecuaciones que permite resolver el problema.

9.3.3.1. Caso particular.

Si como caso particular se considera a = b = 1; $J_1 = J_2 = J$; r = 1; $J_{T1} = J_{T2} = J_T$; $\tau_1 = \tau_2 = \tau$; $q_1 = q_2 = q$, será también

$$X_1' = X_1'' = R_C / 2 \qquad y \qquad X_2 = X_3$$

con lo que el sistema precedente de 4 ecuaciones se reduce a uno de 2, de cuya resolución se obtiene

$$R_C = q.1.\frac{(1 + 3\tau)}{(1 + 4\tau)} \quad ; \quad X_2 = X_3 = \frac{q.1^2}{12.(1 + 4\tau)}$$

y los momentos de empotramiento valdrán

$$M_A = M_B = -\frac{q.1^2}{12}.\frac{(1 + 6\tau)}{(1 + 4\tau)}$$

El diagrama de momentos flectores adquiere la conformación que se indica en la figura 105.

9.4. Pórticos sometidos a acciones normales a su plano.

Si en el caso de la estructura de la figura 96, actúan fuerzas y/o pares normales a su plano, la determinación de las incógnitas hiperestáticas se realiza planteando el sistema de ecuaciones canónicas de acuerdo a los conceptos generales expuestos en 9.2. Se limitará el estudio a una estructura simétrica, siendo los conceptos aplicados extensivos a cualquier sistema espacial.

Sea el pórtico espacial de la figura 106a), de sección constante, siendo la rigidez de los elementos que lo componen, EJ a la flexión y GJ_T a la torsión. El pórtico es plano con carga perpendicular a dicho plano. Por lo tanto, en cualquier sección transversal, las incógnitas que se encuentran en el plano del pórtico serán iguales a cero. Además, por las condiciones de simetría, en la sección transversal del plano de simetría, serán nulas las incógnitas antisimétricas, o sea el esfuerzo de corte vertical y el momento torsor, quedando como única incógnita el momento flector X_1 (figura 106b).

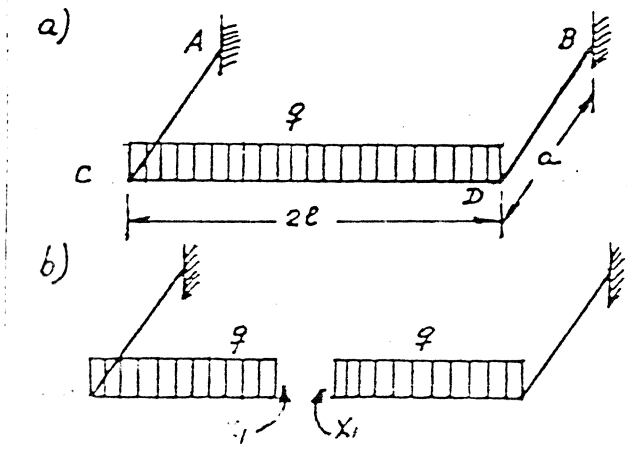


Figura 106

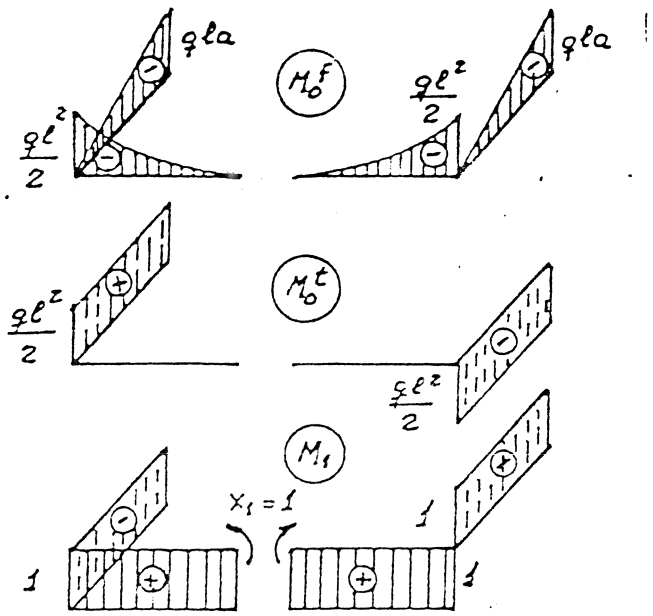


Figura 107

Los diagramas M_o y M_1 se consignan en la figura 107. De ellos

$$\delta_{11} = \frac{2\,l}{E.J} + \frac{2\,a}{G.J_T}$$

$$\Delta_{1o} = -2\,\frac{1}{3}\cdot\frac{q.l^2}{2}\cdot\frac{l}{E.J} - 2\,\frac{q.l^2}{2}\cdot\frac{a}{G.J_T} = -\frac{q.l^3}{3\,E.J} - \frac{q.l^2.a}{G.J_T}$$

Siendo $\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 = 0$, se despeja el valor de X_1

$$X_1 = -\frac{-\left(\frac{q.l^3}{3\,E.J} + \frac{q.l^2.a}{G.J_T}\right)}{\frac{2\,l}{E.J} + \frac{2\,a}{G.J_T}} = \frac{q.l^2}{6}\cdot\frac{\left(1 + 3\,\frac{a.E.J}{G.J_T}\right)}{\left(1 + \frac{a.E.J}{G.J_T}\right)}$$

$$X_1 = \frac{q.l^2}{6} \cdot \frac{(1 + 3\,a.\tau)}{(1 + a.\tau)} \qquad \text{por ser:} \quad \frac{E.J}{G.J_T} = \tau$$

El momento en los vértices C y D resulta:

$$M_C = M_D = M_o + 1.X_1 = -\frac{q.l^2}{2} + \frac{q.l^2}{6} \cdot \frac{(1 + 3\,a.\tau)}{(1 + a.\tau)} =$$

$$= q.l^2 \cdot \frac{(-3\,1 - 3\,a.\tau + 1 + 3\,a.\tau)}{6.(1 + a.\tau)} = -\frac{q.l^3}{3.(1 + a.\tau)}$$

y en las secciones de empotramiento

$$M_A = M_B = -\,q.l.a$$

El momento torsor en las barras AC y BD será igual al momento flector en los extremos de la viga frontal CD. Los diagramas resultantes se han trazado en la figura 109.

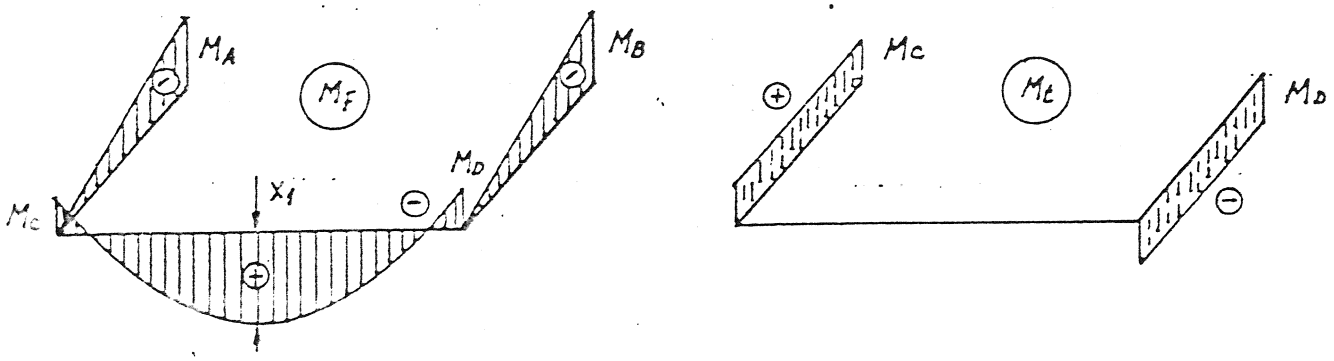


Figura 109

Si el sistema de acciones exteriores no es simétrico, como por ejemplo el estado de cargas de la figura 110a), la forma más conveniente de resolver el problema es aplicando los criterios expuestos en el apartado 5.5. y figura 59.

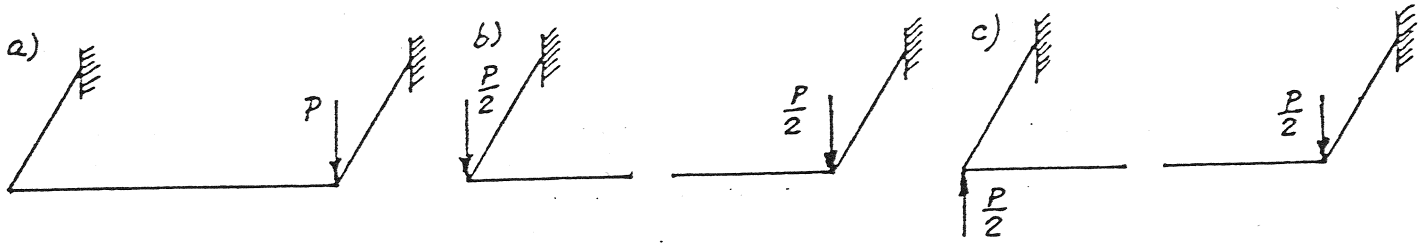


Figura 110

Para la estructura planteada deben en consecuencia resolverse por separado los isostáticos equivalentes de las figuras 110b) y c) y luego, por suma de los diagramas parciales así obtenidos, se determinan las solicitaciones del pórtico dado.

10. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

3. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

4. "MECANICA DE CONSTRUCCION" - Tomos I y II - V. A. Kiseliov - Editorial Mir - Moscú - 1972.

5. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana - México - 1997.

6. "ESTATICA EN LA CONSTRUCCION" - Kurt Hirschfeld - Editorial Reverté S.A. - Barcelona - 1975.

7. "CIENCIA DE LA CONSTRUCCION" - Odone Belluzzi - Aguilar S. A. de Ediciones - Madrid - 1968.

8. "ESTATICA APLICADA" - Rudolf Saliger - Editorial Labor - Barcelona.

9. "ESTABILIDAD III" - Capítulo 3: Resolución de estructuras estáticamente indeterminadas - Método de las Fuerzas - Carlos D. Segerer - 1985.

A N E X O S

TABLA N° 1. Valores de los términos de carga R y L.

1	$L = R = \frac{q\ell^2}{4}$
2	$L = \frac{qa^2}{4}\left(2 - \frac{a}{\ell}\right)^2$ $R = \frac{qa^2}{4}\left(2 - \frac{a^2}{\ell^2}\right)$
3	$L = \frac{9}{64} q\ell^2$; $R = \frac{7}{64} q\ell^2$
4	$L = \frac{7}{64} q\ell^2$; $R = \frac{9}{64} q\ell^2$
5	$L = \frac{qb^2}{4}\left(2 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)$ $R = \frac{qb^2}{4}\left(2 - \frac{b}{\ell}\right)^2$
6	$L = \frac{qabc}{\ell^2}\left(\ell + b - \frac{c^2}{4a}\right)$ $R = \frac{qabc}{\ell^2}\left(\ell + a - \frac{c^2}{4b}\right)$
7	$L = R = \frac{qb\ell}{8}\left(3 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)$
8	$L = R = \frac{qa^2}{2}\left(3 - \frac{2a}{\ell}\right)$
9	$L = \frac{8}{60} q\ell^2$; $R = \frac{7}{60} q\ell^2$
10	$L = \frac{7}{60} q\ell^2$; $R = \frac{8}{60} q\ell^2$
11	$L = R = \frac{5}{32} q\ell^2$
12	$L = R = \frac{q}{4}\left[\ell^2 - a^2\left(2 - \frac{a}{\ell}\right)\right]$
13	$L = \frac{q(\ell+b)}{60\ell}(7\ell^2 - 3b^2)$ $R = \frac{q(\ell+a)}{60\ell}(7\ell^2 - 3a^2)$
14	$L = qa^2\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{4\ell} + \frac{a^2}{20\ell^2}\right)$ $R = qa^2\left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{20\ell^2}\right)$
15	$L = \frac{53}{960} q\ell^2$; $R = \frac{37}{960} q\ell^2$
16	$L = qb^2\left(\frac{1}{6} - \frac{b^2}{20\ell^2}\right)$ $R = qb^2\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{4\ell} + \frac{b^2}{20\ell^2}\right)$
17	$L = \frac{37}{960} q\ell^2$; $R = \frac{53}{960} q\ell^2$
18	$L = qa^2\left(\frac{2}{3} - \frac{3a}{4\ell} + \frac{a^2}{5\ell^2}\right)$ $R = \frac{qa^2}{15}\left(5 - 3\frac{a^2}{\ell^2}\right)$
19	$L = \frac{41}{480} q\ell^2$; $R = \frac{17}{240} q\ell^2$
20	$L = \frac{qb^2}{15}\left(5 - 3\frac{b^2}{\ell^2}\right)$ $R = qb^2\left(\frac{2}{3} - \frac{3b}{4\ell} + \frac{b^2}{5\ell^2}\right)$
21	$L = \frac{17}{240} q\ell^2$; $R = \frac{41}{480} q\ell^2$
22	$L = R = \frac{3}{32} q\ell^2$

TABLA N° 1 (Conclusión). Valores de los términos de carga R y L.

25	$L = R = \frac{q\ell^2}{5}$
26	$L = R = \frac{q\ell^2}{20}$
27	$L = \frac{q\ell^2}{12}$; $R = \frac{q\ell^2}{15}$
28	$L = \frac{q\ell^2}{15}$; $R = \frac{q\ell^2}{12}$
29	$L = \frac{11}{60} q\ell^2$; $R = \frac{q\ell^2}{6}$
30	$L = \frac{q\ell^2}{6}$; $R = \frac{11}{60} q\ell^2$
31	$L = R = \frac{3}{8} P\ell$
32	$L = \frac{Pab(b+\ell)}{\ell^2}$ $R = \frac{Pab(a+\ell)}{\ell^2}$
33	$L = R = 3Pa\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)$
34	$L = R = \frac{2}{3} P\ell$
35	$L = R = \frac{15}{16} P\ell$
36	$L = R = \frac{6}{5} P\ell$
37	$L = R = \frac{P\ell}{4n}(n^2 - 1)$
38	$L = R = \frac{P\ell}{8n}(2n^2 + 1)$
39	$L = 2M$; $R = M$
40	$L = M$; $R = 2M$
41	$L = M\left(1 - 3\frac{b^2}{\ell^2}\right)$; $R = M\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 1\right)$
42	$L = R = q\frac{b}{4}(\ell - a)$
43	$L = R = 3EJ\alpha\frac{\Delta t}{d}$
44	$L = \frac{6EJ}{\ell^2}(\Delta_B - \Delta_A)$ $R = \frac{6EJ}{\ell^2}(\Delta_A - \Delta_B)$

NOTA: El número de orden de la primera columna se corresponde con el indicado en la Tabla N° 5 del Capítulo II para cada estado de carga.

TABLA N° 2. Valores de ω_1 y ω_d.

ξ_1	ω_1	ω_d
0	0	0
0,1	0,0990	0,1710
0,2	0,1920	0,2880
0,25	0,2344	0,3281
0,3	0,2730	0,3570
0,4	0,3360	0,3840
0,5	0,3750	0,3750
0,6	0,3840	0,3360
0,7	0,3570	0,2730
0,75	0,3281	0,2344
0.8	0,2880	0,1920
0,9	0,1710	0,0990
1,0	0	0

ANEXO 3: Inversión de Matrices

a) Matriz de 2 x 2.

$$\text{Si} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

y además $[B] = [A]^{-1}$, deberá ser $[A].[A]^{-1} = [A].[B] = [I]$.

En consecuencia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir que deberán verificarse los sistemas de ecuaciones

$$a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} = 1 \qquad a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} = 0$$
$$a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} = 0 \qquad a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} = 1$$

Considerando como incógnitas b_{11} y b_{21} para el primer sistema y b_{12} y b_{22} para el segundo, en ambos casos el determinante principal será

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

y los valores de los b_{ik} (incógnitas) serán

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{22}}{\Delta} \quad ; \quad b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{a_{21}}{\Delta}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{a_{12}}{\Delta} \quad ; \quad b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}}{\Delta}$$

En definitiva

$$[B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

es decir que la matriz inversa de una matriz de 2 x 2 tiene por coeficiente la inversa del determinante calculado con los términos de la matriz dada, mientras que los términos interiores serán: los de la diagonal principal primitiva invertidos en su orden, mientras que los dos restantes mantienen su ubicación, pero con signo cambiado.

b) Matriz de 3 x 3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} &= 1 \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} &= 0 \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} &= 0 \\ a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} &= 1 \\ a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} &= 0 \\ a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} &= 0 \\ a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}}{\Delta}$$

$$b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{31}.a_{23} - a_{33}.a_{21}}{\Delta}$$

o bien: $b_{21} = -(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31})/\Delta$

$$b_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}}{\Delta}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{32}.a_{13} - a_{33}.a_{12}}{\Delta}$$

o bien: $b_{12} = -(a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32})/\Delta$

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}}{\Delta}$$

$$b_{32} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{31}.a_{12} - a_{32}.a_{11}}{\Delta}$$

o bien: $b_{32} = -(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31})/\Delta$

$$b_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}}{\Delta}$$

$$b_{23} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{21}.a_{13} - a_{23}.a_{11}}{\Delta}$$

o bien: $b_{23} = -(a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{21})/\Delta$

$$b_{33} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}}{\Delta}$$

En definitiva $[A]^{-1} =$

$$\frac{1}{\Delta}.\begin{bmatrix} a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32} & -(a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32}) & a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22} \\ -(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) & a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31} & -(a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{21}) \\ a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31} & -(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}) & a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \end{bmatrix}$$

que también puede escribirse para mayor facilidad de interpretación

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

En conclusión, la matriz inversa de una matriz de 3 x 3 tiene por coeficiente la inversa del determinante calculado con los términos de la matriz dada, mientras que los términos interiores serán:

- para los de la diagonal principal, el término correspondiente es el cofactor del término de igual ubicación en la matriz dada;

- para los restantes, el término correspondiente es el cofactor del término simétrico de la matriz dada, con signo más o menos según que el término se ubique en fila y columna de igual o distinta paridad, respectivamente.

Cabe observar que para una matriz [A] simétrica, también será simétrica la matriz inversa, siendo en consecuencia $b_{12} = b_{21}$; $b_{13} = b_{31}$ y $b_{23} = b_{32}$.

INDICE

CAPITULO III: METODO DE LAS FUERZAS

Página

1. Introducción a la resolución de estructuras hiperestáticas 1
   1.1. Generalización del método de las fuerzas. 2
   1.2. Grado de indeterminación estática 4

2. Formulación del sistema de ecuaciones para el cálculo. . . 5
   2.1. Elección del sistema isostático equivalente 5
   2.2. Planteo de las ecuaciones de compatibilidad 8
   2.3. Determinación de los coeficientes 10

3. Resolución de vigas continuas. 11
   3.1. Conceptos generales 11
   3.2. Discusión sobre la elección del isostático equivalente 13
   3.3. Ecuación de los tres momentos 17
   3.4. Resolución general por el método de las fuerzas . . . 29
   3.5. Trazado de diagramas y cálculo de las reacciones. . . 36
   3.6. Vigas continuas de sección variable 42

4. Líneas de influencia de vigas continuas. 44
   4.1. Definición y concepto 44
   4.2. Empleo de las líneas de influencia. 45
   4.3. Líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas 46
   4.4. Líneas de influencia de M y Q en secciones de tramos. 59
   4.5. Líneas de influencia de las reacciones de apoyo . . . 62
   4.6. Diagrama de envolventes de momentos flectores 64

5. Resolución de estructuras aporticadas. 69
   5.1. Planteo de resolución por el método de las fuerzas. . 69
   5.2. Consideración de la influencia de N o Q 73
   5.3. Cálculo de pórticos por variación de temperatura. . . 73
   5.4. Casos varios. 73
   5.5 Simplificación en base a las condiciones de simetría. 73
   5.6. Resolución por aplicación de la ecuación de los 3 momentos. 77

6. Resolución de marcos 79
   6.1. Nociones generales. 79
   6.2. Resolución por aplicación del método de las fuerzas . 81
   6.3. Aplicación de las ecuaciones de los 3 y 4 momentos. . 83
   6.4. Marco poligonal regular 83
   6.5. Cálculo de anillos cerrados 84

7. Resolución de reticulados hiperestáticos 87
   7.1. Consideraciones generales 87
   7.2. Reticulados hiperestáticos por exceso de vínculos externos. 87

Página

7.3. Reticulados hiperestáticos por exceso de barras. . . 88
7.4. Cálculo de los esfuerzos en las barras isostáticas . 92
7.5. Caso de variación de temperatura 92
7.6. Trazado de las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras hiperestáticas 93

8. Arcos hiperestáticos. 95
8.1. Nociones generales 95
8.2. Arcos biarticulados. 97
8.3. Arco atirantado. 106
8.4. Arcos biempotrados 108

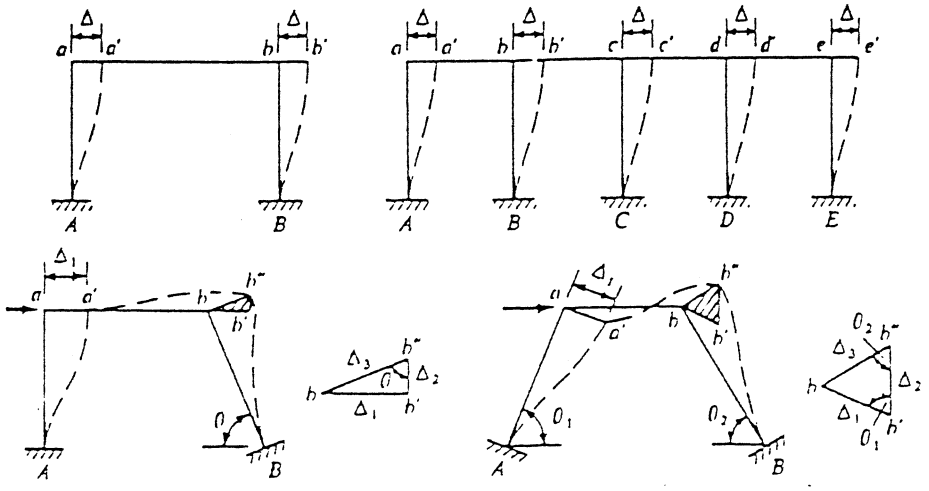
9. Estructuras espaciales. 114
9.1. Nociones generales 114
9.2. Resolución por el método de las fuerzas. 115
9.3. Resolución de la viga balcón 118
9.4. Pórticos sometidos a acciones normales a su plano. . 124

10. Bibliografía consultada 127

ANEXOS. 128

Tabla N° 1. Valores de los términos de carga R y L. . . . 129
Tabla N° 2. Valores de ω_1 y ω_a. 131
Anexo 3: Inversión de matrices de 2 x 2 y de 3 x 3. . . . 132

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO IV

METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO IV

METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

1. FUNDAMENTOS DEL METODO.

El **método de los desplazamientos** (también llamado de las *incógnitas elásticas* o de las *deformaciones*), tiene en común con el método de las fuerzas, que en ambos debe plantearse y resolverse un sistema con un determinado número de ecuaciones, que en este método está dado por la cantidad de incógnitas cinemáticas que presenta la estructura.

En ambos casos, asimismo, los elementos que intervienen en la formulación de dichas ecuaciones son acciones y desplazamientos. La diferencia fundamental radica en que, mientras que en el método de las fuerzas las incógnitas son acciones (fuerzas y/o pares), o sea *incógnitas estáticas*, las que deben obtenerse conociendo desplazamientos, en el método de los *desplazamientos* aquellas son precisamente tales (desplazamientos angulares y/o lineales), los que deben calcularse conociendo acciones. El número de incógnitas, para una misma estructura, puede o no ser coincidente en ambos métodos.

1.1. Comparación con el Método de las Fuerzas.

Los métodos de las fuerzas y de los desplazamientos se corresponden de modo perfectamente dual, lo que contribuye a hacer más comprensibles las analogías y diferencias entre ambos métodos. A los efectos de poner en evidencia en forma clara la correlatividad entre el método de las fuerzas (incógnitas estáticas) y el de los desplazamientos (incógnitas elásticas), se ordenarán los diversos aspectos a confrontar, coincidentemente con los pasos a seguir para la resolución, con igual numeración, recomendándose la lectura simultánea de cada uno de ellos.

A nivel de ejemplo, el paralelo se efectuará aplicándolo concretamente al caso de la resolución de un pórtico biempotrado.

1.1.1. Resolución aplicando el Método de las Fuerzas.

El procedimiento de resolución ya fue desarrollado en el Capítulo III, por lo que no requiere mayores explicaciones. Los pasos a seguir son los siguientes (figura 1):

* Paso 1: *Determinación del número de incógnitas.* Permite determinar la cantidad de ecuaciones a formular, y es igual al grado de hiperestaticidad o grado de indeterminación estática que presente la estructura. Para el pórtico biempotrado planteado el grado de hiperestaticidad es 3.

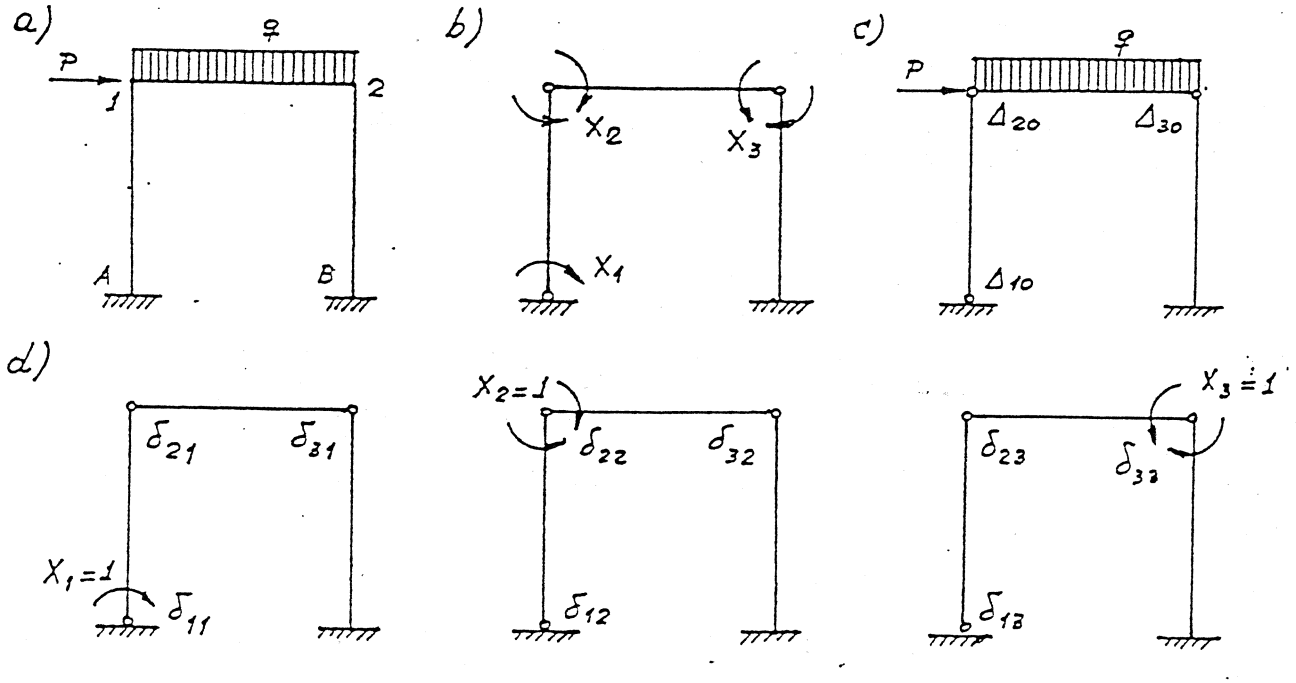


Figura 1

* Paso 2: *Conformación del sistema básico.* En el método de las fuerzas el sistema básico está constituido por el denominado isostático equivalente, en el cual se ponen en evidencia las incógnitas y que se obtiene retirando todos los vínculos superabundantes (figura 1b).

* Paso 3: *Cálculo de los términos independientes de las ecuaciones.* Sobre el sistema básico se aplica el conjunto exterior de cargas actuante (figura 1c) y se calculan los valores de los desplazamientos que en tales condiciones se producen en la dirección de las solicitaciones incógnitas: Δ_{1o}, Δ_{2o}, ... etc., (para toda la estructura $[\Delta_{xo}]$).

* Paso 4: *Cálculo de los coeficientes de las incógnitas.* Dado que en general las incógnitas son varias y como por otra parte obviamente se desconoce su valor, se va haciendo actuar en forma independiente y sucesiva sobre el sistema básico, cada una de las incógnitas con valor unitario ($X_1 = 1$; $X_2 = 1$, ... etc., figuras 1d) y se calculan los valores de los desplazamientos que en tales condiciones se producen en la dirección de cada incógnita: δ_{11}, δ_{21}, ... , δ_{1k}, etc., (para toda la estructura $[\delta_{xxu}]$).

* Paso 5: *Formulación y resolución del sistema de ecuaciones.* Teniendo en cuenta que en la dirección de cada incógnita el desplazamiento total (resultante de la suma de los desplazamientos producidos por cada efecto individualmente considerado), debe corresponderse con el de la estructura dada, se podrá plantear un sistema de ecuaciones, cada una de las cuales tendrá la forma

$$\Delta_{1o} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = 0$$

en donde se observa que el término independiente y los coeficientes de las incógnitas son desplazamientos y las incógnitas X_1 acciones. Cadá sumando es un desplazamiento, y el sistema en su conjunto corresponderá a un sistema de *ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos.*

El sistema se resuelve mediante

$$[X] = - [\delta_{xxu}]^{-1} . [\Delta_{xo}]$$

* Paso 6: *Trazado del diagrama de momentos.* Con los valores de X obtenidos y los diagramas de momentos de los estados unitarios, pueden calcularse los restantes momentos de extremo de barra. Con todos ellos y el conocimiento del sistema exterior de cargas actuante, se efectúa el trazado del diagrama de momentos flectores de la estructura.

1.1.2. Resolución aplicando el Método de los Desplazamientos.

Los pasos a seguir en este método, aplicados al caso del pórtico biempotrado supuesto, son los siguientes (figura 2):

* Paso 1: *Determinación del número de incógnitas.* Permite determinar la cantidad de ecuaciones a formular, y es igual al grado de indeterminación cinemática que presenta la estructura. Para el pórtico biempotrado planteado el grado de indeterminación cinemática es 3, correspondiendo las incógnitas a los giros de los nudos 1 y 2 y al corrimiento horizontal del dintel del pórtico (figura 2b). [Para desarrollar los conceptos involucrados se remite al contenido del apartado 1.3.].

* Paso 2: *Conformación del sistema básico.* En el método de los desplazamientos el sistema básico se conforma impidiendo todo movimiento en la dirección de cada una de las incógnitas cinemáticas que presenta la estructura, mediante la introducción de los vínculos necesarios para restringirlos (figura 2c).

* Paso 3: *Cálculo de los términos independientes de las ecuaciones.* Al igual que en el método de las fuerzas, se aplica sobre el sistema básico el conjunto exterior de cargas actuante (figura 2c) y se calculan los valores de las acciones que los vínculos introducidos desarrollan en función de su respectiva naturaleza, en la dirección de las incógnitas: A_{1o}, A_{2o}, ... etc., (para toda la estructura $[A_{xo}]$).

* Paso 4: *Cálculo de los coeficientes de las incógnitas.* Dado que en general las incógnitas son varias y como por otra parte obviamente se desconoce su valor, se van provocando en forma independiente y sucesiva sobre el sistema básico, los desplazamientos que genera cada una de las incógnitas con valor unitario ($X_1 = 1$; $X_2 = 1$, ... etc., figuras 2d) y se calculan los valores de las acciones que en tales condiciones se producen en la dirección de cada incógnita: a_{11}, a_{21}, ... , a_{1k}, etc., (para toda la estructura $[a_{xxu}]$).

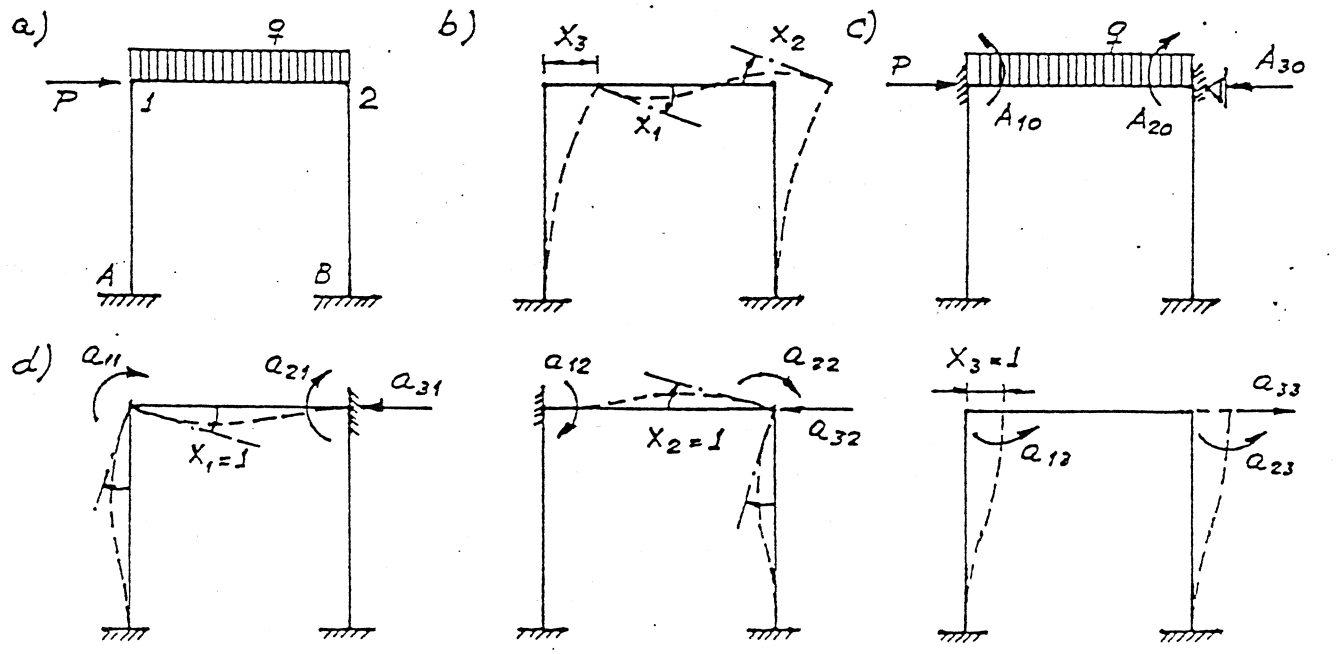


Figura 2

* Paso 5: *Formulación y resolución del sistema de ecuaciones.* Teniendo en cuenta que en la dirección de cada incógnita la acción total actuante debe ser nula en virtud del equilibrio de los elementos estructurales, se podrá plantear un sistema de ecuaciones, cada una de las cuales tendrá la forma

$$A_{1o} + a_{11}.X_1 + a_{12}.X_2 + a_{13}.X_3 = 0$$

en donde se observa que el término independiente y los coeficientes de las incógnitas son acciones y las incógnitas X_1 desplazamientos. Cada sumando es una acción, y el sistema en su conjunto corresponderá a un sistema de *ecuaciones de equilibrio de acciones.*

El sistema se resuelve mediante

$$[X] = - [a_{xxu}]^{-1}.[A_{xo}]$$

* Paso 6: *Cálculo de los momentos.* Como los valores de X_1 son desplazamientos, para poder considerar resuelto el pórtico debe introducirse en este método un paso complementario que permita hallar los valores de los momentos flectores en cada extremo de barra (M_e) y demás solicitaciones que eventualmente se deseen determinar, en función de las incógnitas elásticas obtenidas (X_1).

* Paso 7: *Trazado del diagrama de momentos.* Su trazado se efectúa con los valores de M_e obtenidos según el paso anterior y el conocimiento del sistema de cargas actuante en cada barra.

1.1.3. Conclusiones.

Del análisis comparativo efectuado surge que ambos métodos tienen el único y común alcance de caracterizar la situación efectiva de la estructura, o sea la única que es simultáneamente equilibrada y congruente.

Se observa que el sistema básico del método de las fuerzas es libre de deformarse y estáticamente determinado, admitiendo variadas conformaciones, mientras que en el de los desplazamientos está completamente restringido en su deformación, es estáticamente indeterminado y único.

El método de las fuerzas es un método directo, pues permite obtener directamente solicitaciones, mientras que el de los desplazamientos es un método indirecto, pues aquellas deben obtenerse en un paso complementario a partir de desplazamientos.

En resumen, en el método de las fuerzas se toman como incógnitas las reacciones de los vínculos superabundantes (externos y/o internos) que son estáticamente indeterminados, o sea tales que mantienen el equilibrio de la estructura, cualesquiera que sean sus valores, y se determinan las incógnitas mediante la condición de que la estructura se deforme de modo que se respete la congruencia impuesta por los vínculos exteriores e interiores, con lo que se determina la única situación congruente entre las infinitas equilibradas.

En el método de los desplazamientos, por su parte, se asumen como incógnitas las rotaciones y corrimientos de los nudos de la estructura que son cinemáticamente indeterminadas, o sea tales que respetan la congruencia de la estructura, cualesquiera que sean sus valores y se determinan las incógnitas mediante la condición de que los distintos nudos o las diversas partes de la estructura estén en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores e interiores, con lo que se determina la única situación equilibrada entre las infinitas congruentes.

La elección de uno u otro método viene aconsejada por el número de incógnitas necesarias, por la sencillez en la formulación de las ecuaciones (referida al cálculo de sus términos independientes y coeficientes de las incógnitas) y/o por la necesidad de conocer las deformaciones que experimenta la estructura.

1.2. Generalización del Método de los Desplazamientos.

Como se desprende de los conceptos precedentes, ambos métodos están ligados por una idea común, que consiste en que el cálculo se efectúa sobre un sistema básico, obtenido a partir de la estructura dada. En el método de los desplazamientos este sistema básico se obtiene introduciendo nuevos vínculos complementarios que impidan los desplazamientos angulares y lineales de los nudos de la estructura dada (más precisamente en la dirección de cada una de las incógnitas), y de modo tal que el sistema básico obtenido sea simple y accesible para determinar en él los

esfuerzos y desplazamientos. La introducción de nuevos vínculos dentro de la estructura dada deberá ser compensada con solicitaciones externas complementarias sobre el sistema básico.

En una estructura compuesta por elementos rectilíneos, los desplazamientos de los extremos de un elemento o miembro estructural se determinan por los desplazamientos de los nudos con que el mismo linda. De allí la necesidad de conocer sus rotaciones angulares y desplazamientos lineales, constituyendo ambos, precisamente, las incógnitas del método. En correspondencia con tales incógnitas, los vínculos introducidos para conformar el sistema básico deberán ser de dos tipos:

a) *Vínculo de momento* (angular) impuesto al nudo para impedir sólo su rotación y que es capaz de generar únicamente un momento reactivo, y

b) *Vínculo de fuerza* (corrimiento) impuesto al sistema, que impide sólo el desplazamiento lineal de los nudos en una determinada dirección y que es capaz de crear únicamente una fuerza reactiva en la dirección del vínculo.

Los vínculos indicados en a) se imponen generalmente a todos los nudos rígidos de la estructura, mientras que los consignados en b), se colocan en los lugares donde existan corrimientos independientes (figura 3b), referida a la estructura que se indica en la figura 3a).

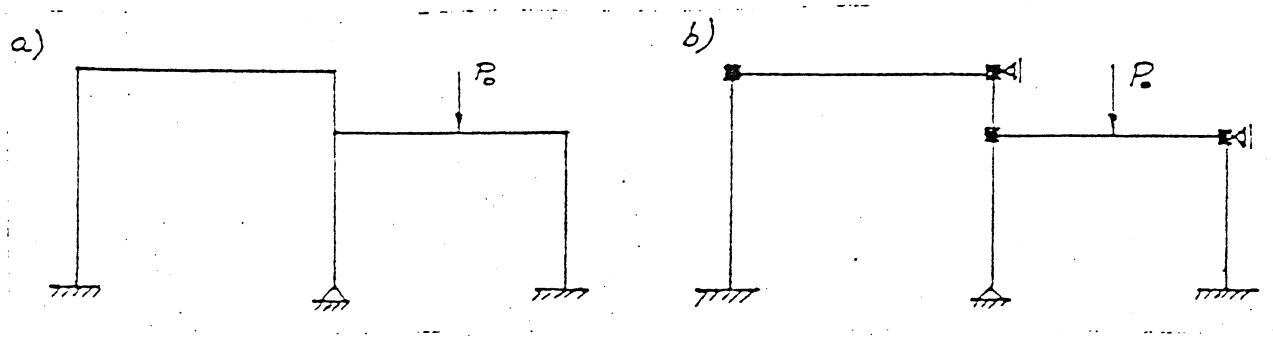


Figura 3

El sistema obtenido de tal modo (figura 3b), se llama *básico indeformable* o *sistema fijo* y está compuesto por:

a) Vigas o miembros estructurales empotrados en ambos extremos, y

b) Vigas o miembros estructurales empotrados en uno de sus extremos, con el otro sobre un apoyo articulado, cuando la estructura lo presente en la conformación de su esquema teórico.

De lo expuesto se concluye que el sistema básico del método de los desplazamientos, con todas las restricciones al movimiento introducidas, de hecho puede ser obtenido de una sola manera, resultando siempre un hiperestático de grado mayor al de la estructura dada.

Para la formulación del sistema de ecuaciones por este método, se deforma cada vínculo impuesto al sistema básico, es decir que:

-- si el vínculo es de momento, se lo rota en el mismo ángulo de giro que corresponde al sistema exterior real dado, y

-- si el vínculo es de fuerza, se le imprime un movimiento de traslación, dentro del sistema dado, con el valor real que corresponda a este desplazamiento.

A estos desplazamientos (que constituyen las incógnitas), se los designará por X_1, X_2, ... X_n.

En tales condiciones se escriben las expresiones de las acciones A_1 que se generan en los vínculos introducidos, originadas por los desplazamientos producidos en los mismos y por la carga actuante sobre el sistema. Estas reacciones deberán ser iguales a cero, por cuanto en la estructura dada, los vínculos introducidos no existen. Sólo entonces el sistema básico, con los vínculos impuestos, será equivalente a la estructura dada, ya que ésta no los posee. Por consiguiente

$$\begin{aligned} A_1\ (P_o,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n) &= 0 \\ A_2\ (P_o,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n) &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n\ (P_o,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

donde cada ecuación indica la suma de las acciones A en la dirección indicada por el subíndice, debidas sucesivamente al sistema P_o actuando sobre el sistema fijo y a cada uno de los desplazamientos indicados entre paréntesis.

Las ecuaciones (1) son las ecuaciones básicas del método de los desplazamientos, siendo válidas para todos los estados de trabajo de la estructura.

1.3. Grado de indeterminación cinemática.

Por grado de indeterminación cinemática se entiende el número de incógnitas básicas del método de los desplazamientos, o sea los ángulos de giro y los desplazamientos lineales de los nudos rígidos del sistema. Este número depende de las admisiones que se acepten en el método, las que generalmente son:

a) Los extremos de las barras que convergen a un nudo rígido, es decir, ligados entre sí con unión soldada, giran un mismo ángulo.

b) Durante la deformación de las barras rectas por flexión, las distancias entre los nudos no varían.

c) Debido a la pequeñez de los ángulos de giro, éstos se toman iguales a sus tangentes.

Cabe destacar que el tener en cuenta la influencia del esfuerzo de corte en el método de los desplazamientos, no modifica la cantidad de incógnitas a determinar, no ocurriendo lo propio para el esfuerzo normal, cuya consideración aumenta el valor del grado de indeterminación cinemática, tal como se analizará en el apartado 7.6. En las consideraciones que se efectúan en el presente apartado, se supondrá despreciable la influencia del esfuerzo normal sobre el desplazamiento de los nudos.

El número de desplazamientos angulares de los nudos se determina por la cantidad de nudos rígidos que pueden girar en forma independiente. En este caso se considera rígido a cualquier nudo en el cual no menos de dos barras están unidas entre sí por el vínculo de soldadura. Así, los nudos en los apoyos intermedios de las vigas continuas pueden considerarse como nudos rígidos constituidos por dos barras que forman un ángulo de 180°; en los pórticos no articulados, dichos nudos están constituidos corrientemente por elementos o barras que forman ángulos de 90°. Cuando las vigas o pórticos de nudos rígidos se deforman, debe suponerse que los nudos experimentan un giro; o dicho de otra forma, los ángulos que forman entre sí las tangentes a las distintas ramas de la curva elástica en el nudo en que convergen, siguen siendo iguales a los que correspondían a la estructura primitiva sin deformar (figuras 4a) y b).

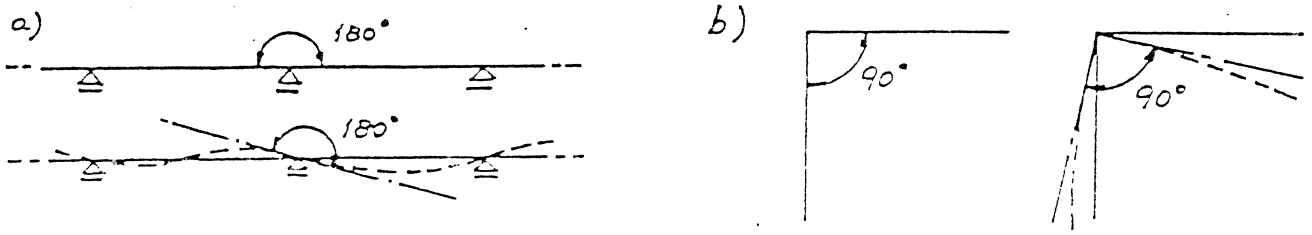


Figura 4

En relación a los desplazamientos lineales de los nudos rígidos de la estructura, en general, el número de dichos desplazamientos *no es igual* a la cantidad de nudos que pueden desplazarse linealmente, dado que en base a las admisiones precedentemente efectuadas, no todos los corrimientos pueden ser independientes. Por ejemplo, los desplazamientos lineales de los nudos superiores del pórtico de la figura 5 son dependientes y se desplazarán horizontalmente una misma magnitud Δ.

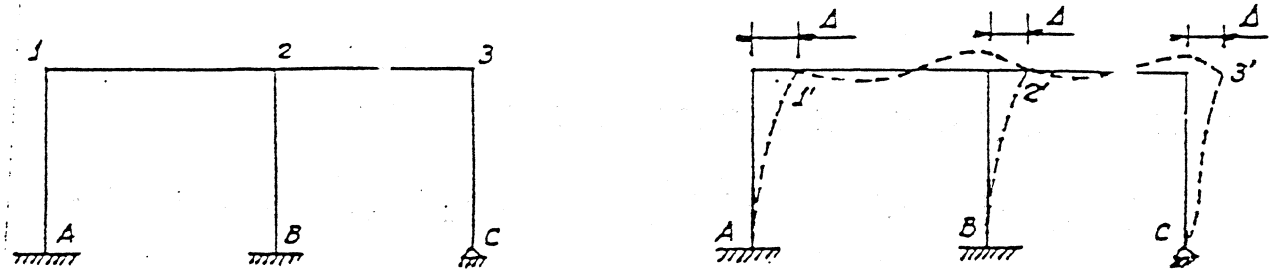


Figura 5

Como consecuencia de lo anterior, en calidad de corrimientos incógnitos, deben considerarse los *desplazamientos lineales independientes*, cuyo número será igual a la cantidad de vínculos de apoyo complementarios que deben introducirse para evitar la traslación de los nudos.

Englobando los conceptos expuestos, *el número total de desplazamientos angulares más los lineales independientes, es igual al número de incógnitas básicas del método de los desplazamientos e igual, a su vez, al grado de indeterminación cinemática.*

A título de ejemplo, en las figuras 6a) a 6g) se indica el grado de indeterminación cinemática de las estructuras mostradas.

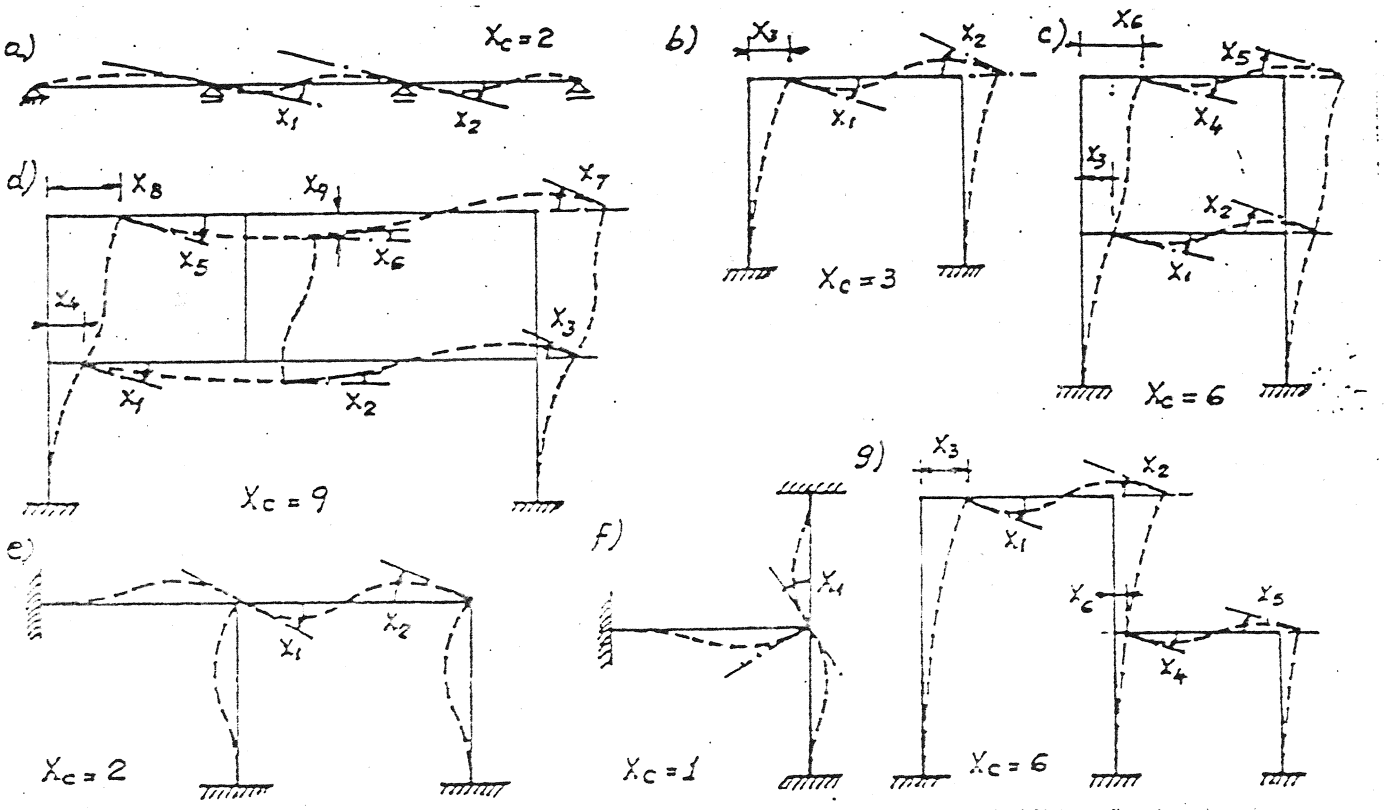


Figura 6

Obsérvese que ambas indeterminaciones son conceptualmente independientes entre sí, existiendo la posibilidad o no de coincidencia. En ocasiones la reducción en la cantidad de incógnitas es notable, como en los casos que corresponden a las estructuras consignadas en las figuras 6e) y f).

2. FORMULACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA EL CALCULO.

En el caso de estructuras sujetas a la acción de cargas fijas y para las cuales se supone válida la aplicación del principio de independencia de las acciones y superposición de los efectos, la

ecuación genérica, para el k-ésimo vínculo de la estructura, dada por la (1), puede desarrollarse de la forma

$$A_k\,(P_o, X_1, X_2, \ldots X_n) = A_{ko} + A_{kx1} + A_{kx2} + \ldots + A_{kxn} = 0 \qquad (2)$$

donde A_{ko} constituye la acción reactiva que se produce en el vínculo introducido, bajo la acción del sistema exterior de cargas actuante y las A_{kx1} constituyen las acciones reactivas que se originan en el mismo vínculo k debidas al desplazamiento real que se produce en la dirección de cada una de las incógnitas.

Dado que obviamente resultan incalculables en forma directa los sumandos A_{kx1}, por desconocerse los verdaderos valores de las incógnitas, se suponen para las mismas, valores de desplazamiento unitarios, y si en esas condiciones se denomina a_{k1} a la acción reactiva que se produce en el vínculo k, debida al desplazamiento unitario en la dirección del vínculo i, y X_1 al verdadero valor del desplazamiento de dicho vínculo i, resulta

$$A_{kx1} = a_{k1}.X_1 \qquad (3)$$

Por consiguiente, la (2) puede escribirse

$$A_{ko} + a_{k1}.X_1 + a_{k2}.X_2 + \ldots + a_{kn}.X_n = 0 \qquad (4)$$

Haciendo k = 1, 2, ... n, se plantea el sistema de ecuaciones canónicas del método de los desplazamientos, el que tomará la forma general

$$\begin{aligned} &A_{1o} + a_{11}.X_1 + a_{12}.X_2 + \ldots + a_{1n}.X_n = 0 \\ &A_{2o} + a_{21}.X_1 + a_{22}.X_2 + \ldots + a_{2n}.X_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_{no} + a_{n1}.X_1 + a_{n2}.X_2 + \ldots + a_{nn}.X_n = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Este sistema puede ser también expresado en forma matricial, haciendo

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_n \end{bmatrix} \; ; \; [A_{xo}] = \begin{bmatrix} A_{1o} \\ A_{2o} \\ ... \\ A_{no} \end{bmatrix} \; ; \; [a_{xxu}] = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$[A_{xo}] + [a_{xxu}].[X] = 0 \qquad (7)$$

De donde

$$[X] = - [a_{xxu}]^{-1}.[A_{xo}] \qquad (8)$$

Por lo general, las matrices que corresponden al segundo miembro de esta última expresión, pueden ser formuladas de manera muy simple.

2.1. Convención de signos.

Al igual que en el método de las fuerzas, pueden fijarse para las incógnitas, al plantear el sistema de ecuaciones, sentidos

arbitrarios, los que obviamente deben ser mantenidos para un mismo desarrollo. Una vez hallados los valores de las incógnitas, aquéllas cuyo resultado haya sido positivo, corresponderán a las que el sentido supuesto para el desplazamiento era el correcto, y viceversa.

Sin embargo, a los efectos de sistematizar los criterios de cálculo y disminuir la posibilidad de errores, resulta aconsejable ajustarse a alguna convención preestablecida referente a los signos a adoptar. En virtud de ello, en lo sucesivo, y salvo que se indique expresamente lo contrario, se adoptarán las siguientes reglas de signos:

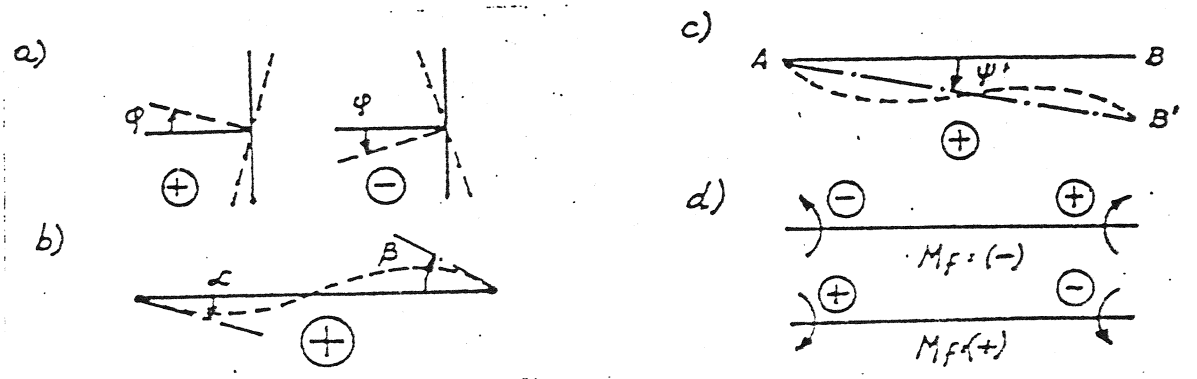


Figura 7

a) El ángulo de giro de los nudos es positivo si gira en sentido horario (figura 7a).

b) Los ángulos girados por las tangentes extremas a la elástica son positivos si de la posición no deformada a la deformada, giran en sentido horario (figura 7b).

c) Llamando *ángulo del eje de la barra*, o simplemente *ángulo de barra*, al ángulo girado por la directriz de la barra, se lo considerará positivo cuando la barra gira en sentido horario (figura 7c).

d) Para los corrimientos relativos y las fuerzas desarrolladas en sus direcciones, se mantendrá la convención de considerarlos positivos cuando su sentido coincida con el de los semiejes positivos del sistema ortogonal de referencia.

e) Los momentos, tanto para los activos como para los reactivos, se considerarán positivos cuando su sentido de giro sea el horario. Obsérvese que como consecuencia de ello, deberá analizarse en cada caso la relación existente entre el signo de los momentos de extremos de barra con el del momento flector que los mismos producen (figura 7d).

A los efectos de evitar dobles interpretaciones se seguirá el siguiente criterio de notación:

* En los desarrollos algebraicos se trabajará con signos positivos. El signo real queda implícito en la letra o símbolo utilizado.

* En los desarrollos numéricos se indicará el signo en forma taxativa. La omisión de su mención involucra signo positivo.

* En las figuras (o referencias aisladas a las mismas), el signo queda definido por el desplazamiento o la acción dibujados, por lo que no se lo antepondrá a la letra o magnitud correspondiente a los mismos.

Respecto a las figuras en que se indica una deformada genérica para las estructuras, debe tenerse siempre presente que la misma no refleja necesariamente la elástica real de tales estructuras, sino sólo una representación simplificada aproximativa de dicha elástica, con el único objeto de acotar las incógnitas sobre la figura, en la forma más clara posible.

2.2. Cálculo de los coeficientes y términos independientes.

Si bien los valores que corresponden a los coeficientes y a los términos independientes de las ecuaciones a plantear pueden ser calculados aplicando expresiones de trabajo (cuyo empleo resulta totalmente general y aplicable a cualquier tipo de estructuras de barras), suele ser más simple y cómodo determinar tales valores partiendo del análisis de las condiciones de equilibrio de cada barra que compone el sistema básico, pero teniendo presente que las expresiones así establecidas serán aplicables en forma directa sólo cuando se tengan estructuras constituidas por sistemas de barras paralelas y perpendiculares entre sí; por ejemplo, pórticos de vigas horizontales y columnas verticales. En tales casos (considerando despreciable la influencia del esfuerzo normal en la deformación), *los desplazamientos relativos de los extremos de todas las columnas serán idénticos y los de los extremos de las vigas horizontales iguales a cero.*

Por el contrario, si existieran barras oblicuas, al producirse un desplazamiento transversal en el extremo de las mismas y ser por hipótesis invariable su longitud, se generan desplazamientos transversales en las demás barras concurrentes al nudo, que sería necesario considerar.

2.2.1. Cálculo de los términos A_{i0}.

Tal cual surge del concepto general del método, los términos independientes A_{i0} corresponden a las reacciones que en la dirección de cada vínculo introducido produce el sistema exterior de cargas actuante sobre el sistema fijo. Teniendo en cuenta que en el mismo se inmovilizan todos los nudos, los elementos que lo constituyen se reducen a barras biempotradas o barras empotradas en un extremo y articuladas en el otro, por lo que se las puede considerar en forma individual.

Los momentos de empotramiento que en cualquiera de los dos casos se producen, para los estados de carga más usuales, pueden obtenerse directamente mediante tablas (por ejemplo, Tabla Nº 5 del Anexo del Capítulo II).

Si además debieran calcularse las reacciones de vínculo, por constituir una incógnita el desplazamiento lineal de un extremo de barra, su obtención, conocida la carga exterior y los momentos de empotramiento, es inmediata aplicando las ecuaciones de equilibrio estático.

2.2.2. Cálculo de los términos a_{ik}.

Sobre cada barra, individualmente considerada, a los efectos de calcular los coeficientes de las incógnitas (a_{ik}), deben provocarse desplazamientos unitarios (figuras 2d), que pueden ser:

a) rotaciones de extremo de barras con extremo opuesto empotrado, o eventualmente articulado,

b) desplazamientos lineales relativos entre ambos extremos, sin rotación de los mismos, o con rotación libre en uno de ellos, si el mismo corresponde a una articulación, o

c) como procedimiento alternativo al indicado en b), giros de las directrices de las barras, en iguales condiciones.

Todos los casos así conformados y las acciones que como consecuencia se generan, se analizarán en el apartado 2.2.3.

Dado que "a priori" son desconocidos los signos de las incógnitas, resulta conveniente, en la medida de lo posible, provocar giros o corrimientos unitarios positivos.

2.2.2.1. Coeficiente de rigidez k.

Al determinar en el Capítulo II las expresiones de los desplazamientos angulares producidos por diversos estados de solicitación, se observa que las mismas resultan en función del material, a través de E en el caso de la flexión, y de las dimensiones geométricas del elemento estructural mediante la relación entre el momento de inercia J de la sección transversal y la longitud l de la barra. A la relación entre ambos parámetros se la denomina *coeficiente de rigidez*, o simplemente *rigidez* de la barra, y se la representa por *k*, o sea que en general

$$k = J / l \qquad (9)$$

En el caso concreto de la resolución de estructuras hiperestáticas, la longitud de los elementos estructurales es obviamente conocida, mientras que las secciones transversales deben ser predimensionadas, con lo que se conoce también J. Así, previo a iniciar el análisis puede determinarse para cada barra el valor de k e introducirlo directamente en las expresiones de cálculo. La unidad de k es longitud al cubo.

A pesar de la denominación simplificada de "rigidez", debe tenerse siempre presente que se trata únicamente de un coeficiente numérico, introducido sólo para mayor sencillez en la forma final y la escritura de las expresiones de aplicación, al reducir términos. Por ello no debe ser confundido con las rigideces de las barras a distintos tipos de solicitación, conceptos que se analizarán en los Capítulos VI y VII.

2.2.3. Casos generales.

** CASO 1: *Giro unitario en el extremo de una barra con extremo opuesto empotrado.*

Sea el caso de la barra AB de la figura 8a), supuesta como una barra genérica del sistema fijo, obtenida al inmovilizar sus nudos extremos. Para individualizar las reacciones se adoptará la nomenclatura indicada en la figura 8b).

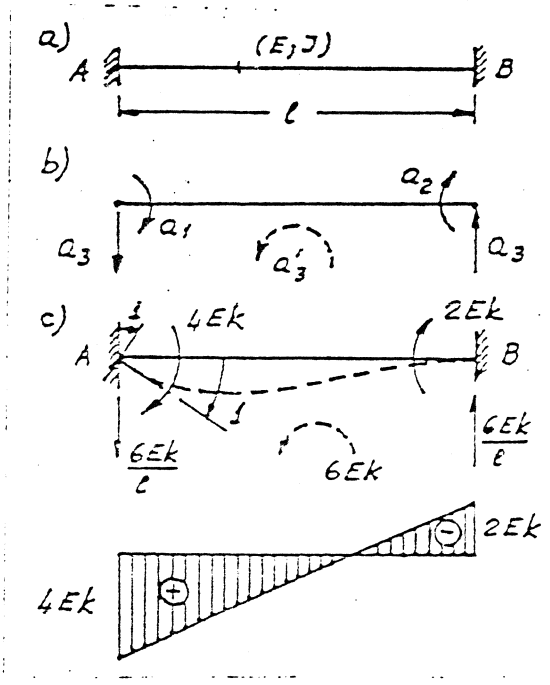


Figura 8

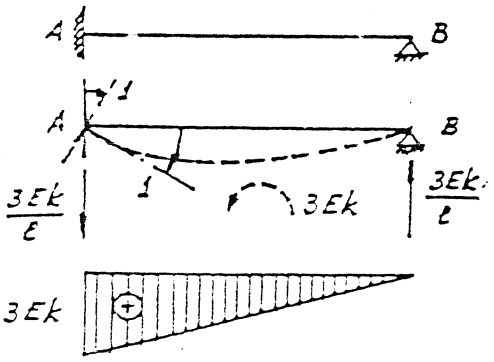


Figura 9

Produciendo un giro unitario positivo en el extremo A y manteniendo fijo el extremo B (dado que las incógnitas con sus valores unitarios se hacen actuar en forma independiente), el diagrama de momentos flectores y las reacciones de vínculo serán las que se indican en la figura 8c), cuyos valores surgen de:

* El momento en A puede despejarse haciendo $\theta_A = 1$ en la expresión (124) del Capítulo II, en la cual también para este caso es $M = a_1$

$$\theta_A = \frac{a_1 . l}{4\ E.J} = \frac{a_1}{4\ E.k} = 1 \qquad \text{de donde:} \qquad a_1 = 4\ E.k$$

* Para el momento en B, y teniendo en cuenta que el mismo resulta igual a la mitad del momento en A, según la (122) del Capítulo II

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 2\ E.k$$

* En función de los valores de los momentos actuantes en ambos extremos de la barra, las reacciones de vínculo se calculan directamente mediante consideraciones estáticas. Tomando momentos con respecto a B, por ejemplo

$$-a_3.l + 4\ E.k + 2\ E.k = 0 \qquad \text{luego:} \qquad a_3 = \frac{6\ E.k}{l}\ (-)$$

siendo válidos los sentidos indicados en la figura 8c).

En algunos casos, por las razones que se expondrán oportunamente, suele considerarse como incógnita de desplazamiento el ángulo girado por el eje de la barra en su deformación, en lugar del corrimiento relativo entre sus extremos. En tal caso, la reacción en tal dirección (a_3') será igual al momento del par de las fuerzas reactivas, o sea

$$a_3' = a_3.l = -\frac{6\ E.k}{l}.l = -6\ E.k$$

** CASO 2: *Giro unitario en el extremo de una barra con extremo opuesto articulado.*

En este caso (figuras 8b), que es general para todos los casos, y 9), la rotación en A será, por la primera de las (119) del Capítulo II

$$\theta_A = \frac{a_1.l}{3\ E.J} = \frac{a_1}{3\ E.k} = 1 \qquad \text{luego} \qquad a_1 = 3\ E.k$$

Además

$$a_2 = 0$$

y

$$-a_3.l + 3\ E.k = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{3\ E.k}{l}\ (-)$$

$$a_3' = a_3.l = -\frac{3\ E.k}{l}.l = -3\ E.k$$

** CASO 3: *Desplazamiento lineal relativo unitario en el extremo de una barra con extremo opuesto empotrado.*

De la figura 10 y la expresión (134) del Capítulo II, siendo en este caso $\Delta = 1$

$$a_1 = a_2 = -\frac{6\,E.J.\Delta}{l^2} = -\frac{6\,E.k}{l}$$

$$a_3.1 - \frac{6\,E.k}{l} - \frac{6\,E.k}{l} = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{12\,E.k}{l^2}$$

$$a_3' = a_3.1 = \frac{12\,E.k}{l^2}.1 = \frac{12\,E.k}{l}$$

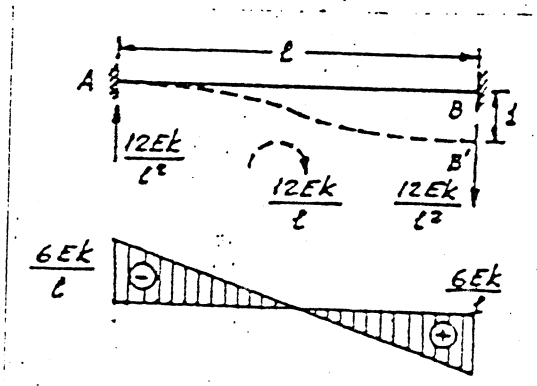


Figura 10

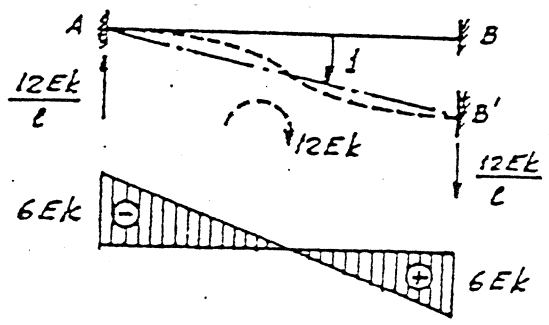


Figura 11

** CASO 3': *Desplazamiento angular unitario de la directriz de la barra con extremo opuesto empotrado.*

De la figura 11 y la (135) del Capítulo II, siendo $\theta = 1$

$$a_1 = a_2 = -\frac{6\,E.J.\theta}{l} = -6\,E.k$$

$$a_3.1 - 6\,E.k - 6\,E.k = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{12\,E.k}{l}$$

$$a_3' = a_3.1 = \frac{12\,E.k}{l}.1 = 12\,E.k$$

** CASO 4: *Desplazamiento lineal relativo unitario en el extremo de una barra con extremo opuesto articulado.*

De la figura 12 y la (132) del Capítulo II, siendo $\Delta = 1$

$$a_1 = -\frac{3\,E.J.\Delta}{l^2} = -\frac{3\,E.k}{l} \quad ; \quad a_2 = 0$$

$$a_3.1 - \frac{3\,E.k}{l} = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{3\,E.k}{l^2}$$

$$a_3' = a_3.1 = \frac{3\,E.k}{1^2}.1 = \frac{3\,E.k}{1}$$

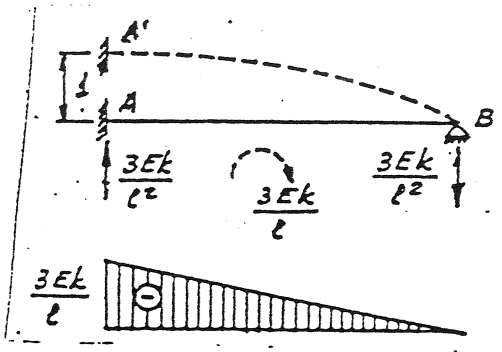


Figura 12

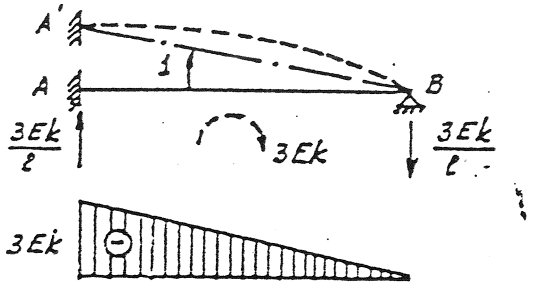


Figura 13

** CASO 4': *Desplazamiento angular unitario de la directriz de la barra con extremo opuesto articulado.*

De la figura 13 y la (133) del Capítulo II, siendo $\theta = 1$

$$a_1 = -\frac{3\,E.J.\theta}{1} = -\,3\,E.k \quad ; \quad a_2 = 0$$

$$a_3.1 - 3\,E.k = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{3\,E.k}{1}$$

$$a_3' = a_3.1 = \frac{3\,E.k}{1}.1 = 3\,E.k$$

2.2.3.1. Empleo de la simetría.

El empleo de la simetría en el método de los desplazamientos se basa en las mismas consideraciones que las efectuadas para el método de las fuerzas.

Si la estructura presenta un eje que sea de simetría, tanto de su configuración geométrica como de las cargas exteriores actuantes (figura 14a), las deformaciones que aquélla experimenta

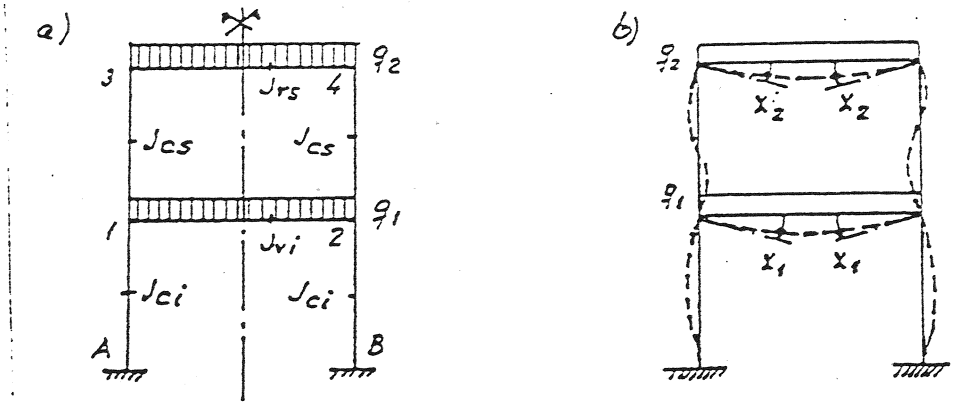


Figura 14

resultarán también simétricas respecto a dicho eje, y en consecuencia, serán iguales en valor absoluto y de signo contrario, de acuerdo a la convención establecida, todos los desplazamientos simétricos (figura 14b). Esta circunstancia posibilita considerar a cada par de incógnitas simétricas como una sola, reduciendo así su número, y por ende, el de ecuaciones a plantear. Además, de la simetría de la deformación, por una parte, y la hipótesis asumida de que la longitud de las barras no se modifica al deformarse las mismas, resulta que deben ser nulos los desplazamientos horizontales de los nudos, los que en consecuencia sólo rotan sobre su posición primitiva, sin trasladarse.

En el caso que la estructura sea geométricamente simétrica respecto a un eje determinado y que las cargas exteriores actuantes sean antisimétricas respecto al mismo, tal como el caso mostrado en la figura 15b), correspondiente al estado de cargas de la figura 15a) y válido cuando las acciones horizontales son másicas (como en el caso de las fuerzas debidas a sismo), las deformaciones que se producirán serán también antisimétricas respecto al eje de simetría, es decir que todos los nudos ubicados simétricamente entre sí, experimentarán desplazamientos iguales tanto en valor como en signo (figura 15c), por lo que también en este caso puede adoptarse una sola incógnita por cada par de desplazamientos angulares desconocidos que se hallen en esta situación.

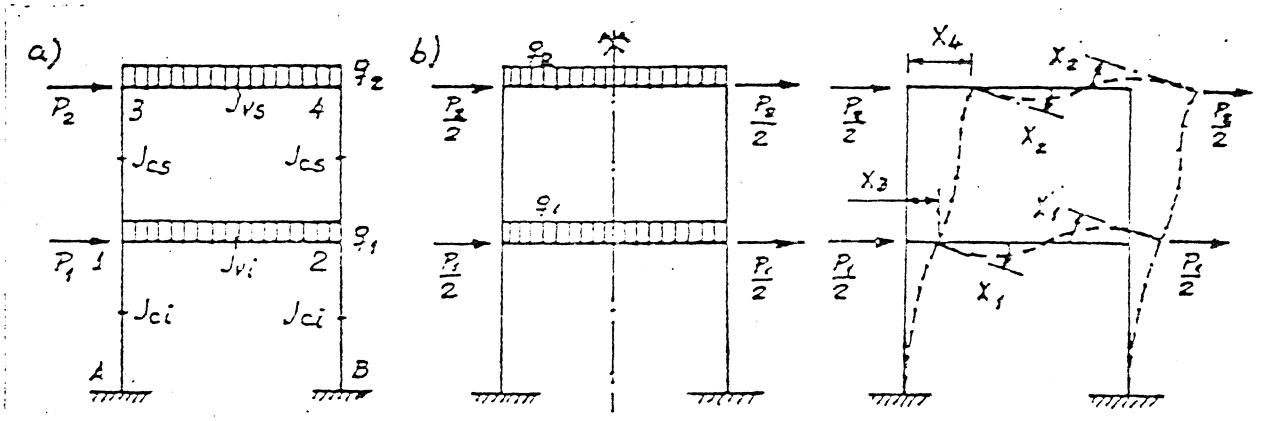


Figura 15

Así por ejemplo, para el caso concreto del pórtico analizado, si no existen condiciones de simetría (o antisimetría) de cargas y/o de configuración geométrica de la estructura, la resolución general del mismo debe encararse planteando un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que son las indicadas en la figura 6c). En cambio si la estructura fuese geométricamente simétrica con cargas también simétricas (figura 14), las ecuaciones a plantear serían sólo 2, mientras que si, a igualdad de condiciones estructurales, las cargas fuesen antisimétricas (figura 15), se requeriría el planteo de 4 ecuaciones.

Del análisis de la estructura se desprende asimismo que las reacciones simétricas debidas a los desplazamientos y a las cargas antisimétricas y las reacciones antisimétricas debidas a los

desplazamientos y a las cargas simétricas son iguales a cero. Por ello, del mismo modo que en el método de las fuerzas, las ecuaciones canónicas se descomponen, en estas condiciones, en dos sistemas independientes: uno que poseerá sólo incógnitas simétricas y el otro antisimétricas.

Las reacciones a_{ik} a considerar en estos casos son las que se originan al producir simultáneamente desplazamientos unitarios en cada par de incógnitas simétricas o antisimétricas, lo que para la barra elemental origina los casos que se analizarán como 5 y 6, respectivamente.

** CASO 5: *Giro unitario en los extremos de una barra biempotrada con deformación simétrica.*

De la figura 16 y la (120) del Capítulo II, para $\theta_A = 1$

$$\theta_A = \frac{a.l}{2\,E.J} = \frac{a}{2\,E.k} = 1 \quad \text{luego:} \quad a_1 = 2\,E.k \;\; ; \;\; a_2 = -2\,E.k$$

Al constituir a_1 y a_2 un sistema equilibrado será $a_3 = a_3' = 0$.

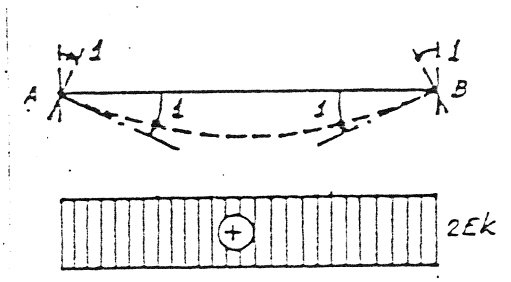


Figura 16

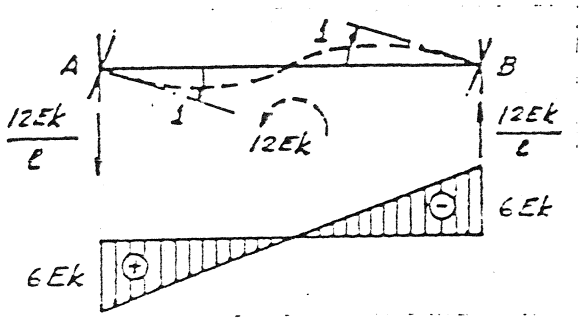


Figura 17

** CASO 6: *Giro unitario en los extremos de una barra biempotrada con deformación antisimétrica.*

De la figura 17 y la (121) del Capítulo II, siendo $\theta_A = 1$

$$\theta_A = \frac{a.l}{6\,E.J} = \frac{a}{6\,E.k} = 1 \quad \text{luego:} \quad a_1 = a_2 = 6\,E.k$$

$$-a_3.l + 6\,E.k + 6\,E.k = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{12\,E.k}{l}\;(-)$$

$$a_3' = a_3.l = -\frac{12\,E.k}{l}.l = -\,12\,E.k$$

2.2.3.2. Influencia del esfuerzo normal.

** CASO 7: *Barra solicitada por esfuerzos axiles.*

Si en la barra genérica AB se considera como única deformación la debida a un desplazamiento lineal unitario en la dirección axil (figura 18), de la (10) del Capítulo II se tendrá, para $\Delta 1 = 1$

$$\Delta 1 = \frac{a_4 . 1}{E.F} = 1 \quad ; \quad a_4 = \frac{E.F}{1}$$

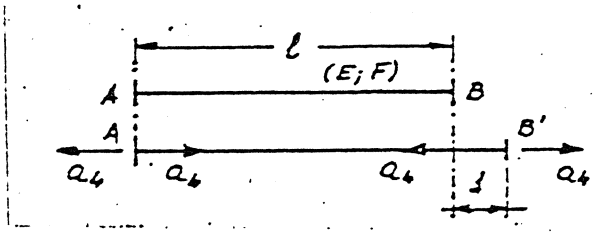


Figura 18

2.2.3.3. Influencia del momento torsor.

** CASO 8: *Barra solicitada por momento torsor.*

Para un desplazamiento angular relativo entre las secciones extremas $\varphi = 1$, de la (24) del Capítulo II

$$\varphi = \frac{a_5 . 1}{G.J_T} = \frac{a_5 . 1 . E.J}{G.J_T . E.J} = \frac{a_5 . \tau}{E.k} = 1 \quad ; \quad a_5 = \frac{E.k}{\tau}$$

haciendo

$$\tau = \frac{E.J}{G.J_T}$$

2.2.3.4. Influencia del esfuerzo de corte.

** CASO 9: *Giro unitario en el extremo de una barra biempotrada.*

Considérese primeramente la barra articulada en sus extremos de la figura 19a), sobre la que actúa un momento M en su extremo A, como consecuencia del cual se producen las rotaciones θ_A y θ_B cuyas expresiones, considerando la influencia del esfuerzo de corte, resultan, aplicando el Teorema de los Trabajos Virtuales con los sistemas auxiliares que se indican en las figuras 19b) y 19c)

$$\theta_A = \frac{M.1}{3\,E.J} + \psi \frac{M}{1} . \frac{1}{1} . \frac{1}{G.F} = \frac{M.1}{3\,E.J} . \left(1 + \psi \frac{3\,E.J}{1^2 . G.F}\right) \qquad (10)$$

$$\theta_B = \frac{M.1}{6\,E.J} - \psi \frac{M}{1} . \frac{1}{1} . \frac{1}{G.F} = \frac{M.1}{6\,E.J} . \left(1 - \psi \frac{6\,E.J}{1^2 . G.F}\right) \quad (-) \quad (11)$$

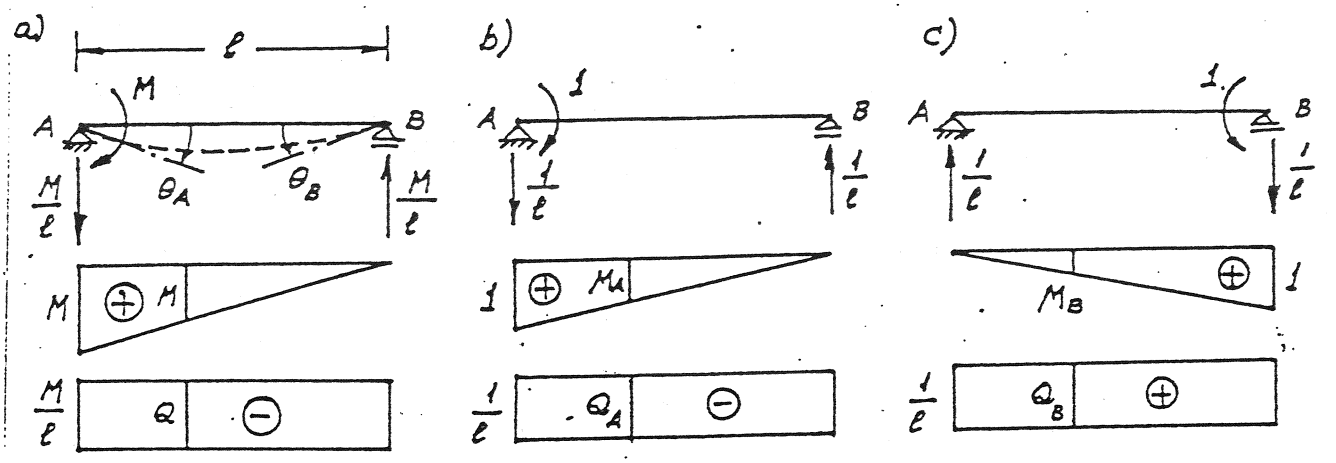


Figura 19

Concretando el análisis para estructuras de hormigón armado y elementos en los que sea significativa la incidencia del esfuerzo de corte, caso de secciones transversales rectangulares, se tiene

$$\psi = 1{,}2 \quad ; \quad F = b.d \quad ; \quad J = b.d^3/12 \quad ; \quad G = 0{,}4\ E$$

Para estos valores el último término del paréntesis de la (10) se reduce a

$$\psi \frac{3\ E.J}{l^2.G.F} = 1{,}2 \frac{3\ E.b.d^3}{l^2\ 0{,}4\ E.b.d\ 12} = \frac{3}{4}.\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \lambda \qquad (12)$$

y reemplazando en las expresiones (10) y (11)

$$\theta_A = \frac{M.l}{3\ E.J}.(1+\lambda) \quad ; \quad \theta_B = -\frac{M.l}{6\ E.J}.(1-2\lambda) \qquad (13)$$

Si se supone ahora la barra biempotrada y se provoca un giro unitario en el extremo A, permaneciendo fijo el extremo opuesto B (figura 20a), los momentos reactivos resultarán de considerar (figura 20b)

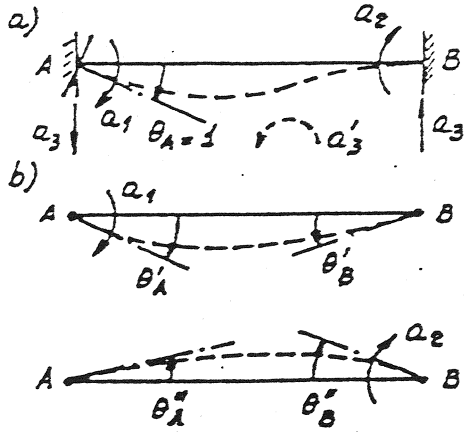


Figura 20

$$\theta_B = \theta_B' + \theta_B'' = -\frac{a_1.l}{6\,E.J}.(1 - 2\lambda) + \frac{a_2.l}{3\,E.J}.(1 + \lambda) = 0$$

$$\frac{a_1}{2}.(1 - 2\lambda) = a_2.(1 + \lambda) \quad ; \quad a_2 = \frac{a_1}{2}.\frac{(1 - 2\lambda)}{(1 + \lambda)} \qquad (14)$$

Realizando igual razonamiento en el extremo A

$$\theta_A = \theta_A' + \theta_A'' = \frac{a_1.l}{3\,E.J}.(1 + \lambda) + \frac{a_2.l}{6\,E.J}.(1 - 2\lambda) = 1$$

y reemplazando el valor de a_2 dado por la (14)

$$\frac{a_1 l}{3EJ}.(1 + \lambda) - \frac{a_1.(1 - 2\lambda)^2.l}{12.(1 + \lambda).EJ} = \frac{a_1 l}{12\,EJ}.\left[\frac{4(1+\lambda)^2 - (1 - 2\lambda)^2}{(1 + \lambda)}\right] =$$

$$= \frac{a_1.l}{12EJ}.\left[\frac{4 + 8\lambda + 4\lambda^2 - 1 + 4\lambda - 4\lambda^2}{1 + \lambda}\right] = \frac{a_1.l}{12EJ}.\frac{(3 + 12\lambda)}{(1 + \lambda)} =$$

$$= \frac{a_1}{4Ek}.\frac{(1 + 4\lambda)}{(1 + \lambda)} = 1 \quad ; \quad a_1 = 4\,E.k.\frac{(1 + \lambda)}{(1 + 4\lambda)} \qquad (15)$$

Llevando este valor a la (14)

$$a_2 = \frac{4\,E.k}{2}.\frac{(1 + \lambda).(1 - 2\lambda)}{(1 + 4\lambda).(1 + \lambda)} = 2\,E.k.\frac{(1 - 2\lambda)}{(1 + 4\lambda)} \qquad (16)$$

Las reacciones a_3 valdrán (figura 20a)

$$-a_3.l + a_1 + a_2 = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{a_1 + a_2}{l}$$

y teniendo en cuenta los valores obtenidos en las (15) y (16)

$$a_3 = \frac{4\,E.k}{l}.\frac{(1 + \lambda)}{(1 + 4\lambda)} + \frac{2\,E.k}{l}.\frac{(1 - 2\lambda)}{(1 + 4\lambda)} =$$

$$= \frac{2\,E.k}{l.(1 + 4\lambda)}.(2 + 2\lambda + 1 - 2\lambda) = \frac{6\,E.k}{l.(1 + 4\lambda)} \quad (-) \qquad (17)$$

$$a_3' = a_3.l = -\frac{6\,E.k.l}{l.(1 + 4\lambda)} = -\frac{6\,E.k}{(1 + 4\lambda)} \qquad (18)$$

Observando las expresiones obtenidas [(15) a (18)], resulta que todas ellas tienen el término $(1 + 4\lambda)$ como denominador, por lo que introduciendo una rigidez ficticia k´, calculable con los datos disponibles

$$k' = \frac{k}{(1 + 4\lambda)} \qquad (19)$$

las expresiones de aplicación se reducen a

$$a_1 = 4\,E.k'.(1 + \lambda) \quad ; \quad a_2 = 2\,E.k'.(1 - 2\lambda) \qquad (20)$$

$$a_3 = -\frac{6\,E.k'}{l} \quad ; \quad a_4 = -\,6\,E.k' \qquad (21)$$

** CASO 10: *Desplazamiento lineal relativo unitario en el extremo de una barra biempotrada.*

Efectuando la descomposición en los estados que corresponden a los desplazamientos que provoca cada acción independientemente considerada (figura 21)

$$\frac{1}{l} - \frac{a_1.l}{3\,E.J}.(1 + \lambda) + \frac{a_2.l}{6\,E.J}.(1 - 2\lambda) = 0 \qquad (22)$$

y dado que $a_1 = a_2$

$$1 = \frac{a_1 l}{3Ek}.(1 + \lambda) - \frac{a_1 l}{6Ek}.(1 - 2\lambda) = \frac{a_1 l}{6Ek}.(2 + 2\lambda - 1 + 2\lambda) =$$

$$= \frac{a_1 l}{6Ek}.(1 + 4\lambda) \quad ; \quad a_1 = a_2 = \frac{6\,E.k}{l.(1 + 4\lambda)} = \frac{6\,E.k'}{l} \;(-) \qquad (23)$$

Las reacciones valdrán

$$a_3.l - \frac{6\,E.k'}{l} - \frac{6\,E.k'}{l} = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{12\,E.k'}{l^2}$$

$$a_3' = a_3.l = \frac{12\,E.k'}{l^2}.l = \frac{12\,E.k'}{l^2}$$

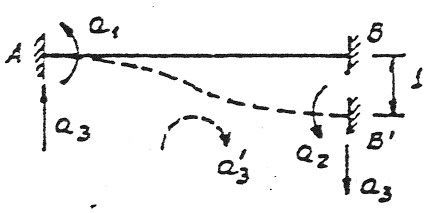


Figura 21

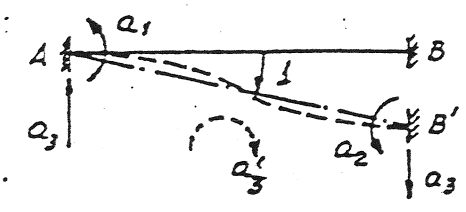


Figura 22

** CASO 10´: *Desplazamiento angular unitario de la directriz de una barra biempotrada.*

En este caso la (22) se transforma en (figura 22)

$$1 - \frac{a_1.l}{3\,E.J}.(1+\lambda) + \frac{a_2.l}{6\,E.J}.(1-2\lambda) = 0$$

$$a_1 = a_2 = \frac{6\,E.k}{(1+4\lambda)} = 6\,E.k' \quad (-)$$

Además

$$a_3 = \frac{12\,E.k'}{l} \qquad ; \qquad a_3' = 12\,E.k'$$

Cabe destacar que no resulta de aplicación práctica el caso de una barra en la que tenga influencia la consideración del esfuerzo de corte y cuyo extremo opuesto se encuentre articulado, debido a la sección transversal apreciable que deben tener las barras para que sea necesario considerar el referido efecto.

La Tabla Nº 1 del Anexo del presente Capítulo resume todos los valores obtenidos.

3. CALCULO DE LAS SOLICITACIONES.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones canónicas y calculadas las incógnitas X_1, X_2, ... X_n, los valores de los momentos flectores en los extremos de cada barra pueden obtenerse mediante el principio de superposición de efectos, o sea que, por ejemplo, para el extremo K de la barra KL, será

$$M_{KL} = M_{KL_0} + m_{KL1}.X_1 + m_{KL2}.X_2 + \ldots + m_{KLn}.X_n \qquad (24)$$

en donde

* M_{KL_0} es el momento flector en el extremo de la barra considerada, en el sistema fijo, debido a la carga exterior, y

* m_{KL1}; m_{KL2}; ... m_{KLn} son los momentos flectores en el mismo extremo debidos respectivamente a los desplazamientos $X_1 = 1$; $X_2 = 1$; ... $X_n = 1$ en el sistema básico.

Obtenidos de esta manera los valores de los momentos en todos los extremos de barra, puede, con la consideración conjunta del sistema exterior de cargas, trazarse fácilmente el diagrama correspondiente.

En forma análoga pueden calcularse las restantes solicitaciones internas. Para el caso de los esfuerzos de corte Q y los normales N, con igual concepto que el aplicado para formular la expresión (24) resultará

$$Q_{KL} = Q_{KLo} + q_{KL1}.X_1 + q_{KL2}.X_2 + \ldots + q_{KLn}.X_n \qquad (25)$$

$$N_{KL} = N_{KLo} + n_{KL1}.X_1 + n_{KL2}.X_2 + \ldots + n_{KLn}.X_n \qquad (26)$$

Las expresiones (24) y (25) son aplicables a todos los extremos de barra y la (26) a todas las barras que presente la estructura, supuestas en ellas diagramas de N de configuración rectangular.

Para la determinación de las reacciones de vínculo

$$R_K = R_{Ko} + r_{K1}.X_1 + r_{K2}.X_2 + \ldots + r_{Kn}.X_n \qquad (27)$$

Las (24) a (27) pueden expresarse también en forma matricial, siguiendo la nomenclatura anterior y designando por "e" a los extremos de barras y por "b" a las barras

$$[M_e] = [M_{eo}] + [m_{exu}].[X] \qquad (28)$$

$$[Q_e] = [Q_{eo}] + [q_{exu}].[X] \qquad (29)$$

$$[N_b] = [N_{bo}] + [n_{bxu}].[X] \qquad (30)$$

$$[R_K] = [R_{Ko}] + [r_{Kxu}].[X] \qquad (31)$$

Por las características de la metodología expuesta, al dibujar las elásticas de los distintos estados de deformación, es conveniente anotar, en cada diagrama estructural, todas las acciones reactivas correspondientes a las solicitaciones a determinar, que se producen en la totalidad de las direcciones respectivas (extremos de barras, vínculos, etc.), a los efectos de evitar omisiones al calcular los valores definitivos de aquéllas.

4. APLICACION A LA DETERMINACION DE DESPLAZAMIENTOS.

Por su esencia (cálculo de desplazamientos), el método puede ser empleado para el cálculo de los desplazamientos lineales y/o angulares que experimente cualquier punto o sección de una estructura dada, tanto isostática como hiperestática. En ambos casos, y teniendo en cuenta los fundamentos y la forma de aplicación del método, los pasos a seguir son idénticos.

* En primer lugar se forma el sistema básico o sistema fijo, que se obtiene impidiendo los desplazamientos en la dirección de cada una de las incógnitas (desplazamientos que se desean calcular), introduciendo para ello los vínculos de fijación apropiados (empotramientos en el caso de giros y apoyos simples en el caso de corrimientos). Aplicando sobre el sistema así constituido las cargas exteriores actuantes, se proceden a calcular las reacciones que aquéllas provocan en la dirección de cada incógnita (A_{Ko}).

* Paso seguido se retira el sistema exterior de cargas, y se provocan, en forma independiente y sucesiva, desplazamientos

unitarios (preferentemente positivos) en la dirección de cada una de las incógnitas a calcular, determinando en cada caso las reacciones que en esas condiciones se producen en la dirección de cada una de ellas (a_{Ki}). Con las reacciones así obtenidas, se plantea el sistema general de ecuaciones (5), de cuya resolución surgirán los valores de los desplazamientos buscados.

5. RESOLUCION DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS.

La aplicación del método de los desplazamientos a la resolución de estructuras hiperestáticas, se desarrolla según los lineamientos precedentemente expuestos, de acuerdo a los siguientes pasos:

1º) Individualización de las incógnitas elásticas (desplazamientos angulares y lineales).

2º) Constitución del sistema básico (o sistema fijo).

3º) Cálculo de los términos independientes A_{Ko}.

4º) Cálculo de los coeficientes de las incógnitas a_{Ki}.

5º) Planteo y resolución del sistema de ecuaciones canónicas.

6º) Cálculo de los valores de las solicitaciones internas, y de interesar, de las reacciones de vínculo.

6. RESOLUCION DE VIGAS CONTINUAS.

En el caso de vigas continuas sobre apoyos inamovibles, sólo se presentarán como incógnitas rotaciones de nudos, siendo el grado de indeterminación cinemática igual a la cantidad de apoyos intermedios que posea la viga, valor que no se modifica en este método aunque la viga tenga uno o sus dos extremos empotrados. El sistema fijo, en consecuencia, quedará constituido al producir la fijación de la totalidad de los nudos intermedios.

Al determinar las acciones reactivas, si únicamente se desean calcular los momentos hiperestáticos, se deberán tomar en consideración sólo los momentos de extremos de barra; en cambio, si se requiere asimismo obtener los diagramas de esfuerzos de corte y/o las reacciones de vínculo, deberán escribirse también las fuerzas reactivas correspondientes.

Considérese, a nivel de ejemplo representativo de la aplicación del método, la viga continua de la figura 23a).

En casos como el consignado, en que la estructura presenta extremos en voladizo, se los reemplaza por el momento (conocido) que el mismo produce en el apoyo respectivo ($P_2.a$ en este caso, figura 23b).

Conocidas las longitudes l_i y estimadas (por predimensionado) las secciones transversales de cada tramo (J_i), se calculan los coeficientes de rigidez correspondientes a cada tramo de la viga, a los que es conveniente expresar en función de una rigidez k_o de comparación

$$k_1 = J_1/l_1 = c_1.k_o \quad ; \quad k_2 = J_2/l_2 = c_2.k_o \quad ; \quad k_3 = J_3/l_3 = c_3.k_o$$

Si la viga fuese de sección constante no se requiere predimensionado y se adopta para J un valor arbitrario cualquiera, al interesar para el cálculo sólo las rigideces relativas entre los distintos tramos de viga.

Analizando el grado de indeterminación cinemática de la estructura se observa que es de 2, siendo las incógnitas las rotaciones de las secciones 1 y 2 (figura 23c). Ambas incógnitas se supondrán "a priori" con sentido positivo.

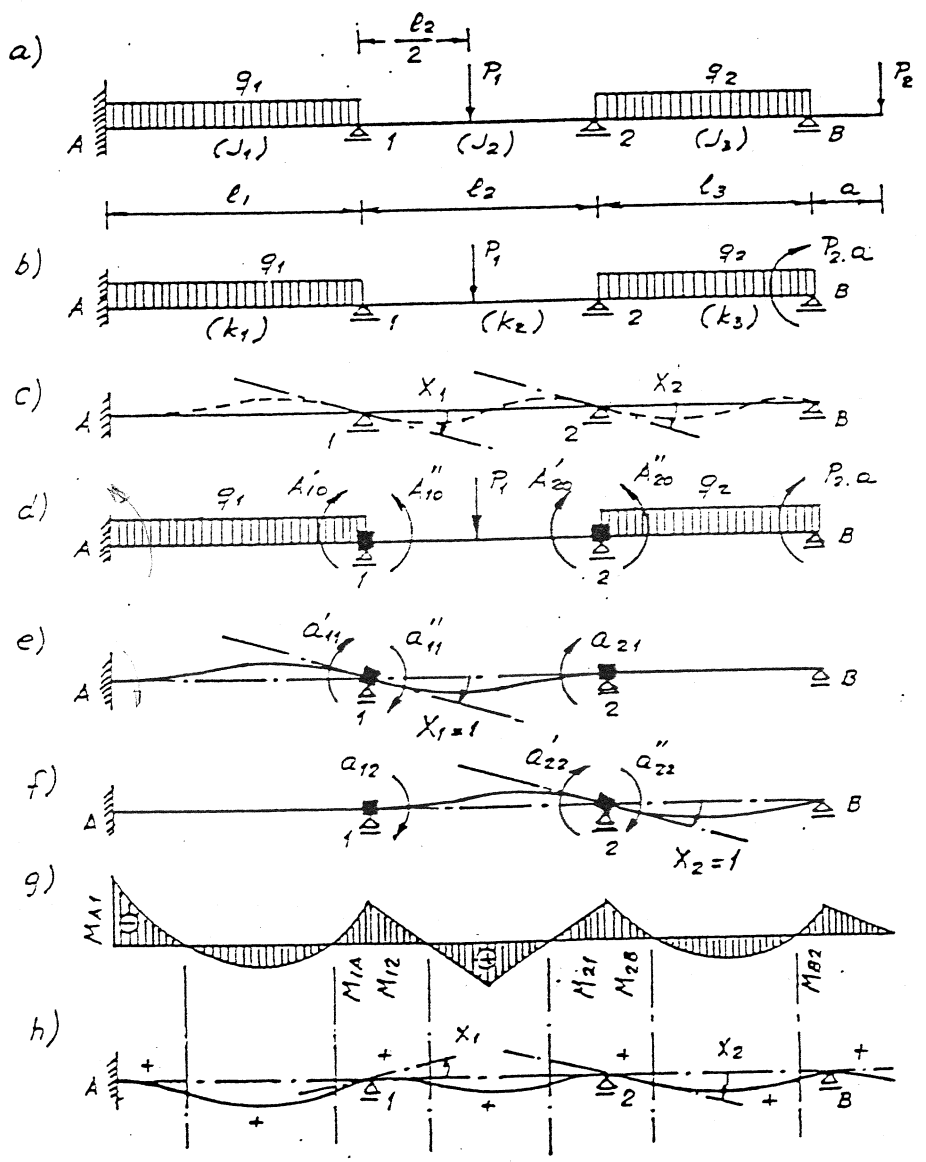


Figura 23

Para formular el vector $[A_{xo}]$ se conforma el sistema fijo, impidiendo las rotaciones en la dirección de las incógnitas y determinando los momentos reactivos que ante tal situación produce el sistema exterior de cargas (figura 23d). En este caso son de aplicación, respectivamente, los valores dados por las (127), (130), (126) y (122) del Capítulo II. En general puede emplearse al efecto la Tabla Nº 5 incluida en el Anexo de dicho Capítulo.

$$A'_{1o} = \frac{q_1.l_1^2}{12} \quad ; \quad A''_{1o} = -\frac{P_1.l_2}{8} \quad ; \quad A_{1o} = A'_{1o} + A''_{1o}$$

$$A'_{2o} = \frac{P_1.l_2}{8} \quad ; \quad A''_{2o} = -\frac{q_2.l_3^2}{8} + \frac{P_2.a}{2} \quad ; \quad A_{2o} = A'_{2o} + A''_{2o}$$

Para expresar la matriz $[a_{xxu}]$ se provocan giros unitarios en la dirección de cada incógnita, considerada cada una con sentido positivo, generando los sucesivos estados de deformación $X_1 = 1$; $X_2 = 0$ y $X_1 = 0$; $X_2 = 1$ (figuras 23e) y f).

$$a'_{11} = 4\,E.k_1 \quad ; \quad a''_{11} = 4\,E.k_2 \quad ; \quad a_{11} = 4\,E.k_1 + 4\,E.k_2$$

$$a_{21} = a_{12} = 2\,E.k_2$$

$$a'_{22} = 4\,E.k_2 \quad ; \quad a''_{22} = 3\,E.k_3 \quad ; \quad a_{22} = 4\,E.k_2 + 3\,E.k_3$$

Para hallar el valor de las incógnitas puede formularse el sistema de ecuaciones

$$(4Ek_1 + 4Ek_2).X_1 + 2Ek_2.X_2 = -q_1.l_1^2/12 + P_1.l_2/8$$
$$2Ek_2.X_1 + (4Ek_2 + 3Ek_3).X_2 = -P_1.l_2/8 + q_2.l_3^2/8 - P_2.a/2$$

O bien aplicando la (8) con

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} A_{1o} \\ A_{2o} \end{bmatrix} \quad ; \quad [a_{xxu}] = \begin{bmatrix} (4Ek_1 + 4Ek_2) & 2Ek_2 \\ 2Ek_2 & (4Ek_2 + 3Ek_3) \end{bmatrix}$$

A los efectos de facilitar la visualización de los valores de A_{ko} y a_{ki}, resulta aconsejable escribir los mismos directamente en las figuras respectivas, tal como se indica en la figura 24, que se corresponde respectivamente con las figuras 23d), e) y f), temperamento que se adoptará en lo sucesivo.

Los momentos finales de extremo de barra resultan, aplicando la (24)

$$M_{A1} = -q_1.l_1^2/12 + 2Ek_1.X_1$$
$$M_{1A} = q_1.l_1^2/12 + 4Ek_1.X_1$$
$$M_{12} = -P_1.l_2/8 + 4Ek_2.X_1 + 2Ek_2.X_2$$
$$M_{21} = P_1.l_2/8 + 2Ek_2.X_1 + 4Ek_2.X_2$$
$$M_{2B} = -q_2.l_3^2/8 + P_2.a/2 + 3Ek_3.X_2$$
$$M_{B2} = P_2.a$$

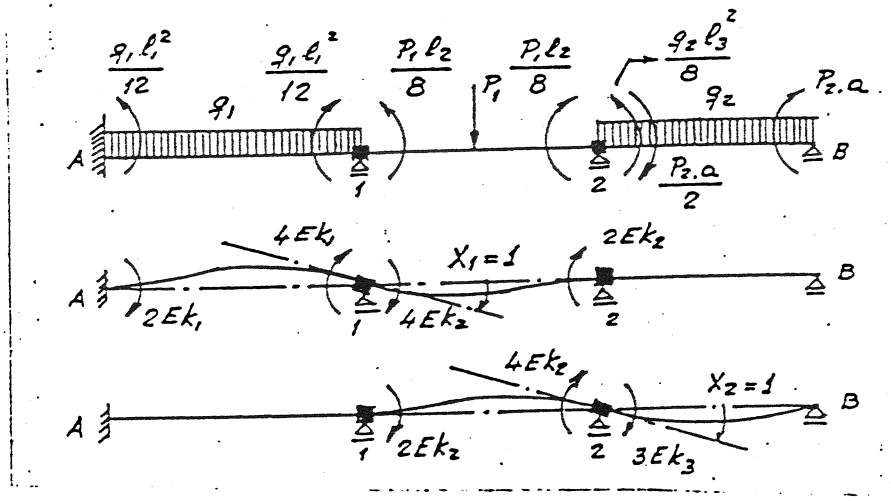


Figura 24

Para el mismo fin puede aplicarse también la (28):

$$[M_o] = \begin{bmatrix} -q_1.l_1^2/12 \\ q_1.l_1^2/12 \\ -P_1.l_2/8 \\ P_1.l_2/8 \\ -q_2.l_3^2/8 + P_2.a/2 \\ P_2.a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2Ek_1 & 0 \\ 4Ek_1 & 0 \\ 4Ek_2 & 2Ek_2 \\ 2Ek_2 & 4Ek_2 \\ 0 & 3Ek_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

La figura 23g) muestra en forma tentativa el diagrama de momentos resultante.

Cabe observar que al plantear el sistema de ecuaciones o la formulación matricial, los valores de k_1, k_2 y k_3, según lo precedentemente consignado, quedarán expresados en función de k_o. En consecuencia, como tal parámetro no figura en los términos independientes, los valores que se obtengan para las incógnitas X_1 se hallarán todos afectados por el factor $1/Ek_o$. Al calcular luego los valores de los momentos de los extremos de barras, tal factor se simplificará con el Ek_o que contiene cada término de la $[M_{extr}]$, quedando todos los sumandos en unidades de momentos.

Lo anterior permite extraer dos importantes conclusiones:

a) no es necesario considerar en el cálculo el valor de E del material constitutivo de la viga, y
b) no se requiere calcular la rigidez real de cada barra, sino que es suficiente con establecer la *rigidez relativa* entre las distintas barras, ya sea en forma directa o a través de las relaciones entre los valores de J_1.

6.1. Trazado de la elástica de deformación.

El método de los desplazamientos resulta de suma utilidad para efectuar el trazado (exacto o indicativo) de la elástica de deformación de la estructura. Para ello deben emplearse los valores y signos obtenidos para las incógnitas elásticas X_1 y el diagrama de momentos dibujado.

Si por ejemplo se considera la viga continua estudiada y se supone que resultó X_1 negativo y X_2 positivo, se trazan las direcciones respectivas, respetando aproximadamente la relación entre sus valores (figura 23h), las que definirán las tangentes a la elástica de deformación en correspondencia con los apoyos intermedios 1 y 2. Si existen empotramientos, se conoce también para ellos la tangente a la elástica, al ser $\theta = 0$.

A su vez, los puntos de inflexión de la elástica, correspondientes a aquellos en los que en la misma las fibras traccionadas pasan de ser las inferiores a ser las superiores y viceversa, se hallarán ubicados sobre las verticales bajadas por cada uno de los puntos de momento nulo que presente el diagrama, cuyos signos, a su vez, permiten definir los tramos en los cuales las fibras traccionadas son las inferiores (M positivo) o las superiores (M negativo). Debe tenerse presente que momento nulo no significa corrimiento nulo, por lo que estos puntos no pertenecerán (salvo coincidencia particular) al eje de la viga.

La consideración simultánea de las tangentes y las verticales donde deben hallarse todos los puntos de inflexión, permite concretar el trazado de la elástica y visualizar su forma, tal como se observa en la referida figura 23h), en la que con los signos (+) se ha consignado para cada tramo el borde (superior o inferior) donde se ubican las fibras traccionadas.

6.2. Vigas continuas acarteladas.

Se denominan cartelas a los aumentos graduales de sección que en sus extremos pueden presentar las vigas, ya sea independientemente consideradas, ya sea formando parte de una viga continua o de una estructura aporticada (figura 25). En tales condiciones, la viga horizontal se transforma en una barra quebrada de sección variable. Surge por lo tanto la necesidad de calcular previamente las expresiones que toman las reacciones de los elementos horizontales del sistema fijo, tanto bajo la acción de la carga como bajo la acción de los desplazamientos unitarios de sus extremos. Corrientemente se supone que la barra es de eje rectilíneo en toda su longitud y que sólo posee sección variable dentro de los límites de las cartelas. El cálculo de tales elementos se efectúa por el método de las fuerzas.

Por ejemplo, para el giro unitario del extremo izquierdo de una viga empotrada en ambos extremos (figura 26), las ecuaciones canónicas para el sistema básico en forma de viga con dos apoyos articulados, serán:

$$\begin{aligned} \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + 1 &= 0 \\ \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Los coeficientes se determinan por la expresión

$$\delta_{1k} = \int_0^{\lambda\ell} M_1 \frac{M_k}{E.J(x)}\,dx + \frac{1}{E.J}\int_{\lambda\ell}^{\ell-\lambda\ell} M_1.M_k.dx + \int_{\ell-\lambda\ell}^{\ell} M_1 \frac{M_k}{E.J(x)}\,dx$$

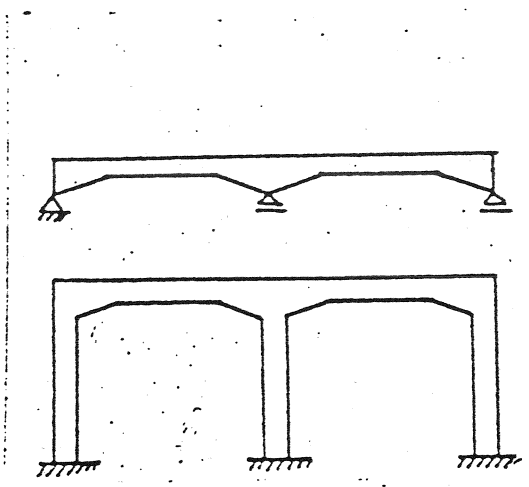


Figura 25

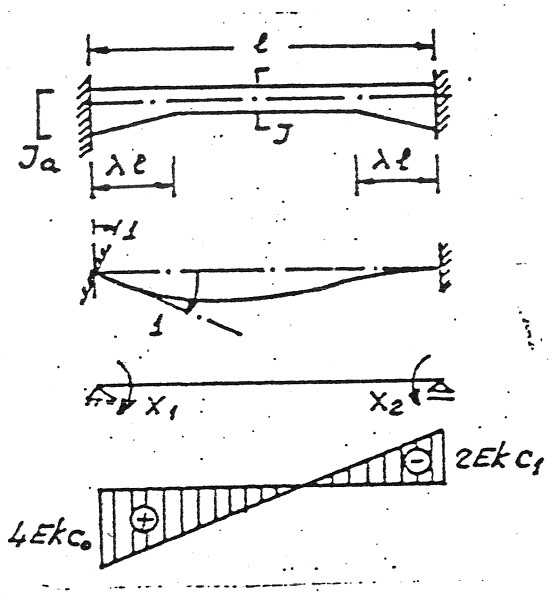


Figura 26

El cálculo se reduce a la determinación de coeficientes de corrección que afectan a las expresiones básicas deducidas para los extremos de la barra de sección constante. Análogamente se pueden calcular los coeficientes de corrección que afectan a los momentos de empotramiento perfecto para los estados más usuales de cargas exteriores.

En la Tabla 2 del Anexo se consignan los valores de los coeficientes que afectan a las reacciones de empotramiento al producir un giro unitario del extremo empotrado de una barra con extremo opuesto empotrado y articulado.

En la Tabla 3 se indican los coeficientes que afectan los momentos de empotramiento para diversos estados usuales de carga y de vinculación.

Ambas tablas son válidas para $\lambda = 0{,}20$ (cartelas de longitud igual a un quinto de la luz), que constituye una dimensión adecuada para las mismas. Por su parte, J es el momento de inercia en el tramo intermedio de sección constante y J_a el correspondiente a la sección de arranque (figura 26).

6.3. Vigas continuas sobre apoyos elásticos.

Se denominan vigas continuas sobre apoyos elásticos a aquéllas cuyos puntos de apoyo, bajo carga, pueden experimentar desplazamientos en dirección perpendicular al eje de la viga. A nivel de ejemplo puede servir una viga continua sobre puntales largos (figura 27a), como serían las pilas intermedias de un puente cuya altura haga necesario tomar en consideración la deformación que por compresión se produce en las mismas.

El esquema teórico a adoptar para la resolución se muestra en la figura 27b), en donde los apoyos elásticos se representan por resortes.

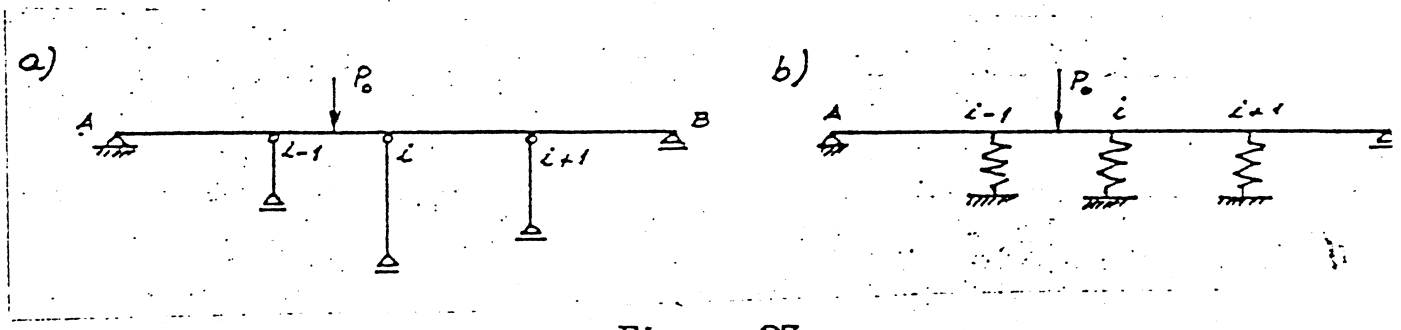


Figura 27

En virtud de lo anterior se considera como apoyos elásticos, a los que son capaces de deformarse linealmente, siendo sus desplazamientos proporcionales a las reacciones de vínculo en dichos apoyos. En tales condiciones, el desplazamiento que experimentará un apoyo elástico genérico i valdrá, según la (10) del Capítulo II

$$\Delta h_i = \frac{R_i . h_i}{E . F_i}$$

donde R_i es la reacción de vínculo debida al sistema exterior de cargas (desconocida hasta tanto no se resuelva el hiperestático); h_i la altura del puntal o pilar i, F_i su sección transversal y E el módulo de elasticidad del material constitutivo, todos conocidos.

Algunos autores expresan

$$\frac{h_i}{E . F_i} = c_i \left[\frac{m . m^2}{N . m^2} = \frac{m}{N} \right] \quad ; \quad \Delta h_i = c_i . R_i \qquad (32)$$

siendo c_i el llamado *coeficiente de compresibilidad* del apoyo i.

Otra medida para definir el comportamiento elástico del apoyo es la que surge de relacionar la reacción con el desplazamiento producido, mediante

$$\frac{R_i}{\Delta h_i} = \frac{E . F_i}{h_i} \left[\frac{N}{m} \right] = C_i \qquad (33)$$

que constituye la denominada *constante del muelle* o *constante del resorte* y que indica la magnitud que debe tener la fuerza R_i para comprimir o alargar el resorte en una unidad de longitud.

Merece destacarse que los conceptos involucrados en las (32) y (33), se corresponden, respectivamente, con los de flexibilidad y de rigidez de una barra solicitada a esfuerzos axiles.

Para la resolución por el método de los desplazamientos, y a fin de homogeneizar las expresiones que adoptan todos los coeficientes de las incógnitas, resulta conveniente introducir en la (33) el valor de k_o calculado para la viga, o sea

$$C_1 = \frac{E.F_1}{h_1}.\frac{k_o}{k_o} = C_1'.Ek_o \qquad \text{haciendo} \qquad C_1' = \frac{F_1}{h_1.k_o} \qquad (34)$$

concepto válido siempre que E, es decir el material constitutivo, sea el mismo para la viga y los pilares.

Considérese a nivel de ejemplo, la viga continua de tres tramos con apoyos elásticos intermedios que muestra la figura 28a), sujeta a un sistema exterior de cargas genérico cualquiera P_o y en la cual son iguales las constantes de resorte para los apoyos 1 y 2, supuestas de valor $N.Ek_o$, llamando por N a la magnitud concreta que toma C_1'.

Se tendrán así 4 incógnitas elásticas, que corresponden: 2 a los giros de los nudos 1 y 2 (X_1 y X_2), mientras que las dos restantes serán los desplazamientos lineales que tales nudos experimentan (X_3 y X_4). Como los mismos serán indefectiblemente descensos, se considerará para estas dos últimas incógnitas como positivo el corrimiento hacia abajo (figura 28b).

El sistema de ecuaciones o las matrices necesarias para la resolución se plantean en la forma conocida. Constituido el sistema fijo y aplicadas sobre el mismo las cargas exteriores actuantes se tendrá (figura 28c):

$$A_{1o} = A'_{1o} - A''_{1o} \quad ; \quad A_{2o} = A'_{2o} - A''_{2o}$$

$$A_{3o} = -(A'_{3o} + A''_{3o}) \quad ; \quad A_{4o} = -(A'_{4o} + A''_{4o})$$

donde los momentos A'_{1o}, A''_{1o}, A'_{2o} y A''_{2o} se obtienen en función de las acciones actuantes en cada tramo por medio de la Tabla Nº 5 del Capítulo II, y A'_{3o}, A''_{3o}, A'_{4o} y A''_{4o} son las reacciones en los extremos de barra indicados en la figura, que producen las cargas en cada tramo supuestos independientes y simplemente apoyados.

Para el cálculo de los coeficientes de las incógnitas a_{ik} se hace sucesivamente $X_i = 1$ (figuras 28d), e), f) y g), las que permiten escribir

$$a_{11} = (3.Ek_1 + 4.Ek_2) \quad ; \quad a_{12} = a_{21} = 2.Ek_2$$

$$a_{13} = a_{31} = (-3.Ek_1/l_1 + 6.Ek_2/l_2) \quad ; \quad a_{14} = a_{41} = -6.Ek_2/l_2$$

$$a_{22} = (4.Ek_2 + 3.Ek_3) \quad ; \quad a_{23} = a_{32} = 6.Ek_2/l_2$$

$$a_{24} = a_{42} = (-6.Ek_2/l_2 + 3.Ek_3/l_3) \quad ; \quad a_{34} = a_{43} = -12.Ek_2/l_2^2$$

$$a_{33} = (N.Ek_o + 3.Ek_1/l_1^2 + 12.Ek_2/l_2^2)$$

$$a_{44} = (N.Ek_o + 12.Ek_2/l_2^2 + 3.Ek_3/l_3^2)$$

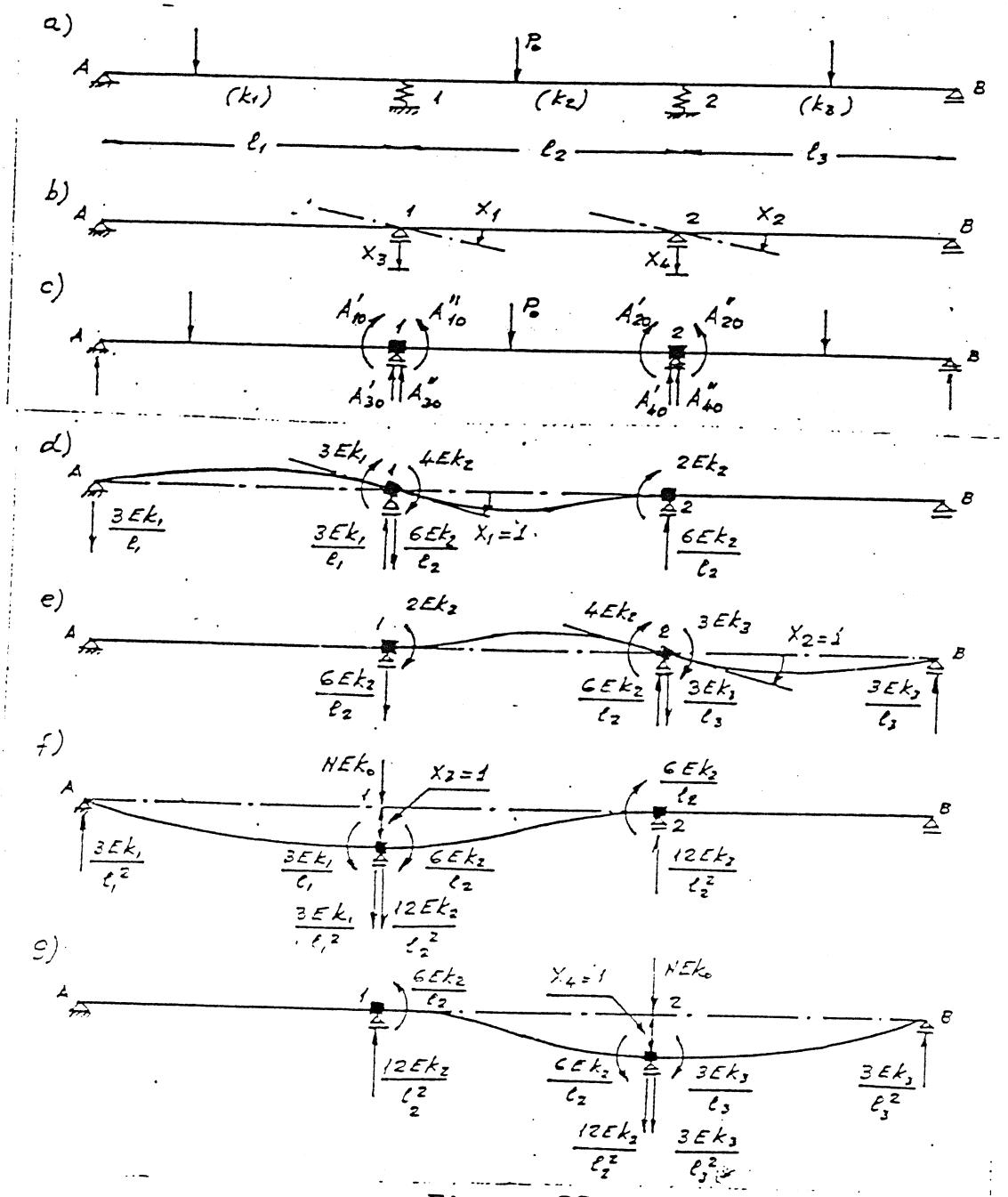


Figura 28

Resulta recomendable transcribir todas estas expresiones agrupándolas en la manera necesaria para conformar la [a].

Los momentos flectores y las reacciones de vínculo finales se obtienen aplicando las (28) y (31). Debe observarse que los momentos flectores M1 y M2 resultarán menores que los equivalentes que corresponden a la misma viga supuesta con los apoyos intermedios indesplazables. La diferencia será mayor cuanto más elásticos sean los vínculos, pudiendo llegar a ser positivos.

Si los apoyos 1 y 2 fuesen infinitamente elásticos, la viga se comportaría como una gran viga simplemente apoyada en A y B y de luz = l1 + l2 + l3.

7. ESTRUCTURAS APORTICADAS.

Para este tipo de estructuras resulta también de aplicación el procedimiento descrito, debiéndose seguir los pasos reseñados en el apartado 5. Si el pórtico es de nudos lateralmente indesplazables, sólo se tendrán como incógnitas rotaciones de nudos; caso contrario aparecerán también en tal carácter corrimientos de barras. De corresponder, resulta conveniente aplicar las simplificaciones que derivan de la consideración de la simetría de la estructura, para reducir cálculos.

Tratamiento especial merece el caso en que deba considerarse la influencia del esfuerzo de corte o del esfuerzo normal en el valor de los desplazamientos, situaciones que se analizarán en forma particular en los apartados 7.5.1. y 7.6.

7.1. Caso de pórticos con nudos indesplazables.

Para pórticos no vinculados lateralmente, este caso corresponde por lo general a pórticos geométricamente simétricos sometidos a la acción de cargas también simétricas.

7.1.1. Pórtico simétrico biempotrado de un nivel.

Sea el caso del pórtico simétrico biempotrado de un nivel que indica la figura 29a), sometido a la acción, en la viga, de una carga uniformemente distribuida q. Por la condición de simetría se presenta una sola incógnita no nula X_1.

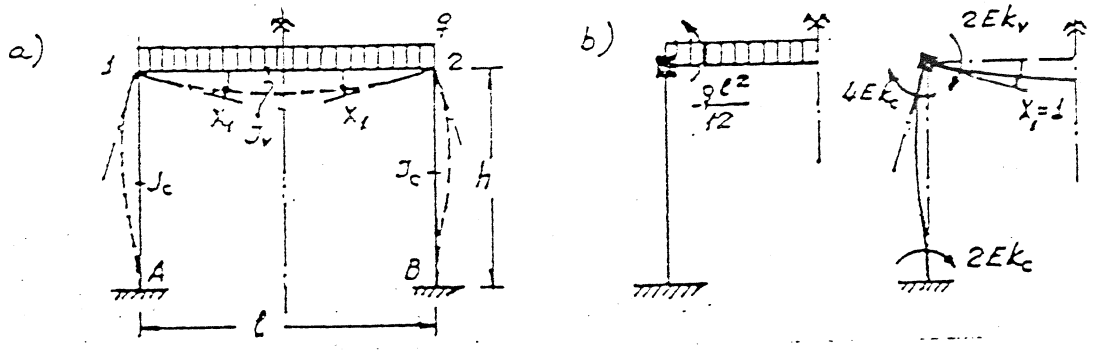


Figura 29

El sistema fijo y el que corresponde al estado $X_1 = 1$, se muestra en la figura 29b). De dichas figuras y la Tabla Nº 1

$A_{1o} = - q.l^2/12$; $a_{11} = 4Ek_c + 2Ek_v$ con $k_c = J_c/h$ y $k_v = J_v/l$

En consecuencia la ecuación de aplicación será

$$- \frac{q.l^2}{12} + (4Ek_c + 2Ek_v).X_1 = 0 \quad ; \quad X_1 = \frac{q.l^2}{24\ Ek_c.(2 + \beta)}$$

haciendo $k_v/k_c = \beta$.

Los momentos de extremo de barra resultarán

$$M_{A1} = 2\,Ek_c.X_1 = \frac{q.l^2}{12.(2+\beta)} = -M_{B2}$$

$$M_{1A} = 4\,Ek_c.X_1 = \frac{q.l^2}{6.(2+\beta)} = -M_{2B}$$

A igual valor, pero con signo contrario se llega calculando:

$$M_{12} = -\frac{q.l^2}{12} + 2\,Ek_v.X_1 = -\frac{q.l^2}{12} + \frac{q.l^2.\beta}{12.(2+\beta)} =$$

$$= q.l^2.\left[\frac{-2-\beta+\beta}{12.(2+\beta)}\right] = -\frac{q.l^2}{6.(2+\beta)} = -M_{21}$$

mientras que el momento en el centro de la viga será

$$M_{1/2} = M_{12} + M_{ov} = -\frac{q.l^2}{6.(2+\beta)} + \frac{q.l^2}{8} = \frac{q.l^2}{24}.\frac{(2+3\beta)}{(2+\beta)}$$

La figura 30 indica el diagrama de momentos resultante y la elástica de deformación.

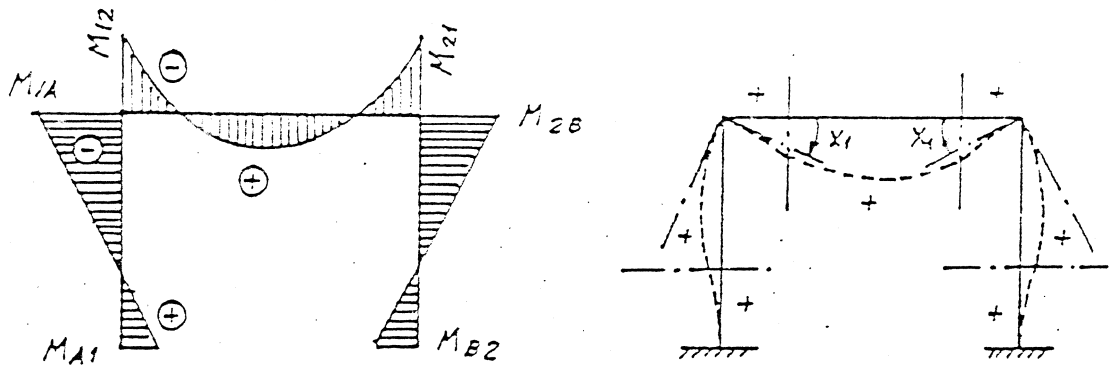


Figura 30

7.1.2. Pórtico simétrico biempotrado de dos niveles.

Sea la estructura de la figura 31a), la que por sus condiciones de simetría, presenta dos incógnitas no nulas, X_1 y X_2. Las figuras 31b), c) y d) indican el sistema fijo y los correspondientes a los estados de desplazamiento unitario.

En los casos generales, como el presente, resulta más conveniente efectuar el planteo preparando los datos en la forma que requiere la resolución matricial del sistema de ecuaciones canónicas, o sea según las (6). Por consiguiente

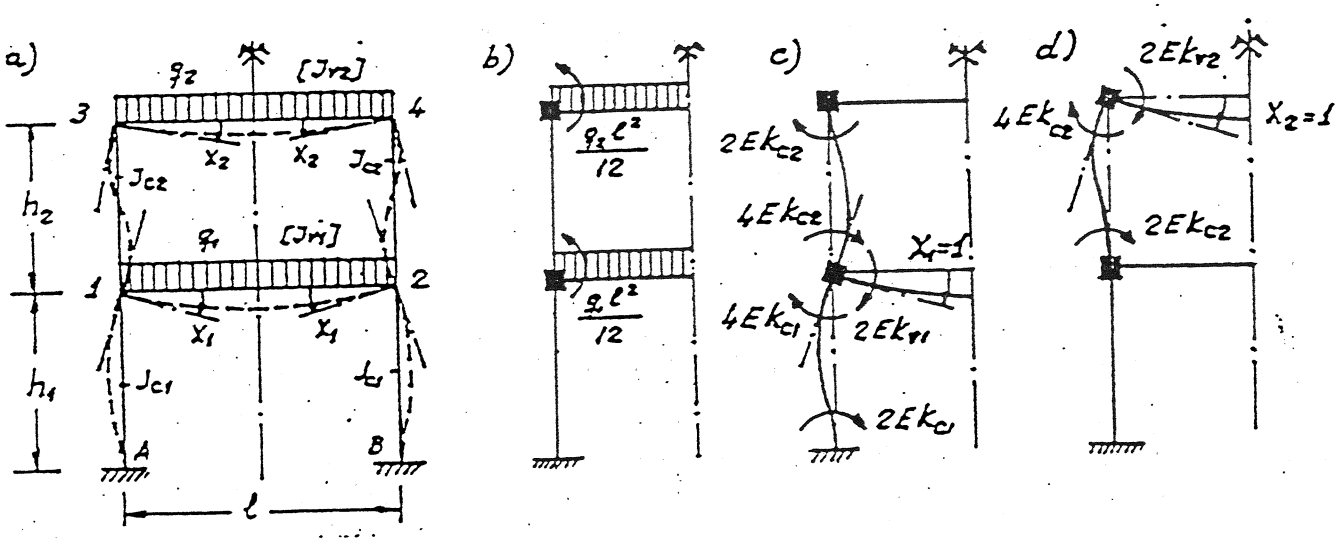


Figura 31

En los casos generales, como el presente, resulta más conveniente efectuar el planteo preparando los datos en la forma que requiere la resolución matricial del sistema de ecuaciones canónicas, o sea según las (6). Por consiguiente

$$[A_{xc}] = \begin{bmatrix} -q_1.l^2/12 \\ -q_2.l^2/12 \end{bmatrix} \quad ; \quad [a_{xxu}] = \begin{bmatrix} 2E[2(k_{c1}+k_{c2}) + k_{v1}] & 2Ek_{c2} \\ 2Ek_{c2} & 2E(2k_{c2}+k_{v2}) \end{bmatrix}$$

Aplicando la (8) se obtienen X_1 y X_2, con los que resulta

$$M_{A1} = -M_{B2} = 2\,Ek_{c1}.X_1$$
$$M_{1A} = -M_{2B} = 4\,Ek_{c1}.X_1$$
$$M_{12} = -M_{21} = -(q_1.l^2/12) + 2\,Ek_{v1}.X_1$$
$$M_{13} = -M_{24} = 4\,Ek_{c2}.X_1 + 2\,Ek_{c2}.X_2$$
$$M_{31} = -M_{42} = 2\,Ek_{c2}.X_1 + 4\,Ek_{c2}.X_2$$
$$M_{34} = -M_{43} = -(q_2.l^2/12) + 2\,Ek_{v2}.X_2$$

7.2. Caso de pórticos con nudos desplazables.

En este caso las barras verticales experimentan, además de la rotación de sus nudos extremos, un corrimiento horizontal relativo entre los mismos, X_1 en la figura 32, el que constituye otra incógnita cinemática a considerar (en general una por cada nivel).

Dado que se presentan de esta forma como incógnitas desplazamientos angulares y desplazamientos lineales, cuyas unidades no son homogéneas, puede en ocasiones optarse, para uniformar los términos que conforman las ecuaciones y simplificar su escritura, por tener todas las incógnitas expresadas en las mismas unidades. Ello se logra sustituyendo cada incógnita de corrimiento X_1, por el ángulo de barra correspondiente, X_1' en la figura 32. Ambas incógnitas quedan ligadas por las expresiones

$$X_1' = X_1/h \quad ; \quad X_1 = X_1'.h \qquad (35)$$

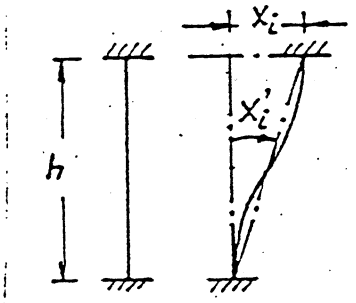


Figura 32

Sin perjuicio de lo anterior, y como norma general, la referida simplificación es conveniente emplearla sólo en el caso de pórticos empotrados en sus bases y de columnas de igual altura. Para el caso de columnas articuladas y/o de distinta altura o pórtico complejos, es aconsejable (para reducir causas de posibles errores) emplear para las incógnitas de desplazamientos horizontales el criterio de X_1 en lugar del de X_1', procedimiento que, por otra parte, es absolutamente general.

Dentro de la resolución de estructuras aporticadas merece analizarse el caso particular, en el que el pórtico sea geométricamente simétrico y las cargas antisimétricas (caso característico de la solicitación sísmica) y el caso general en que no se cumplimenten alguno de estos supuestos.

7.2.1. Pórtico simétrico de un nivel con carga antisimétrica.

Sea el pórtico de la figura 33, en donde por la antisimetría de cargas $X_1 = X_2$. Eligiendo como tercera incógnita X_3 se tendrá

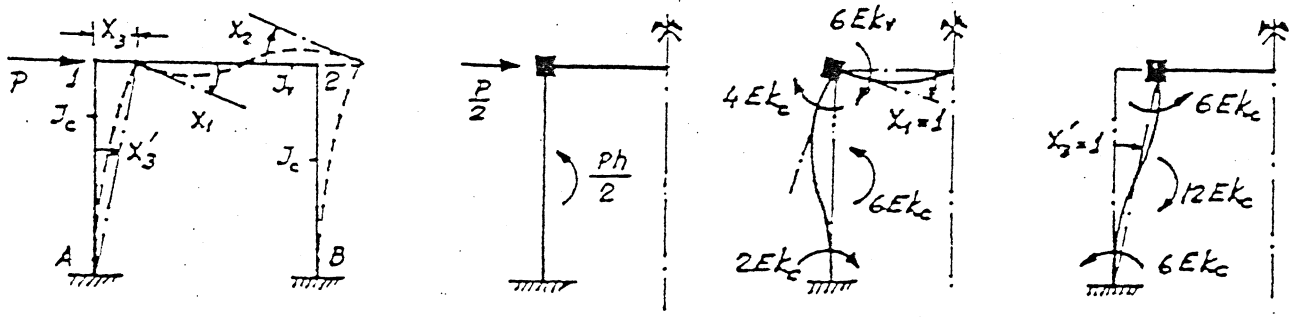


Figura 33

$$[A_{xc}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -Ph/2 \end{bmatrix} \; ; \; [a_{xxu}] = E.\begin{bmatrix} 4k_c+6k_v & -6k_c \\ -6k_c & 12k_c \end{bmatrix} = 2Ek_c.\begin{bmatrix} (2+3\beta) & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[a_{xxu}]^{-1} = \frac{1}{2Ek_c\,\Delta}.\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & (2+3\beta) \end{bmatrix} = \frac{1}{6Ek_c.(1+6\beta)}.\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & (2+3\beta) \end{bmatrix}$$

al ser: $\Delta = 12 + 18\,\beta - 9 = 3.(1 + 6\beta)$

$$[X] = -[a_{xxu}]^{-1}.[A_{xo}] = -\frac{1}{6Ek_c.(1+6\beta)}.\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & (2+3\beta) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ -Ph/2 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_2 = \frac{P.h}{4Ek_c.(1+6\beta)} \quad ; \quad X_3' = \frac{P.h.(2+3\beta)}{12Ek_c.(1+6\beta)} \qquad (36)$$

Si se hubiese adoptado X_3 como incógnita, el planteo de las matrices sería

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -P/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [a_{xxu}] = E.\begin{bmatrix} 4k_c+6k_v & -6k_c/h \\ -6k_c/h & 12k_c \end{bmatrix}$$

Los momentos de extremo de barra valdrán

$$M_{A1} = 2Ek_c.X_1 - 6Ek_c.X_3' = \frac{2Ek_c.Ph}{4Ek_c.(1+6\beta)} - \frac{6Ek_c.Ph.(2+3\beta)}{12Ek_c.(1+6\beta)} =$$

$$= \frac{Ph.(1-2-3\beta)}{2.(1+6\beta)} = -\frac{Ph}{2}.\frac{(1+3\beta)}{(1+6\beta)} = M_{B2}$$

$$M_{1A} = 4Ek_c.X_1 - 6Ek_c.X_3' = \frac{4Ek_c.Ph}{4Ek_c.(1+6\beta)} - \frac{6Ek_c.Ph.(2+3\beta)}{12Ek_c.(1+6\beta)} =$$

$$= \frac{Ph.(2-2-3\beta)}{2.(1+6\beta)} = -\frac{3}{2}\,Ph.\frac{\beta}{(1+6\beta)} = M_{2B}$$

$$M_{12} = 6Ek_v.X_1 = \frac{6Ek_v.Ph}{4Ek_c.(1+6\beta)} = \frac{3}{2}\,Ph.\frac{\beta}{(1+6\beta)} = M_{21}$$

La figura 34 muestra el diagrama de momentos resultante y la elástica de deformación.

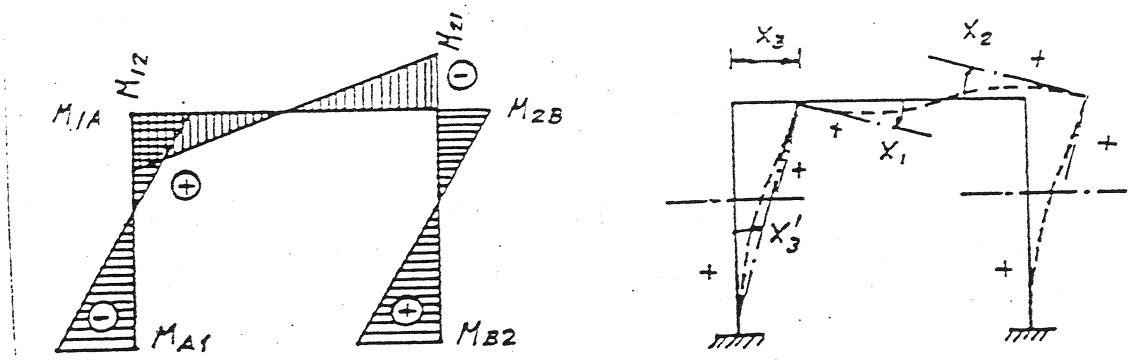


Figura 34

7.2.2. Pórtico simétrico de dos niveles con deformación antisimétrica.

En el apartado 2.2.3.1. se efectuó la discusión de la aplicación del método de los desplazamientos, para la solución del caso planteado. En la figura 35a) se indica el estado exterior de cargas y la deformada tentativa, en la que se ponen de manifiesto las cuatro incógnitas a resolver. En la figura 35b) se consigna el sistema fijo, del que, tomando como incógnitas de desplazamiento horizontal X_3' y X_4', resulta

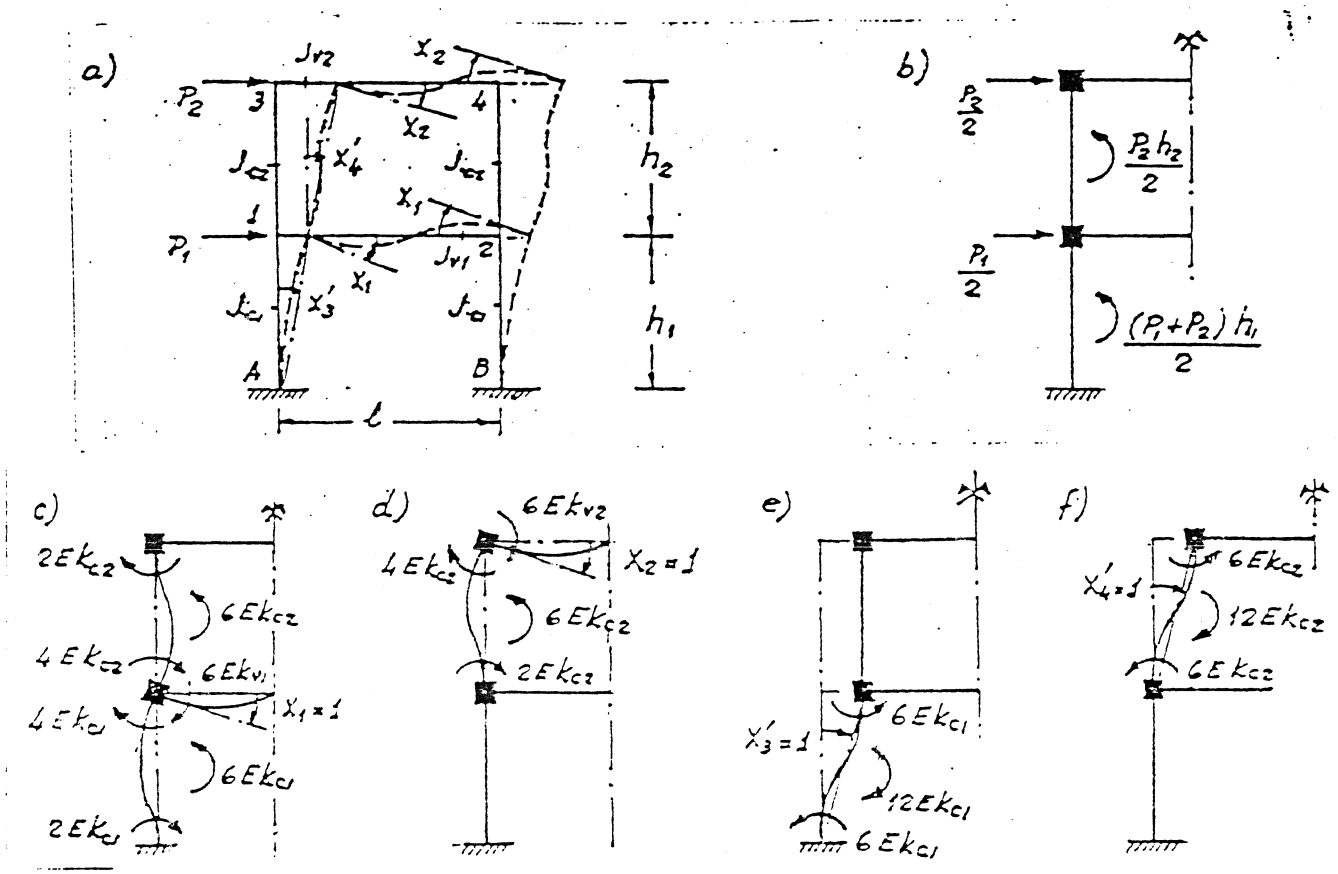


Figura 35

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(P_1+P_2)h_1/2 \\ -P_2/h_2/2 \end{bmatrix}$$

Para la determinación de A'_{3o} debe tenerse en cuenta que dicho valor corresponde a la reacción que equilibra la columna inferior, ante la acción de las solicitaciones (activas y reactivas) restantes. De la figura 35b), tomando momentos respecto al empotramiento A y considerando desconocido el valor de A'_{3o}, que se desea verificar

$$\frac{P_1}{2} h_1 + \frac{P_2}{2}(h_1+h_2) - \frac{P_2.h_2}{2} - A'_{3o} = 0$$

$$A'_{3o} = \frac{P_1.h_1}{2} + \frac{P_2.h_1}{2} + \frac{P_2.h_2}{2} - \frac{P_2.h_2}{2} = \frac{(P_1+P_2).h_1}{2}$$

De las figuras 35c) a 35f):

$$[a_{xxu}] = 2E.\begin{bmatrix} (2k_{c1}+2k_{c2}+3k_{v1}) & k_{c2} & -3k_{c1} & -3k_{c2} \\ k_{c2} & (2k_{c2}+3k_{v2}) & 0 & -3k_{c2} \\ -3k_{c1} & 0 & 6k_{c1} & 0 \\ -3k_{c2} & -3k_{c2} & 0 & 6k_{c2} \end{bmatrix}$$

Cabe observar que el Teorema de Maxwell se cumple también para las acciones recíprocas, por lo que $a_{ik} = a_{ki}$, y las $[a_{xxu}]$ resultan en todos los casos simétricas respecto a su diagonal principal, condición cuyo cumplimiento conviene siempre verificar a fin de reducir posibilidades de error.

Una vez hallados los valores de las incógnitas se tendrá

$$M_{A1} = 2\,Ek_{c1}.X_1 - 6\,Ek_{c1}.X'_3 = M_{B2}$$
$$M_{1A} = 4\,Ek_{c1}.X_1 - 6\,Ek_{c1}.X'_3 = M_{2B}$$
$$M_{12} = 6\,Ek_{v1}.X_1 = M_{21}$$
$$M_{13} = 4\,Ek_{c2}.X_1 + 2\,Ek_{c2}.X_2 - 6\,Ek_{c2}.X'_4 = M_{24}$$
$$M_{31} = 2\,Ek_{c2}.X_1 + 4\,Ek_{c2}.X_2 - 6\,Ek_{c2}.X'_4 = M_{42}$$
$$M_{34} = 6\,Ek_{v2}.X_2 = M_{43}$$

7.2.3. Caso general del pórtico de un nivel.

Sea el caso general de un pórtico simple biempotrado (figura 36a), supuesto simultáneamente cargado en todas sus barras.

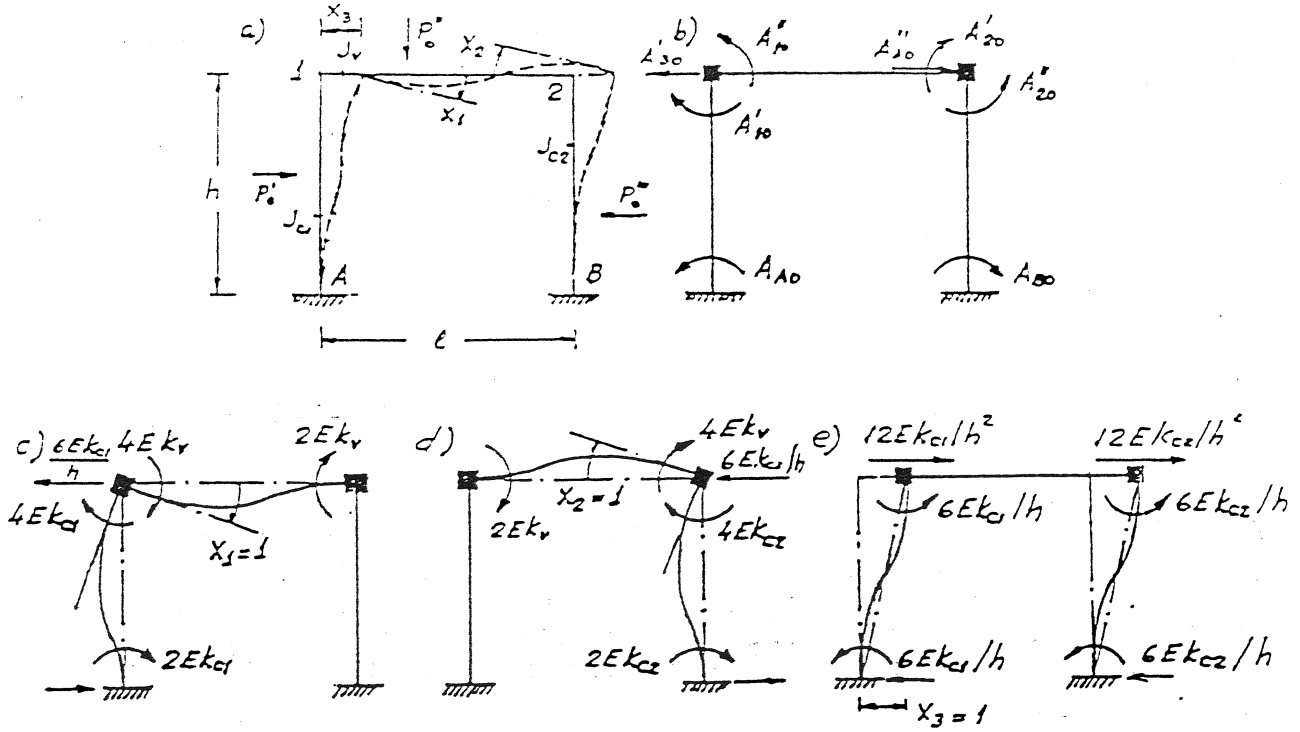


Figura 36

En lo sucesivo se considerarán como incógnitas, en todos los casos, el giro de los nudos y los corrimientos de extremo de barras. De las figuras 36b) a 36e) surge, para los sentidos de A_{1k} supuestos

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} A'_{1o}-A''_{1o} \\ A'_{2o}-A''_{2o} \\ -A'_{3o}+A''_{3o} \end{bmatrix} \; ; \; [a_{xxu}] = 2E. \begin{bmatrix} 2(k_{c1}+k_v) & k_v & -3k_{c1}/h \\ k_v & 2(k_v+k_{c2}) & -3k_{c2}/h \\ -3k_{c1}/h & -3k_{c2}/h & 6(k_{c1}+k_{c2})/h^2 \end{bmatrix}$$

Mediante la (8) se calculan los valores de las incógnitas X_1, X_2 y X_3, con los que

$$\begin{aligned} M_{A1} &= -A_{Ao} + 2\,Ek_{c1}.X_1 - (6\,Ek_{c1}/h).X_3 \\ M_{1A} &= A'_{1o} + 4\,Ek_{c1}.X_1 - (6\,Ek_{c1}/h).X_3 \\ M_{12} &= -A''_{1o} + 4\,Ek_v.X_1 + 2\,Ek_v.X_2 \\ M_{21} &= A'_{2o} + 2\,Ek_v.X_1 + 4\,Ek_v.X_2 \\ M_{2B} &= -A''_{2o} + 4\,Ek_{c2}.X_2 - (6\,Ek_{c2}/h).X_3 \\ M_{B2} &= A_{Bo} + 2\,Ek_{c2}.X_2 - (6\,Ek_{c2}/h).X_3 \end{aligned}$$

7.2.4. Resolución general del pórtico de dos niveles.

En su forma más general, el pórtico de dos niveles puede presentarse con un sistema de cargas cualesquiera y asimetría estructural. En tal caso el número de incógnitas elásticas es igual a 6 (figura 37a).

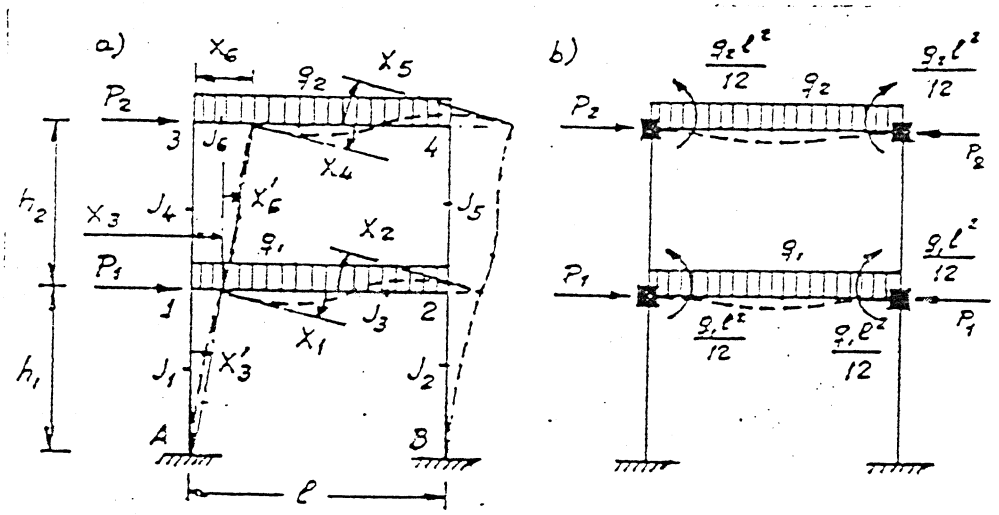


Figura 37

Se supondrán cargas uniformemente distribuidas sobre las vigas y acciones horizontales a nivel de los dinteles. En caso de existir cargas adicionales de otro tipo sobre las vigas o cargas laterales sobre las columnas, bastará con introducir las acciones reactivas pertinentes en el sistema fijo. La configuración del mismo, para el estado de cargas supuesto, se muestra en la figura 37b). En consecuencia

$$\begin{aligned} A_{1o} &= -\,q_1.l^2/12 \quad ; \quad A_{2o} = q_1.l^2/12 \quad ; \quad A_{3o} = -\,P_1 \\ A_{4o} &= -\,q_2.l^2/12 \quad ; \quad A_{5o} = q_2.l^2/12 \quad ; \quad A_{3o} = -\,P_2 \end{aligned}$$

En la figuras 38a) a f) se han dibujado los sucesivos estados de deformación y las reacciones pertinentes, para $X_1 = 1$. De ellas

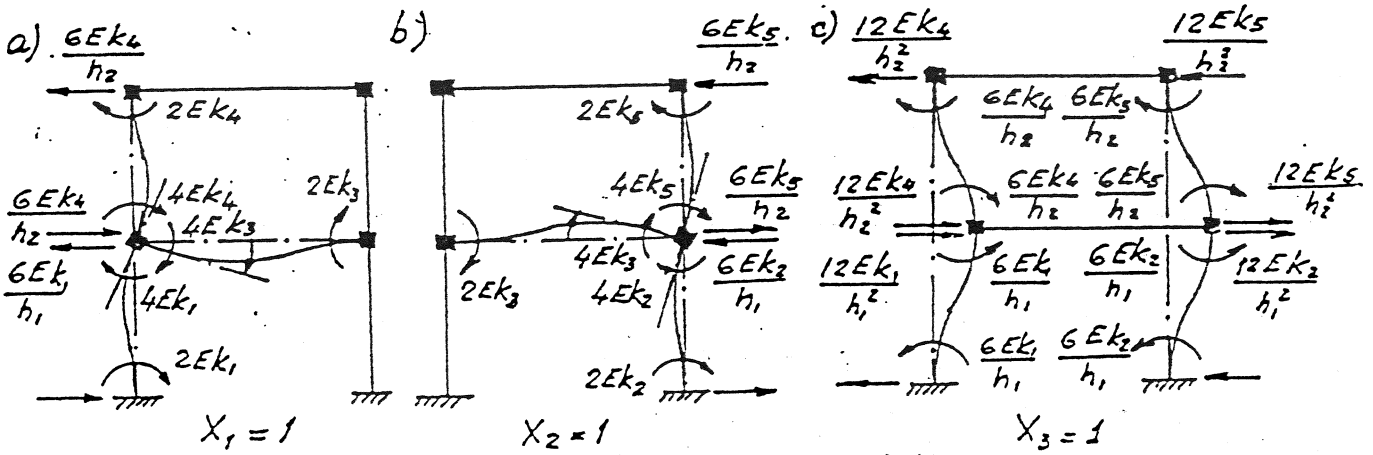


Figura 38

$a_{11} = 4E(k_1+k_3+k_4)$; $a_{12} = 2Ek_3$; $a_{13} = 6E(k_4/h_2-k_1/h_1)$
$a_{21} = 2Ek_3$; $a_{22} = 4E(k_2+k_3+k_5)$; $a_{23} = 6E(k_5/h_2-k_2/h_1)$
$a_{31} = 6E(k_4/h_2-k_1/h_1)$; $a_{32} = 6E(k_5/h_2-k_2/h_1)$; $a_{33} = *$
$a_{41} = 2Ek_4$; $a_{42} = 0$; $a_{43} = 6Ek_4/h_2$
$a_{51} = 0$; $a_{52} = 2Ek_5$; $a_{53} = 6Ek_5/h_2$
$a_{61} = -6Ek_4/h_2$; $a_{62} = -6Ek_5/h_2$; $a_{63} = -12E(k_4+k_5)/h_2^2$
$* \; a_{33} = 12E.[(k_1+k_2)/h_1^2+(k_4+k_5)/h_2^2]$

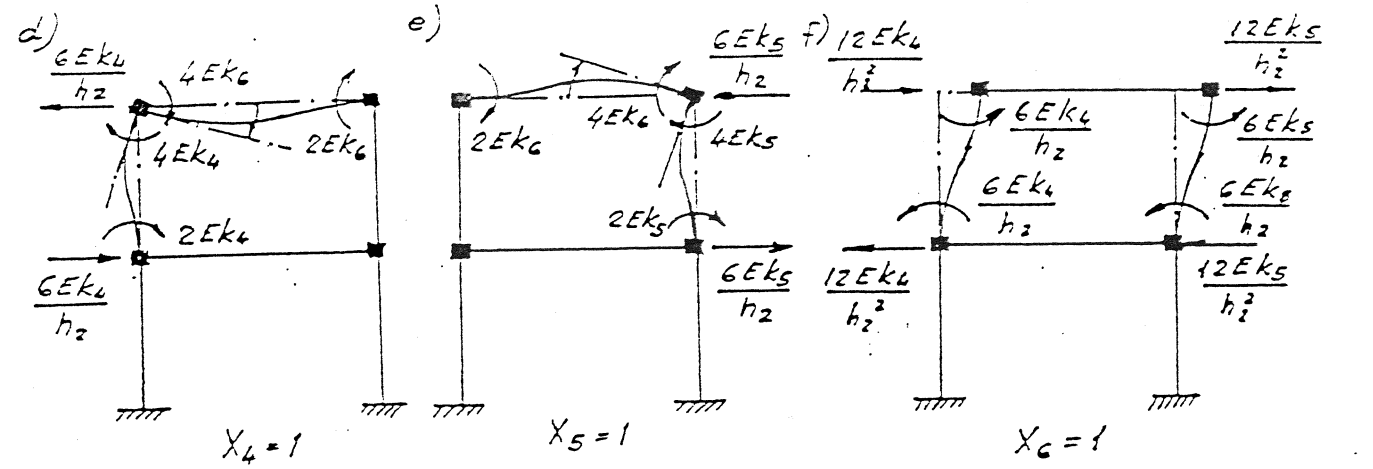


Figura 38 (Continuación)

$a_{14} = 2Ek_4$; $a_{15} = 0$; $a_{16} = -6Ek_4/h_2$
$a_{24} = 0$; $a_{25} = 2Ek_5$; $a_{26} = -6Ek_5/h_2$
$a_{34} = 6Ek_4/h_2$; $a_{35} = 6Ek_5/h_2$; $a_{36} = -12E(k_4+k_5)/h_2^2$
$a_{44} = 4E(k_4+k_6)$; $a_{45} = 2Ek_6$; $a_{46} = -6Ek_4/h_2$
$a_{54} = 2Ek_6$; $a_{55} = 4E(k_5+k_6)$; $a_{56} = -6Ek_5/h_2$
$a_{64} = -6Ek_4/h_2$; $a_{65} = -6Ek_5/h_2$; $a_{66} = 12E(k_4+k_5)/h_2^2$

Con estos valores se puede formar el sistema de ecuaciones o la $[a_{xxu}]$. Obsérvese que en todos los casos se satisface la simetría de los términos de la matriz respecto a su diagonal principal.

Una vez calculados los valores de X_1, los momentos de extremo de miembros resultarán de

$$
\begin{aligned}
M_{A1} &= 2Ek_1.X_1 - (6Ek_1/h_1).X_3 \\
M_{1A} &= 4Ek_1.X_1 - (6Ek_1/h_1).X_3 \\
M_{12} &= -q_1.l^2/12 + 4Ek_3.X_1 + 2Ek_3.X_2 \\
M_{13} &= 4Ek_4.X_1 + (6Ek_4/h_2).X_3 + 2Ek_4.X_4 - (6Ek_4/h_2).X_6 \\
M_{31} &= 2Ek_4.X_1 + (6Ek_4/h_2).X_3 + 4Ek_4.X_4 - (6Ek_4/h_2).X_6 \\
M_{34} &= -q_2.l^2/12 + 4Ek_6.X_4 + 2Ek_6.X_5 \\
M_{43} &= q_2.l^2/12 + 2Ek_6.X_4 + 4Ek_6.X_5 \\
M_{42} &= 2Ek_5.X_2 + (6Ek_5/h_2).X_3 + 4Ek_5.X_5 - (6Ek_5/h_2).X_6 \\
M_{24} &= 4Ek_5.X_2 + (6Ek_5/h_2).X_3 + 2Ek_5.X_5 - (6Ek_5/h_2).X_6 \\
M_{21} &= q_1.l^2/12 + 2Ek_3.X_1 + 4Ek_3.X_2 \\
M_{2B} &= 4Ek_2.X_2 - (6Ek_2/h_1).X_3 \\
M_{B2} &= 2Ek_2.X_2 - (6Ek_2/h_1).X_3
\end{aligned}
$$

Si bien la forma de resolución planteada es completamente general, y aplicable también a casos particulares como los que se analizarán en el apartado 7.3., resulta conveniente tener en cuenta que una elección adecuada de las incógnitas puede reducir, en ocasiones de manera sensible, la cantidad de términos a manejar y/o la de parámetros que en ellos intervienen.

Por ejemplo, si en el caso bajo estudio se hubiesen adoptado como incógnitas de desplazamiento lateral los giros de barra X_5 y X_6 en lugar de los corrimientos X_5 y X_6, el vector $[A_{xo}]$ será

$$
[A_{xo}] = \begin{bmatrix} - q_1.l^2/12 \\ q_1.l^2/12 \\ - (P_1 + P_2).h_1 \\ - q_2.l^2/12 \\ q_2.l^2/12 \\ - P_2.h_2 \end{bmatrix}
$$

Para formular la $[a_{xxu}]$ a su vez, los sucesivos estados unitarios de X_1 son los indicados en la figura 39, de la cual

$$
[a_{xxu}] = 2E. \begin{bmatrix} 2(k_1+k_3+k_4) & k_3 & -3k_1 & k_4 & 0 & -3k_4 \\ k_3 & 2(k_2+k_3+k_5) & -3k_2 & 0 & k_5 & -3k_5 \\ -3k_1 & -3k_2 & 6(k_1+k_2) & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 2(k_5+k_6) & k_6 & -3k_4 \\ 0 & k_5 & 0 & k_6 & 2(k_5+k_6) & -3k_5 \\ -3k_4 & -3k_5 & 0 & -3k_4 & -3k_5 & 6(k_4+k_5) \end{bmatrix}
$$

Resulta así, por la lógica congruencia que debe existir con la naturaleza de las incógnitas (rotaciones para todas ellas), que cada término de la $[a_{xxu}]$ debe ser un momento, con lo que, respecto a la formulación anterior, se eliminan todos los cocientes resultantes al dividir por h_1 y h_1^2.

La resolución se efectúa según los lineamientos conocidos.

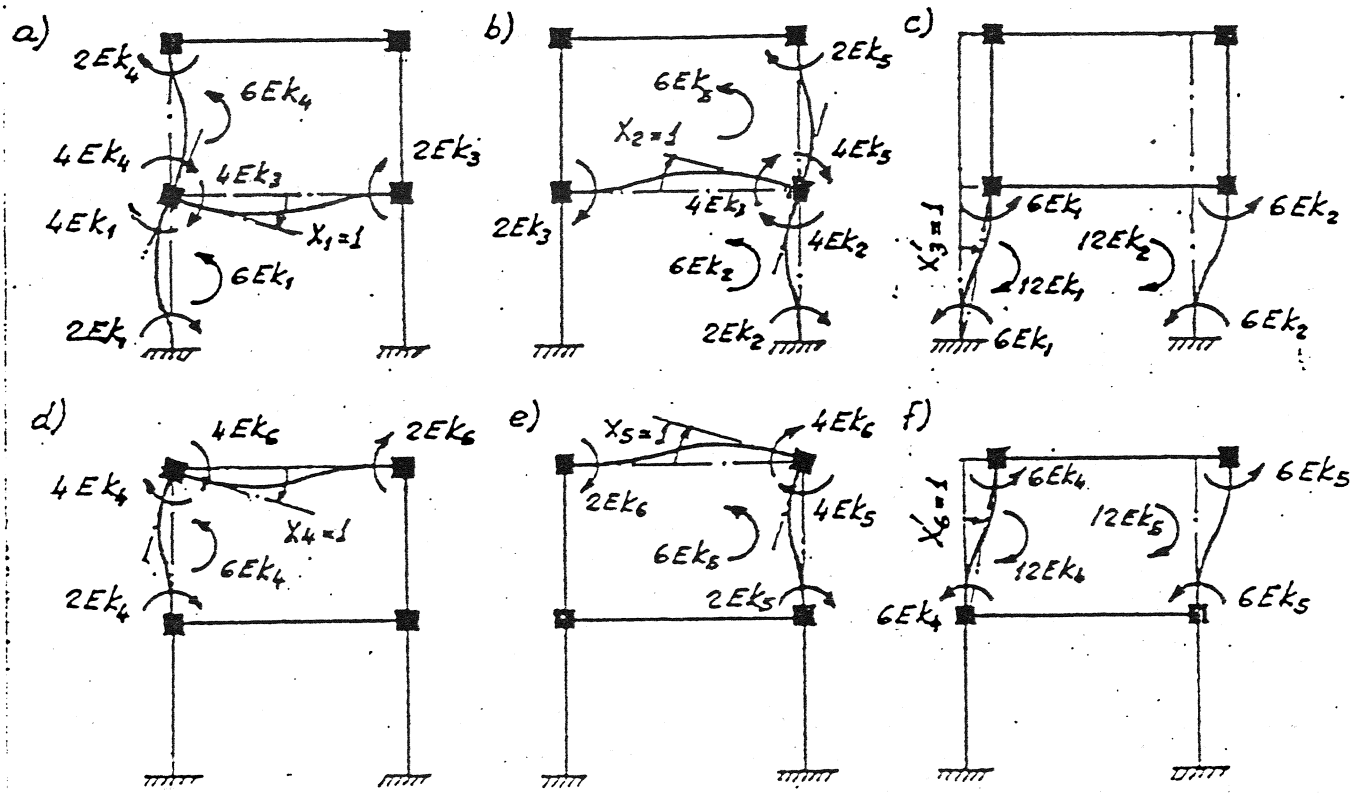


Figura 39

7.3. Casos particulares.

7.3.1. Cargas laterales en las columnas.

Si sobre las columnas actúan acciones laterales, tal como por ejemplo las Po de la figura 38a), como en el sistema fijo debe anularse toda posibilidad de movimiento en la dirección de las tres incógnitas, si la carga no estuviese aplicada exactamante en la mitad de la altura, los momentos de fijación serán diferentes, existiendo entre ellos un ΔM a equilibrar con las reacciones horizontales a fin de satisfacer la condición antedicha.

La figura 40a) muestra un ejemplo de aplicación. En tal caso y de la Tabla Nº 5 del Capítulo II (estado de carga Nº 32)

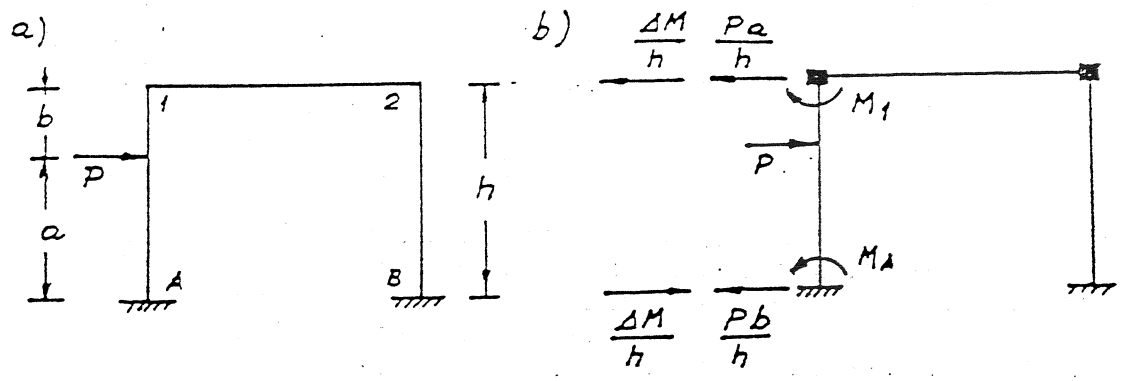


Figura 40

$$M_A = -\frac{P.a.b^2}{l^2} \quad ; \quad M_1 = \frac{P.a^2.b}{l^2} \quad ; \quad \Delta M = M_1 - M_A$$

Luego, a la reacción según la dirección de X_3 (P.a/h), debe sumársele algebraicamente la que resulte de ΔM, es decir $\Delta M/h$, tal como se indica en la figura 40b).

7.3.2. Momentos en los nudos.

En una estructura, cualquiera sea ésta (vigas continuas, pórticos, etc.), pueden actuar momentos, ya sea en secciones intermedias de los tramos, ya sea en el extremo de los mismos. En el primer caso tales momentos sólo intervendrán al cargar el sistema fijo, obteniéndose los correspondientes momentos de restricción de rotaciones extremas, aplicando para ello el estado de carga Nº 41 de la Tabla Nº 5 del Capítulo II, y si fuera el caso, sus respectivas fuerzas reactivas en la dirección de los desplazamientos laterales fijados como incógnitas, tal como se indicó en el apartado anterior.

En cambio, si los momentos exteriores actuasen en los nudos, debe tenerse presente que:

- Al conformar el sistema fijo es necesario equilibrar el nudo, o sea que se aplica en el mismo un momento igual y contrario, no efectuando ninguna aplicación o distribución de tal momento en los extremos de las barras que convergen al nudo.

- Al conformar el vector $[M_{eo}]$ para calcular el $[M_e]$ según la (28), como al efecto sólo se toman en consideración los momentos de fijación de los extremos de barras, los que se hubiesen aplicado en los nudos no aparecerán.

Sea por ejemplo el pórtico de la figura 41a), equivalente en lo que hace al sistema de cargas actuantes al que se consigna en la figura 41b). El sistema fijo es el indicado en la figura 41c).

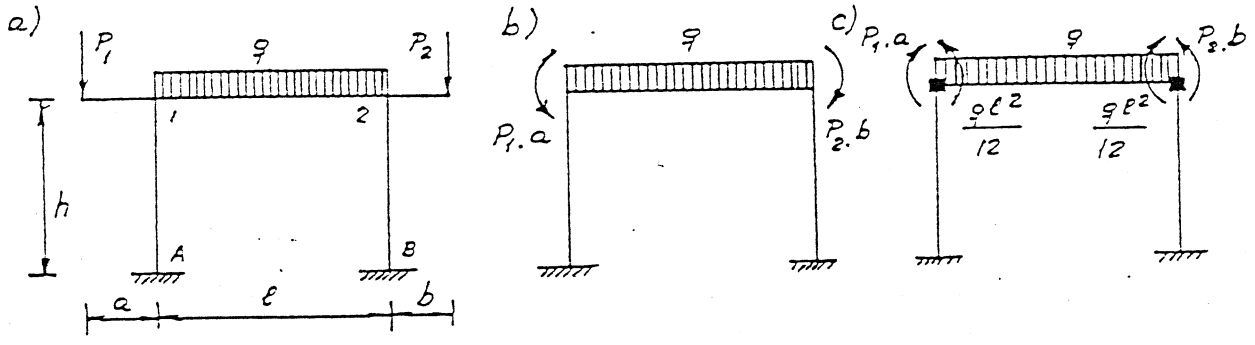


Figura 41

En consecuencia

$$A_{1o} = P_1.a - q.l^2/12 \quad ; \quad A_{2o} = q.l^2/12 - P_2.b \quad ; \quad A_{3o} = 0$$

Los estados $X_1 = 1$ serán los de las figuras 36c), d) y e) del apartado 7.2.3., y la [axxu] será la expuesta en dicho apartado. Los momentos finales de extremo de barra se obtendrán mediante

$$[M_e] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2Ek_{c1} & 0 & -6Ek_{c1}/h \\ 4Ek_{c1} & 0 & -6Ek_{c1}/h \\ 4Ek_v & 2Ek_v & 0 \\ 2Ek_v & 4Ek_v & 0 \\ 0 & 4Ek_{c2} & -6Ek_{c2}/h \\ 0 & 2Ek_{c2} & -6Ek_{c2}/h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

7.3.3. Columnas con extremos articulados.

En el caso de columnas con extremos articulados, basta tener en cuenta al aplicar el procedimiento general, los casos atinentes desarrollados en el apartado 2.2.3. y resumidos en la Tabla Nº 1.

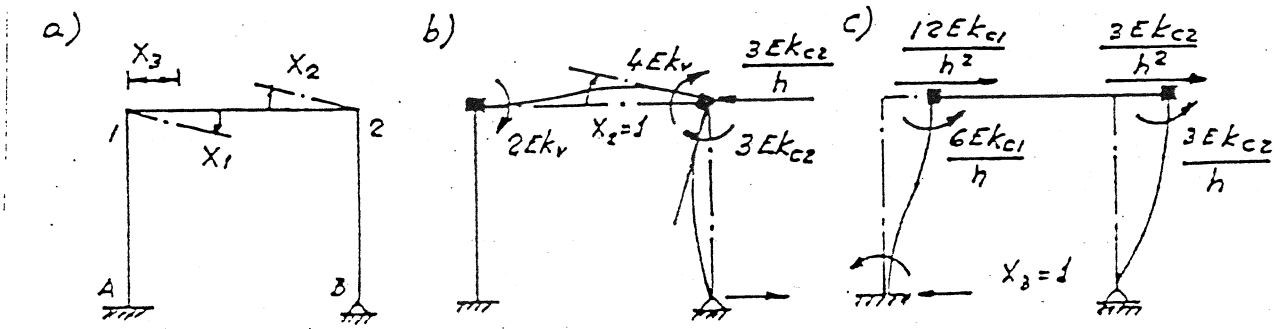


Figura 42

Sea por ejemplo el pórtico de la figura 42a). El sistema fijo no ofrece modificaciones conceptuales en cuanto a su conformación, lo mismo que el estado $X_1 = 1$, que es idéntico al indicado en la figura 36c). En cambio los estados $X_2 = 1$ y $X_3 = 1$, pasarán a ser los que muestran las figuras 42b) y c).

En consecuencia la [axxu] será en este caso

$$[a_{xxu}] = E.\begin{bmatrix} 4(k_{c1}+k_v) & 2k_v & -6k_{c1}/h \\ 2k_v & 4k_v+3k_{c2} & -3k_{c2}/h \\ -6k_{c1}/h & -3k_{c2}/h & (12k_{c1}+3k_{c2})/h^2 \end{bmatrix}$$

7.3.4. Columnas de distinta altura.

Para la conformación del sistema fijo y la formulación de [Axc] no se introducen variantes respecto a la aplicación general, así como tampoco para los estados $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$, los que serán análogos a los indicados en las figuras 36c) y d), considerando en cada caso los rigideces pertinentes y diferenciando las alturas h_1 y h_2 correspondientes. Lo mismo ocurre si se considera como tercera incógnita el corrimiento de la viga X_3.

En cambio, si se considera como tercera incógnita el giro de la columna A-1, o sea X_3, cuando se lo hace igual a uno, ya no

será unitario el giro de la columna B-2, el que pasará a valer h_1/h_2, tal como se desprende de la figura 43a), por lo que las acciones a considerar, serán las consignadas en la figura 43b).

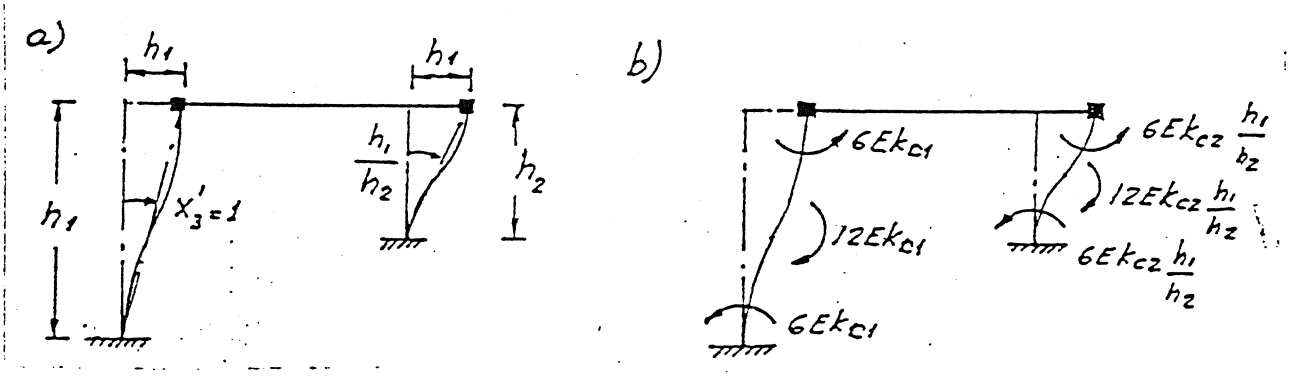


Figura 43

7.3.5. Columnas oblicuas.

Si se trata de resolver el caso de pórticos asimétricos, que presenten una o varias columnas oblicuas, debe tenerse presente que al producirse su desplazamiento lateral, los nudos a los que convergen tales columnas no pueden experimentar ya corrimientos horizontales, dado que, al no variar la longitud de la columna por hipótesis, el nudo superior de las mismas deberá experimentar desplazamientos lineales perpendiculares a la dirección de su respectivo eje, y a tal punto desplazado, deberá converger también el extremo concurrente de la viga (figuras 44a), b) y c).

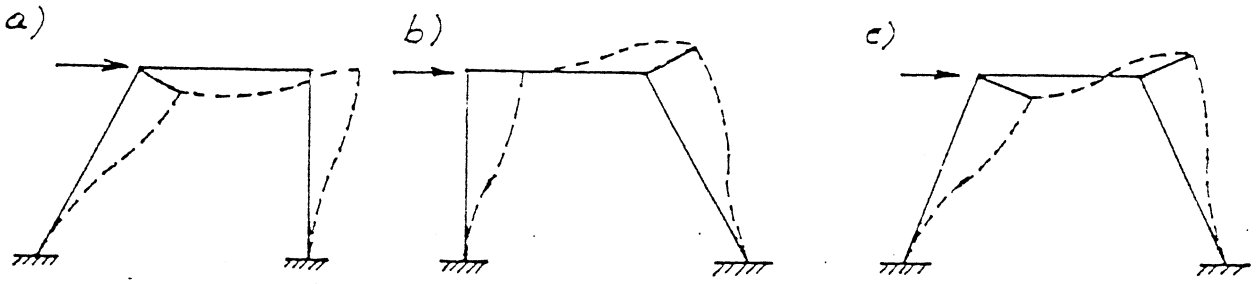


Figura 44

Sea por ejemplo el caso del pórtico de la figura 44a), repetido en la figura 45a), en la que se consignan sus dimensiones, las incógnitas elásticas a resolver y el sistema de cargas supuesto.

a) Formulación de $[A_{xo}]$.

El sistema fijo se indica en la figura 45b). En las direcciones de X_1 y X_2 no se producen modificaciones respecto a los casos analizados hasta el presente. En cambio, para que el sistema responda a las condiciones que debe cumplimentar el sistema fijo (desplazamientos nulos en la dirección de cada incógnita), deberá neutralizarse la posibilidad de descenso del

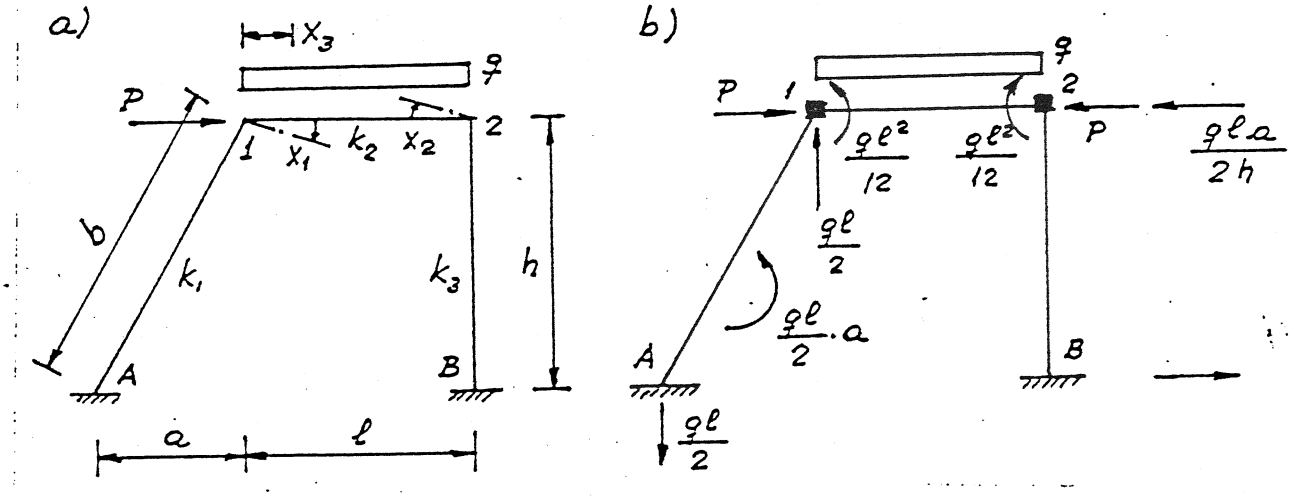


Figura 45

nudo 1, que apoya sobre la columna no vertical, para lo cual corresponde aplicar en el mismo la reacción q.l/2. Al no hallarse esta reacción en la dirección de una incógnita, debe ser transformada o reexpresada, de modo que ello ocurra. Analizando la columna oblicua A-1, ésta (considerada como cuerpo libre), se halla solicitada por un par negativo q.l.a/2, que se corresponde a su vez con una cupla equivalente horizontal q.l.a/2 h.

En definitiva

$$A_{1o} = -\frac{q.l^2}{12} \quad ; \quad A_{2o} = \frac{q.l^2}{12} \quad ; \quad A_{3o} = -\left(P + \frac{q.l.a}{2\,h}\right)$$

b) Formulación de la [axxu].

Para los desplazamientos $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ (figuras 46a) y b), la aplicación es análoga a la seguida para pórticos convencionales, agregando en cada caso el efecto de la reacción vertical que aparece en el nudo 1, transformada en la cupla horizontal equivalente.

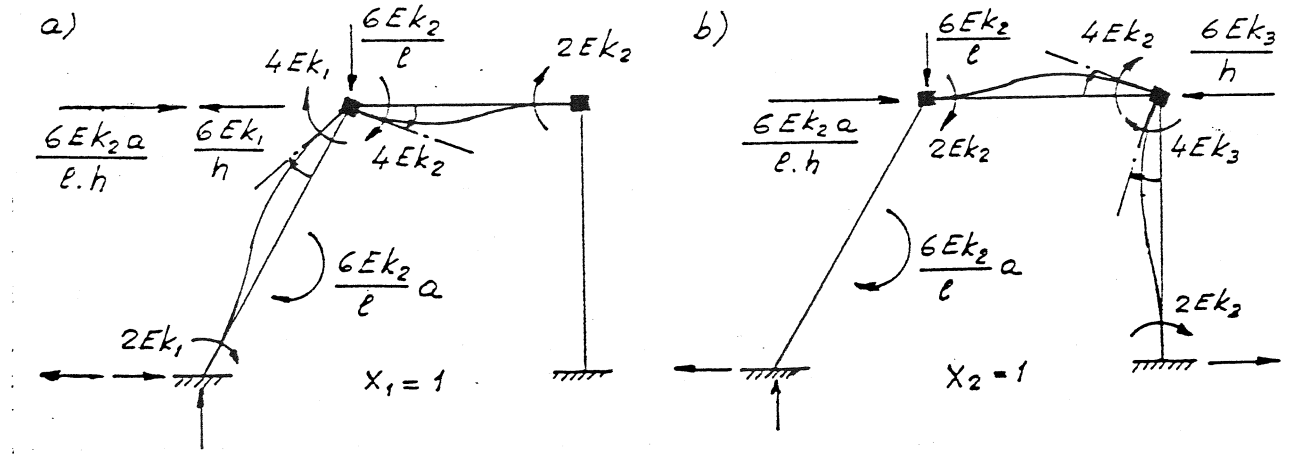


Figura 46

En consecuencia

$$a_{11} = 4\,E.(k_1 + k_2) \quad ; \quad a_{21} = 2\,E.k_2 \quad ; \quad a_{31} = -\frac{6\,E.k_1}{h} + \frac{6\,E.k_2.a}{l.h}$$

$$a_{12} = 2\,E.k_2 \quad ; \quad a_{22} = 4\,E.(k_2 + k_3) \quad ; \quad a_{32} = -\frac{6\,E.k_3}{h} + \frac{6\,E.k_2.a}{l.h}$$

Al efectuar el desplazamiento $X_3 = 1$ (figura 47a), éste será experimentado en verdadera magnitud por el extremo superior de la columna vertical (nudo 2). En cambio, el nudo 1, tal como se pusiera de manifiesto en la parte introductoria, sufrirá un desplazamiento oblicuo, perpendicular al eje de la columna A-1, cuyas componentes se consignan en el detalle de la figura 47b), en donde

$$1\text{-}1'' = X_3 = 1 \quad ; \quad 1'\text{-}1'' = \Delta_1 = tg\,\alpha \quad ; \quad 1\text{-}1' = \Delta_2 = 1/\cos\alpha$$

con: $tg\,\alpha = a/b$ y además $b.\cos\alpha = h$

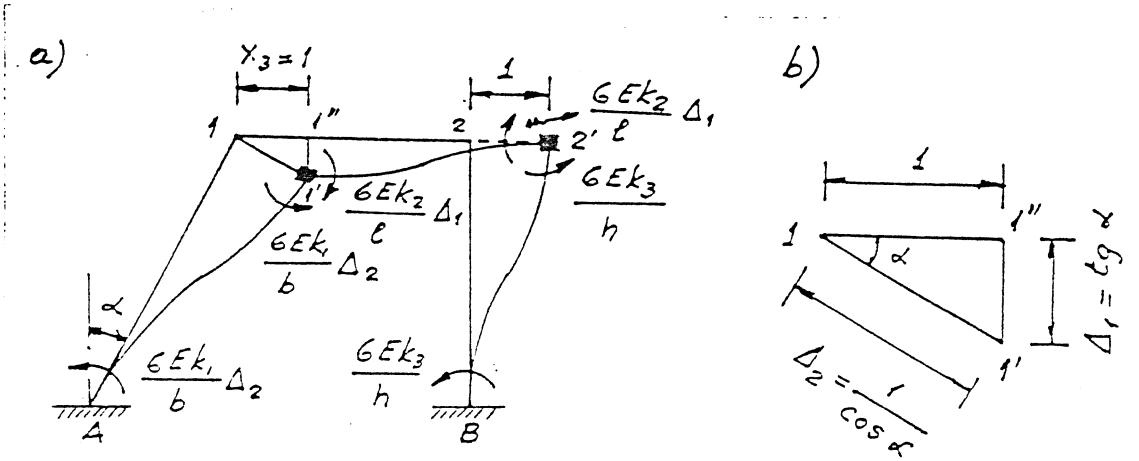


Figura 47

En consecuencia

$$a_{13} = -\frac{6\,E.k_1}{b}.\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{6\,E.k_2}{l}.tg\,\alpha = -\frac{6\,E.k_1}{h} + \frac{6\,E.k_2.a}{l.h} = a_{31}$$

$$a_{23} = -\frac{6\,E.k_3}{h} + \frac{6\,E.k_2}{l}.tg\,\alpha = -\frac{6\,E.k_3}{h} + \frac{6\,E.k_2.a}{l.h} = a_{32}$$

$$a_{33} = \frac{12\,E.k_1}{h^2} + \frac{12\,E.k_3}{h^2} + \frac{12\,E.k_2}{l^2}.tg\,\alpha.\frac{a}{h} =$$

$$= \frac{12\,E.k_1}{h^2} + \frac{12\,E.k_3}{h^2} + \frac{12\,E.k_2}{l^2}.\left(\frac{a}{h}\right)^2$$

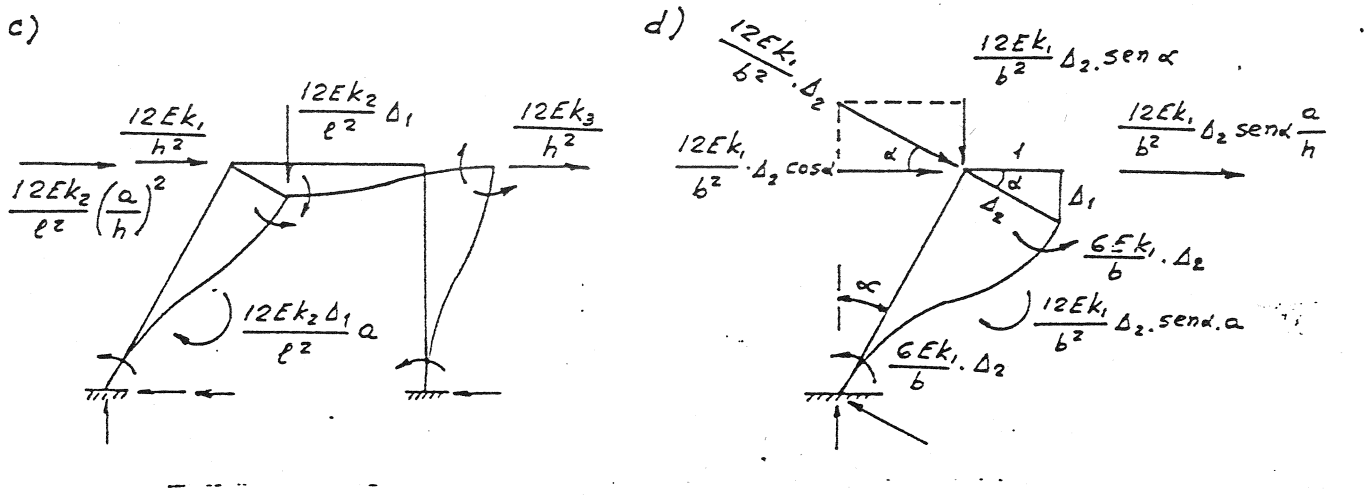


Figura 47 (Continuación)

Por razones de claridad en las notaciones, los valores que conforman la a_{33} se han consignado en la figura 47c), que debe ser interpretada como complemento de la figura 47a).

Para justificar la expresión del primer sumando, cabe observar (figura 47d) que las fuerzas de la cupla reactiva en la dirección perpendicular a la barra A-1, proyectada en la dirección de a_{33}, valen

$$\frac{12\ E.k_1}{b^2}.\Delta_2.\cos\alpha = \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\frac{1}{\cos\alpha}.\cos\alpha = \frac{12\ E.k_1}{b^2}$$

a lo que debe sumársele el efecto de la componente vertical de la fuerza que constituye dicha cupla, actuante en el extremo izquierdo de la viga, y que en consecuencia debe transformarse en una fuerza equivalente orientada según a_{33}

$$\frac{12\ E.k_1}{b^2}.\frac{1}{\cos\alpha}.\operatorname{sen}\alpha.\frac{a}{h} = \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\operatorname{tg}\alpha.\frac{a}{h} = \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\frac{a^2}{h^2}$$

Sumando ambas expresiones halladas

$$\frac{12\ E.k_1}{b^2} + \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\frac{a^2}{h^2} = \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right) = \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\left(\frac{a^2 + h^2}{h^2}\right) =$$

$$= \frac{12\ E.k_1}{b^2}.\frac{b^2}{h^2} = \frac{12\ E.k_1}{h^2}$$

7.3.6. Casos combinados.

Cualquier combinación de los casos anteriores no introduce dificultades complementarias, por lo que para cada uno de ellos

individualmente considerado, serán de aplicación los conceptos atinentes expuestos en los apartados 7.3.1. al 7.3.5.

7.4. Verificaciones.

Una vez obtenidos los valores definitivos de los momentos de extremo de barra de una estructura, deben verificarse diversas condiciones que hacen al equilibrio de sus partes y de las acciones producidas en la estructura por el sistema de cargas actuante. Tales verificaciones son:

7.4.1. Verificación de nudos.

La suma de los momentos de extremo de las barras concurrentes a un nudo debe ser igual a cero. Para la determinación del signo debe tenerse presente que la condición de equilibrio se refiere a los momentos estáticos, no a los momentos flectores que los mismos generan. Así por ejemplo, para el caso desarrollado en el apartado 7.2.4. correspondiente a la resolución general del pórtico de dos niveles, deberá verificarse que

$$M_{1A} + M_{12} + M_{13} = 0 \quad ; \quad M_{31} + M_{34} = 0 \quad ; \quad M_{43} + M_{42} = 0 \quad , \text{ etc.}$$

Si el nudo presenta momentos formando parte del sistema exterior de cargas, los mismos deben ser incorporados al formular la verificación. Para el caso de la figura 41, por ejemplo

$$-P_1.a + M_{1A} + M_{12} = 0 \quad ; \quad P_2.b + M_{21} + M_{2B} = 0$$

7.4.2. Verificación de columnas.

El momento de vuelco que sobre la estructura producen las acciones laterales aplicadas, o aún en caso de no existir las mismas, la no simetría de la estructura y/o la de las cargas verticales, debe ser equilibrado por las reacciones que generan los momentos de extremo de todos los elementos verticales.

Por ejemplo, para el pórtico de la figura 48a) debe verificarse que

$$\Sigma M = P.h + M_{A1} + M_{1A} + M_{B2} + M_{2B} = 0 \quad ; \quad P = -(M_{A1}+M_{1A}+M_{B2}+M_{2B})/h$$

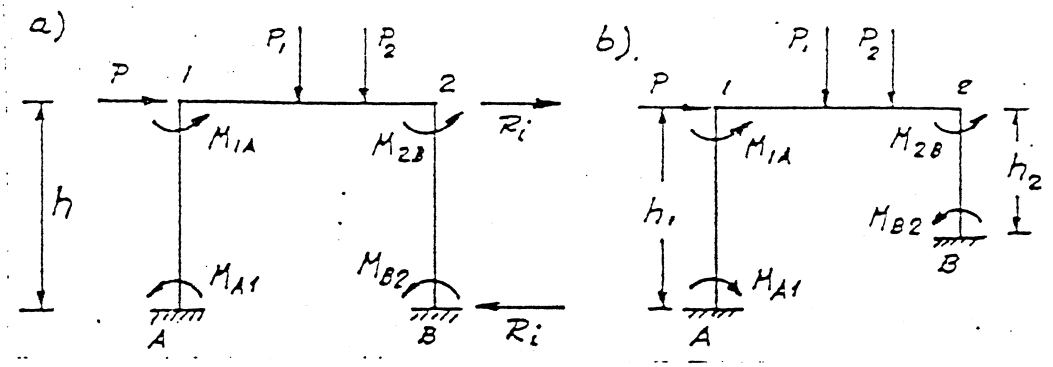


Figura 48

es decir que la fuerza horizontal P debe ser igual y de signo contrario a la suma de los momentos de cabeza y pie de todas las columnas dividida por h. En todos los casos las expresiones están formuladas algebraicamente, es decir que cada momento debe ser introducido con el signo que le corresponda (negativos si fuesen válidos los de la figura 48a).

Cabe observar que el segundo miembro de la expresión anterior (o sea $-\Sigma M/h$), no es otra cosa que el valor de cada una de las fuerzas (R_i) que corresponden a la cupla reactiva de tales momentos, por lo que la fuerza R_1 ubicada a nivel de dintel debe *equivaler* a P, mientras que la situada a nivel de los vínculos A y B, al corresponder a la suma de las componentes horizontales de las reacciones ($R_{Ax} + R_{Bx} = R_1$) debe *equilibrar* a P, satisfaciendo así que $\Sigma F_x = 0$.

Si $h_1 \neq h_2$ (figura 48b), se deberá verificar que

$$P = - \frac{M_{A1} + M_{1A}}{h_1} - \frac{M_{B2} + M_{2B}}{h_2}$$

Para el caso de la figura 40a), el primer sumando de la ecuación de equilibrio de momentos sería P.a, o bien (P.a/h).h.

Si no hubiese cargas laterales actuantes resultaría P = 0, es decir, que deberá ser directamente nula la suma de los momentos de extremo de todas las columnas.

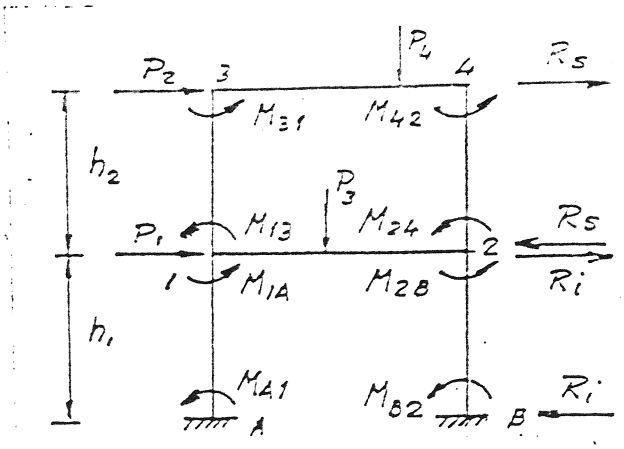


Figura 49

Para el pórtico de dos niveles de la figura 49 deberá verificarse que

$$P_2 = \frac{\Sigma M_s}{h_2} = R_s \quad ; \quad P_1 = - \frac{\Sigma M_s}{h_2} + \frac{\Sigma M_1}{h_1} = - R_s + R_1$$

con $M_s = M_{13} + M_{31} + M_{24} + M_{42}$ y $M_1 = M_{A1} + M_{1A} + M_{B2} + M_{2B}$

7.5. Pórtico con tabique.

En la práctica de la construcción sismorresistente suele ser frecuente la aparición de estructuras aporticadas, en las cuales una de sus columnas, debido a sus dimensiones transversales, pasa a constituir un tabique, con lo que su coeficiente de rigidez aumenta considerablemente en comparación con el de los restantes elementos (figura 50a). En tales condiciones, el esquema teórico (considerando como tal al eje quebrado que contiene los ejes baricéntricos de cada elemento estructural individual) genéricamente considerado, deja de ser representativo por sí sólo del comportamiento elástico de la estructura (fundamentalmente en el nudo viga-tabique), debiéndose en consecuencia poner de manifiesto en dicho esquema la influencia del tabique en los estados de deformación a considerar. A tales efectos, el esquema teórico que debe adoptarse adquiere la forma que indica la figura 50b), constituyendo el elemento rayado del dintel una barra de rigidez infinita que representa la presencia del tabique en el tramo de longitud $d_t/2$, llegando la viga y su correspondiente solicitación hasta el punto 1.

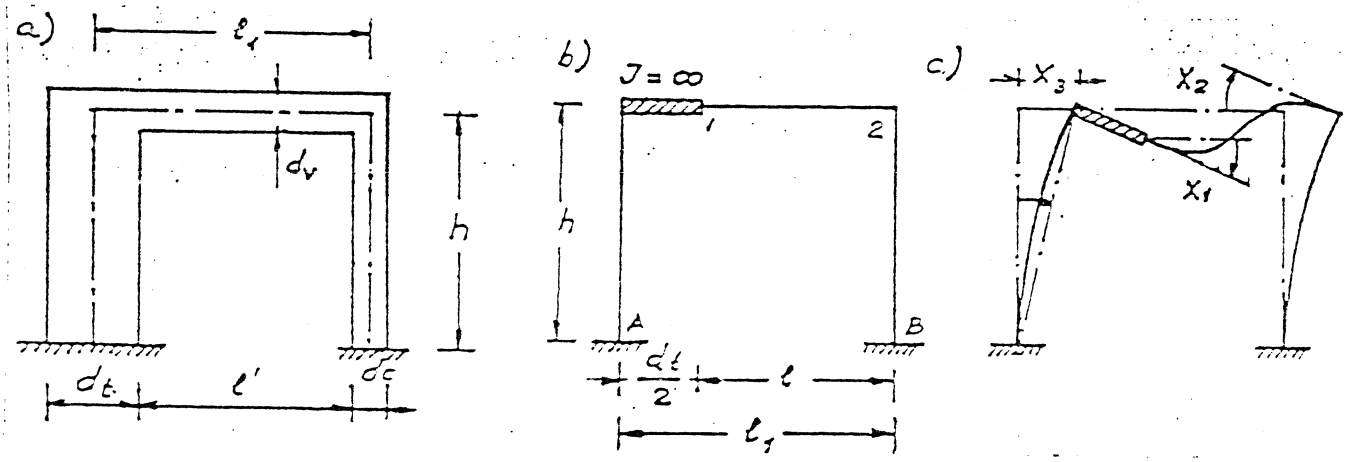


Figura 50

En las referidas condiciones, la deformada toma la forma indicativa mostrada en la figura 50c), donde asimismo se individualizan las incógnitas a resolver, debiéndose analizar cuidadosamente las diferentes reacciones que se producen, tanto en el sistema fijo, por una parte, como para la distribución de incógnitas adoptada, por otra.

Al conformar el sistema fijo deberán tenerse en cuenta, para la carga actuante sobre la viga, además de los momentos reactivos de empotramiento, el momento complementario que produce la reacción en el extremo izquierdo, para impedir el descenso de dicho punto (figura 51). Obsérvese que la reacción q.l/2 debe ser aplicada en el extremo izquierdo de la viga, pues ésta, al apoyar excéntricamente sobre el tabique, de no absorberse su efecto, deformaría el mismo por flexión compuesta, y se tendrían desplazamientos en la dirección de las incógnitas. Pero como tal

reacción no coincide con ninguna dirección de incógnita, debe ser puesta de manifiesto mediante el par que le es equivalente ($ql/2.d_t/2$), correspondiente a la acción restrictiva en la dirección de la incógnita X_1.

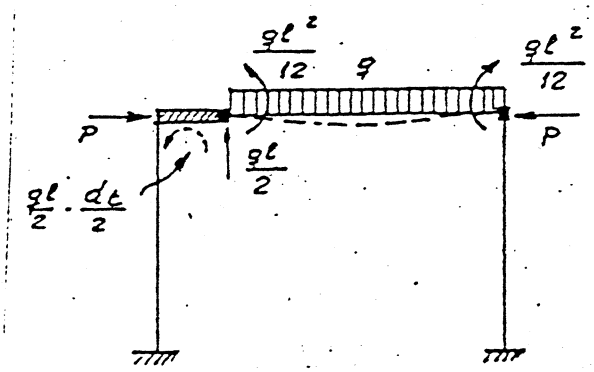


Figura 51

Para el caso de las cargas exteriores indicadas en la figura

$$A_{1o} = -\frac{q.l^2}{12} - \frac{q.l}{2}.\frac{d_t}{2} \quad ; \quad A_{2o} = \frac{q.l^2}{12} \quad ; \quad A_{3o} = -P$$

Para el estado de deformación $X_1 = 1$ (figura 52a), se observa que al producir el giro del nudo, por la presencia del tramo de rigidez infinita de longitud $d_t/2$, se produce simultáneamente un descenso del extremo izquierdo de la viga de valor

$$\Delta_v = (d_t/2).1$$

con lo que ésta se halla sujeta a la acción simultánea de los estados de deformación que se indican en la figura 52b).

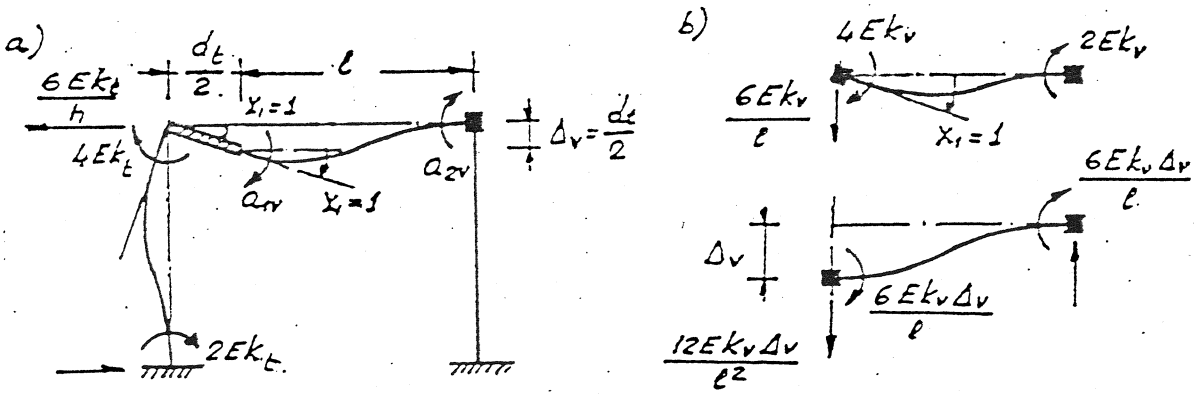


Figura 52

En consecuencia, y efectuando análogos razonamientos respecto a las reacciones excéntricas

$$a_{11} = 4Ek_t + 4Ek_v + \frac{6Ek_v}{l}.\frac{d_t}{2} + \frac{6Ek_v}{l}.\frac{d_t}{2} + \frac{12Ek_v}{l^2}.\frac{d_t}{2}.\frac{d_t}{2}$$

$$a_{21} = 2Ek_v + \frac{6Ek_v}{l}.\frac{d_t}{2} \quad ; \quad a_{31} = -\frac{6Ek_t}{h}$$

Además, de las figuras 53a) y b), se tendrá

$$a_{12} = 2Ek_v + \frac{6Ek_v}{l}.\frac{d_t}{2} \quad ; \quad a_{22} = 4E.(k_v + k_c) \quad ; \quad a_{32} = -\frac{6Ek_c}{h}$$

$$a_{13} = -\frac{6Ek_t}{h} \quad ; \quad a_{23} = -\frac{6Ek_c}{h} \quad ; \quad a_{33} = \frac{12E.(k_t + k_c)}{h^2}$$

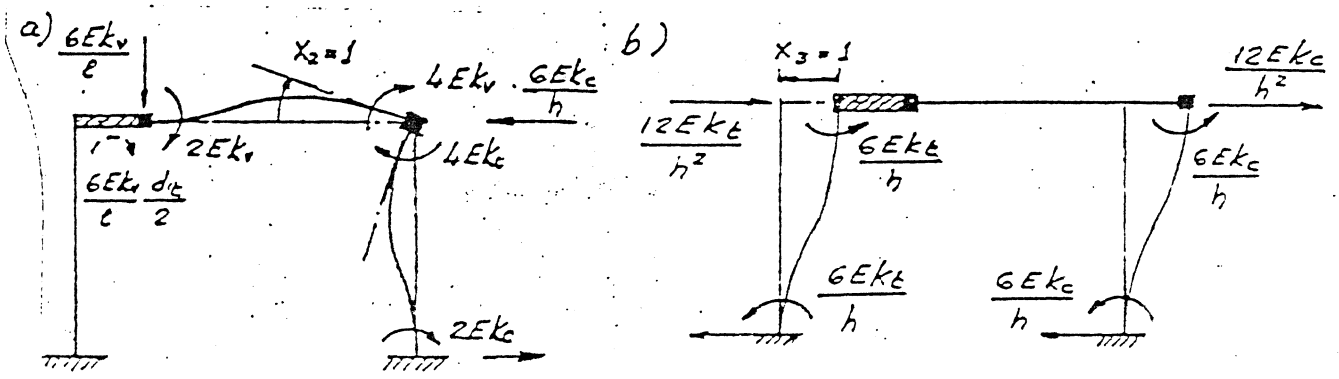


Figura 53

Si bien la configuración definitiva del diagrama de momentos flectores dependerá de las magnitudes relativas de las cargas P y q (además de la conformación geométrica de la estructura), tentativamente podrá acercarse a la consignada en la figura 54. De la misma se observa que $M_{1A} \neq M_{12}$. Para satisfacer la condición de equilibrio de nudo debe verificarse que

$$* \quad M_{1A} = -M_{12} - \frac{q.l}{2}.\frac{d_t}{2} - \frac{M_{12} + M_{21}}{l}.\frac{d_t}{2}$$

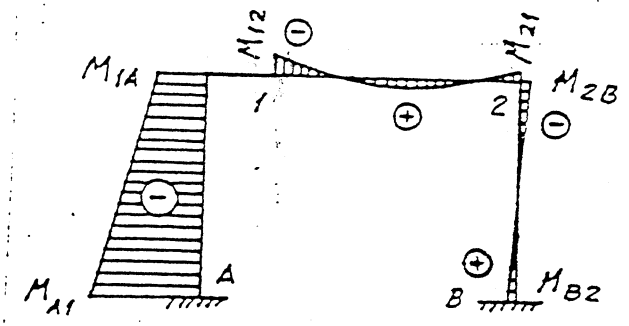


Figura 54

7.5.1. Influencia del esfuerzo de corte.

En el desarrollo efectuado en el apartado anterior se prescindió de la consideración del esfuerzo de corte para el cálculo de las solicitaciones. En caso de resultar necesario incluir el mismo, por su incidencia en el valor de las solicitaciones resultantes, y teniendo en cuenta que esta influencia se pone de manifiesto sólo en los elementos estructurales de dimensiones transversales considerables, el tabique en este caso, corresponderá aplicar para el mismo, al conformar los estados de desplazamiento unitario, las expresiones deducidas al efecto como casos 9 y 10 en el apartado 2.2.3.4., por lo que el primer sumando de la expresión de a_{11} se transforma en

$$4Ek_t.(1 + \lambda)/(1 + 4\lambda) = 4Ek_t'.(1 + \lambda) \qquad \text{y además}$$

$$a_{13} = a_{31} = - 6Ek_t/(1 + 4\lambda) = - 6Ek_t' \quad ; \quad a_{33} = 12E.(k_t' + k_c)/h^2$$

Los restantes valores no experimentan modificaciones respecto al desarrollo general efectuado en el apartado anterior.

7.6. Influencia del esfuerzo normal.

Si en una estructura, ya sea por la magnitud de las cargas actuantes y/o la esbeltez de sus elementos constitutivos, la deformación axil que éstos experimentan debido al esfuerzo normal a que se ven sometidos, adquiere valores cuya incidencia ya no puede ser despreciada en el cálculo de las solicitaciones internas, es posible efectuar la resolución por el método de los desplazamientos, siguiendo idénticos lineamientos que los precedentemente expuestos para pórticos en general, con la sola modificación en cuanto hace al criterio de determinación del grado de indeterminación cinemática que presenta en este caso la estructura.

En efecto; la circunstancia señalada hace inaplicable la suposición efectuada en los casos generales analizados, en el sentido de considerar que la longitud de las barras no experimenta modificación una vez deformada la estructura. En consecuencia, la nueva hipótesis introducida trae como consecuencia que las columnas o elementos verticales en general pueden modificar su longitud, lo que se traducirá en desplazamientos verticales en los extremos de las vigas que en ellos apoyan, mientras que en éstas, ya serán independientes entre sí los corrimientos que experimenta cada uno de sus extremos. Ambas circunstancias modifican el criterio seguido hasta el presente para la determinación del grado de indeterminación cinemática de la estructura, el que, al no existir ya ninguna interrelación entre los corrimientos de los extremos de cada barra, trae como consecuencia que todos los nudos de la estructura, pasen a ocupar posiciones independientes después de la deformación, por lo que para que las mismas queden definidas, es necesario conocer, además de la rotación experimentada por el nudo, la nueva posición del mismo mediante sus desplazamientos según las direcciones x e y.

En conclusión: en los casos en que para la resolución de la estructura sea necesario tener en cuenta las deformaciones que la misma experimenta debido a los esfuerzos normales, *el grado de indeterminación cinemática es directamente igual a 3n, siendo n el número de nudos que la estructura presenta.*

Sea por ejemplo el caso del pórtico simple biempotrado que muestra la figura 55a). Al presentar el mismo dos nudos, su grado de indeterminación cinemática será 6, consignándose en la figura 55b) las incógnitas correspondientes (dos de traslación y una de rotación en cada nudo), para todas las cuales se asume en principio signo positivo, manteniendo los criterios expuestos al respecto.

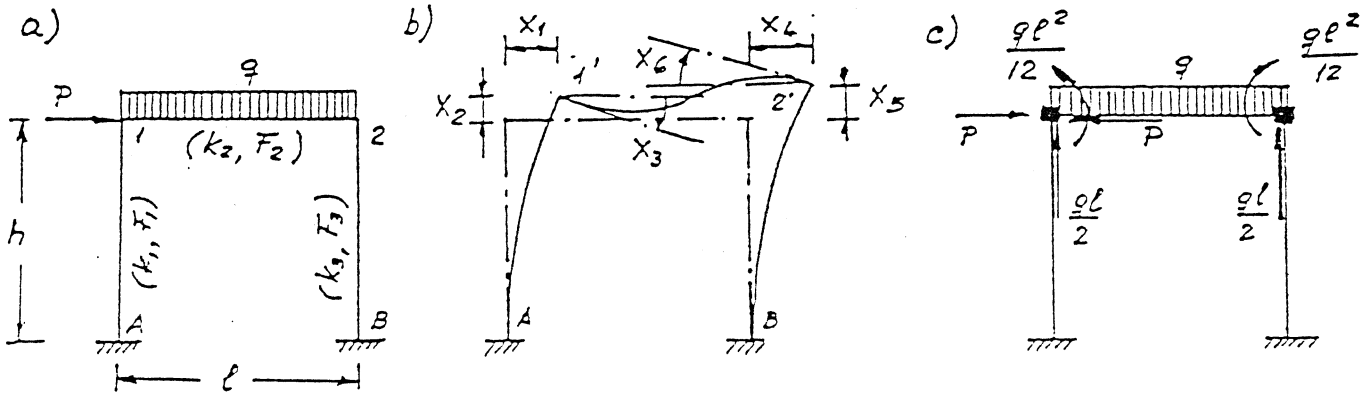


Figura 55

En la figura 55c) se señala la conformación del sistema fijo, y las acciones de restricción de desplazamientos que resultan del mismo. Cabe observar que en este caso -P debe aplicarse en el mismo nudo 1 donde actúa la acción exterior P, pues de lo contrario se originaría una deformación axil no restringida en la viga.

En consecuencia resulta:

$$A_{1o} = -P \quad ; \quad A_{2o} = \frac{q.l}{2} \quad ; \quad A_{3o} = -\frac{q.l^2}{12}$$

$$A_{4o} = 0 \quad ; \quad A_{5o} = \frac{q.l}{2} \quad ; \quad A_{6o} = \frac{q.l^2}{12}$$

Para conformar la [a_{xxu}], se procede en idéntica forma que para los casos anteriores, teniendo en cuenta que cuando se producen deformaciones axiles unitarias en las barras, el esfuerzo asociado es el correspondiente al caso 7 de la Tabla Nº 1.

Con la ayuda de las figuras 56 a) a f) pueden escribirse las expresiones de las a_{ik} correspondientes

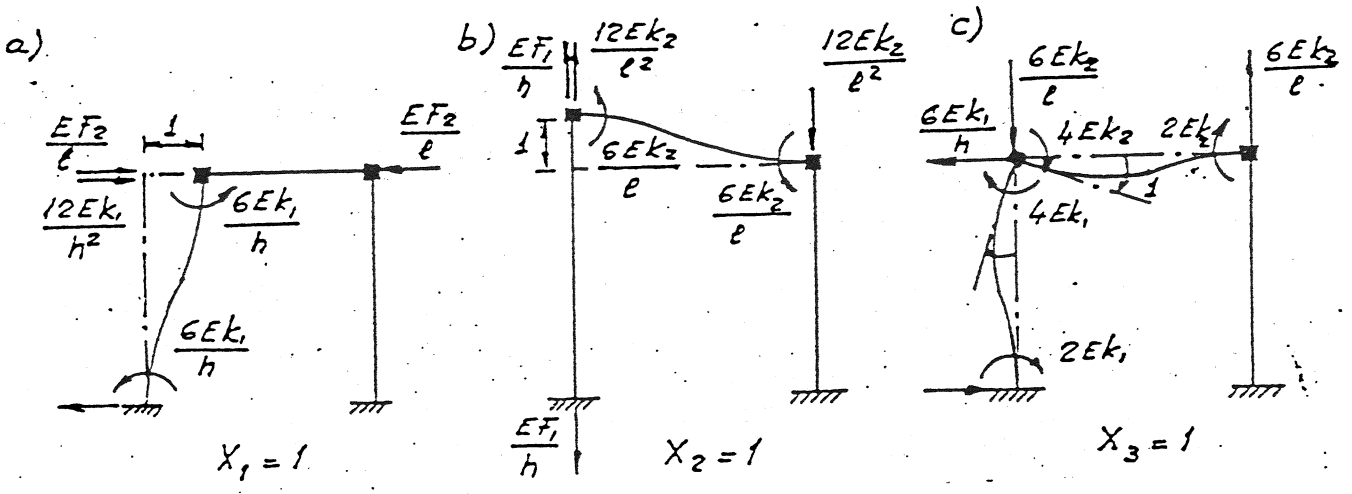


Figura 56

$a_{11} = 12Ek_1/h^2 + EF_2/l$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = -6Ek_1/h$
$a_{21} = 0$; $a_{22} = 12Ek_2/l^2 + EF_1/h$; $a_{23} = -6Ek_2/l$
$a_{31} = -6Ek_1/h$; $a_{32} = -6Ek_2/l$; $a_{33} = 4E(k_1+k_2)$
$a_{41} = -EF_2/l$; $a_{42} = 0$; $a_{43} = 0$
$a_{51} = 0$; $a_{52} = -12Ek_2/l^2$; $a_{53} = 6Ek_2/l$
$a_{61} = 0$; $a_{62} = -6Ek_2/l$; $a_{63} = 2Ek_2$

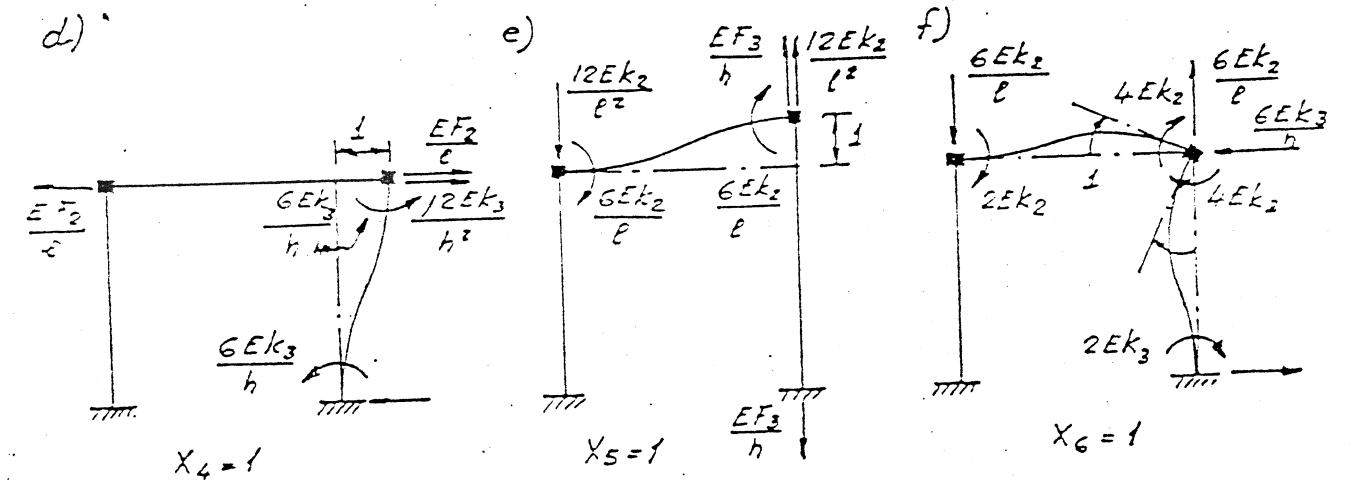


Figura 56 (Continuación)

$a_{14} = -EF_2/l$; $a_{15} = 0$; $a_{16} = 0$
$a_{24} = 0$; $a_{25} = -12Ek_2/l^2$; $a_{26} = -6Ek_2/l$
$a_{34} = 0$; $a_{35} = 6Ek_2/l$; $a_{36} = 2Ek_2$
$a_{44} = 12Ek_3/h^2 + EF_2/l$; $a_{45} = 0$; $a_{46} = -6Ek_3/h$
$a_{54} = 0$; $a_{55} = 12Ek_2/l^2 + EF_3/h$; $a_{56} = 6Ek_2/l$
$a_{64} = -6Ek_3/h$; $a_{65} = 6Ek_2/l$; $a_{66} = 4E(k_2+k_3)$

Con estos valores se puede formar el sistema de ecuaciones o la [axxu]. Obsérvese que se satisface la simetría de los términos de la matriz respecto a su diagonal principal.

Una vez calculados los valores de X_1, los momentos de extremos de miembro y los esfuerzos normales en cada barra resultarán de aplicar las (28) y (30), respectivamente.

8. MARCOS.

La resolución de estructuras continuas cerradas, tales como los marcos, se efectúa siguiendo idéntico procedimiento que el desarrollado para las estructuras analizadas precedentemente.

Sea el caso de un depósito o tanque con tabique divisorio, el que, visto en planta, presenta la configuración que se muestra en la figura 57a). Supóngase como estado de cargas que el compartimento izquierdo se halla solicitado por la presión de un líquido contenido en el mismo (p) y que el de la derecha se encuentre vacío.

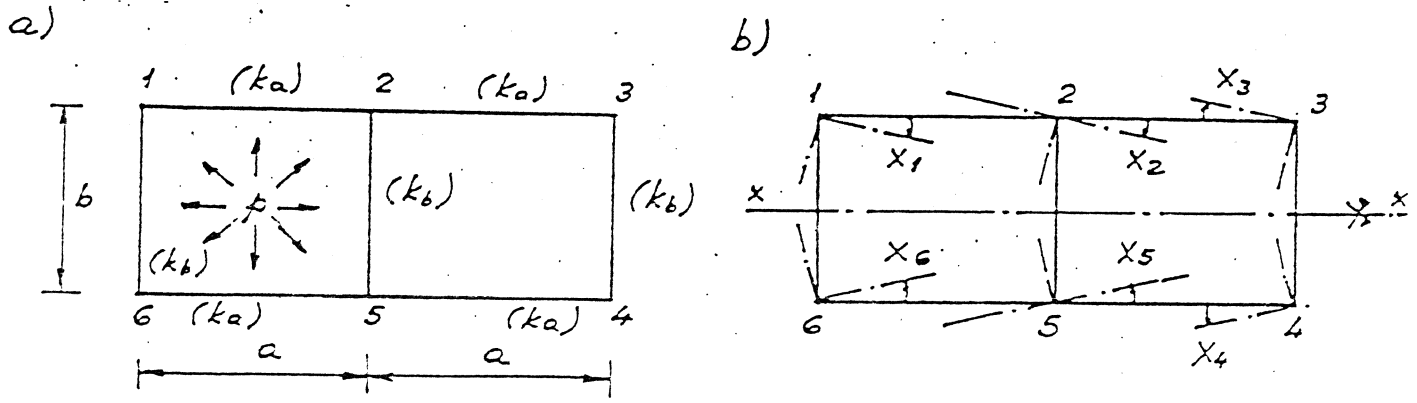


Figura 57

Como consecuencia de las características de simetría de la estructura y de las cargas actuantes, existirá también simetría en las deformaciones, lo que implica por una parte, que las rotaciones en los nudos 1, 2 y 3 son simétricas, respectivamente, a las que se producen en los nudos 6, 5 y 4, mientras que por otra parte, no existirán desplazamientos lineales de los nudos. En virtud de ello se deberán resolver los valores de 3 incógnitas, X_1, X_2 y X_3, cuyos sentidos como siempre, se suponen en principio positivos (figura 57b).

El sistema fijo y los estados unitarios se consignan respectivamente en las figuras 58a), b), c) y d). Las mismas permiten formular

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} p.a^2/12 - p.b^2/12 \\ p.b^2/12 - p.a^2/12 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; [a_{xxu}] = 2E. \begin{bmatrix} (2k_a+k_b) & k_a & 0 \\ k_a & (4k_a+k_b) & k_a \\ 0 & k_a & (2k_a+k_b) \end{bmatrix}$$

Cabe observar que en este caso las cargas p actúan de adentro hacia afuera (de abajo hacia arriba para las barras 1-2-3), por lo que los momentos de fijación son de signo contrario a los utilizados hasta el presente.

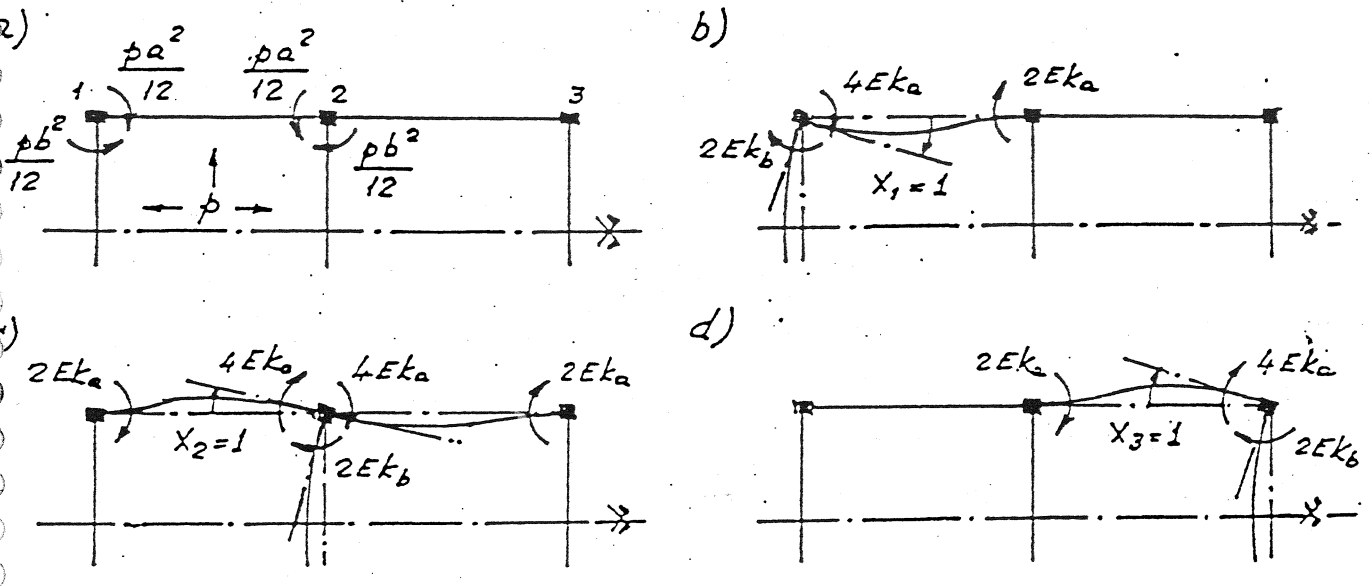


Figura 58

La obtención de los valores de X_1 y los de los momentos de extremo se realiza en la forma conocida. El diagrama de momentos toma la forma que indica la figura 59, en la que también se consigna la elástica de deformación. En los elementos b, el signo del momento máximo de tramo dependerá de la relación existente entre a y b.

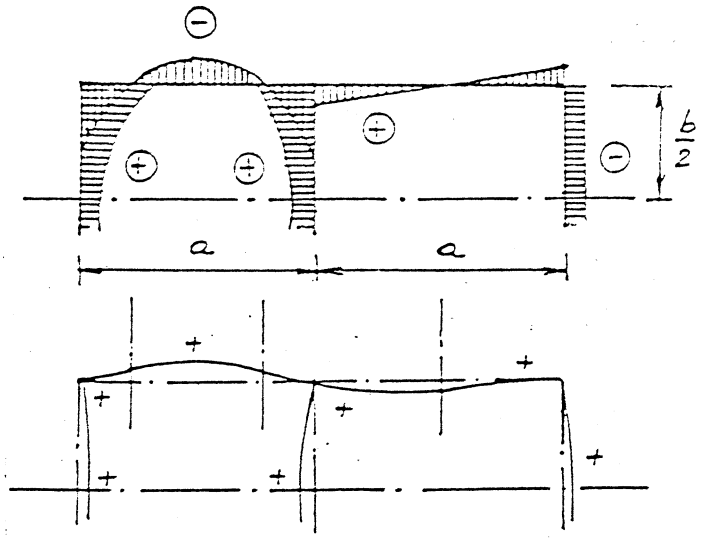


Figura 59

Si ambos compartimentos estuviesen solicitados por igual presión interior p (líquido a igual altura), también será eje de simetría el 2-5, con lo que X_1 y X_3 serán simétricamente iguales y $X_2 = 0$, manteniéndose las restantes condiciones resultantes de la simetría según el eje x. Queda así una estructura con una sola incógnita cinemática. En consecuencia (figuras 60a) y b), la ecuación de aplicación será

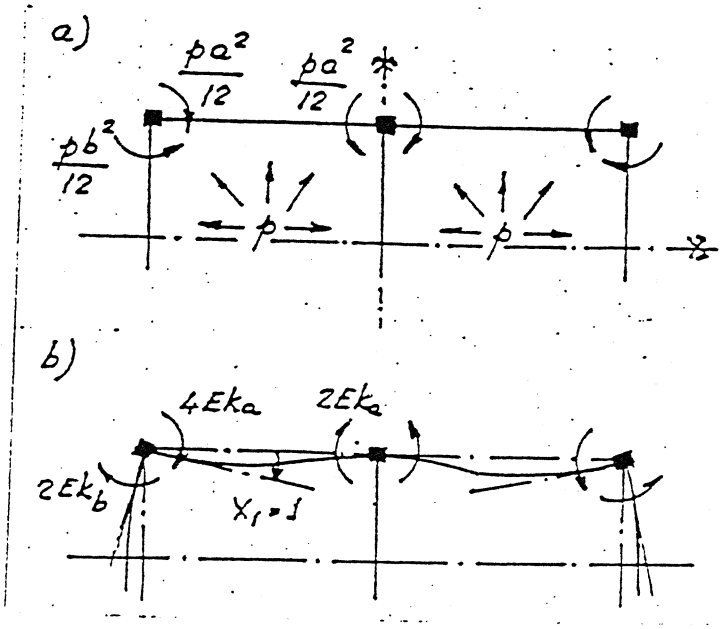


Figura 60

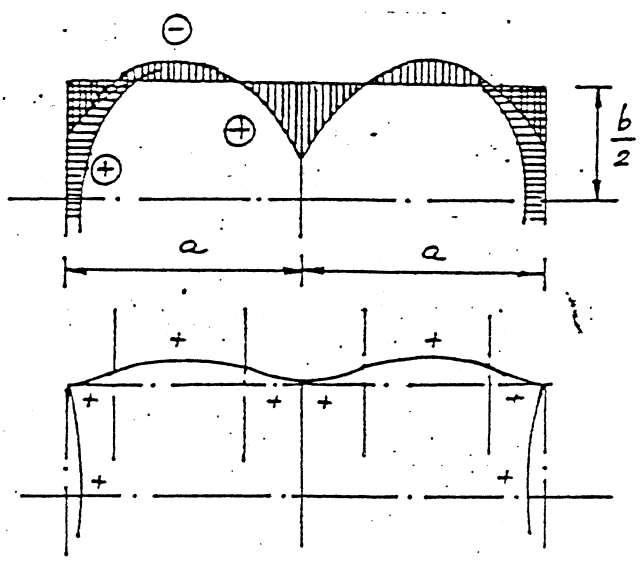


Figura 61

$$(p.a^2/12 - p.b^2/12) + (2.Ek_b + 4.Ek_a).X_1 = 0$$

El diagrama de momentos y la elástica de deformación tentativa se consignan en la figura 61.

Para la resolución de marcos apoyados, el procedimiento de análisis es análogo al estudiado. Por ejemplo, en el caso que muestra la figura 62a), se tendrán dos incógnitas (X_1 y X_A) si la estructura y las cargas son simétricas y 5 incógnitas (rotaciones de los 4 nudos y corrimiento horizontal de la barra 1-2) si no lo fuesen.

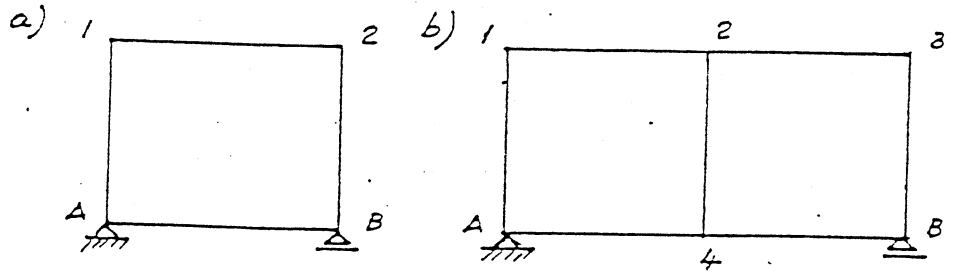


Figura 62

Para el marco apoyado con montante intermedio de la figura 62b), se deberán resolver 3 incógnitas (rotaciones en 1 y A y corrimiento vertical de la barra 2-4) en caso de simetría estructural y de cargas. Si alguna de estas condiciones no se diesen, se tendrán 8 incógnitas (giros de los 6 nudos, corrimiento horizontal de la barra superior 1-2-3 y corrimiento vertical de la barra 2-4).

9. MOVIMIENTO DE VINCULOS.

El método de los desplazamientos puede ser también aplicado al análisis de estructuras en las cuales se producen desplazamientos en sus vínculos, por lo general corrimientos y/o giros de secciones primitivamente consideradas indesplazables por constituir empotramientos o apoyos.

9.1. Movimientos no coincidentes con direcciones de incógnitas.

La expresión básica $[X] = -[a_{xxu}]^{-1}.[A_{xo}]$ puede ser aplicada en forma directa siempre que el movimiento del apoyo no se corresponda con uno de los desplazamientos desconocidos que forman la indeterminación cinemática. Sea por ejemplo la viga continua de la figura 63a), cuyo empotramiento A experimenta un descenso Δ_A.

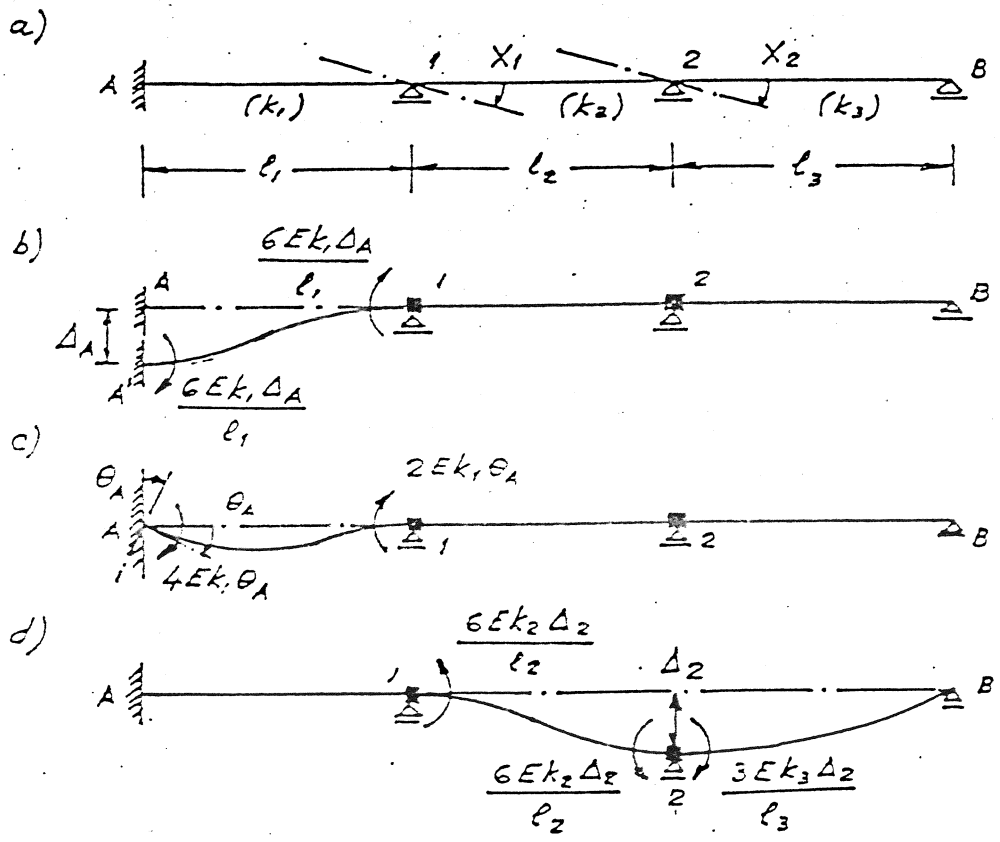


Figura 63

El grado de indeterminación cinemática de la estructura es 2, siendo los desplazamientos desconocidos a determinar, las rotaciones X_1 y X_2. El descenso vertical del apoyo A no se corresponde con ninguna de ellas. Las fuerzas restringentes necesarias para mantener los desplazamientos $X_1 = X_2 = 0$, se muestran en la figura 63b), que constituye el sistema fijo aplicado a este caso. Por lo tanto

$$A_{1o} = 6\ E.k_1.\ \Delta_A/l_1 \qquad ; \qquad A_{2o} = 0$$

Los estados $X_1 = 1$; $X_2 = 1$ son independientes ya de la acción exterior deformante, por lo que el resto de la resolución se efectúa según los lineamientos conocidos.

Si el movimiento de vínculos hubiese sido un giro θ_A en el empotramiento A, los términos independientes serían (figura 63c)

$$A_{1o} = 2\ E.k_1.\theta_A \qquad ; \qquad A_{2o} = 0$$

mientras que si, por ejemplo, en el apoyo 2 se hubiese experimentado un descenso Δ_2, resultaría (figura 63d)

$$A_{1o} = -\ 6\ E.k_2.\Delta_2/l_2 \quad ; \quad A_{2o} = -\ 6\ E.k_2.\Delta_2/l_2 + 3\ E.k_3.\Delta_2/l_3$$

9.2. Movimientos coincidentes con direcciones de incógnitas.

Un segundo caso se presenta cuando el movimiento del apoyo se corresponde con alguno de los desplazamientos incógnitos, en cuyo caso se hace necesario modificar el sistema de ecuaciones básicas.

Supóngase a tal efecto que en la misma viga continua de la figura 63a), se produce una rotación forzada del nudo 1. Ello podría ocurrir por ejemplo, si la viga AB estuviese conectada rígidamente en 1 a una viga horizontal perpendicular que le transmite un giro θ_1 conocido. Para producir esta rotación debe actuar en 1 un momento externo M_1 en el plano vertical que contiene a la viga AB.

Las ecuaciones de equilibrio quedan en este caso

$$\begin{aligned} -M_1 + a_{11}.X_1 + a_{12}.X_2 &= 0 \\ 0 + a_{21}.X_1 + a_{22}.X_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde los a_{ik} se determinan en la forma usual, $X_1 = \theta_1$ (dato), X_2 es el giro en el apoyo 2 (desconocido) y M_1 el par externo (también desconocido), aplicado en 1. La segunda de las ecuaciones permite despejar

$$X_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} X_1 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \theta_1$$

con lo que quedan definidas las incógnitas. Los momentos finales de extremo de barra resultarán en este caso de

$$[M_e] = [m_{exu}].[X]$$

resultando $M_1 = M_{1A} + M_{12}$.

10. ESTRUCTURAS ESPACIALES.

En el caso de estructuras espaciales, el grado de indeterminación cinemática es igual a la cantidad de desplazamientos nodales que es necesario conocer a fin de definir el estado de deformación de la estructura.

Si a nivel de ejemplo se considera el emparrillado plano de la figura 64a), se tendrán como incógnitas (figura 64b): el corrimiento vertical X_1 (descenso) del nudo de encuentro entre ambas vigas (supuestas perpendiculares entre sí) y las rotaciones de las secciones correspondientes al mismo nudo, en la dirección de cada viga (X_2 para la viga A-B y X_3 para la C-D).

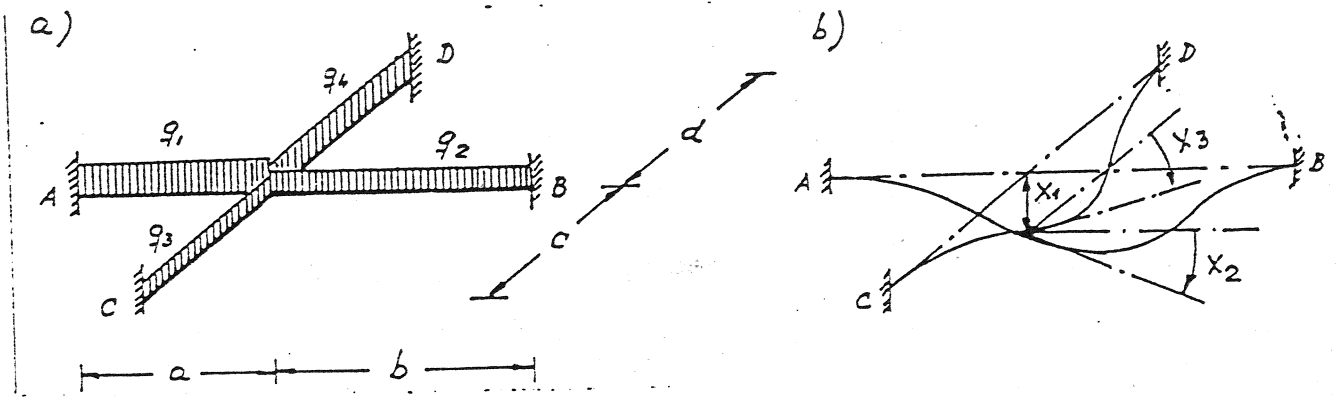


Figura 64

Para la determinación de los signos, se supondrá que la viga transversal C-D es vista desde el semieje positivo del eje de las x. Para que en tales condiciones se verifique la reciprocidad en valor y signo, se debe tomar para los corrimientos verticales el sentido positivo hacia abajo.

El sistema fijo es el que se ha desglosado para mayor claridad en la figura 65, y el mismo permite formular

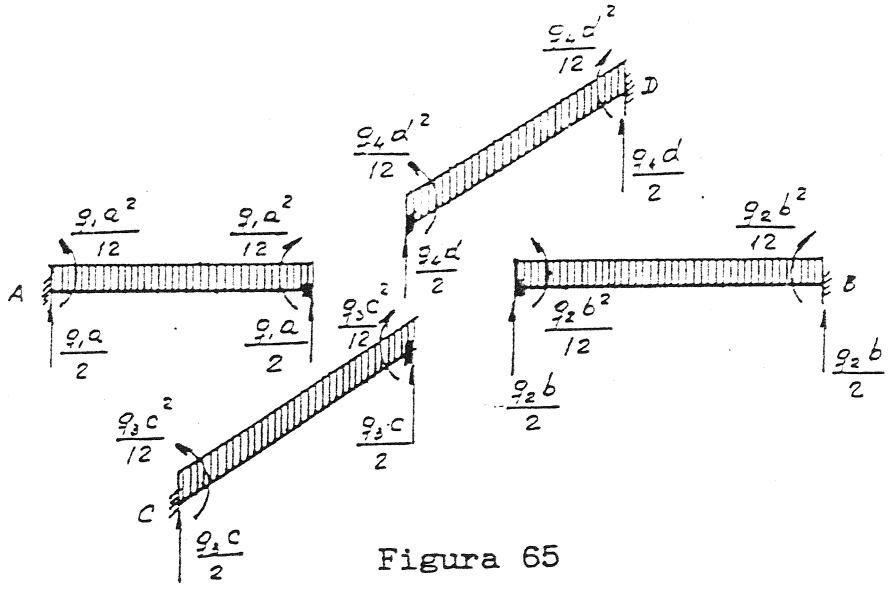


Figura 65

$$A_{1o} = -\tfrac{1}{2}\,(q_1.a + q_2.b + q_3.c + q_4.d)$$

$$A_{2o} = \frac{q_1.a^2}{12} - \frac{q_2.b^2}{12} \qquad ; \qquad A_{3o} = \frac{q_3.c^2}{12} - \frac{q_4.d^2}{12}$$

Los estados de $X_1 = 1$ se muestran en las figuras 66a), b) y c). De los mismos resulta

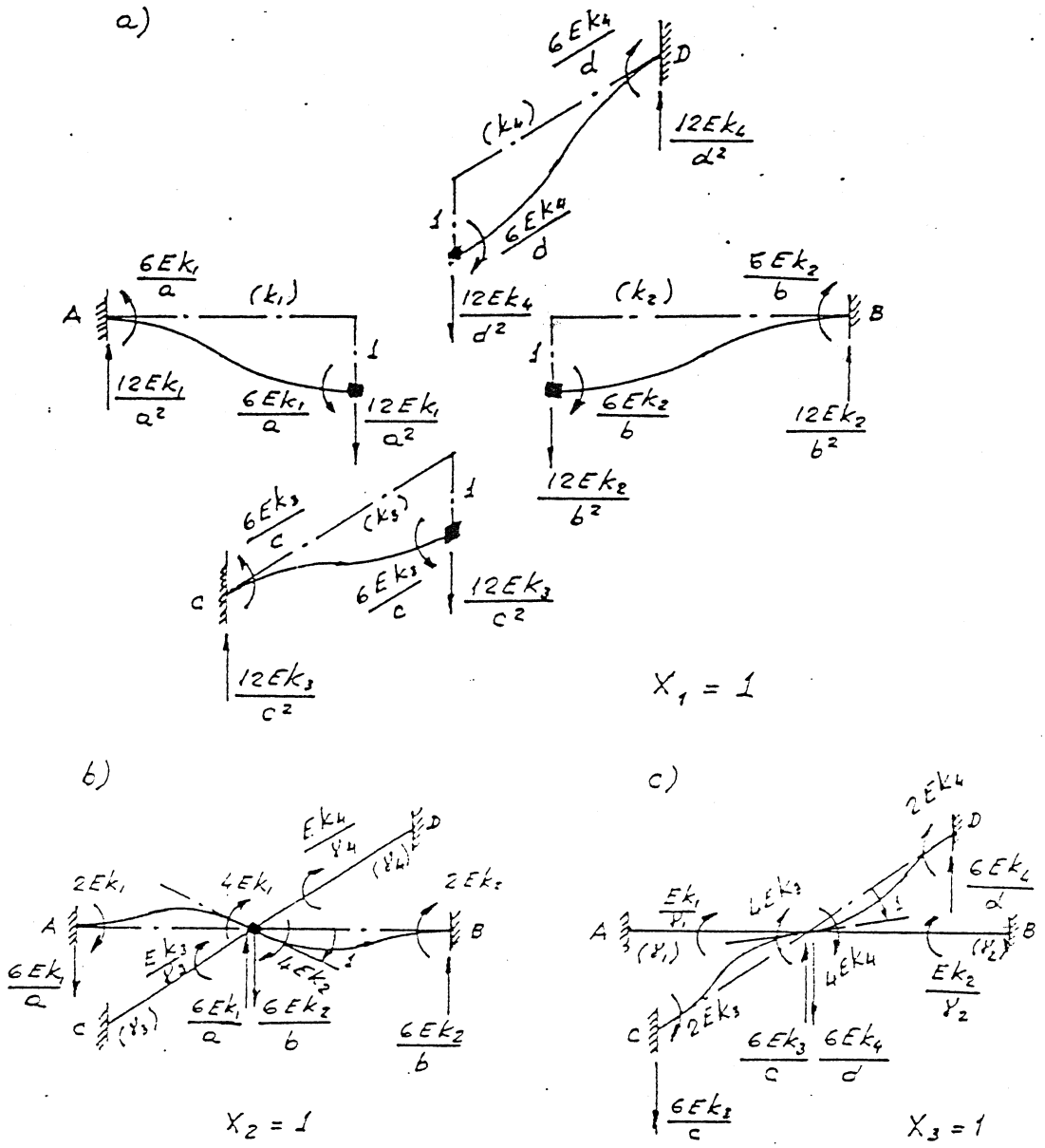


Figura 66

$$a_{11} = 12\,E.\left(\frac{k_1}{a^2} + \frac{k_2}{b^2} + \frac{k_3}{c^2} + \frac{k_4}{d^2}\right) \quad ; \quad a_{23} = a_{32} = 0$$

$$a_{22} = 4E(k_1 + k_2) + E.\left(\frac{k_3}{\tau_3} + \frac{k_4}{\tau_4}\right) \; ; \; a_{12} = a_{21} = 6E.\left(\frac{k_2}{b} - \frac{k_1}{a}\right)$$

$$a_{33} = 4E(k_3 + k_4) + E.\left(\frac{k_1}{\tau_1} + \frac{k_2}{\tau_2}\right) \; ; \; a_{13} = a_{31} = 6E.\left(\frac{k_4}{d} - \frac{k_3}{c}\right)$$

10.1. Casos Particulares.

a) Si existiese simetría de dimensiones y de carga en cada una de las direcciones perpendiculares consideradas en la estructura analizada en el apartado anterior, en forma individual (no necesariamente conjunta), o sea que: $a = b$; $c = d$; $q_1 = q_2$; $q_3 = q_4$; $\tau_1 = \tau_2$; $\tau_3 = \tau_4$, se tendrá, por la consecuente simetría de deformaciones, que $X_2 = X_3 = 0$ (las tangentes a las elásticas en el punto de intersección son horizontales), reduciéndose la resolución de la estructura al planteo de una única ecuación, que permite obtener el valor de X_1.

b) *Viga balcón.* Puede también resolverse aplicando la metodología seguida para la viga de emparrillado plano precedentemente desarrollada, teniendo en cuenta que las incógnitas elásticas siguen siendo 3, y que para su obtención son de aplicación las expresiones de A_{i0} y de a_{ij} desarrolladas en el apartado anterior, con sólo hacer

$$c = d = 0 \; ; \; q_3 = q_4 = 0 \; ; \; k_3 = k_4 = 0 \; ; \; \tau_3 = \tau_4 = 0$$

11. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

3. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

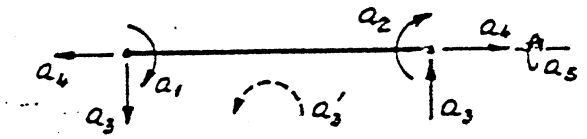
4. "MECANICA DE CONSTRUCCION" - Tomos I y II - V. A. Kiseliov - Editorial Mir - Moscú - 1972.

5. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana - México - 1997.

6. "ESTABILIDAD III" - Capítulo 4: Método de las Incógnitas Elásticas - Carlos D. Segerer - 1986.

A N E X O: T A B L A S

TABLA N° 1. Valores de a_{ik}.



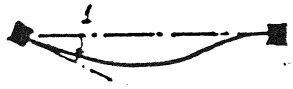
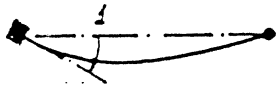
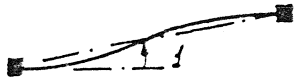
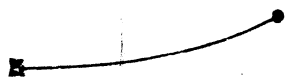
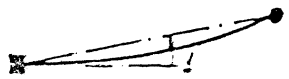
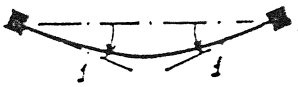
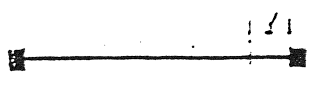
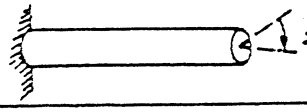
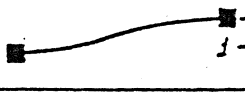
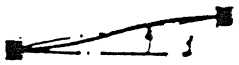
Caso	Tipo de desplazamiento	a_1	a_2	a_3	a_3'	a_4	a_5
1		$4Ek$	$2Ek$	$\frac{6Ek}{\ell}$	$6Ek$	0	0
2		$3Ek$	0	$\frac{3Ek}{\ell}$	$3Ek$	0	0
3		$\frac{6Ek}{\ell}$	$\frac{6Ek}{\ell}$	$\frac{12Ek}{\ell^2}$	$\frac{12Ek}{\ell}$	0	0
3'		$6Ek$	$6Ek$	$\frac{12Ek}{\ell}$	$12Ek$	0	0
4		$\frac{3Ek}{\ell}$	0	$\frac{3Ek}{\ell^2}$	$\frac{3Ek}{\ell}$	0	0
4'		$3Ek$	0	$\frac{3Ek}{\ell}$	$3Ek$	0	0
5		$2Ek$	$-2Ek$	0	0	0	0
6		$6Ek$	$6Ek$	$\frac{12Ek}{\ell}$	$12Ek$	0	0
7		0	0	0	0	$\frac{EF}{\ell}$	0
8		0	0	0	0	0	$\frac{Ek}{\ell}$

TABLA N° 1 (Conclusión). Valores de a_{ik}.

Caso	Tipo de desplazamiento	a_1	a_2	a_3	a'_3	a_4	a_5
9	Con influencia del esfuerzo de corte [$k' = \frac{k}{(1+4\lambda)}$]	$4Ek'(1+\lambda)$	$2Ek'(1-2\lambda)$	$\frac{6Ek'}{\ell}$	$6Ek'$	0	0
10		$\frac{6Ek'}{\ell}$	$\frac{6Ek'}{\ell}$	$\frac{12Ek'}{\ell^2}$	$\frac{12Ek'}{\ell}$	0	0
10'		$6Ek'$	$6Ek'$	$\frac{12Ek'}{\ell}$	$12Ek'$	0	0

NOTAS:

* Para desplazamientos contrarios a los indicados en los diagramas de la columna respectiva, debe invertirse el signo de todos los a_i.

* Excepto para los términos $-a_i$, son válidos los sentidos indicados en el esquema del encabezamiento.

TABLA N° 2.

$\lambda = 0,20$

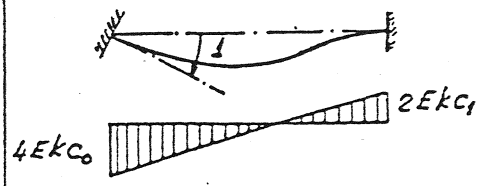
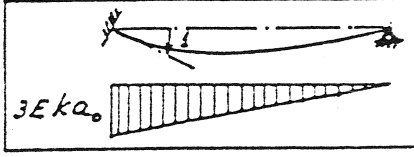
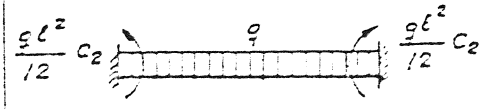
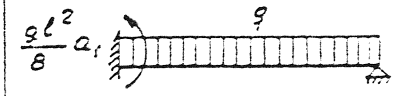
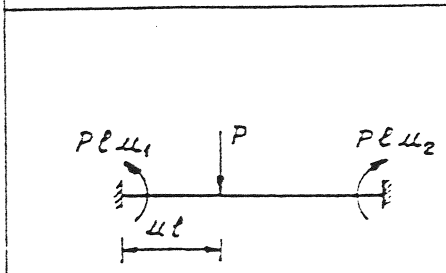
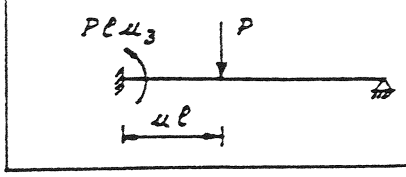
Tipo de desplazamiento	Coeficiente	$n = \frac{J}{J_a}$	
		0.30	0.25
	C_0	1,527	1,615
	C_1	1,840	1,989
	a_0	1,294	1,333

TABLA N° 3.

$\lambda = 0,20$

Tipo de cargas	Coeficiente		$n = \frac{J}{J_a}$	
			0.30	0.25
	C_2		1,128	1,143
	a_1		1,212	1,239
	μ_1	$\mu = 0.25$	0,170	0,173
		$\mu = 0.50$	0,144	0,146
		$\mu = 0.75$	0.041	0.041
	μ_2	$\mu = 0.25$	0.041	0.041
		$\mu = 0.50$	0.144	0.146
		$\mu = 0.75$	0.170	0.173
	μ_3	$\mu = 0.25$	0.195	0.199
		$\mu = 0.50$	0.231	0.237
		$\mu = 0.75$	0.144	0.149

INDICE

CAPITULO IV: METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Página

1. Fundamentos del método 1
   1.1. Comparación con el Método de las Fuerzas. 1
   1.2. Generalización del Método de los Desplazamientos. . . 5
   1.3. Grado de indeterminación cinemática 7

2. Formulación del sistema de ecuaciones para el cálculo. . . 9
   2.1. Convención de signos. 10
   2.2. Cálculo de los coeficientes y términos independientes 12

3. Cálculo de las solicitaciones. 24

4. Aplicación a la determinación de desplazamientos 25

5. Resolución de estructuras hiperestáticas 26

6. Resolución de vigas continuas. 26
   6.1. Trazado de la elástica de deformación 29
   6.2. Vigas continuas acarteladas 30
   6.3. Vigas continuas sobre apoyos elásticos. 31

7. Estructuras aporticadas. 35
   7.1. Caso de pórticos con nudos indesplazables 35
   7.2. Caso de pórticos con nudos desplazables 37
   7.3. Casos particulares. 45
   7.4. Verificaciones. 52
   7.5. Pórtico con tabique 54
   7.6. Influencia del esfuerzo normal. 57

8. Marcos 60

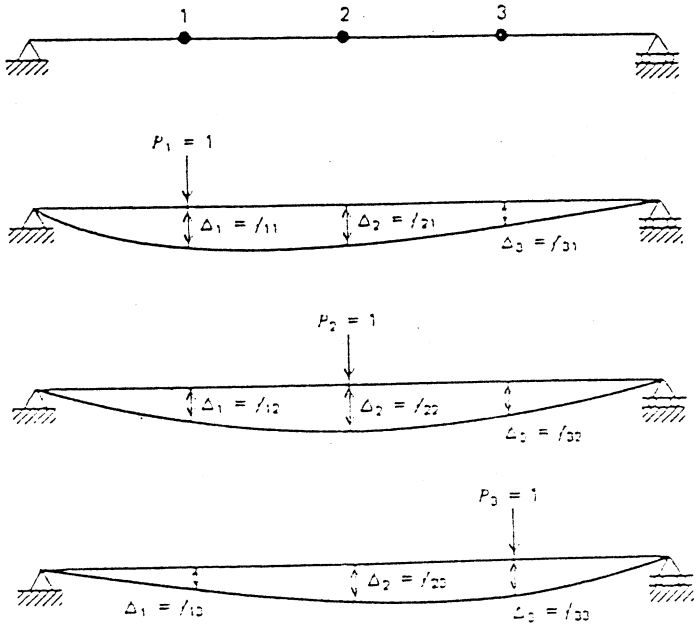
9. Movimiento de vínculos 63
   9.1. Movimientos no coincidentes con direcciones de incógnitas. 63
   9.2. Movimientos coincidentes con direcciones de incógnitas. 64

10. Estructuras espaciales 64
    10.1. Casos particulares 67

11. Bibliografía consultada 67

    ANEXO: Tablas. 68

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO V

METODO DE LA FLEXIBILIDAD

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO V

RESOLUCION MATRICIAL DE ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS: METODO DE LA FLEXIBILIDAD

1. INTRODUCCION A LOS METODOS MATRICIALES.

1.1. Flexibilidad y Rigidez.

En el Capítulo II se puso en evidencia que las acciones y los desplazamientos desempeñan roles fundamentales en análisis estructural, haciéndose referencia también a la existencia de relaciones interactivas biunívocas entre ambos. Es decir que las acciones producen desplazamientos y los desplazamientos pueden implicar la existencia de acciones.

Debido a la naturaleza interactiva de acciones y desplazamientos, resulta conveniente definir términos que midan la relación existente entre ambos parámetros. Se presentan dos maneras diferentes de establecer estas relaciones: una emplea el concepto de rigidez y la otra usa el de flexibilidad.

La rigidez brinda una medida de las acciones (fuerzas y/o pares) asociados con un conjunto dado de desplazamientos. Si se considera por ejemplo, la viga de la figura 1a), sujeta a la acción de la fuerza A, como respuesta a la misma, la viga experimenta un desplazamiento Δ en el punto y en la dirección de la fuerza aplicada. De manera semejante, si la viga se hallase sujeta a la acción del momento A (figura 1b), se producirá un desplazamiento angular en su dirección y plano de aplicación Δ.

En cualquier caso, el valor de Δ dependerá de la acción y de las características propias de la estructura.

Si se supone que el desplazamiento varía en forma proporcional con la carga, es decir que la estructura es linealmente elástica, verificando la ley de Hooke, la gráfica de carga vs. desplazamiento será como la representada en la figura 1c). La pendiente de la recta resultante se define como rigidez R, y estará dada por la expresión

$$R = \frac{A}{\Delta} \qquad (1)$$

Si se conoce el valor de R, la acción A asociada con cualquier desplazamiento Δ está dada por

$$A = R.\Delta \qquad (2)$$

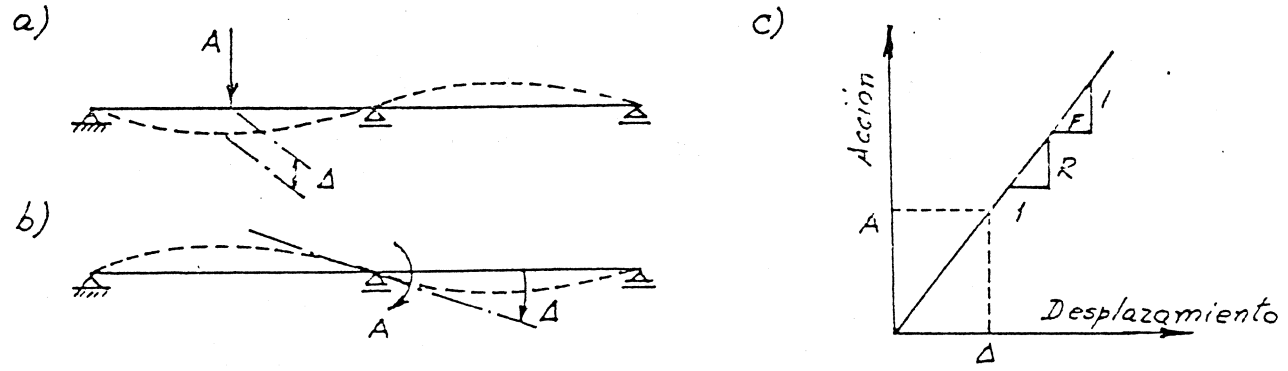


Figura 1

Considerando un desplazamiento unitario, $\Delta = 1$, la expresión anterior se transforma en $A = R$, lo que permite definir a la rigidez, en su forma más simple, *como la acción que es necesario aplicar en algún punto (o sección) para producir en el mismo un desplazamiento unitario.*

La **flexibilidad** es el concepto inverso de la rigidez. Es decir, la flexibilidad brinda una medida de los valores de los desplazamientos que están asociados con un conjunto dado de acciones. Para las estructuras indicadas en las figuras 1a) y b), la flexibilidad F (figura 1c) está dada por

$$F = \frac{\Delta}{A} \qquad (3)$$

Nuevamente, suponiendo la estructura linealmente elástica, puede determinarse el desplazamiento Δ que resulta a partir de una acción dada A, mediante

$$\Delta = F.A \qquad (4)$$

Si se supone una acción unitaria $A = 1$, la expresión anterior resultará $\Delta = F$, lo que permite definir a la flexibilidad en su forma básica, *como el desplazamiento que se produce en un punto (o sección) por la aplicación en el mismo de una acción unitaria.*

De las (1) y (3) resulta

$$R = \frac{A}{\Delta} = \frac{1}{F} \qquad \text{luego:} \qquad R = F^{-1} \quad \text{y} \quad F = R^{-1} \qquad (5)$$

que expresan la relación inversa que existe entre las rigideces y las flexibilidades estructurales.

1.2. Formulación matricial de los métodos para análisis de estructuras hiperestáticas.

Los métodos presentados en los Capítulos III y IV para analizar estructuras estáticamente indeterminadas, pueden ser

agrupados en dos tipos generales: el método de las fuerzas y el método de los desplazamientos. Ambos métodos se han desarrollado a un grado tal que pueden ser aplicados a prácticamente cualquier estructura, ya sea armaduras, vigas, marcos, etc. Sin embargo, en la actualidad, el método de los desplazamientos tiene un uso más amplio, debido a que puede ser programado con mayor facilidad para su implementación en las computadoras.

Ambos métodos de análisis pueden ser redefinidos bajo este nuevo enfoque, el que, cabe tenerlo siempre presente, se limita sólo a la mecánica operativa, sin modificar los conceptos inherentes propios de cada método. Tales conceptos pueden ser resumidos en:

- ***Método de las fuerzas.*** En este método, llamado también de la *flexibilidad* o de la *compatibilidad*, los vínculos superabundantes (o redundantes), se escogen y eliminan de la estructura, de modo que quede una estructura estáticamente determinada. Se plantea una ecuación de compatibilidad de desplazamientos en cada sección de la que se ha excluido un vínculo redundante. Estas ecuaciones se escriben en términos de las acciones originadas en tales vínculos consideradas como incógnitas. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones así formado y conocidas las incógnitas, las fuerzas internas restantes pueden determinarse por medio de la estática.

- ***Método de los desplazamientos.*** En este método, llamado también de la *rigidez* o del *equilibrio*, los desplazamientos de los nudos, necesarios para describir totalmente la forma deformada de la estructura, se usan como incógnitas en un sistema de ecuaciones. Una vez resuelto el mismo y determinados los desplazamientos, sus valores se sustituyen en las relaciones acción - deformación de cada elemento para determinar las diversas solicitaciones internas.

2. MATRIZ DE FLEXIBILIDAD.

En los dos casos elementales considerados en las figuras 1a) y b), la flexibilidad se presentó simplemente como la relación desplazamiento - acción en un punto (o sección) de una estructura. Para extender el concepto a la totalidad de los elementos de la misma, y mediante ello posibilitar su aplicación al cálculo de desplazamientos en particular, y a la resolución de estructuras hiperestáticas en general, la flexibilidad debe ser definida según un patrón más comprensible, que permita obtener las relaciones interactivas Δ - A, en primer lugar para cada barra o miembro estructural individualmente considerado, y luego extendido a la totalidad de los que conformen la estructura.

2.1. Matriz de flexibilidad de un elemento individual.

Sea un elemento genérico 1-2, aislado de una estructura cualquiera (figura 2a), de longitud l, momento de inercia de su sección transversal J y módulo de elasticidad longitudinal de su material constitutivo E.

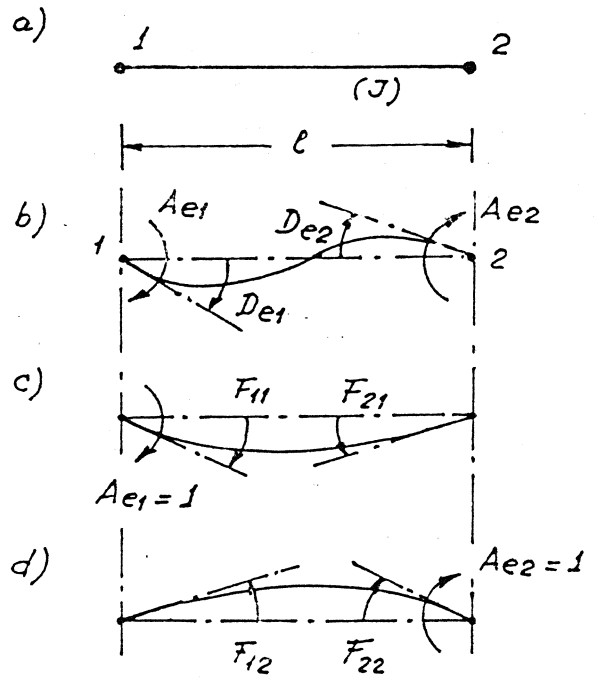


Figura 2

Debido a las acciones actuantes, tanto las que estén directamente aplicadas sobre el elemento como las transmitidas por las cargas que actúan en el resto de la estructura, las secciones extremas (o nodales) 1 y 2, se hallan solicitadas por acciones (pares en este caso), que se denominarán A_{e1} y A_{e2} (acción de extremo 1 y acción de extremo 2, respectivamente).

En forma simultánea, como consecuencia de la deformación experimentada por la estructura, en esas mismas secciones extremas se producirán desplazamientos (rotaciones en este caso), que se designarán por D_{e1} y D_{e2} (figura 2b). [Se utilizará en los desarrollos siguientes la nomenclatura D para los desplazamientos, para evitar confusiones entre las letras A y Δ].

Cabe observar que conocidas las acciones de extremo A_{e1} y A_{e2} y las cargas eventualmente actuantes en el elemento, quedan definidos todos los diagramas de solicitaciones internas del mismo, y además, conocidas las rotaciones extremas y las cargas actuantes, queda también determinada la configuración de la elástica de deformación del miembro estructural, en todos los casos por aplicación del principio de independencia de las acciones (eventualmente de los desplazamientos) y de superposición de los efectos.

Volviendo a la figura 2b), para determinar la relación existente entre los desplazamientos nodales D_e y las acciones A_e (dentro de los límites del campo elástico), debe aplicarse, por una parte el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos, y por otra, el concepto de las flexibilidades expuesto en el apartado 1.1., calculadas en base a la aplicación de acciones unitarias.

Conforme a lo anterior, en la figura 2c) se aplica sobre el elemento una acción $A_{e1} = 1$, que por definición genera en las secciones extremas desplazamientos que serán directamente iguales a las flexibilidades en tales extremos y para la condición de carga unitaria aplicada, F_{11} y F_{21}. El primer subíndice indica siempre la dirección del desplazamiento (extremos 1 y 2 en este caso) y el segundo subíndice la causa que lo produce (acción aplicada en 1).

El razonamiento precedente es extensivo al estado $A_{e2} = 1$ y los desplazamientos de extremo F_{12} y F_{22} que el mismo provoca (figura 2d).

Multiplicando los estados unitarios de las figuras 2c) y d) por los verdaderos valores de A_{e1} y A_{e2} y sumando, se obtendrán las magnitudes de los desplazamientos extremos reales del elemento, indicados en la figura 2b). O sea que

$$D_{e1} = F_{11}.A_{e1} + F_{12}.A_{e2}$$
$$D_{e2} = F_{21}.A_{e1} + F_{22}.A_{e2} \qquad (6)$$

Organizando en cada caso los desplazamientos y las acciones en un sólo vector

$$[D_e] = \begin{bmatrix} D_{e1} \\ D_{e2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_e] = \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix}$$

y la matriz de los coeficientes que afectan a las acciones

$$[F_e] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

a la que se denomina **matriz de flexibilidad** del elemento estructural considerado. A su vez, los elementos individuales F_{ik} que la componen, se llaman *coeficientes de flexibilidad* y sus unidades son las de desplazamientos por unidad de acción. Los coeficientes de flexibilidad, por definición, dan los desplazamientos nodales producidos por cargas unitarias.

Como consecuencia de las expresiones anteriores, las (6) pueden escribirse en forma matricial como

$$[D_e] = [F_e].[A_e] \qquad (8)$$

expresión similar a la (4), en la que se plantea la relación entre los desplazamientos nodales considerados en el elemento estructural y todas las acciones en sus respectivas direcciones, a través de la matriz de flexibilidad del elemento.

2.2. Matriz de flexibilidad de una estructura.

Para extender el concepto de la matriz de flexibilidad de un elemento individual al de toda una estructura en su conjunto,

considérese por ejemplo el caso de la estructura formada por varios elementos a, b, c, que muestra la figura 3.

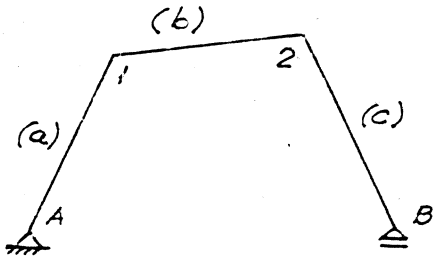


Figura 3

Para cada uno de sus elementos constitutivos se podrá formular la (8), o sea

$$[D_e]_a = [F_e]_a . [A_e]_a$$
$$[D_e]_b = [F_e]_b . [A_e]_b$$
$$[D_e]_c = [F_e]_c . [A_e]_c$$

Expresando en una única formulación matricial

$$\begin{bmatrix} [D_e]_a \\ [D_e]_b \\ [D_e]_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_e]_a & 0 & 0 \\ 0 & [F_e]_b & 0 \\ 0 & 0 & [F_e]_c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} [A_e]_a \\ [A_e]_b \\ [A_e]_c \end{bmatrix}$$

y en forma general

$$[D_e] = [F_E] . [A_e] \qquad (9)$$

expresión análoga a la (8), válida ahora para toda la estructura, ya sea ésta isostática o hiperestática, y en la que

$$[D_e] = \begin{bmatrix} [D_e]_a \\ [D_e]_b \\ [D_e]_c \end{bmatrix} ; \quad [F_E] = \begin{bmatrix} [F_e]_a & 0 & 0 \\ 0 & [F_e]_b & 0 \\ 0 & 0 & [F_e]_c \end{bmatrix} ; \quad [A_e] = \begin{bmatrix} [A_e]_a \\ [A_e]_b \\ [A_e]_c \end{bmatrix} \qquad (10)$$

En definitiva resulta que puede formularse una expresión única y general que reune los desplazamientos nodales de todos los miembros de la estructura y todas las acciones que le son correspondientes, agrupadas en cada caso en sendos vectores, relacionadas entre sí por medio de la matriz de flexibilidad de toda la estructura, conformada colocando en diagonal las submatrices correspondientes a todos los elementos individuales que la constituyen. El orden en que se consideran los elementos es indistinto, pero debe ser siempre el mismo en cada vector y en la matriz.

2.3. Formas de la matriz de flexibilidad para distintos tipos de solicitaciones interiores.

La matriz de flexibilidad de un miembro estructural toma diversas conformaciones, con distintas cantidades de filas y columnas, según que sean o no despreciables las influencias de N y Q en los valores de los desplazamientos nodales o que se trate de elementos de estructuras espaciales, en las cuales se presentan

también momentos torsores. Para la formulación de estas matrices deben tenerse presente las convenciones de signos establecidas para los desplazamientos en los capítulos anteriores, es decir que los giros serán positivos o negativos según que las secciones respectivas roten en sentido horario o antihorario, mientras que las variaciones de longitud que pueda experimentar una barra serán positivas si son alargamientos y negativas si fuesen acortamientos.

2.3.1. Elementos solicitados sólo por flexión.

Corresponde al caso de las estructuras planas de alma llena en que es despreciable la influencia de N y Q, y se corresponde con el consignado en la figura 2. Cuando $A_{e1} = 1$ y $A_{e2} = 0$ resulta $D_{e1} = F_{11}$ y $D_{e2} = F_{21}$ (figura 2c), constituyendo ambos valores la primera columna de la matriz de flexibilidad $[F_e]$ dada por la expresión (7). De igual manera, al hacer $A_{e2} = 1$ y $A_{e1} = 0$, se tendrá que $D_{e1} = F_{12}$ y $D_{e2} = F_{22}$ (figura 2d), valores estos últimos que conforman la segunda columna de la matriz de flexibilidad.

Por lo tanto, así como en la expresión (4) F corresponde al desplazamiento producido por una acción unitaria única en su propia dirección, en la (8) $[F_e]$ representa un conjunto de desplazamientos extremos, aplicables a elementos solicitados por flexión, tomados ordenadamente y que son producidos en todos los casos por acciones unitarias. Cada columna contiene los desplazamientos producidos en cada dirección de los extremos considerados, haciendo sucesivamente las acciones respectivas iguales a uno ($A_{e1} = 1$ para la primera columna; $A_{e2} = 1$ para la segunda).

Los valores de las rotaciones que se producen en ambos extremos de un elemento al aplicar en uno de ellos un par M, fueron obtenidas en el apartado 6.2.1. del Capítulo II, fórmulas (119), siendo para el presente caso M = 1. Teniendo en cuenta estas expresiones y las figuras 2c) y 2d), resulta

$$F_{11} = \frac{1}{3\,E.J} \quad ; \quad F_{21} = -\frac{1}{6\,E.J}$$

$$F_{12} = -\frac{1}{6\,E.J} \quad ; \quad F_{22} = \frac{1}{3\,E.J}$$

con lo que la matriz de flexibilidad para un elemento estructural en las condiciones supuestas será

$$[F_e] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\,E.J} & -\frac{1}{6\,E.J} \\ -\frac{1}{6\,E.J} & \frac{1}{3\,E.J} \end{bmatrix} = \frac{1}{6\,E.J} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

o también recordando que J/l = k

$$[F_e] = \frac{1}{6\ E.k}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

2.3.2. Elementos solicitados por flexión y corte.

En caso de no ser despreciable la incidencia del esfuerzo de corte en la deformación, deberá considerarse el valor de las rotaciones de extremo deducidas bajo tal supuesto. De acuerdo al desarrollo pertinente efectuado en el apartado 2.2.3.4. del Capítulo IV, expresiones (13) resulta, con M = 1

$$F_{11} = \frac{l}{3\ E.J}(1+\lambda) \quad ; \quad F_{21} = -\frac{l}{6\ E.J}(1-2\lambda)$$

$$F_{12} = -\frac{l}{6\ E.J}(1-2\lambda) \quad ; \quad F_{22} = \frac{l}{3\ E.J}(1+\lambda)$$

con lo que la matriz de flexibilidad correspondiente adopta la forma

$$[F_e] = \begin{bmatrix} \frac{l}{3\ E.J}(1+\lambda) & -\frac{l}{6\ E.J}(1-2\lambda) \\ -\frac{l}{6\ E.J}(1-2\lambda) & \frac{l}{3\ E.J}(1+\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{l}{6\ E.J}\begin{bmatrix} 2.(1+\lambda) & -(1-2\lambda) \\ -(1-2\lambda) & 2.(1+\lambda) \end{bmatrix} \qquad (13)$$

2.3.3. Elementos solicitados por flexión y esfuerzo normal.

Si no es despreciable (por la magnitud de las cargas, la longitud de los elementos o su sección transversal) la influencia del esfuerzo normal en la deformación que tales elementos experimentan, al caso básico mostrado en la figura 2, deberá agregársele un tercer extremo o tercera dirección nodal, correspondiente a la solicitación axial A_{e3} y su respectivo desplazamiento D_{e3} (figura 4b).

En consecuencia, al aplicarse sucesivamente los estados de acciones unitarias se tendrá

1°) $A_{e1} = 1$; $A_{e2} = A_{e3} = 0$ (figura 4c), en cuyo caso

$$F_{11} = \frac{l}{3\ E.J} \quad ; \quad F_{21} = -\frac{l}{6\ E.J} \quad ; \quad F_{31} = 0$$

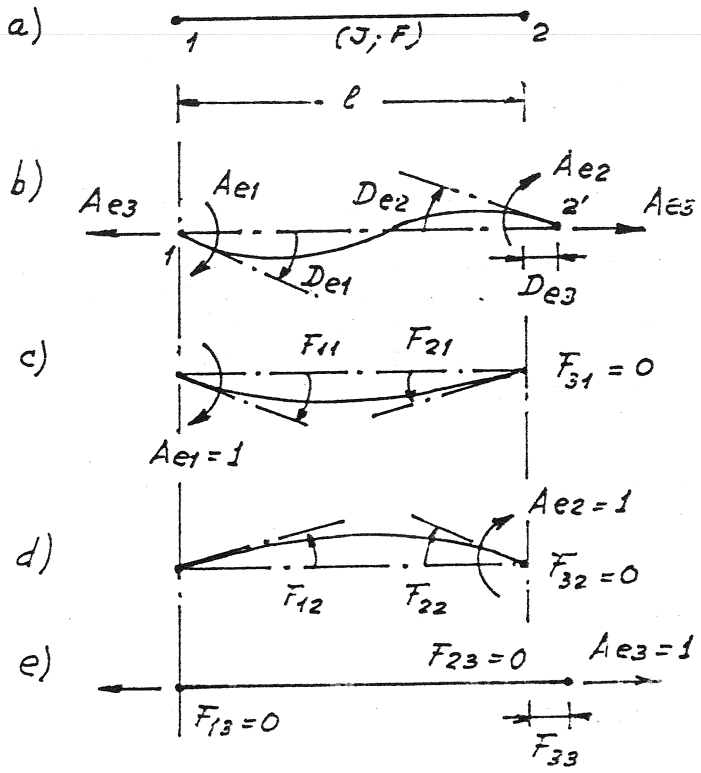


Figura 4

2°) $A_{e1} = 0$; $A_{e2} = 1$; $A_{e3} = 0$ (figura 4d)

$$F_{12} = -\frac{1}{6\,E.J} \quad ; \quad F_{22} = \frac{1}{3\,E.J} \quad ; \quad F_{32} = 0$$

3°) $A_{e1} = A_{e2} = 0$; $A_{e3} = 1$ (figura 4e),

$$F_{13} = 0 \quad ; \quad F_{23} = 0 \quad ; \quad F_{33} = \frac{1}{E.F}$$

término este último que corresponde a la variación de longitud l producida por una acción unitaria [expresión (10) del Capítulo II, con N = 1]. En consecuencia la matriz de flexibilidad será

$$[F_e] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\,E.J} & -\frac{1}{6\,E.J} & 0 \\ -\frac{1}{6\,E.J} & \frac{1}{3\,E.J} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E.F} \end{bmatrix} = \frac{1}{6\,E.J} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6\,J}{F} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

2.3.4. Caso de barras de estructuras de reticulado.

Para estructuras de reticulado se producen únicamente solicitaciones (S) dirigidas en las direcciones del eje de cada barra, además de los correspondientes desplazamientos lineales 1, con lo que, tomando en consideración la (14) se anulan todos los coeficientes de flexibilidad relacionados con la flexión.

En consecuencia, la flexibilidad correspondiente a una barra de un reticulado tendrá por expresión el valor de F_{33} de la (14), o sea

$$F_e = \frac{1}{E.F} \qquad (15)$$

2.3.5. Elementos solicitados por flexión y torsión.

Puede considerarse para este caso, por extensión, el estado representado en la figura 4, con sólo reemplazar mentalmente la acción normal A_{e3} por un par torsor y adecuar a la deformación por torsión los desplazamientos F_{13} y F_{31}, según corresponda.

Se observa que respecto a la (14) sólo se modificará el coeficiente de flexibilidad F_{33}, que estará dado por la (24) del Capítulo II, que para $M_t = 1$ resulta

$$F_{33} = \frac{1}{G.J_T}$$

En consecuencia, la matriz de flexibilidad resultará en este caso

$$[F_e] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\,E.J} & -\frac{1}{6\,E.J} & 0 \\ -\frac{1}{6\,E.J} & \frac{1}{3\,E.J} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G.J_T} \end{bmatrix} = \frac{1}{6\,E.J} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6\,\tau \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Al extraer E.J como factor común, el término F_{33} se transforma en

$$\frac{1}{G.J_T} = \frac{1}{G.J_T}.\frac{E.J}{E.J} = \frac{1}{E.J}.\frac{E.J}{G.J_T} = \frac{1.\tau}{E.J} \qquad (17)$$

siendo τ la relación entre la rigidez a la flexión E.J y la rigidez a la torsión $G.J_T$.

3. EXPRESION DEL TTV EN FORMA MATRICIAL.

3.1. Deducción.

En el apartado 3.3. del Capítulo II se desarrolló la demostración del TTV llegándose, según la (68) del referido Capítulo, a que $Te = Ti^{(d)}$.

Debe tenerse presente que en ambos miembros los trabajos a considerar son producidos por las acciones del sistema no deformante en los desplazamientos causados por el sistema deformante. Si como tal se considera un sistema de acciones y se aplica la (78) del Capítulo II a una estructura de varios elementos, resulta

$$Te = \Sigma \int \overline{M} \frac{M}{E.J} ds + \Sigma \int \overline{N} \frac{N}{E.F} ds + \Sigma \psi \int \overline{Q} \frac{Q}{G.F} ds \qquad (18)$$

Sea la estructura que muestra la figura 5a), siendo indistinto que la misma sea isostática o hiperestática, a la que por hipótesis se supondrá solicitada por un sistema de acciones nodales P_o, que como tales cumplan la condición de hallarse aplicadas únicamente en los nudos. O sea que no se considera la posibilidad de la presencia de cargas concentradas intermedias en las barras ni cargas distribuidas a lo largo de las mismas. La figura indica también los diagramas M_o y N_o correspondientes. Para cada barra, el primero tendrá variación lineal y el segundo conformación rectangular, como consecuencia de la hipótesis asumida de que el sistema P_o está compuesto sólo por acciones (fuerzas y/o pares) nodales.

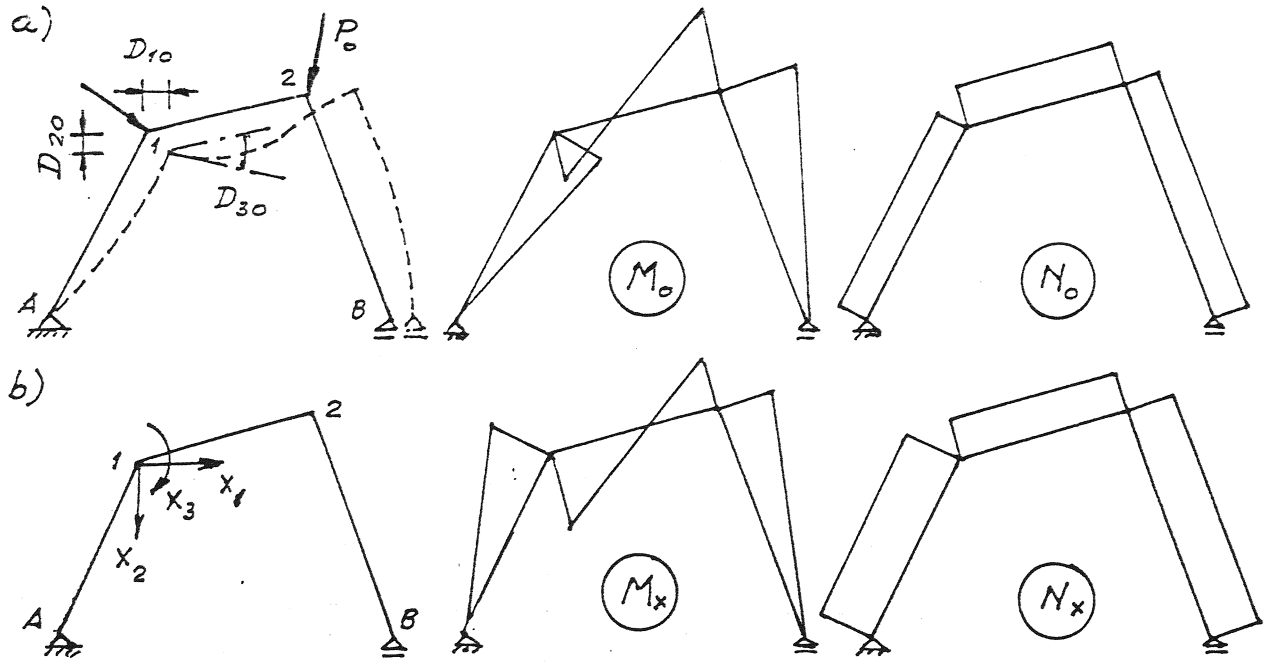


Figura 5

Supóngase que como incógnitas se establece un conjunto de desplazamientos nodales cualesquiera, sin que existan límites para la cantidad de aquéllas. Por ejemplo, se considerará que se desean determinar los tres desplazamientos que definen la posición deformada del nudo 1, según las direcciones que se denominarán 1 (eje x); 2 (eje y) y 3 (rotación); es decir que las incógnitas serán D_{1o}, D_{2o} y D_{3o}. Agrupándolas en un único vector de incógnitas D_{xo}, se podrá expresar

$$[D_{xo}] = \begin{bmatrix} D_{1o} \\ D_{2o} \\ D_{3o} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Para la nomenclatura empleada, el primer subíndice indica la dirección 1, 2 y 3 para los desplazamientos individualizados, generalizados por x para la expresión sintética, y el segundo la causa que los origina, o sea el sistema de cargas P_o.

Este sistema P_o de cargas actuante sobre la estructura constituye obviamente el sistema deformante para aplicar el TTV. Como sistema no deformante, para poder expresar los trabajos pertinentes, se deberá considerar un sistema de acciones ficticias o virtuales X_1, X_2 y X_3 en la dirección de cada incógnita y en el orden preestablecido (figura 5b, la que también indica los diagramas M_x y N_x debidos a este sistema, para los que, por iguales razones, será válida la discusión efectuada para el sistema anterior respecto a su configuración), con lo que

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

En estas condiciones, el trabajo de las acciones exteriores será

$$T_e = X_1.D_{1o} + X_2.D_{2o} + X_3.D_{3o} = [X]^T.[D_{xo}] \qquad (21)$$

Corresponde ahora efectuar el análisis del $Ti^{(d)}$, dado por el segundo miembro de la (18), para lo cual en un primer paso, se limitará la consideración a la influencia de M y N. Adecuando dicha expresión a esta limitación y a la nomenclatura empleada (subíndice *o* para el sistema deformante y subíndice *x* para el sistema no deformante), resulta

$$Ti^{(d)} = \Sigma \int M_x \frac{M_o}{E.J}\, ds + \Sigma \int N_x \frac{N_o}{E.F}\, ds \qquad (22)$$

A los efectos de desarrollar esta expresión se considerará primeramente una barra genérica cualquiera, la 1-2 por ejemplo, para luego, una vez obtenida la misma, extender la sumatoria a la totalidad de los elementos que componen la estructura. Es decir

$$Ti^{(d)}_{1-2} = \int M_x \frac{M_o}{E.J}\, ds + \int N_x \frac{N_o}{E.F}\, ds \qquad (23)$$

expresión en la cual M_o y N_o corresponden a las ordenadas de los diagramas de M y N producidos en la barra considerada para el sistema deformante (figura 6a), mientras que M_x y N_x serán las ordenadas homólogas de los diagramas respectivos del sistema no deformante (figura 6b). Los valores extremos para los momentos son en cada caso $i_1 = A_{e1o}$; $i_2 = A_{e2o}$; $k_1 = A_{e1x}$; $k_2 = A_{e2x}$.

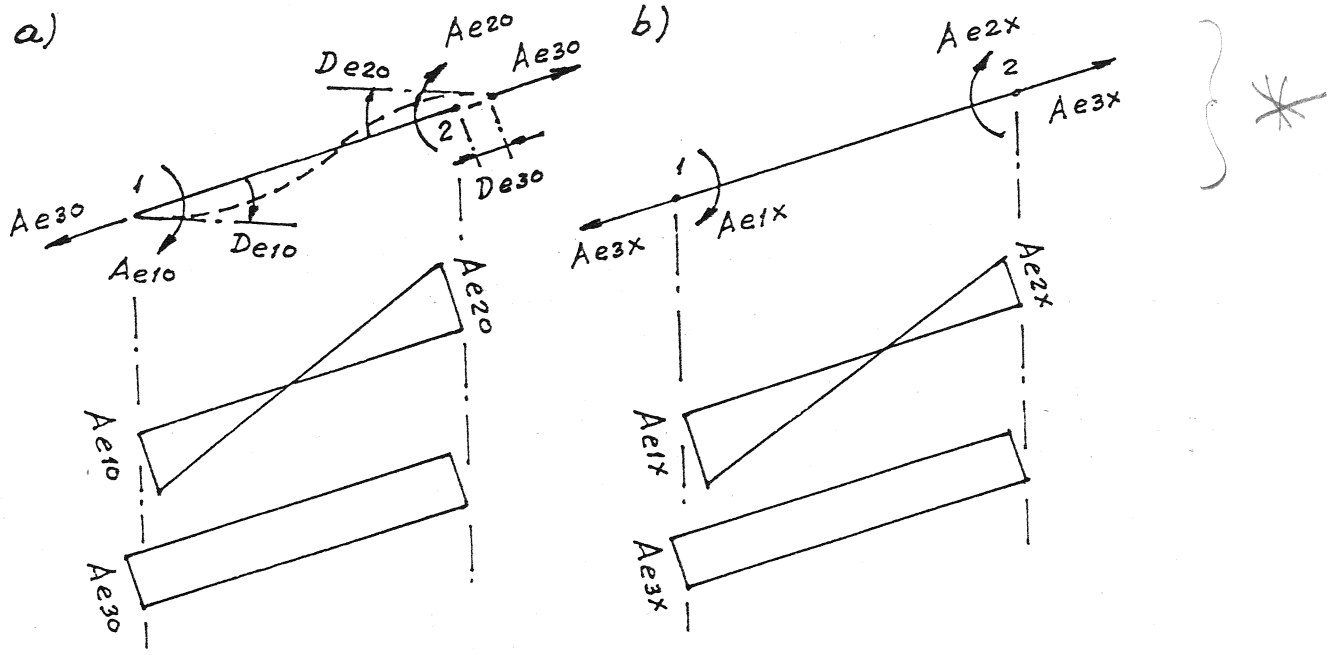


Figura 6

La integración de dos diagramas triangulares cruzados fue desarrollada en el apartado 3.7.1.5. del Capítulo II, estando dada por la expresión (85) del mismo, mientras que la correspondiente a dos diagramas rectangulares es i.k.s. En consecuencia

$$Ti^{(d)}_{1-2} = \frac{A_{e1x}.A_{e1o}}{3\,E.J}.l - \frac{A_{e1x}.A_{e2o}}{6\,E.J}.l + \frac{A_{e2x}.A_{e2o}}{3\,E.J}.l - \frac{A_{e2x}.A_{e1o}}{6\,E.J}.l + \frac{A_{e3x}.A_{e3o}}{E.F}.l \qquad (24)$$

Agrupando términos

$$Ti^{(d)}_{1-2} = A_{e1x}.\left(\frac{A_{e1o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e2o}.l}{6\,E.J}\right) + A_{e2x}.\left(\frac{A_{e2o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e1o}.l}{6\,E.J}\right) + A_{e3x}.\frac{A_{e3o}.l}{E.F} \qquad (25)$$

De la elástica de la barra 1-2 producida por las acciones nodales actuantes, se observa que (figura 6a)

$$D_{e1o} = \frac{A_{e1o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e2o}.l}{6\,E.J} \quad ; \quad D_{e2o} = \frac{A_{e2o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e1o}.l}{6\,E.J}$$

$$D_{e3o} = \frac{A_{e3o}.l}{E.F}$$

expresiones que reemplazadas en la (25) permiten obtener

$$Ti^{(d)}_{1-2} = A_{e1x}.D_{e1o} + A_{e2x}.D_{e2o} + A_{e3x}.D_{e3o} = [A_{ex}]^T.[D_{eo}] \quad (26)$$

al hacer

$$[A_{ex}] = \begin{bmatrix} A_{e1x} \\ A_{e2x} \\ A_{e3x} \end{bmatrix} \quad ; \quad [D_{eo}] = \begin{bmatrix} D_{e1o} \\ D_{e2o} \\ D_{e3o} \end{bmatrix} \quad (27)$$

El trabajo interno de deformación correspondiente a todos los elementos de la estructura será

$$Ti^{(d)} = \Sigma\, [A_{ex}]^T.[D_{eo}] \quad (28)$$

Si en lugar de considerar un vector [X] con acciones arbitrarias para formar $[A_{ex}]$, se considerase aplicado en la dirección de los desplazamientos que constituyen las incógnitas un sistema $X_1 = 1$; $X_2 = 1$ y $X_3 = 1$ y con tales acciones se conformase la matriz $[A_{exu}]$, se tendrá

$$[A_{ex}] = [A_{exu}].[X] \quad (29)$$

y transponiendo

$$[A_{ex}]^T = [X]^T.[A_{exu}]^T \quad (30)$$

Por otra parte, según la (8), adecuando la nomenclatura para poner en evidencia el sistema correspondiente (P_o)

$$[D_{eo}] = [F_e].[A_{eo}] \quad (31)$$

Reemplazando las (30) y (31) en la (28)

$$Ti^{(d)} = \Sigma\, [X]^T.[A_{exu}]^T.[F_e].[A_{eo}] = [X]^T.\Sigma\, [A_{exu}]^T.[F_e].[A_{eo}] \quad (32)$$

por ser el vector [X] independiente de la consideración de las barras de la estructura. Recordando que $Te = Ti^{(d)}$, surge la igualdad de las (21) y (32)

$$[X]^T.[D_{xo}] = [X]^T.\Sigma\, [A_{exu}]^T.[F_e].[A_{eo}]$$

$$[D_{xo}] = \Sigma\, [A_{exu}]^T.[F_e].[A_{eo}] \quad (33)$$

Esta sumatoria puede ser tratada en idéntica forma a la referida en el apartado 2.2., con lo que la (33) puede escribirse

$$[D_{xo}] = [A_{exu}]^T.[F_E].[A_{eo}] \quad (34)$$

donde

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} & A_{e13} \\ A_{e21} & A_{e22} & A_{e23} \\ A_{e31} & A_{e32} & A_{e33} \\ A_{e41} & A_{e42} & A_{e43} \\ A_{e51} & A_{e52} & A_{e53} \\ A_{e61} & A_{e62} & A_{e63} \\ A_{e71} & A_{e72} & A_{e73} \\ A_{e81} & A_{e82} & A_{e83} \\ A_{e91} & A_{e92} & A_{e93} \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} A_{e1o} \\ A_{e2o} \\ A_{e3o} \\ A_{e4o} \\ A_{e5o} \\ A_{e6o} \\ A_{e7o} \\ A_{e8o} \\ A_{e9o} \end{bmatrix}$$

refiriéndose los primeros subíndices e1, e2 y e3 a las direcciones nodales o extremas del elemento A-1; los subíndices e4, e5 y e6 a las de la barra 1-2 y e7, e8 y e9 a las de la barra 2-B. Por su parte los segundos subíndices corresponden: el "o" al sistema deformante y los 1, 2 y 3 a acciones unitarias aplicadas en tales direcciones.

La $[F_E]$ por su parte toma la configuración indicada por la segunda de las (10), respondiendo cada submatriz a la expresión dada por la (14). Si se desprecia la incidencia de N en la deformación, se aplicará la (11) o la (12), según resulte más conveniente.

La (34) constituye la expresión matricial del TTV para el caso particular supuesto en la hipótesis de partida, de asumir un sistema deformante (P_o) constituido sólo por acciones nodales. El caso de cargas en las barras se tratará en el apartado 3.3.

3.2. Consideración de la influencia del esfuerzo de corte.

Si además del efecto de la flexión y el del esfuerzo normal se hace necesario incorporar el del esfuerzo de corte, debe partirse para efectuar el desarrollo de la expresión (18). Bajo la hipótesis asumida de considerar sólo acciones exteriores nodales, el diagrama de Q de cada barra será también rectangular, con ordenadas para la barra genérica 1-2 de $(A_{e1o} + A_{e2o})/l$ para el sistema deformante y $(A_{e1x} + A_{e2x})/l$ para el sistema no deformante. Con ello la (24) pasará a expresarse

$$Ti^{(d)}_{1-2} = \frac{A_{e1x}.A_{e1o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e1x}.A_{e2o}.l}{6\,E.J} + \frac{A_{e2x}.A_{e2o}.l}{3\,E.J} -$$

$$- \frac{A_{e2x}.A_{e1o}.l}{6\,E.J} + \frac{\psi.l}{G.F}.\frac{(A_{e1x} + A_{e2x})}{l}.\frac{(A_{e1o} + A_{e2o})}{l} + \frac{A_{e3x}.A_{e3o}.l}{E.F} =$$

$$= \frac{A_{e1x}.A_{e1o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e1x}.A_{e2o}.l}{6\,E.J} + \frac{A_{e2x}.A_{e2o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e2x}.A_{e1o}.l}{6\,E.J} + \frac{\psi}{G.F.l}.$$

$$.[(A_{e1x}.A_{e1o})+(A_{e1x}.A_{e2o})+(A_{e2x}.A_{e1o})+(A_{e2x}.A_{e2o})] + \frac{A_{e3x}.A_{e3o}.l}{E.F}$$

$$Ti^{(d)}_{1-2} = A_{e1x}.\left(\frac{A_{e1o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e2o}.l}{6\,E.J} + \frac{\psi.A_{e1o}}{G.F.l} + \frac{\psi.A_{e2o}}{G.F.l}\right) +$$

$$+ A_{e2x}.\left(\frac{A_{e2o}.l}{3\,E.J} - \frac{A_{e1o}.l}{6\,E.J} + \frac{\psi.A_{e1o}}{G.F.l} + \frac{\psi.A_{e2o}}{G.F.l}\right) - \frac{A_{e3x}.A_{e3o}.l}{E.F} \qquad (35)$$

El primer paréntesis de esta expresión puede escribirse

$$\frac{A_{e1o}.l}{3\,E.J}.\left(1 + \frac{\psi.3\,E.J}{G.F.l^2}\right) - \frac{A_{e2o}.l}{6\,E.J}.\left(1 - 2\,\frac{\psi.3\,E.J}{G.F.l^2}\right) =$$

$$= \frac{A_{e1o}.l}{3\,E.J}.(1+\lambda) - \frac{A_{e2o}.l}{6\,E.J}.(1-2\lambda) = D_{e1o}$$

Análogamente para el segundo paréntesis de la (35)

$$\frac{A_{e2o}.l}{3\,E.J}.\left(1 + \frac{\psi.3\,E.J}{G.F.l^2}\right) - \frac{A_{e1o}.l}{6\,E.J}.\left(1 - 2\,\frac{\psi.3\,E.J}{G.F.l^2}\right) =$$

$$= \frac{A_{e2o}.l}{3\,E.J}.(1+\lambda) - \frac{A_{e1o}.l}{6\,E.J}.(1-2\lambda) = D_{e2o}$$

Las expresiones de los giros extremos D_{e1o} y D_{e2o} surgen de las (13) del Capítulo IV. Al efectuar el reemplazo en la (35) se llega a una expresión idéntica a la (26), por lo que a partir de la misma el desarrollo es análogo al del caso general.

En conclusión, el método es perfectamente aplicable para calcular desplazamientos en los que se deba tener en cuenta la incidencia de Q, con sólo considerar la (13) al formular la matriz de flexibilidad.

3.3. Caso de cargas no nodales.

Tal como se pusiera de manifiesto en las hipótesis de partida asumidas en el apartado 3.1. para desarrollar la formulación matricial del TTV, la expresión (34) es válida siempre que las acciones que constituyen el sistema deformante P_o se hallen aplicadas en los nudos de la estructura, o sea en extremos de barras. Ello surge como consecuencia de la consideración que se efectuó de que los diagramas M_o y M_x debían poseer una ley de variación lineal entre los respectivos valores de A_{e1} y A_{e2} de sus extremos, tal como muestran las figuras 6a) y b) y como se utilizó al efectuar la integración de dichos diagramas según la (24).

Resulta obvio que si en el tramo que corresponde a la barra actuasen una o varias cargas concentradas, el diagrama de M_o será poligonal y si lo hiciese una carga distribuida sería parabólico;

ninguno de estos casos permitiría la aplicación de la integración efectuada. Frente a este inconveniente y la lógica necesidad de generalizar el método para cualquier estado de cargas, debe recurrirse a buscar un sistema de acciones que actuando sólo en los extremos de las barras, produzca en tales extremos iguales desplazamientos que los generados en las condiciones reales planteadas.

Sea por ejemplo, la misma estructura que la utilizada para efectuar la demostración general, pero solicitada por una carga uniformemente distribuida q aplicada sobre la barra 1-2 (figura 7a). El sistema así conformado puede ser sustituido por la suma de dos sistemas, tal como se consigna en la misma figura. En el primero de ellos se impide todo desplazamiento de los nudos extremos de las barras solicitadas por acciones que actúan en las mismas (1 y 2 en este caso), aplicando los pares y fuerzas de empotramiento perfecto que resulten atinentes, suponiendo también actuando sobre la estructura el sistema exterior q. Para el sistema así conformado los nudos 1 y 2 permanecen fijos.

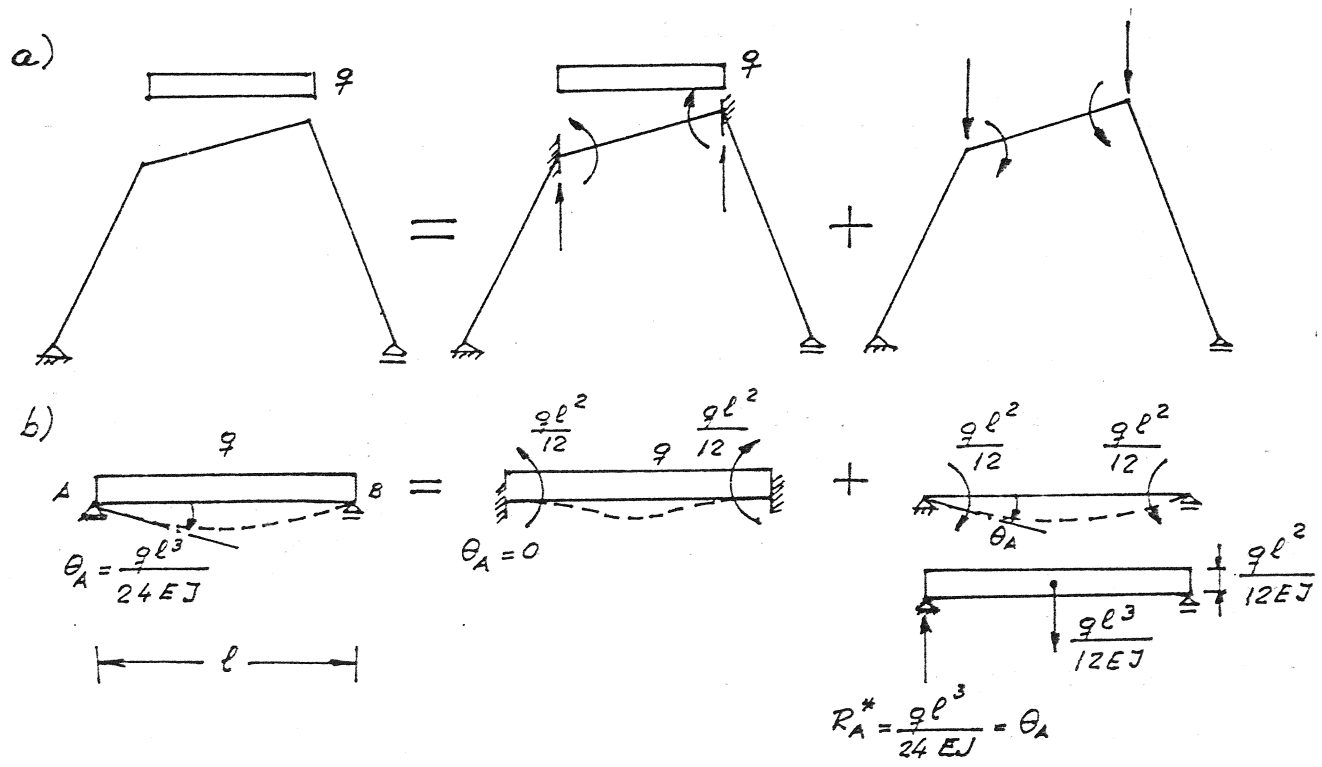


Figura 7

El segundo sistema de la figura 7a) consiste en considerar sobre la estructura únicamente las acciones de empotramiento perfecto, tomadas con sentido contrario al utilizado para la fijación.

Se observa fácilmente que si se suman ambos sistemas se obtiene nuevamente el que corresponde a la estructura dada, ya que

las acciones de empotramiento perfecto se anulan entre sí. Por lo tanto los desplazamientos de los nudos 1 y 2 debidos a la carga q dada, son idénticos a los que produce el segundo estado considerado, o sea las acciones de empotramiento perfecto tomadas con signo contrario, las que siempre constituirán un sistema de acciones nodales.

Si para mayor comprensión se analizase por ejemplo, el caso de una viga simplemente apoyada sometida a la acción de una carga q (figura 7b), la rotación en sus extremos será, según la (125) del Capítulo II, $\theta_A = q.l^3/24\ E.J$. El sistema de fijación consistirá en la aplicación de los respectivos pares de empotramiento $q.l^2/12$, los que invertidos constituirán el sistema de acciones que producirá desplazamientos extremos equivalentes, para el cual, por el segundo teorema de Mohr, será

$$\theta_A = R_A^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{q.l^3}{12\ E.J} = \frac{q.l^3}{24\ E.J}$$

valor idéntico al de la viga original.

En conclusión. En su forma más general, para cualquier estado de cargas que afecten a las barras, la (34) se transforma en

$$[D_{xo}] = [A_{exu}]^T.[F_E].[A_{eo}'] \qquad (36)$$

en donde $[A_{eo}']$ corresponde al vector de acciones de extremos producidas por el sistema de acciones nodales que provocan desplazamientos extremos equivalentes, y que resulta de invertir el sistema de fijación de tales extremos. La $[A_{exu}]$ por su parte, no se modifica, pues el sistema $X_1 = 1$ debe estar siempre constituido por acciones nodales.

3.4. Aplicación al cálculo de desplazamientos.

La expresión matricial del TTV permite resolver iguales problemas que el TTV en la forma analizada en el Capítulo II. En aquel caso, dada una estructura en la cual, debido a una cierta acción se producía la deformación de aquélla (sistema deformante) y se planteaba la necesidad de establecer los valores de determinados desplazamientos, se formulaba un sistema auxiliar unitario en la dirección y de las características acordes al tipo de desplazamiento a calcular, determinando el valor de éste mediante la integración de los respectivos diagramas de solicitaciones internas correspondientes a ambos sistemas.

La formulación matricial del método, permite arribar a la determinación de los desplazamientos, con dos ventajas:

a) El cálculo de los desplazamientos no necesita ser realizado en forma individual, sino que puede obtenerse, mediante una única operación matricial, un conjunto de valores de desplazamientos, mediante el cálculo del vector $[D_{xo}]$.

b) No es necesario efectuar la integración de diagramas ni recurrir al empleo de tablas ni otros métodos para ello, pues aquella integración la realiza en forma implícita el mismo método, a través de la matriz de flexibilidad.

Subsiste sin embargo la necesidad de trazar los diagramas de momentos flectores (y de corresponder también los de N, Q y/o M_t), tanto para cada uno de los sistemas unitarios, como para el sistema exterior de cargas, ya sea considerado en forma directa cuando las acciones son nodales, como a través del sistema que produce desplazamientos de extremo de barras equivalentes, cuando no lo es.

Sintetizando, el TTV en forma matricial se aplica de la manera siguiente, utilizándose para la ejemplificación, el caso planteado en la figura 5 y suponiendo que sólo resulta necesario tener en cuenta la influencia de la flexión, por resultar no significativa las incidencias de N y Q en el valor de los desplazamientos, lo que por otra parte, constituye la situación más frecuente:

1°) Se determinan las barras a considerar. Para el caso de la figura 5 serán 3: A-1; 1-2 y 2-B.

Si en cambio el sistema de cargas hubiera sido el que muestra la figura 8, puede optarse por dos caminos:

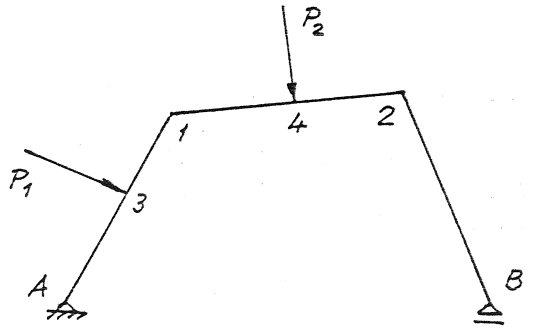


Figura 8

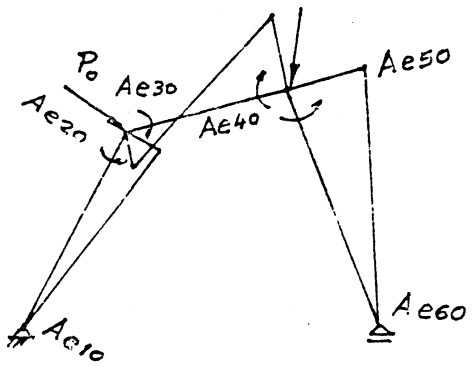
a) Considerar las 3 barras referidas y aplicar la [A_{ee}'].

b) Elegir 5 barras (A-3; 3-1; 1-4; 4-2 y 2-B), considerando los puntos 3 y 4 como nudos, y aplicar directamente la [A_{ee}].

Independientemente de lo anterior, si se desean calcular desplazamientos en correspondencia con puntos intermedios de alguna barra, los mismos deben hacerse coincidir con nudos y en consecuencia considerarlos como extremos de barras.

La cantidad de barras (y por ende la de términos que conformarán los vectores y matrices), será función de las consideraciones precedentes.

2°) Se traza el diagrama de momentos flectores correspondiente al sistema deformante (figura 9) y se plantea la [A_{ee}] mediante



$$[A_{e0}] = \begin{bmatrix} A_{e1o} \\ A_{e2o} \\ A_{e3o} \\ A_{e4o} \\ A_{e5o} \\ A_{e6o} \end{bmatrix}$$

Figura 9

3°) Se hacen actuar acciones unitarias en la dirección de cada uno de los desplazamientos buscados (figura 10), de dirección supuesta (preferentemente positiva) y se formula la [Aexu]

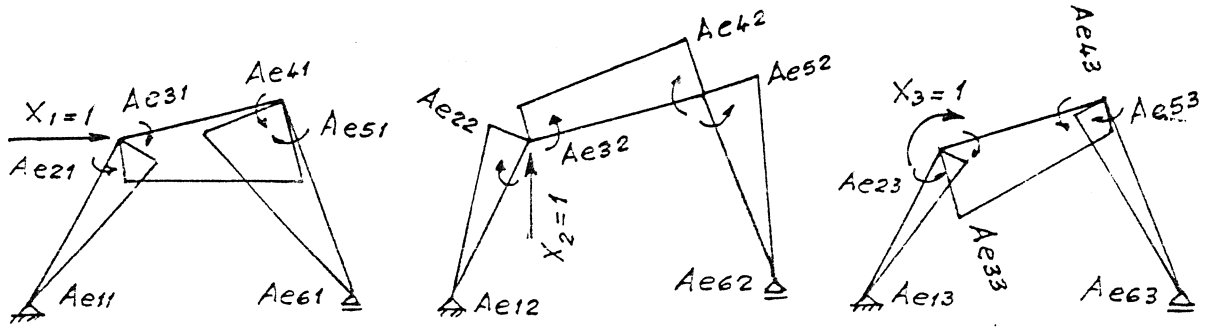


Figura 10

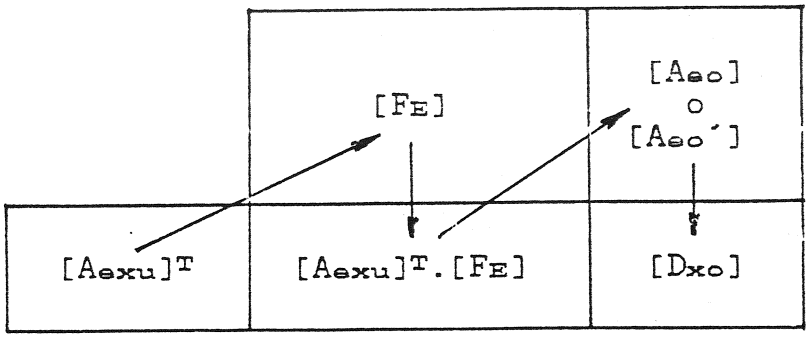
$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} & A_{e13} \\ A_{e21} & A_{e22} & A_{e23} \\ A_{e31} & A_{e32} & A_{e33} \\ A_{e41} & A_{e42} & A_{e43} \\ A_{e51} & A_{e52} & A_{e53} \\ A_{e61} & A_{e62} & A_{e63} \end{bmatrix}$$

las que se leen, por ejemplo para la primera (A_{e11}), acción (A) en el extremo (e1), cuando en la dirección del primer desplazamiento buscado se aplica una acción unitaria (1), es decir $A_{e1,1}$.

4°) Se plantea la matriz de flexibilidad. Para el caso supuesto, en que sólo se considera la influencia de la flexión en las barras será, tomando en consideración la segunda de las (10) y la (12)

$$[F_E] = \frac{1}{6\,E} \cdot \begin{bmatrix} 2/k_1 & -1/k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/k_1 & 2/k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/k_2 & -1/k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/k_2 & 2/k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/k_3 & -1/k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/k_3 & 2/k_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

5°) Se calculan los desplazamientos buscados mediante la (34) o la (36), según corresponda. El flujo de operaciones matriciales será



Cabe tener presente que tanto en la formulación de la [Aeo] (o de corresponder, de la [Aeo´]), como de la [Aexu], se deben considerar los signos de los momentos de extremo de barra que producen la flexión, y no los signos de los momentos flectores.

4. APLICACION AL ANALISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS.

Tal como fuera expresado en el apartado 1.2. de la parte introductoria, el método de la flexibilidad constituye sólo una redefinición del método de las fuerzas en lo que hace a la forma de obtener las incógnitas hiperestáticas, reemplazando el planteo y resolución del sistema de ecuaciones (que sin embargo queda implícito en el método), por determinadas operaciones entre matrices, cada una de las cuales debe ser previamente formulada.

Dada la correspondencia conceptual con el método de las fuerzas, obviamente que los pasos a seguir hasta la formulación de tales matrices son totalmente análogos.

4.1. Desarrollo del método de la flexibilidad.

1°) En primer lugar, y antes que todo, se determina el grado de indeterminación estática, igual al grado de hiperestaticidad de la estructura.

2°) Luego se introduce un número de "liberaciones" igual al grado de indeterminación, efectuándose cada liberación eliminando una fuerza reactiva externa o interna, cuyo valor se constituye en una *incógnita de fuerza*. Las liberaciones deben ser seleccionadas de manera que la estructura remanente sea estable y estáticamente determinada. Sin embargo, en algunos casos, el número de liberaciones puede ser menor que el grado de indeterminación, siempre que la estructura estáticamente indeterminada restante sea tan sencilla que se la pueda analizar fácilmente. En todos los casos, las fuerzas redundantes deben ser escogidas criteriosamente para que la estructura liberada se pueda analizar con facilidad, es decir, que resulte lo más sencillo posible la determinación de los diagramas de solicitaciones internas (M y eventualmente N, Q y M_t) necesarios para tal análisis.

3°) Las liberaciones introducidas traen como consecuencia incongruencias o incompatibilidades en los desplazamientos producidos en sus respectivas direcciones respecto a los de la estructura original, cuyos valores es necesario determinar como tercer paso. Estos desplazamientos se pueden deber a cargas externas aplicadas, movimiento de vínculos o variación de temperatura, y sus valores se expresan genéricamente mediante el vector $[\Delta_{xo}]$ o $[D_{xo}]$, según cual sea la nomenclatura empleada.

4°) El cuarto paso consiste en la determinación de los desplazamientos en la estructura liberada debidos a valores unitarios de las acciones redundantes, obtenidos en el mismo lugar y en la misma dirección que la incongruencia de desplazamientos manifestada en el punto anterior. Se obtiene así la matriz $[\delta_{xxu}]$.

5°) Pueden determinarse ahora los valores que deben poseer las acciones redundantes (incógnitas [X]) para eliminar las incongruencias de los desplazamientos, o en otras palabras, para hacer compatibles los mismos entre los sucesivos estados del sistema básico con los de la estructura hiperestática dada. Esto exige escribir ecuaciones de superposición en las que se suman los efectos de las fuerzas redundantes (individualmente consideradas) con los desplazamientos que el sistema exterior actuante produce en la estructura liberada. Es decir, expresando el sistema de ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos resultante en forma matricial

$$[D_{xo}] + [\delta_{xxu}].[X] = 0 \quad ; \quad [X] = -[\delta_{xxu}]^{-1}.[D_{xo}] \qquad (38)$$

6°) En este punto pueden introducirse, a los fines de la obtención de [X], los conceptos derivados del empleo de la matriz de flexibilidad. En efecto, obsérvese que tanto $[D_{xo}]$ como $[\delta_{xxu}]$ constituyen un conjunto de desplazamientos, los que pueden ser determinados mediante la formulación matricial del TTV.

Aplicando la (36)

$$[D_{xo}] = [A_{exu}]^T.[F_E].[A_{eo}'] \qquad (39)$$

Si el sistema deformante, en lugar del sistema (o) fuese el (xu), resultará análogamente, efectuando el reemplazo pertinente en la anterior

$$[\delta_{xxu}] = [A_{exu}]^T.[F_E].[A_{exu}] \qquad (40)$$

Obsérvese que se escribe $[A_{exu}]$ y no $[A_{exu}']$ pues las acciones (xu) deben ser siempre nodales.

Formuladas las matrices y vectores que constituyen las (39) y (40) y efectuando con ellos las operaciones consignadas en (38) se obtendrá el vector [X].

7°) Si bien el problema en la forma planteada queda resuelto con el paso anterior, resulta de utilidad completar el proceso de análisis con la obtención directa de las acciones finales en todos los extremos de barra, y no sólo en la dirección de las

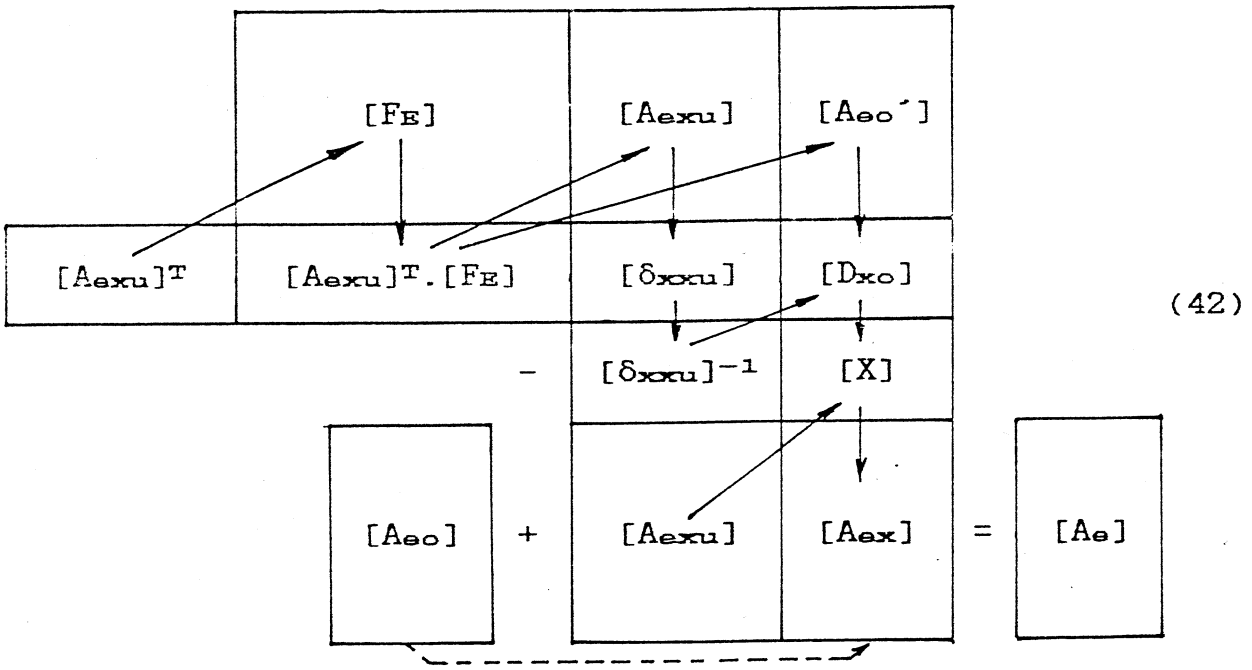
incógnitas. Para ello basta considerar que tales acciones resultarán de la suma de las que corresponden al estado (o) más el estado (x), el que a su vez será igual al estado (xu) por los verdaderos valores de las incógnitas X. Es decir

$$[A_e] = [A_{eo}] + [A_{ex}] = [A_{eo}] + [A_{exu}].[X] \qquad (41)$$

Hay que tener presente que no debe confundirse la $[A_{eo}']$ de la (39) con la $[A_{eo}]$ de la (41), que siempre corresponderá a las acciones de extremo generadas por el sistema exterior de cargas sobre el isostático equivalente, sin ninguna consideración complementaria. Obviamente que si el sistema exterior actuante estuviese constituido sólo por acciones nodales, resultará $[A_{eo}'] = [A_{eo}]$.

4.2. Diagrama de flujo de las operaciones matriciales.

Se pueden resumir en un único diagrama de flujo, las operaciones matriciales necesarias para completar el análisis de una estructura hiperestática mediante la obtención del vector $[A_e]$, cuyos valores, conjuntamente con la consideración de las cargas exteriores actuantes, permitirán trazar los diagramas finales de solicitaciones interiores. Teniendo en cuenta para ello las (38), (39), (40) y (41) resulta al efecto



(42)

5. RESOLUCION DE VIGAS CONTINUAS.

Una vez expuestos los fundamentos del método de la flexibilidad y el proceso de cálculo inherente al mismo, no existen mayores particularidades para su aplicación a cualquier tipo de estructuras. Para analizar el caso concreto de vigas continuas, supóngase a nivel de ejemplo la estructura de tres tramos que muestra la figura 11a).

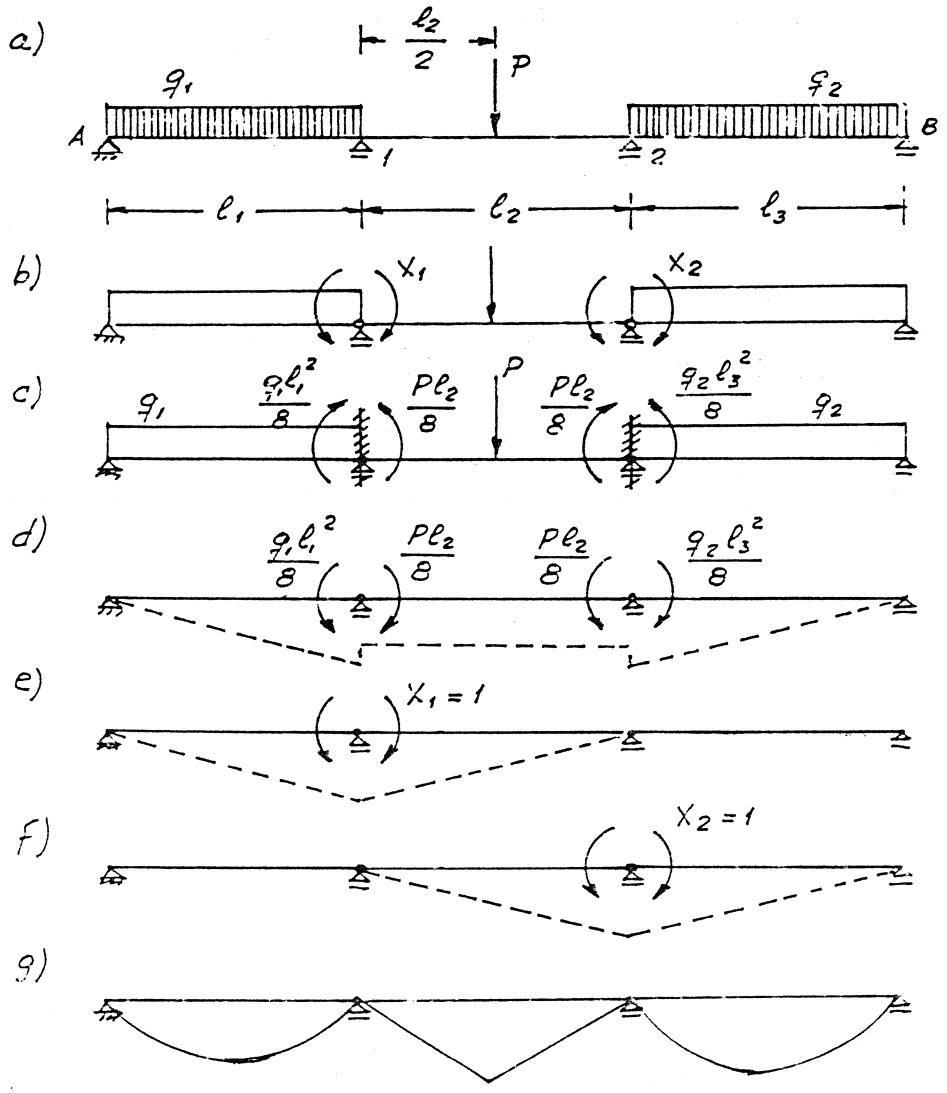


Figura 11

Se trata de un hiperestático de grado 2, consignándose en la figura 11b) el isostático equivalente adoptado y las incógnitas puestas de manifiesto mediante el mismo.

Dado que como consecuencia de las características del sistema exterior de cargas aplicado debe trabajarse con la [Aeo´], en la figura 11c) se procedió a efectuar la fijación de los extremos de barra en la dirección de las incógnitas. Invirtiendo las acciones de fijación aplicadas y eliminando el sistema de acciones exteriores actuantes (figura 11d), se podrá formular la [Aeo´]

$$[A_{eo}'] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ -q_1.l_1^2 \\ P.l_2 \\ -P.l_2 \\ q_2.l_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para plantear la $[A_{exu}]$ se hace actuar en forma independiente y sucesiva $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ (figuras 11e) y f), con lo que

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tratarse de una estructura de tres barras, la matriz de flexibilidad será idéntica a la (37).

Finalmente, para formular la $[A_{eo}]$, se debe trazar el diagrama de momentos que corresponde al sistema exterior de cargas, directamente aplicado sobre el isostático equivalente (figura 11g), con lo que para este caso

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las acciones de extremo de barra definitivas surgirán de efectuar las operaciones matriciales consignadas en el diagrama de flujo de la expresión (42).

5.1. Caso de voladizos.

De existir voladizos, se los sustituye por el momento que cada uno de ellos produce, los que intervendrán como acción nodal directamente aplicada en A y/o B para la formulación de las $[A_{eo}']$ y $[A_{eo}]$.

5.2. Procedimiento alternativo de resolución.

En el punto 2°) del apartado 4.1. se expresó que no siempre resultaba necesario transformar la estructura estáticamente indeterminada a resolver, en un isostático equivalente, pudiendo también efectuarse el análisis eliminando una cantidad menor de redundantes que los correspondientes al grado de hiperestaticidad, trabajando sobre un hiperestático, de grado menor al dado, pero cuyos elementos individuales respondiesen a expresiones sencillas de fácil resolución.

Así por ejemplo, si la viga continua supuesta en la figura 11a) tuviese los extremos A y B empotrados, se estaría en presencia de un hiperestático de grado 5, el que, con cargas verticales, presentará 4 incógnitas a resolver. Si se conforma el sistema básico mediante el isostático equivalente, deberán introducirse articulaciones en A, 1, 2 y B, poniendo así en evidencia X_1, X_2, X_3 y X_4, procediendo luego en forma análoga que la seguida en el caso anterior (figura 12).

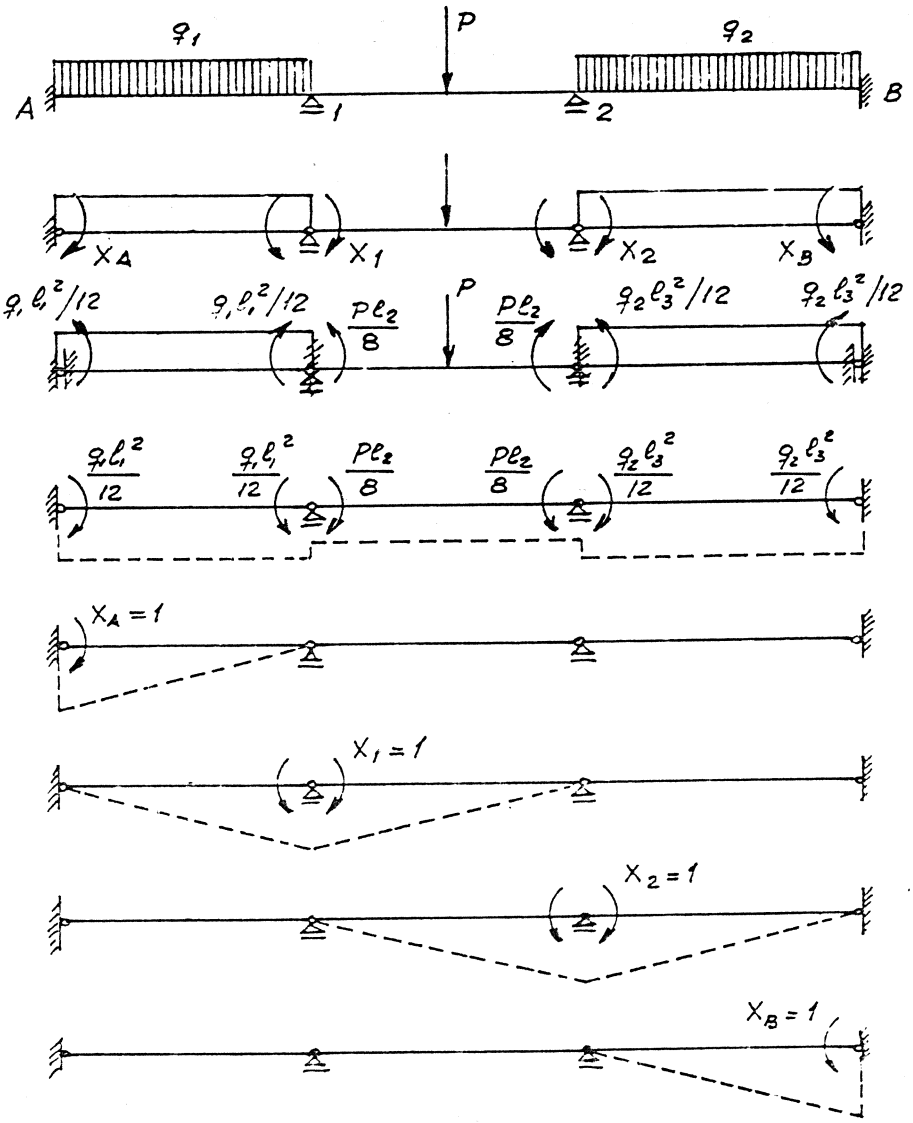


Figura 12

En consecuencia

$$[A_{eo}'] = \begin{bmatrix} q_1.l_1^2/12 \\ -q_1.l_1^2/12 \\ P.l_2/8 \\ -P.l_2/8 \\ q_2.l_3^2/12 \\ -q_2.l_3^2/12 \end{bmatrix} ; \quad [A_{exu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien. Si se parte de la base que una barra simple, articulada en un extremo y empotrada en el otro, tal como los tramos A-1 y 2-B de la viga considerada, conforman hiperestáticos sencillos, de solución conocida (apartado 6.2.4. del Capítulo II), en lugar de recurrir al isostático equivalente integral precedentemente desarrollado, puede optarse por eliminar sólo dos de los cuatro vínculos redundantes mediante la introducción de

articulaciones en los nudos 1 y 2, tal como se consigna en la figura 13a), trabajando sobre un hiperestático de orden menor, planteando como incógnitas a resolver X_1 y X_2.

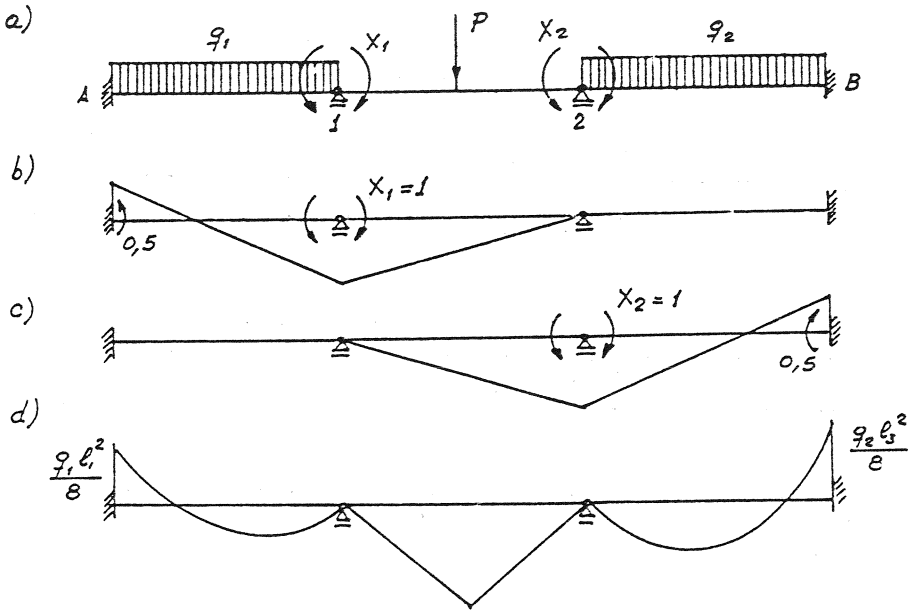


Figura 13

La $[A_{eo}']$ no ofrece modificación respecto a la consignada según las figuras 12c) y d), formulada matricialmente mediante la primera de las expresiones anteriores.

En cambio, al hacer $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$, se tienen los estados que muestran respectivamente las figuras 13b) y c), resultando

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} -q_1.l_1^2/8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_2.l_3^2/8 \end{bmatrix}$$

La obtención de la $[A_{eo}]$ se desprende de la figura 13d).

La $[F_E]$ es idéntica en cada uno de los procesos de resolución descriptos.

6. ESTRUCTURAS APORTICADAS.

Al igual que para los demás tipos de estructuras hiperestáticas, la aplicación del método de la flexibilidad es absolutamente general, siguiendo los lineamientos establecidos en el apartado 4.

Sea por ejemplo, el pórtico de la figura 14a). Un posible isostático equivalente a adoptar es el de la figura 14b), para el cual (figuras 14c), d), e) y f) será

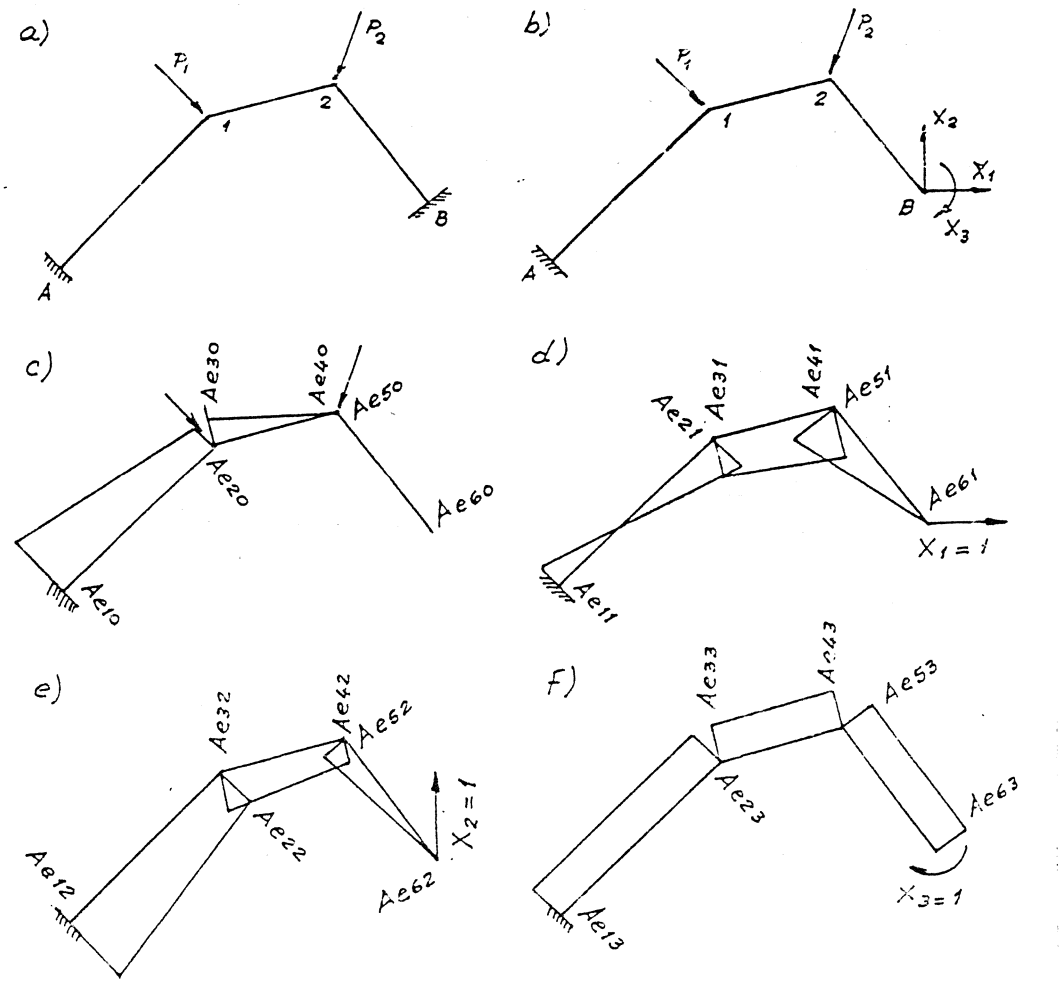


Figura 14

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} A_{e1o} \\ A_{e2o} \\ A_{e3o} \\ A_{e4o} \\ A_{e5o} \\ A_{e6o} \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{exu}] = \begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} & A_{e13} \\ A_{e21} & A_{e22} & A_{e23} \\ A_{e31} & A_{e32} & A_{e33} \\ A_{e41} & A_{e42} & A_{e43} \\ A_{e51} & A_{e52} & A_{e53} \\ A_{e61} & A_{e62} & A_{e63} \end{bmatrix}$$

Si existiesen cargas en los tramos, se deberá formular asimismo la [Aeo´], según los conceptos expuestos al efecto.

Por su parte, la matriz de flexibilidad resulta de

$$[F_E] = \begin{bmatrix} [F_e]_a & 0 & 0 \\ 0 & [F_e]_b & 0 \\ 0 & 0 & [F_e]_c \end{bmatrix}$$

adoptando en este caso análoga configuración a la (37).

6.1. Pórtico recto general.

Sea el caso de un pórtico del tipo que fuera analizado por el método de las fuerzas en el apartado 5.1.1. del Capítulo III, y que se reproduce en la figura 15a). A partir de las figuras 15b) a h) puede formularse

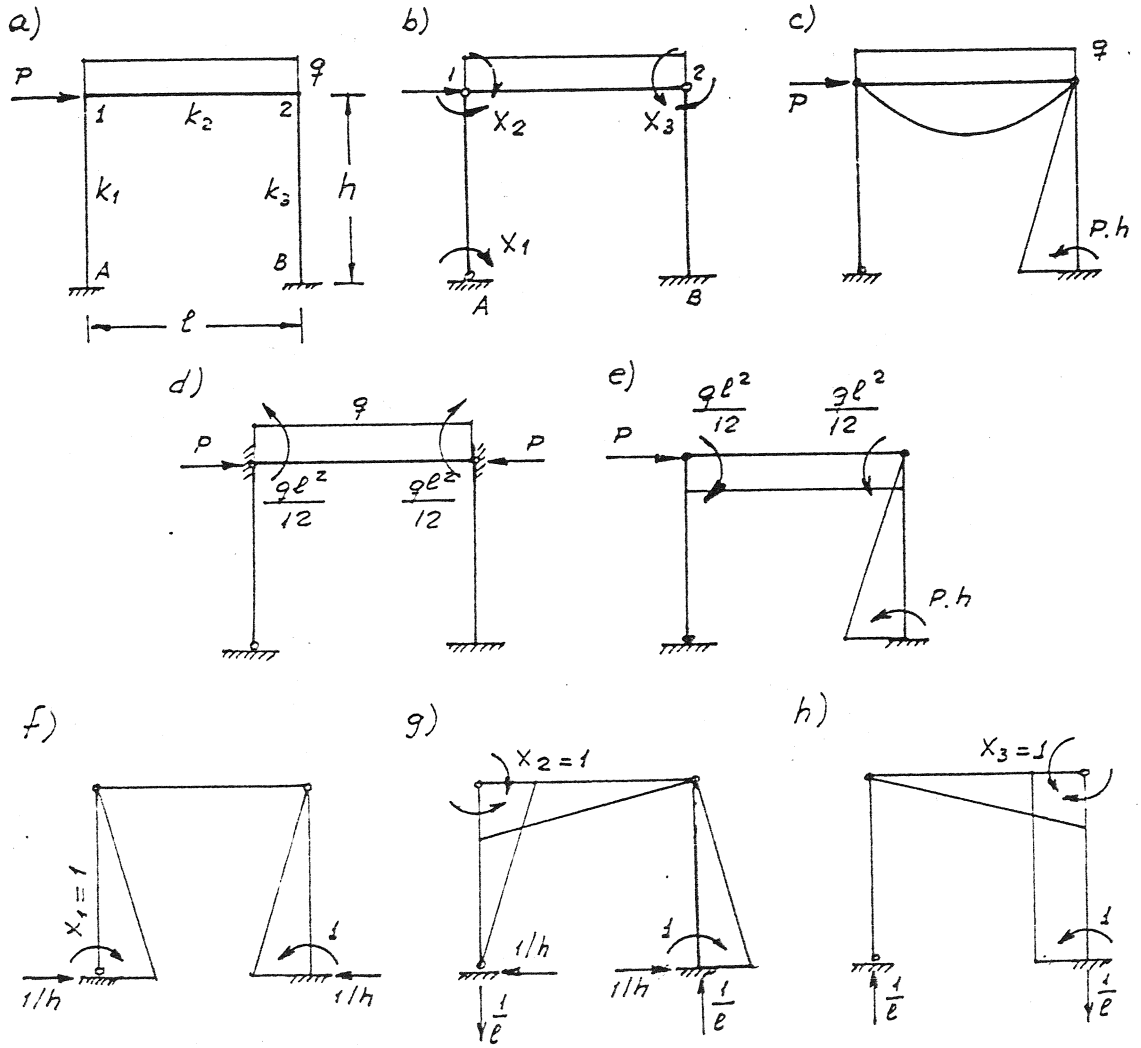


Figura 15

$$[A_{eo}'] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q.l^2/12 \\ -q.l^2/12 \\ 0 \\ -P.h \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{exu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P.h \end{bmatrix}$$

6.2. Caso de voladizos.

En el caso que la viga del pórtico se continúe constituyendo uno o dos voladizos, debe prestarse atención a la forma de colocar las articulaciones en los nudos correspondientes, al generar el isostático equivalente.

Sea por ejemplo el pórtico de la figura 16a). Efectuando el detalle del encuentro de las barras que concurren al nudo 2, la articulación a colocar en el mismo no puede interesar las 3 barras concurrentes, pues el voladizo quedaría sin sustentación, tal como se observa en la figura 16b). Debiéndose en todos los casos asegurar la continuidad de aquél, puede optarse por dos formas:

a) colocar la articulación en el extremo superior de la columna (figura 16c), en cuyo caso el voladizo tiene su continuidad estructural en la viga, o

b) colocar la articulación en el extremo derecho de la viga (figura 16d), quedando entonces el voladizo solidario con la columna.

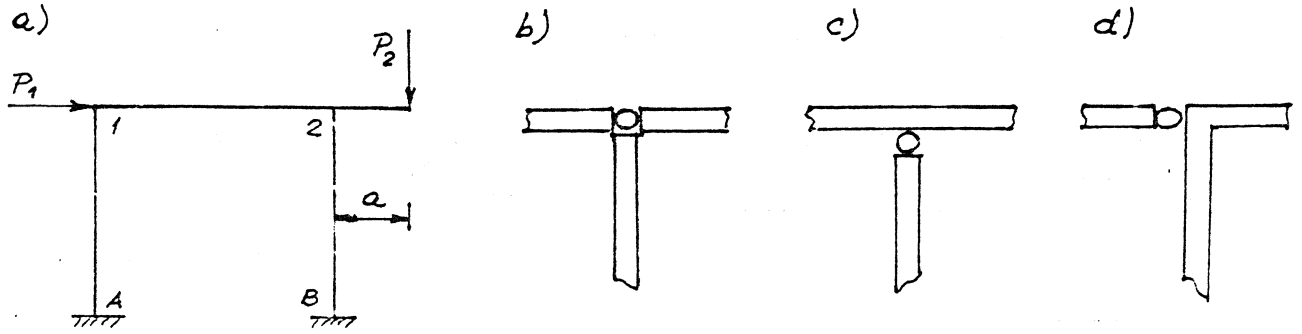


Figura 16

Para el caso de cargas supuesto en la figura 16a), los diagramas de momentos serían respectivamente los que se consignan en las figuras 17a) y b), resultando en cada caso las [Aeo]

** Caso a:*

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2.a \\ 0 \\ -P_1.h \end{bmatrix}$$

** Caso b:*

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2.a \\ -(P_1.h + P_2.a) \end{bmatrix}$$

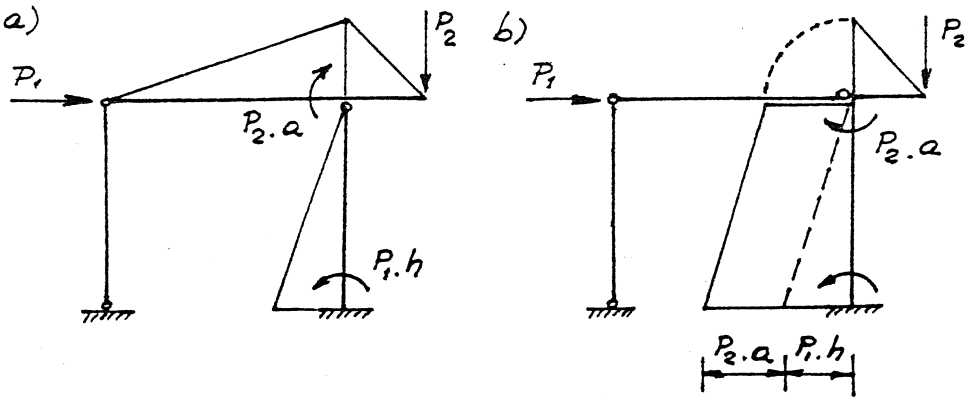


Figura 17

Los conceptos expresados son obviamente aplicables también en el caso que la resolución se encarase mediante la formulación directa del método de las fuerzas.

6.3. Columnas de distinta altura o con vínculos articulados.

La generalidad que presenta la aplicación del método de la flexibilidad hace que no existan diferencias metodológicas para encarar la resolución de pórticos con columnas de alturas diferentes (cuyas respectivas longitudes quedarán contempladas en los términos de la matriz de flexibilidad y en los valores de los momentos de extremo de barras) o con apoyos articulados, cuya incidencia quedará puesta de manifiesto en la forma de los diversos diagramas de momentos.

6.4. Consideración del esfuerzo normal.

Al contrario de lo que ocurre en el método de los desplazamientos (y por ende en el de la rigidez), la consideración de la influencia del esfuerzo normal, no hace variar la cantidad de incógnitas hiperestáticas que presenta la estructura.

Tal como se analizara en los apartados 2.3.3. y 3.1., la consideración del esfuerzo normal le añade a cada barra una tercera dirección de extremo, es decir que a los momentos A_{e1} y A_{e2} correspondientes a flexión en los extremos inicial y final de cada barra, debe agregársele un esfuerzo normal A_{e3}, que por las consideraciones efectuadas relativas a la necesidad de contar con acciones nodales aplicadas o la transformación a sistemas equivalentes a las mismas, será constante para cada barra.

A nivel de ejemplo de aplicación, supóngase que se desea plantear la resolución del mismo pórtico tratado en el apartado 6.1., incluyendo la consideración de los efectos del esfuerzo normal, con el estado de cargas considerado en la figura 15a). Bajo este supuesto, de las acciones de fijación invertidas, cuyo procedimiento de obtención surge de las figuras 18a) y b), puede escribirse la $[A_{eo}']$, mientras que la $[A_{eo}]$ se formula también en la forma conocida. En ambos casos cabe considerar ahora el término correspondiente a los esfuerzos normales q.l/2 en las columnas y P en la viga, con los signos pertinentes en cada caso.

Resulta en consecuencia

$$[A_{eo}'] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q.l/2 \\ \\ q.l^2/12 \\ -q.l^2/12 \\ -P \\ \\ 0 \\ -P.h \\ -q.l/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q.l/2 \\ \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ \\ 0 \\ -P.h \\ -q.l/2 \end{bmatrix}$$

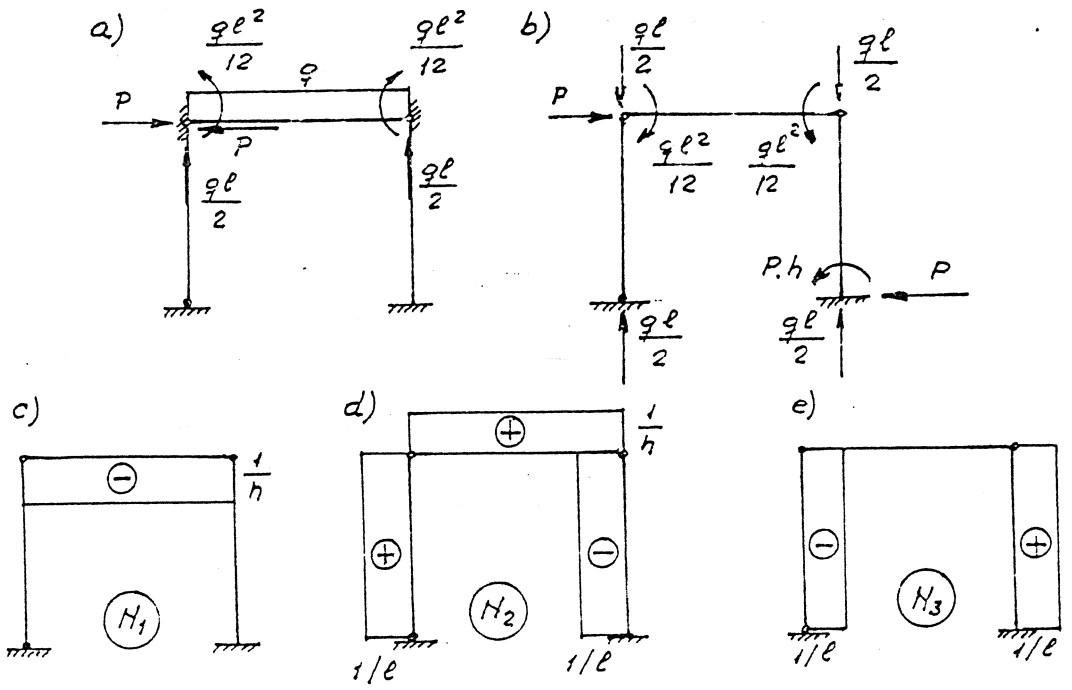


Figura 18

Por otra parte, las reacciones indicadas para los estados de $X_1 = 1$ en las figuras 15f), g) y h), permiten trazar los diagramas de los esfuerzos normales N_1, N_2 y N_3 que se consignan en las figuras 18c), d) y e) respectivamente, y formular la $[A_{exu}]$

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/h & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1/l & 1/l \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad (de 9 x 9), toma la forma expresada en la segunda de las (10), donde cada submatriz responde a la configuración dada por la (14).

6.5. Pórtico con una columna oblicua.

También para este caso la aplicación del método sigue los lineamientos conocidos, sin particularidades. Al sólo efecto de observar la conformación que en este caso adquieren los diagramas de momentos flectores necesarios para la formulación de los vectores y matrices, considérese el pórtico de la figura 19a), cuyo isostático equivalente adoptado es el de la figura 19b).

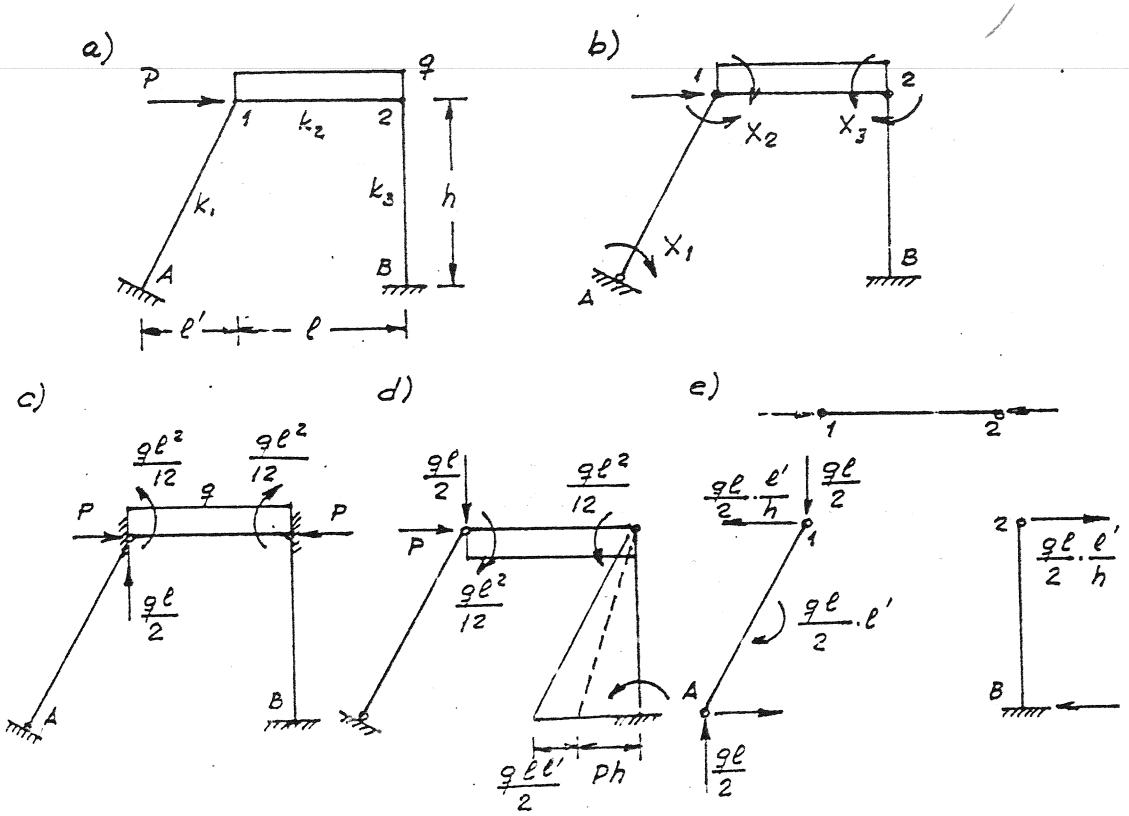


Figura 19

Razonando en la forma conocida se tendrá (figuras 19c) y d)

$$[A_{eo}'] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q.l^2/12 \\ -q.l^2/12 \\ 0 \\ -q.l.l'/2 - P.h \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q.l.l'/2 - P.h \end{bmatrix}$$

En la figura 19e) se indican los diagramas de cuerpo libre que permiten aclarar el proceso de obtención del diagrama de momentos de la columna 2-B.

Con igual criterio, en las figuras 20a), b) y c) se consignan los diagramas de M correspondientes a los estados $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ y $X_3 = 1$, con sus respectivos diagramas de cuerpo libre. De las mismas

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & (1 + l'/l) & -(1 + l'/l) \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad de la estructura $[F_E]$ sigue respondiendo a la expresión (37).

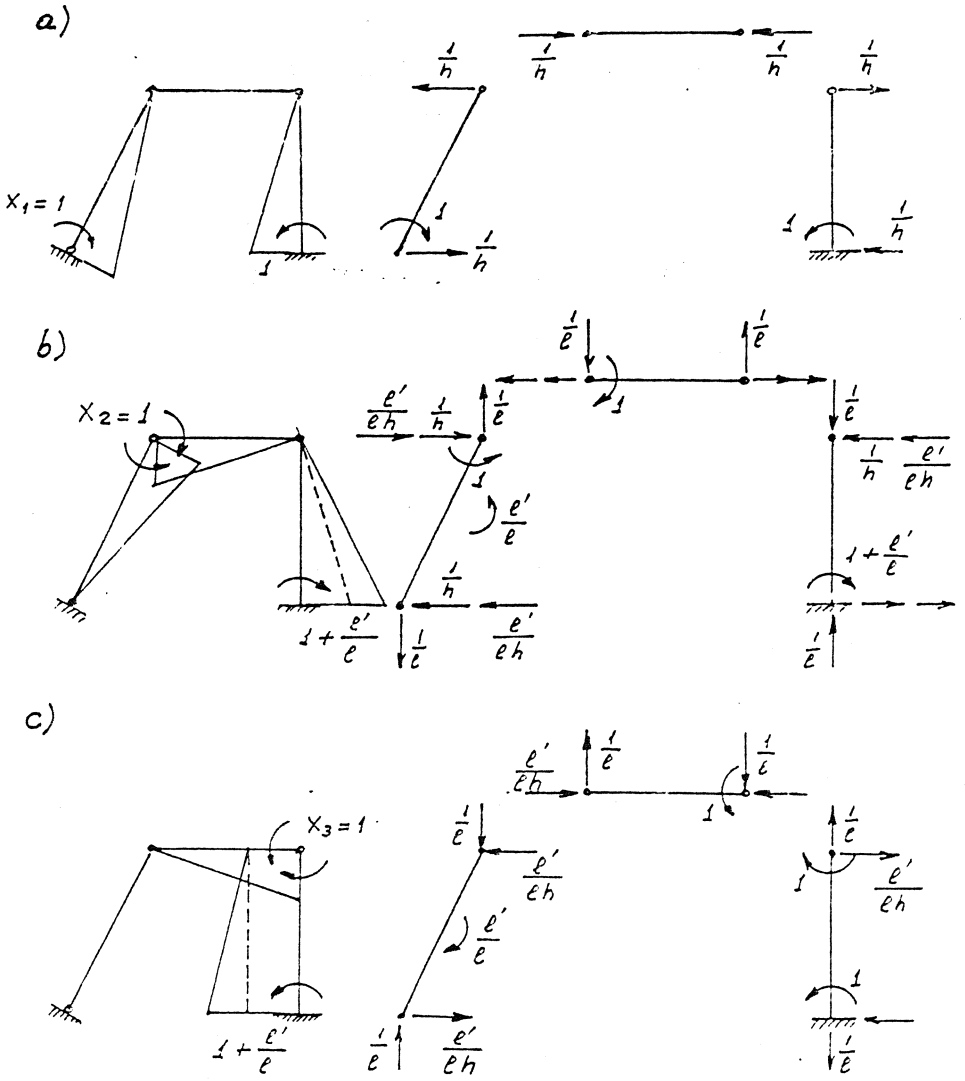


Figura 20

6.6. Pórtico con tabique.

Las características generales que presenta una estructura de este tipo fueron analizadas en el apartado 7.5. del Capítulo IV, donde se hizo referencia asimismo a la forma que adopta el esquema teórico.

Para encarar la resolución aplicando el método de la flexibilidad, también en este caso son de total aplicación los conceptos expuestos para el análisis de estructuras hiperestáticas en general, pudiendo radicar la única dificultad en el correcto trazado de los diagramas de momentos.

En la figura 21 se ha conformado el isostático equivalente, mediante la introducción de las articulaciones en la cantidad necesaria a tal fin, consignándose las incógnitas hiperestáticas a resolver.

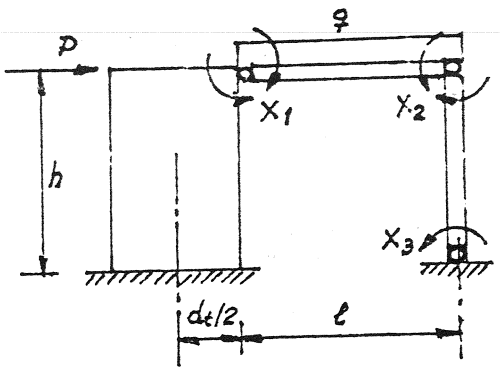


Figura 21

Para formular la [Aeo´], se procede a la fijación de los desplazamientos de extremo de barra en la forma conocida (figura 22a), invirtiéndose luego las acciones aplicadas a tal fin, trazándose en base a ellas, el diagrama de momentos flectores resultante (figura 22b).

Téngase presente para el planteo de la [Aeo], que no se producen modificaciones respecto a la [Aeo´] anterior en todas aquellas barras en las que no actúan cargas en los tramos, mientras que en la viga (única que las posee en este caso), el diagrama de momentos del isostático presenta momentos nulos en los extremos.

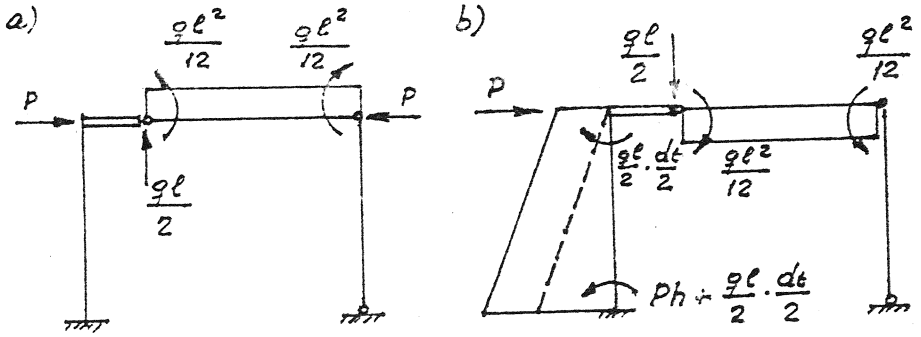


Figura 22

En consecuencia

$$[A_{eo}'] = \begin{bmatrix} -P.h - (q.l/2).(d_t/2) \\ (q.l/2).(d_t/2) \\ q.l^2/12 \\ -q.l^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} -P.h - (q.l/2).(d_t/2) \\ (q.l/2).(d_t/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la figura 23 se consignan los diagramas de momentos correspondientes a los sucesivos estados de $X_1 = 1$, los que permiten formular

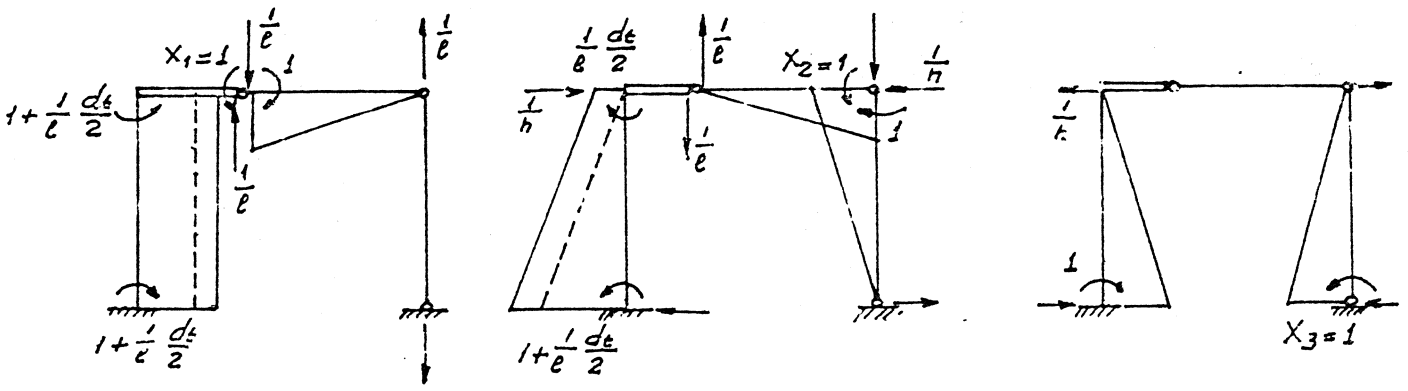


Figura 23

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} 1+(1/l).(d_t/2) & -1-(1/l).(d_t/2) & 1 \\ -1-(1/l).(d_t/2) & (1/l).(d_t/2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad no guarda diferencias con los casos anteriormente analizados.

6.6.1. Consideración del esfuerzo de corte.

En base a las deducciones efectuadas en el apartado 3.2., si resulta necesario considerar la influencia del esfuerzo de corte, no se modifican las expresiones desarrolladas en el apartado anterior, ni la cantidad de términos que las mismas contienen. Unicamente debe incorporarse en las submatrices de la $[F_E]$ que corresponden a las barras donde se efectúa tal consideración (la del tabique en este caso), los términos correspondientes en función de λ, según la disposición dada por la expresión (13).

7. ESTRUCTURAS DE RETICULADO.

Las particularidades que se presentan en este caso son:

a) En cada barra sólo se tendrá una única dirección de extremo, correspondiente al esfuerzo normal A_{e3}.

b) Para este tipo de estructuras no existe $[A_{eo}']$, trabajándose sólo con la $[A_{eo}]$.

c) Para conformar la matriz de flexibilidad debe tenerse en cuenta la expresión (15).

d) Para que todas las barras (tanto las básicas como las hiperestáticas) queden incorporadas al planteo matricial, debe adoptarse como isostático equivalente el analizado en el apartado 7.3.2. del Capítulo III, o sea el que se obtiene mediante el seccionamiento de las barras superabundantes.

Sea por ejemplo el reticulado hiperestático que muestra la figura 24a), con dos barras superabundantes, consignándose el isostático equivalente adoptado en la figura 24b).

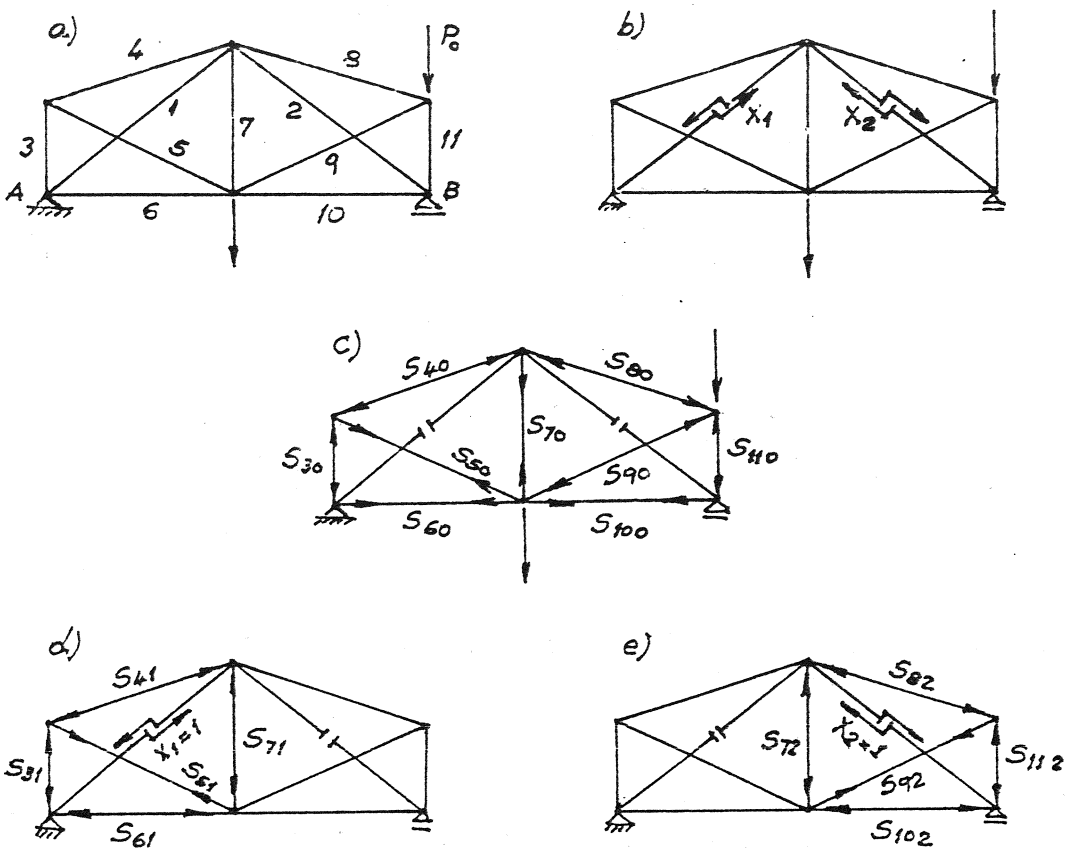


Figura 24

En base a las figuras 24c), d) y e) se puede formular

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{3o} \\ S_{4o} \\ S_{5o} \\ S_{6o} \\ S_{7o} \\ S_{8o} \\ S_{9o} \\ S_{10o} \\ S_{11o} \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{exu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ S_{31} & 0 \\ S_{41} & 0 \\ S_{51} & 0 \\ S_{61} & 0 \\ S_{71} & S_{72} \\ 0 & S_{82} \\ 0 & S_{92} \\ 0 & S_{102} \\ 0 & S_{112} \end{bmatrix}$$

Merece observarse que los sistemas unitarios que corresponde aplicar, según se muestra en las figuras 24d) y e), en los seccionamientos efectuados en las barras hiperestáticas, constituyen por sí un sistema equilibrado (de resultante nula), por lo que serán también nulas las reacciones de vínculo. En virtud de ello sólo se verán solicitadas, en cada caso, las barras que conforman los cuadriláteros cuyas diagonales son las barras hiperestáticas.

La matriz de flexibilidad resulta en este caso $[F_E] =$

$$\frac{1}{E}\begin{bmatrix} l_1/F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2/F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3/F_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4/F_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_5/F_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_6/F_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_7/F_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_8/F_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_9/F_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{10}/F_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{11}/F_{11} \end{bmatrix}$$

8. ESTRUCTURAS ESPACIALES.

Si como ejemplo de aplicación del método de la flexibilidad a la resolución de una estructura espacial se considera la viga balcón que muestra la figura 25a), se puede recurrir, al igual que al analizar la misma estructura por el método de las fuerzas, a conformar el isostático equivalente seccionando las barras en su encuentro C, quedando así el sistema básico reducido a dos vigas simples independientes, empotradas respectivamente en sus extremos A y B. Supuestas las cargas actuantes verticales, las incógnitas así puestas en evidencia son X_1, X_2 y X_3 (figura 25b).

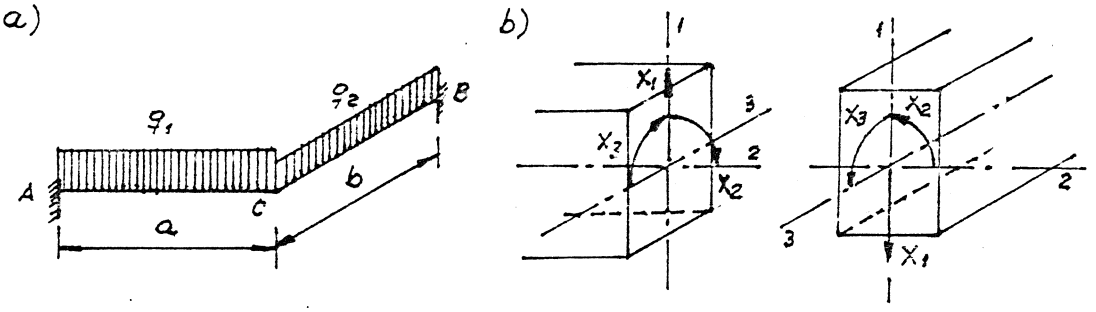


Figura 25

Para formular la $[A_{eo}']$, corresponde aplicar las acciones que impidan todo desplazamiento en los extremos de las barras, el C en este caso (para ambas vigas), dado que los extremos A y B se hallan por sí empotrados por los vínculos propios que presenta la estructura. Las acciones de fijación serán pues en este caso, además de los momentos de empotramiento perfecto, las reacciones necesarias para imposibilitar el descenso del punto C (figura 26a). Invirtiendo las acciones de fijación para la viga A-C, y considerándolas como sistema exterior de cargas aplicado, el momento X en el empotramiento A resulta de (figura 26b):

$$-X - \frac{q_1 . a^2}{12} + \frac{q_1 . a^2}{2} = 0$$

Despejando X

$$X = -\frac{q_1.a^2}{12} + \frac{6}{12}.q_1.a^2 = \frac{5}{12}.q_1.a^2$$

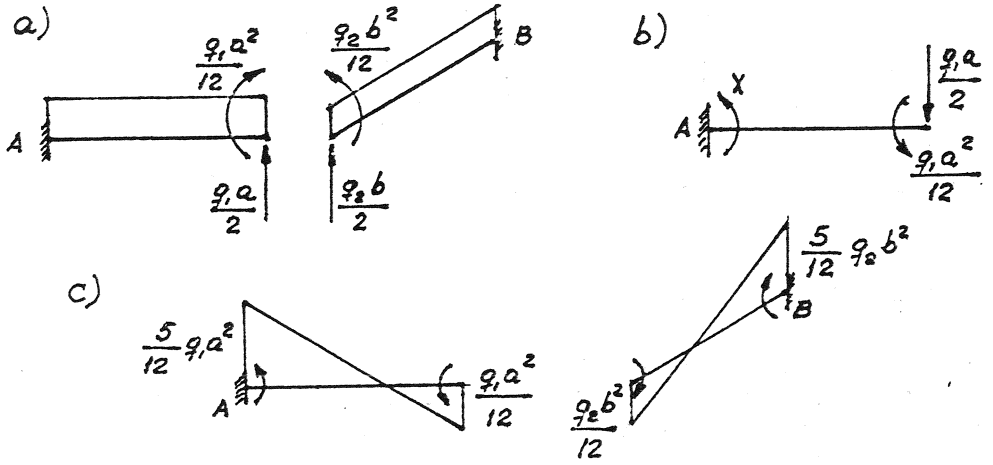


Figura 26

Idéntico razonamiento puede seguirse para la viga C-B. La figura 26c) indica el diagrama de momentos resultante, el que permite la formulación de la [A_{eo}'].

En la figura 27a) se consignan los diagramas de momentos flectores y torsores correspondientes a los sucesivos estados de acciones $X_1 = 1$, mediante los que se plantea la [A_{exu}], mientras que la figura 27b) muestra la configuración de los diagramas de momentos de las cargas actuantes directamente aplicadas sobre el isostático equivalente, con los que se escribe la [A_{eo}].

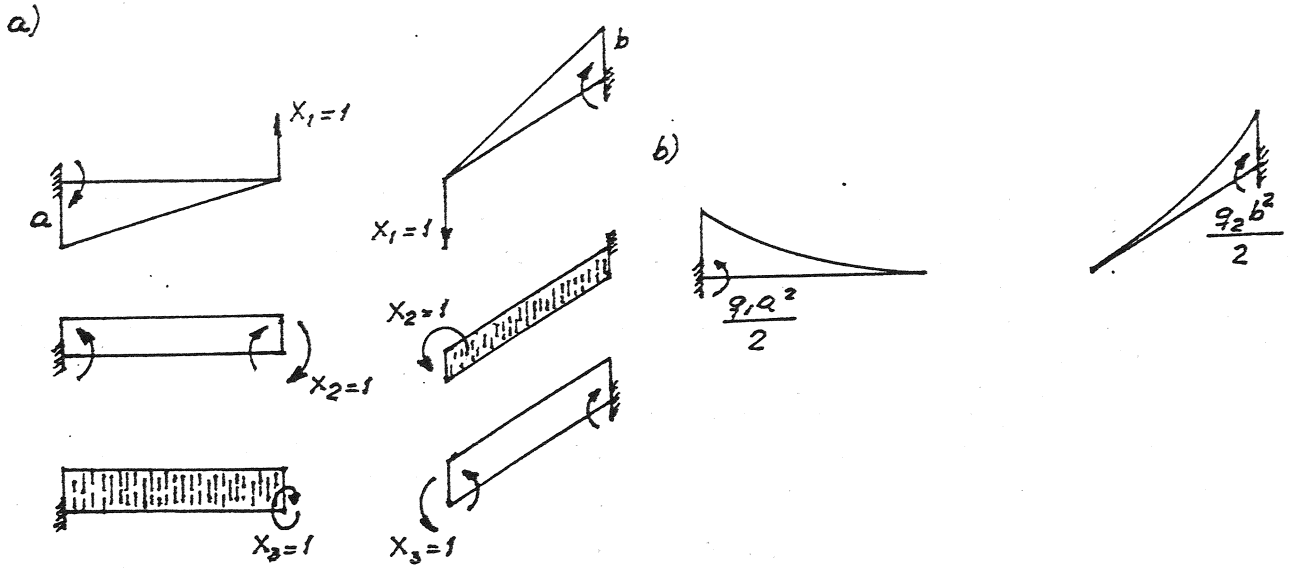


Figura 27

En definitiva resulta

$$[A_{eo}'] = \begin{bmatrix} -5\ q_1.a^2/12 \\ -\ q_1.a^2/12 \\ 0 \\ q_2.b^2/12 \\ 5\ q_2.b^2/12 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad [A_{eru}] = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} -q_1.a^2/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_2.b^2/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para conformar la matriz de flexibilidad de la estructura, debe tenerse presente la (16)

$$[F_E] = \frac{1}{6\ E.J} \begin{bmatrix} 2a & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6a\tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6b\tau_2 \end{bmatrix}$$

expresión válida si fuese J constante. De no ser así, resulta conveniente expresar los diversos términos en función del coeficiente de rigidez k_i correspondiente a cada barra.

9. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

3. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

4. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana S.A. - México - 1997.

5. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Jan J. Tuma - Mc Graw-Hill de México - 1975.

6. "RESOLUCION MATRICIAL DE ESTRUCTURAS" - Capítulo 2: Teorema de los Trabajos Virtuales en forma matricial - Capítulo 3: Método de la Flexibilidad - Ing. Francisco Sentinelli - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo - Mendoza - 1981.

7. "CALCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS" - Ing. Mario H. Gradowczyk - Editorial Universitaria de Buenos Aires - 1966.

8. "APUNTES DE CLASE" - Ing. Carlos D. Segerer - Cátedra de Estabilidad III (Análisis Estructural I) - Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

INDICE

CAPITULO V: METODO DE LA FLEXIBILIDAD

Página

1. Introducción a los métodos matriciales 1
   1.1. Flexibilidad y Rigidez. 1
   1.2. Formulación matricial de los métodos para análisis de estructuras hiperestáticas 2

2. Matriz de flexibilidad 3
   2.1. Matriz de flexibilidad de un elemento individual. . . 3
   2.2. Matriz de flexibilidad de una estructura. 5
   2.3. Formas de la matriz de flexibilidad para distintos tipos de solicitaciones interiores. 6

3. Expresión del TTV en forma matricial 11
   3.1. Deducción 11
   3.2. Consideración de la influencia del esfuerzo de corte. 15
   3.3. Caso de cargas no nodales 16
   3.4. Aplicación al cálculo de desplazamientos. 18

4. Aplicación al análisis de estructuras hiperestáticas . . . 21
   4.1. Desarrollo del método de la flexibilidad. 21
   4.2. Diagrama de flujo de las operaciones matriciales. . . 23

5. Resolución de vigas continuas. 23
   5.1. Caso de voladizos 25
   5.2. Procedimiento alternativo de resolución 25

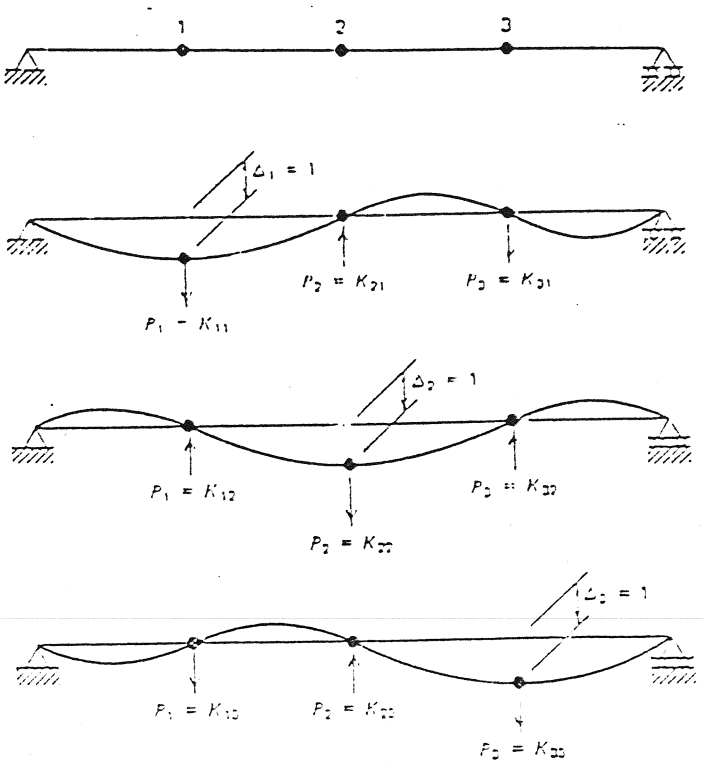
6. Estructuras aporticadas. 27
   6.1. Pórtico recto general 29
   6.2. Caso de voladizos 29
   6.3. Columnas de distinta altura o con vínculos articulados 31
   6.4. Consideración del esfuerzo normal 31
   6.5. Pórtico con una columna oblicua 32
   6.6. Pórtico con tabique 34

7. Estructuras de reticulado. 36

8. Estructuras espaciales 38

9. Bibliografía consultada 40

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO VI

METODO DE LA RIGIDEZ

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO VI

METODO DE LA RIGIDEZ

1. INTRODUCCION.

A medida que los sistemas estructurales se hacen más complejos, la selección de la estructura básica (isostático equivalente), los trazados de los diagramas de momentos y la obtención de los coeficientes de la matriz de flexibilidad se tornan más complicados. Esto señala la necesidad de recurrir a otras metodologías de resolución.

Habiendo establecido en el apartado 1. del Capítulo V la relación inversa entre los conceptos de *flexibilidad* y de *rigidez*, resulta razonable explorar la posibilidad de utilizar estos últimos y las relaciones que de ellos se derivan, para encarar el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

En consecuencia, en lugar de plantear *esfuerzos* desconocidos como incógnitas, se introducen los *desplazamientos* como tales. Debido a que los nudos constituyen los puntos de referencia característicos de la topología estructural, resulta lógico, y sobre todo práctico, seleccionar sus desplazamientos para este fin. Además, conocidos los mismos, y las condiciones de carga externa y de vinculación, queda definido el estado de deformación del sistema todo.

Bajo este enfoque, cuando se analiza una estructura por el método de los *desplazamientos* o de la *rigidez*, se consideran a los desplazamientos de los nudos (traslacionales y rotacionales) como las incógnitas a resolver. A tales fines se formulan ecuaciones de equilibrio de acciones en cada nudo de la estructura en términos de:

a) las cargas aplicadas,
b) las propiedades de los elementos que se conectan al nudo, y
c) los desplazamientos desconocidos de los nudos.

Se tiene de esta manera un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales (en los métodos energéticos de ecuaciones diferenciales) que pueden resolverse simultáneamente para hallar los valores de los desplazamientos de los nudos, los que se usan luego para determinar las fuerzas o momentos internos en los miembros estructurales, así como las reacciones en los apoyos.

A pesar de su mayor aplicación en el análisis de estructuras hiperestáticas, el método de los desplazamientos puede usarse tanto en estructuras estáticamente determinadas como indeterminadas. El analista no debe escoger las incógnitas debidas

a los vínculos superabundantes (como en el método de las fuerzas), no resultando necesario especificar, ni siquiera saber, si la estructura es isostática o hiperestática. Además, si la estructura fuese inestable, no puede arribarse a ninguna solución y se queda así prevenido de la presencia de la inestabilidad.

2. MATRIZ DE RIGIDEZ.

Las nociones básicas inherentes al concepto de rigidez fueron expuestas en el apartado 1.1. del Capítulo V, a cuyo contenido se remite. Extendiendo el concepto allí enunciado a un miembro estructural, se define generalmente la rigidez de un nudo como la acción (fuerza o momento) necesaria para producir un desplazamiento (lineal o angular, respectivamente) unitario en el nudo, si en todos los nudos restantes de la estructura no se permite ningún tipo de desplazamiento.

Si se considerase el caso de un miembro estructural de respuesta lineal, la relación entre la acción (A) aplicada en una determinada dirección y el desplazamiento (D) producido en la dirección de la acción, puede expresarse por

$$A = R.D \qquad (1)$$

en donde R (también simbolizado usualmente por K en la bibliografía), es la rigidez del elemento en la dirección considerada. De acuerdo a la definición precedente, si D = 1

$$R = A \qquad (2)$$

2.1. Matriz de rigidez de un elemento individual.

En la mayoría de los problemas prácticos, resulta necesario considerar los desplazamientos en más de una única dirección. Sea el caso de una barra genérica 1-2, supuesta aislada de una estructura cualquiera, de parámetros geométricos l, F, J y J_T, y del material E y G.

Los momentos de extremo A_{e1} y A_{e2} producen las rotaciones D_{e1} y D_{e2} en los mismos extremos. Como caso general, se supondrá que además la barra experimenta un desplazamiento lineal relativo entre sus extremos D_{e3}, siendo A_{e3} el valor de las fuerzas que constituyen la cupla equilibrante (figura 1a)

$$|A_{e3}| = \frac{A_{e1} + A_{e2}}{l} \qquad (3)$$

A los efectos de poder expresar la (1) en función de las tres acciones de extremo consideradas y los correspondientes desplazamientos en sus direcciones, se aplica el principio de independencia de las acciones (desplazamientos en este caso) y de superposición de los efectos, además del concepto de rigidez que surge de la (2), consignándose los estados individuales en la figura 1b). En cada caso se produjo un desplazamiento unitario

sucesivamente en las direcciones de D_{e1}, D_{e2} y D_{e3}, manteniendo para cada estado unitario, los restantes desplazamientos no involucrados iguales a cero.

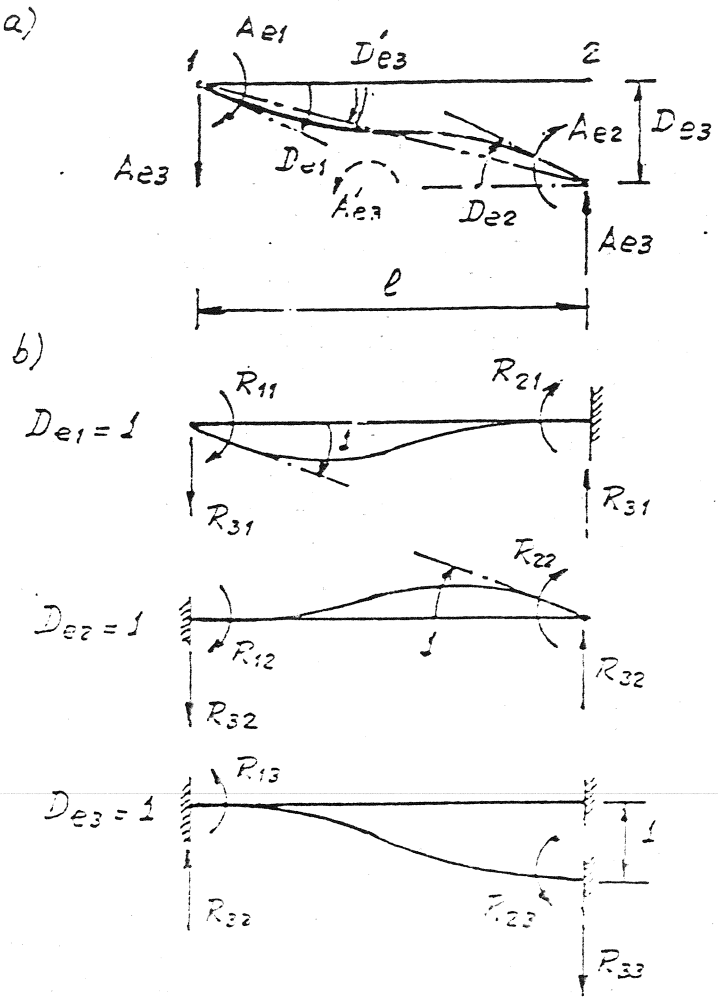


Figura 1

Multiplicando los tres estados de deformación debidos a desplazamientos unitarios de la figura 1b) en forma ordenada y sucesiva por los verdaderos valores de D_{e1}, D_{e2} y D_{e3} y sumando, se obtendrán las magnitudes de las acciones de extremo reales del elemento, indicados en la figura 1a). Es decir

$$\begin{aligned} A_{e1} &= R_{11}.D_{e1} + R_{12}.D_{e2} + R_{13}.D_{e3} \\ A_{e2} &= R_{21}.D_{e1} + R_{22}.D_{e2} + R_{23}.D_{e3} \\ A_{e3} &= R_{31}.D_{e1} + R_{32}.D_{e2} + R_{33}.D_{e3} \end{aligned} \qquad (4)$$

Organizando en cada caso las acciones y los desplazamientos en un solo vector

$$[A_e] = \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \\ A_{e3} \end{bmatrix} \quad ; \quad [D_e] = \begin{bmatrix} D_{e1} \\ D_{e2} \\ D_{e3} \end{bmatrix}$$

y la matriz de los coeficientes que afectan a los desplazamientos

$$[R_e] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

a la que se denomina **matriz de rigidez** del elemento estructural considerado. Cada término de esta matriz, por definición, corresponde a las acciones nodales congruentes con desplazamientos unitarios.

Como consecuencia de las expresiones anteriores, las (4) pueden escribirse en forma matricial como

$$[A_e] = [R_e].[D_e] \qquad (6)$$

expresión similar a la (1), que plantea la relación entre las acciones nodales producidas en el elemento estructural, con los desplazamientos generados en sus respectivas direcciones, a través de la matriz de rigidez del elemento. Cabe aclarar que la matriz de rigidez así conceptualizada está expresada en coordenadas locales, aspecto que se profundizará en el apartado 6.3.1.

2.2. Matriz de rigidez de una estructura.

Para extender el concepto de la matriz de rigidez de un elemento individual al de toda una estructura en su conjunto, puede considerarse por ejemplo el caso de la estructura formada por varios elementos (a, b, c), según se muestra en la figura 2.

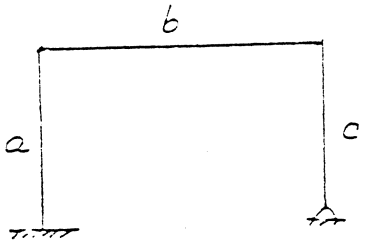


Figura 2

Para cada uno de sus elementos constitutivos se podrá formular la (6), o sea

$$[A_e]_a = [R_e]_a.[D_e]_a$$
$$[A_e]_b = [R_e]_b.[D_e]_b$$
$$[A_e]_c = [R_e]_c.[D_e]_c$$

Expresando en una única formulación matricial

$$\begin{bmatrix} [A_e]_a \\ [A_e]_b \\ [A_e]_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_e]_a & 0 & 0 \\ 0 & [R_e]_b & 0 \\ 0 & 0 & [R_e]_c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} [D_e]_a \\ [D_e]_b \\ [D_e]_c \end{bmatrix}$$

y en forma general

$$[A_e] = [R_E].[D_e] \qquad (7)$$

expresión análoga a la (6), válida ahora para toda la estructura, ya sea ésta isostática o hiperestática, y en la que

$$[A_e] = \begin{bmatrix} [A_e]_a \\ [A_e]_b \\ [A_e]_c \end{bmatrix} \; ; \; [R_E] = \begin{bmatrix} [R_e]_a & 0 & 0 \\ 0 & [R_e]_b & 0 \\ 0 & 0 & [R_e]_c \end{bmatrix} \; ; \; [D_e] = \begin{bmatrix} [D_e]_a \\ [D_e]_b \\ [D_e]_c \end{bmatrix} \qquad (8)$$

En definitiva resulta que puede formularse una expresión única y general que reúne las acciones nodales de todos los miembros de la estructura y todos los desplazamientos que le son correspondientes, agrupados en cada caso en sendos vectores, relacionados entre sí por medio de la matriz de rigidez de toda la estructura, conformada colocando en diagonal las submatrices de todos los elementos individuales que la constituyen, expresadas en las coordenadas locales que corresponden a cada barra.

El orden en que se consideran los elementos es indistinto, pero debe ser siempre el mismo en cada vector y en la matriz.

2.3. Formas de la matriz de rigidez para distintos tipos de solicitaciones interiores.

La matriz de rigidez de un miembro estructural toma diversas conformaciones, con distintas cantidades de filas y columnas, por una parte, según que sean o no despreciables las influencias de N y Q en los valores de los desplazamientos nodales o que se trate de elementos de estructuras espaciales, en las cuales se presentan también momentos torsores, y por otra, según como se referencien las acciones y los desplazamientos correspondientes a la dirección de extremo 3 de la figura 1a).

Para la formulación de estas matrices deben tenerse presente las convenciones de signos establecidas para los desplazamientos en los capítulos anteriores, es decir que:

a) las acciones de momento y los giros serán positivos o negativos según que las secciones respectivas roten en sentido horario o antihorario,
b) el desplazamiento relativo D_{e3} será positivo cuando el extremo derecho baje con respecto al izquierdo, o en otras palabras, cuando el giro del eje de la barra (D_{e3}') sea positivo, lo que define el signo a considerar en caso de elementos verticales u oblicuos,
c) las fuerzas de corte (A_{e3}) tendrán el signo del par que tienden a producir, y
d) las variaciones de longitud que pueda experimentar una barra serán positivas si son alargamientos y negativas si fuesen acortamientos, valiendo el mismo signo pa a las acciones que producen tales desplazamientos.

2.3.1. Elementos solicitados sólo por flexión.

Corresponde al caso de las estructuras planas de alma llena en que es despreciable la influencia de N y Q, y se corresponde con el consignado en la figura 1a). Cuando $D_{e1} = 1$ y $D_{e2} = D_{e3} = 0$ resulta $A_{e1} = R_{11}$; $A_{e2} = R_{21}$ y $A_{e3} = R_{31}$ (primer estado de la figura 1b), constituyendo tales valores la primera columna de la

matriz de rigidez $[R_e]$ dada por la expresión (5). De igual manera, y analizando los restantes estados de desplazamiento unitario de la figura 1b), se razona para deducir los valores de R_{ix} de las demás columnas de la matriz.

Por lo tanto, así como en la expresión (2) R corresponde a la acción que produce un desplazamiento unitario en su propia dirección, en la (6) $[R_e]$ representa un conjunto de acciones extremas, generadas en elementos solicitados por flexión, tomadas ordenadamente y que son congruentes en todos los casos con desplazamientos unitarios. Cada columna contiene pues las acciones a aplicar en cada dirección de los extremos considerados, para obtener sucesivamente valores unitarios de los desplazamientos respectivos ($D_{e1} = 1$ para la primera columna; $D_{e2} = 1$ para la segunda, etc.).

Los valores de las acciones que se generan en las direciones de los extremos considerados de un elemento al producir en uno solo de ellos un desplazamiento unitario, fueron deducidos en el apartado 2.2.3. del Capítulo IV, y recopilados en la Tabla N° 1 del Anexo del mismo Capítulo. Teniendo en cuenta estos valores, que corresponden a los casos 1 y 3 de la citada tabla, y los estados de la figura 1b), resulta

$$R_{11} = 4\,E.k \quad ; \quad R_{12} = 2\,E.k \quad ; \quad R_{13} = -\frac{6\,E.k}{l}$$

$$R_{21} = 2\,E.k \quad ; \quad R_{22} = 4\,E.k \quad ; \quad R_{23} = -\frac{6\,E.k}{l}$$

$$R_{31} = -\frac{6\,E.k}{l} \quad ; \quad R_{32} = -\frac{6\,E.k}{l} \quad ; \quad R_{33} = \frac{12\,E.k}{l^2}$$

Reemplazando estos valores en la (5), la matriz de rigidez en las condiciones supuestas tomará la forma

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\,E.k & 2\,E.k & -6\,E.k/l \\ 2\,E.k & 4\,E.k & -6\,E.k/l \\ -6\,E.k/l & -6\,E.k/l & 12\,E.k/l^2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

o bien, extrayendo 2 E.k factor común

$$[R_e] = 2\,E.k. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3/l \\ 1 & 2 & -3/l \\ -3/l & -3/l & 6/l^2 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

2.3.1.1. Formulación alternativa de la matriz de rigidez.

En las expresiones de $[R_e]$ dadas por las (9) y (10), al combinarse acciones constituidas por momentos (A_{e1} y A_{e2}), congruentes con desplazamientos angulares (D_{e1} y D_{e2}), y por fuerzas (A_{e3}), consecuencia de corrimientos relativos (D_{e3}), aparecen términos con l y con l^2 en el denominador.

A los efectos de simplificar la notación, todos los términos de la matriz de rigidez pueden referirse a momentos considerados como acciones de extremo (A_{e1}), para lo cual será necesario referir todos los desplazamientos (D_{e1}) a rotaciones. Excluyendo el único inconveniente (términos con denominadores) en A_{e3} y D_{e3}, lo antedicho puede lograrse reemplazando el desplazamiento lineal relativo D_{e3}, por el ángulo de giro del eje de la barra D_{e3}', en cuyo caso la acción asociada será el momento

$$A_{e3}' = - (A_{e1} + A_{e2}) \qquad (11)$$

tal como se consigna en la figura 1a).

Referenciando en consecuencia el tercer estado unitario en función de D_{e3}' y A_{e3}' (figura 3), se tendrá, aplicando las expresiones del caso 3° de la Tabla N° 1 del Anexo del Capítulo IV

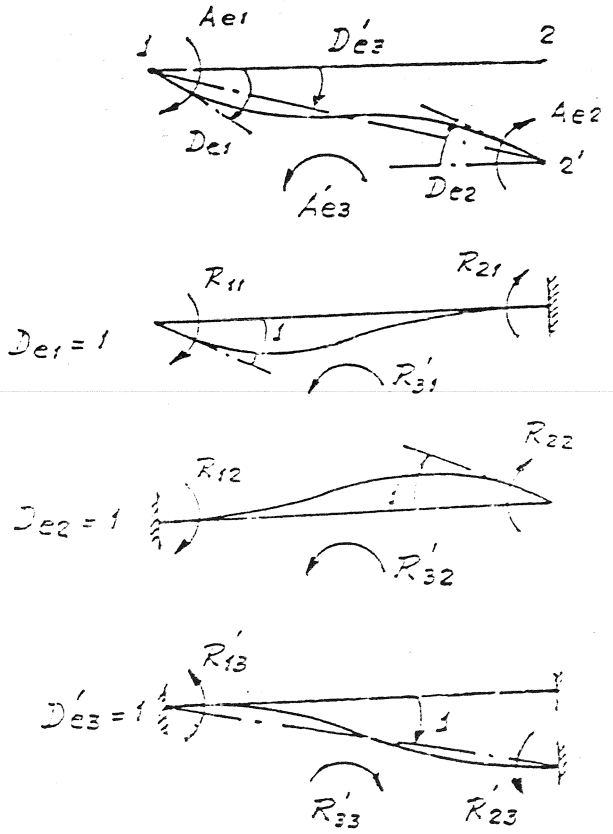


Figura 3

$$R_{13}' = R_{31}' = -6\ E.k \quad ; \quad R_{23}' = R_{32}' = -6\ E.k \quad ; \quad R_{33}' = 12\ E.k$$

Dado que los valores de R_{11}; R_{22} y $R_{12} = R_{21}$ no se modifican, la matriz de rigidez dada por las (9) y (10) se reduce así a

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\ E.k & 2\ E.k & -6\ E.k \\ 2\ E.k & 4\ E.k & -6\ E.k \\ -6\ E.k & -6\ E.k & 12\ E.k \end{bmatrix} = 2\ E.k. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

2.3.1.2. Barras sin corrimientos extremos relativos.

En el caso de barras en las que, por las características de vinculación propias de la estructura a que pertenecen, resulta $D_{e3} = 0$ (equivalente a expresar $D_{e3}' = 0$), caso concreto, por ejemplo, el de los tramos de las vigas continuas, la matriz de rigidez a considerar para cada barra, se reduce a la matriz de 2 x 2

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\,E.k & 2\,E.k \\ 2\,E.k & 4\,E.k \end{bmatrix} = 2\,E.k.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

2.3.2. Elementos solicitados por flexión y corte.

En caso de no ser despreciable la incidencia del esfuerzo de corte en el valor de las acciones correspondientes a desplazamientos unitarios en las direcciones de los extremos a considerar, serán de aplicación las expresiones que toman en cuenta tal circunstancia desarrolladas como casos 9 y 10 en el apartado 2.2.3.4. del Capítulo IV, resumidas en la Tabla N° 1 del Anexo del mismo Capítulo. En consecuencia se tendrá, tomando como desplazamientos extremos a D_{e1}, D_{e2} y D_{e3}

$$R_{11} = \frac{4\,E.k.(1+\lambda)}{(1+4\lambda)} \; ; \; R_{12} = \frac{2\,E.k.(1-2\lambda)}{(1+4\lambda)} \; ; \; R_{13} = -\frac{6\,E.k}{l.(1+4\lambda)}$$

$$R_{21} = \frac{2\,E.k.(1-2\lambda)}{(1+4\lambda)} \; ; \; R_{22} = \frac{4\,E.k.(1+\lambda)}{(1+4\lambda)} \; ; \; R_{13} = -\frac{6\,E.k}{l.(1+4\lambda)}$$

$$R_{31} = -\frac{6\,E.k}{l.(1+4\lambda)} \; ; \; R_{32} = -\frac{6\,E.k}{l.(1+4\lambda)} \; ; \; R_{13} = \frac{12\,E.k}{l^2.(1+4\lambda)}$$

La matriz de rigidez para este caso tomará la configuración

$$[R_e] = \frac{2\,E.k}{(1+4\lambda)}.\begin{bmatrix} 2.(1+\lambda) & (1-2\lambda) & -3/l \\ (1-2\lambda) & 2.(1+\lambda) & -3/l \\ -3/l & -3/l & 6/l^2 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Si en cambio se efectúa la referenciación a los tres giros extremos D_{e1}, D_{e2} y D_{e3}' (casos 9 y 10'), se tendrá, introduciendo directamente $k' = k/(1+4\lambda)$

$R_{11} = 4\,E.k'.(1+\lambda)$; $R_{12} = 2\,E.k'.(1-2\lambda)$; $R_{13}' = -6\,E.k'$

$R_{21} = 2\,E.k'.(1-2\lambda)$; $R_{22} = 4\,E.k'.(1+\lambda)$; $R_{23}' = -6\,E.k'$

$R_{31}' = -6\,E.k'$; $R_{32}' = -6\,E.k'$; $R_{33}' = 12\,E.k'$

con lo que la matriz de rigidez resultará para este caso

$$[R_e] = \frac{2\,E.k}{(1+4\lambda)}.\begin{bmatrix} 2.(1+\lambda) & (1-2\lambda) & -3 \\ (1-2\lambda) & 2.(1+\lambda) & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

2.3.3. Elementos solicitados por flexión y esfuerzo normal.

Si no es despreciable (por la magnitud de las cargas, la longitud de los elementos o su sección transversal) la influencia del esfuerzo normal en la deformación que tales elementos experimentan, al caso básico mostrado en la figura 1. deberá agregársele un cuarto extremo o cuarta dirección nodal. correspondiente a la solicitación axial A_{e4} y su respectivo desplazamiento D_{e4} (figura 4, en la que sólo se consigna la dirección de extremo agregada).

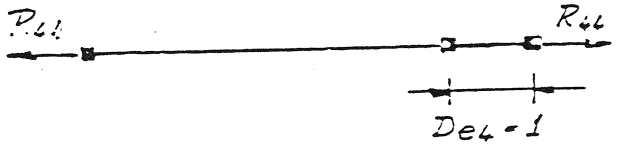


Figura 4

En consecuencia, al provocar sucesivamente los estados de desplazamientos unitarios se tendrá

1°) Para $D_{e1} = 1$; $D_{e2} = D_{e3} = D_{e4} = 0$, se añade a los anteriormente considerados en el caso desarrollado en el apartado 2.3.1. o el alternativo del apartado 2.3.1.1., como cuarto término $R_{41} = 0$.

2°) Para $D_{e2} = 1$; $D_{e1} = D_{e3} = D_{e4} = 0$, se añade $R_{42} = 0$.

3°) Para $D_{e3} = 1$; $D_{e1} = D_{e2} = D_{e4} = 0$, se añade $R_{43} = 0$.

4°) Finalmente, para $D_{e4} = 1$; $D_{e1} = D_{e2} = D_{e3} = 0$, resulta (figura 4)

$$R_{14} = 0 \quad ; \quad R_{24} = 0 \quad ; \quad R_{34} = 0 \quad ; \quad R_{44} = E.F/l$$

valor este último que surge del Caso 7 de la Tabla N° 1 del Anexo del Capítulo IV. Para poder extraer 2 E.k como factor, se debe multiplicar y dividir esta expresión por J, con lo que

$$R_{44} = \frac{E.F}{l} \cdot \frac{J}{J} = \frac{E.F.k}{J}$$

En definitiva, si se trabaja con el desplazamiento lineal relativo D_{e3} como tercera dirección de extremo, la matriz de rigidez será de la forma

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4Ek & 2Ek & -6Ek/l & 0 \\ 2Ek & 4Ek & -6Ek/l & 0 \\ -6Ek/l & -6Ek/l & 12Ek/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EF/l \end{bmatrix} = 2Ek. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3/l & 0 \\ 1 & 2 & -3/l & 0 \\ -3/l & -3/l & 6/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F/2J \end{bmatrix} \quad (16)$$

Si en cambio, se refiere la tercera dirección de extremo al desplazamiento angular relativo D_{e3}', se debe emplear la siguiente

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4Ek & 2Ek & -6Ek & 0 \\ 2Ek & 4Ek & -6Ek & 0 \\ -6Ek & -6Ek & 12Ek & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EF/l \end{bmatrix} = 2\,E.k. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F/2J \end{bmatrix} \qquad (17)$$

2.3.4. Elementos solicitados por flexión y torsión.

En este caso pueden hacerse extensivas las consideraciones efectuadas en el apartado precedente, con sólo reemplazar la acción normal A_{e4} por un par torsor, y el correspondiente desplazamiento D_{e4}, por el giro que dicho par torsor provoca. Resulta así para R_{44} el valor dado para a_5 en el Caso 8 de la Tabla N° 1 del Anexo del Capítulo IV, o sea

$$R_{44} = \frac{G.J_T}{l} = \frac{G.J_T}{l}.\frac{E.J}{E.J} = \frac{E.J}{\tau.l} = \frac{E.k}{\tau}$$

En consecuencia, si se trabaja con el desplazamiento lineal relativo D_{e3} como tercera dirección de extremo, la matriz de rigidez será de la forma

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4Ek & 2Ek & -6Ek/l & 0 \\ 2Ek & 4Ek & -6Ek/l & 0 \\ -6Ek/l & -6Ek/l & 12Ek/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ek/\tau \end{bmatrix} = 2Ek. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3/l & 0 \\ 1 & 2 & -3/l & 0 \\ -3/l & -3/l & 6/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2\tau \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Si en cambio, se refiere la tercera dirección de extremo al desplazamiento angular relativo D_{e3}', se debe emplear

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4Ek & 2Ek & -6Ek & 0 \\ 2Ek & 4Ek & -6Ek & 0 \\ -6Ek & -6Ek & 12Ek & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ek/\tau \end{bmatrix} = 2\,E.k. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2\tau \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

2.4. Consideraciones sobre las matrices de rigidez.

En los apartados precedentes se dedujeron las expresiones de las matrices de rigidez para barras sometidas a flexión, fuerza axial, fuerza cortante y momento torsor, en todos los casos referidas en coordenadas locales. Todas estas matrices están formuladas en un cierto orden que debe observarse cuidadosamente.

Recordando que la ecuación general de rigidez se escribe simbólicamente según la (7), o sea

$$[A_e] = [R_e].[D_e]$$

debe tenerse siempre presente que el orden en que se anotan las acciones nodales en la matriz $[R_e]$ debe ser el mismo con que se hayan ordenado los desplazamientos correspondientes en el vector $[D_e]$. Así, si la primera acción nodal anotada en $[A_e]$ es A_{e1}, entonces el primer desplazamiento contenido en la $[D_e]$ debe ser

Del. etc. De igual forma debe adoptarse, y respetarse en la formulación de todos los vectores y matrices, un mismo ordenamiento para la numeración secuencial de las barras. Si a lo largo de todo el análisis se conserva este orden, las matrices de rigidez tendrán las mismas características que las que se consignan en el apartado 6.[illegible].7. para las matrices de rigidez referidas a un sistema global de referenciación.

2.5. Comparación entre las matrices de flexibilidad y de rigidez.

La expresión (5) del apartado 1.1. del Capítulo V ponía de manifiesto la relación inversa que existe entre las rigideces y las flexibilidades estructurales, al ser

$$R = F^{-1} \quad ; \quad F = R^{-1}$$

Esta relación puede también verificarse invirtiendo la (13)

$$[R_e]^{-1} = \frac{1}{6\,E.k}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6\,E.J}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [F_e]$$

que se corresponden con las (12) y (11) del Capítulo V.

3. EXPRESION DEL TTV APLICADA AL METODO DE LA RIGIDEZ.

3.1. Conceptos básicos.

Mientras que en el método de la flexibilidad, al emplearse el TTV para determinar desplazamientos, debía considerarse su formulación completa [Te = Ti(d)], desarrollando expresiones matriciales para ambos miembros, en el método de la rigidez, al relacionarse el concepto del mismo con acciones, sólo será necesario limitarse a la consideración del trabajo externo Te.

Tal como ya se pusiera de manifiesto en reiteradas oportunidades, el método de la rigidez responde a los mismos lineamientos teóricos que los que sirvieron de base para la formulación del método de los desplazamientos, el que fue desarrollado en el Capítulo IV. En virtud de lo anterior, para plantear las ecuaciones de equilibrio que permitan la determinación de las incógnitas cinemáticas que presenta la estructura (por ejemplo, X_1, X_2 y X_3 para el caso del pórtico biempotrado de la figura 5), pueden plantearse en forma independiente dos sistemas:

a) por una parte, un sistema básico (sistema fijo), en el que se anula toda posibilidad de desplazamiento en la dirección de las incógnitas, más

b) un segundo sistema, constituido por la estructura dada. supuesta descargada, y en la que se producen los desplazamientos incógnitos con sus valores reales. Es decir

Estructura real = Sistema fijo + Sistema X (20)

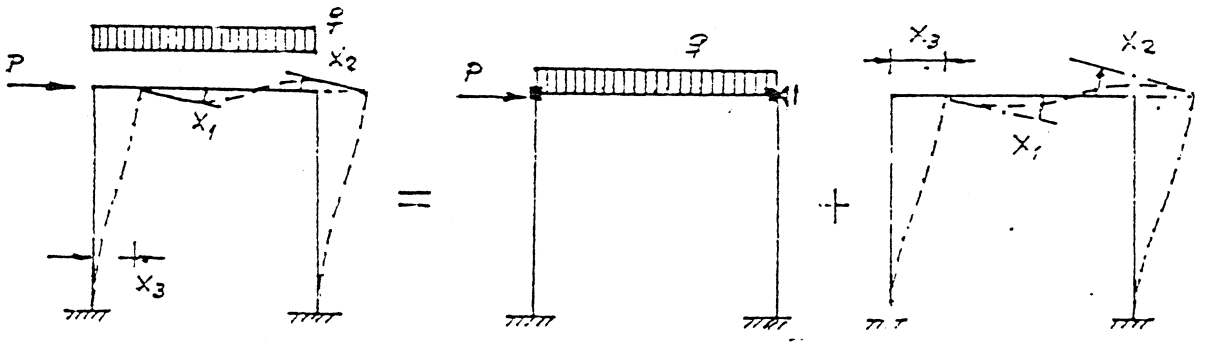


Figura 5

Sobre el sistema fijo se considera actuando el sistema exterior de cargas aplicado a la estructura (P_o), que dadas las restricciones de desplazamientos impuestas, origina acciones reactivas en correspondencia con aquéllas. Por otra parte, al considerar el sistema X descargado, el producir en el mismo los desplazamientos X_i, sólo será compatible con las correspondientes acciones congruentes con tales desplazamientos.

Aparecen en consecuencia, dos sistemas de acciones (no dibujados en la figura), uno en el sistema fijo con las cargas exteriores (A_o) y otro en el sistema X (A_x), debiendo cualquier acción A de la estructura dada, ser

$$A = A_o + A_x \qquad (21)$$

Cada una de estas acciones puede ser expresada desde dos puntos distintos de referenciación, a saber:

a) Considerando las acciones actuantes en las direcciones de las incógnitas, o en los nudos en general, a las que se denominará *acciones nodales*, en cuyo caso

$$[A_x] = [A_{xo}] + [A_{xx}] \qquad (22)$$

b) Considerando las acciones que actúan en cada dirección de extremo que deba ser considerada para cada barra, de acuerdo al tipo de solicitaciones internas a considerar, según los conceptos consignados al respecto en el apartado 2.3. (*acciones de extremo*)

$$[A_e] = [A_{eo}] + [A_{ex}] \qquad (23)$$

3.1.1. Expresión de Te en función de las acciones nodales.

Si se efectúa por ejemplo el análisis aplicado al pórtico de la figura 5, como representativo de una estructura genérica con cualquier estado exterior de cargas (no dibujado en la figura), se observa (figura 6) que el sistema fijo, por su propia base conceptual de materialización, al no tener desplazamientos en las direcciones de las incógnitas, se comporta en tales direcciones en forma equivalente al sistema no deformante del TTV, pudiéndose considerar al sistema X como deformante. En consecuencia el

trabajo (externo) de las acciones nodales será, algebraicamente expresado y para cargas arbitrarias

$$T_{AN} = X_1.A_{1o} + X_2.A_{2o} + X_3.A_{3o} = [X]^T.[A_{xo}] \qquad (24)$$

Cabe recordar que en la aplicación del TTV en todos los casos se debe considerar el trabajo producido por las acciones del sistema no deformante en los desplazamientos producidos en sus respectivas direcciones en el sistema deformante.

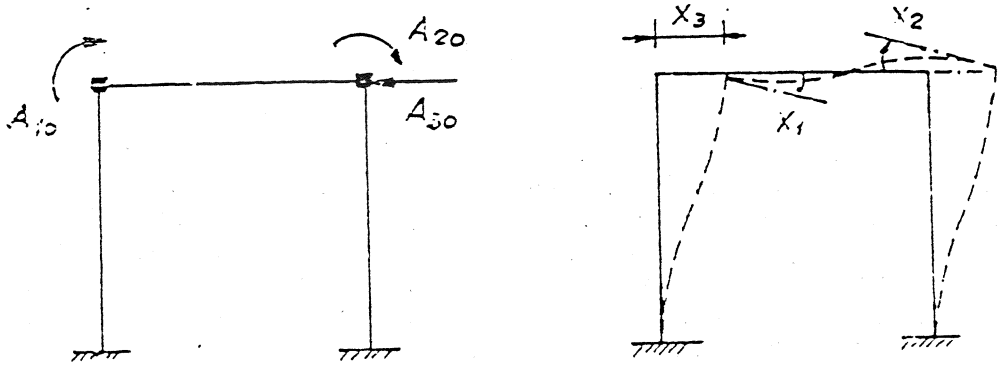


Figura 6

3.1.2. Expresión de Te en función de las acciones de extremo.

Procediendo en forma conceptualmente similar a la anterior, pero utilizando las acciones de extremo de cada barra (suponiendo los tres extremos generales presentes en el caso de barras solicitadas a flexión), y cualquier estado exterior de cargas, se podrá expresar (figura 7)

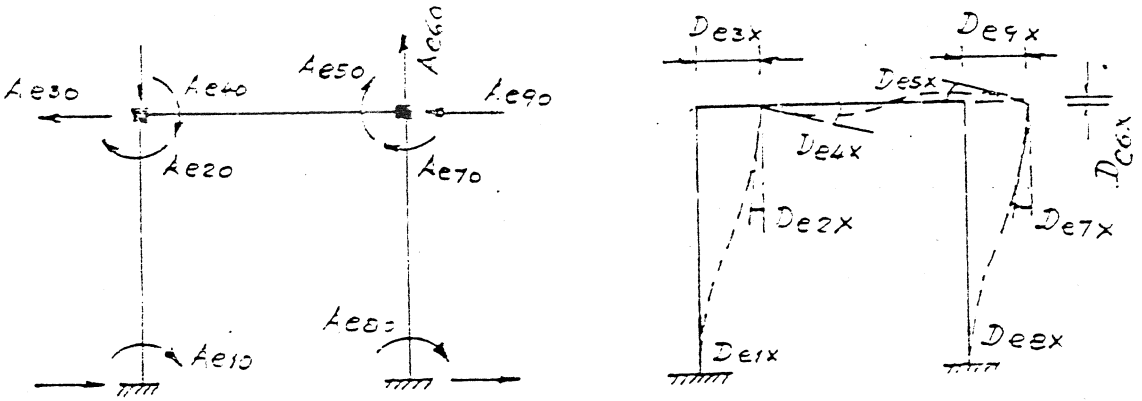


Figura 7

$$T_{Ae} = D_{e1x}.A_{e1o} + D_{e2x}.A_{e2o} + D_{e3x}.A_{e3o} + D_{e4x}.A_{e4o} + D_{e5x}.A_{e5o} + D_{e6x}.A_{e6o} + D_{e7x}.A_{e7o} + D_{e8x}.A_{e8o} + D_{e8x}.A_{e8o} \qquad (25)$$

o bien

$$T_{Ae} = [D_{ex}]^T.[A_{eo}] \qquad (26)$$

3.1.3. Relación entre T_{AN} y T_{Ae}.

Analizando las figuras 6 y 7 se observa que:

a) Por tratarse de extremos empotrados $D_{e1x} = D_{e8x} = 0$, y por considerar invariable la longitud de las barras (las columnas en este caso) después de deformadas, $D_{e8x} = 0$. En consecuencia la (25) se reduce a

$$T_{Ae} = D_{e2x}.A_{e2o} + D_{e3x}.A_{e3o} + D_{e4x}.A_{e4o} + D_{e5x}.A_{e5o} + D_{e7x}.A_{e7o} + D_{e8x}.A_{e8o} \qquad (27)$$

b) Por la rigidez de nudo, en la estructura deformada

$$X_1 = D_{e2x} = D_{e4x} \quad ; \quad X_2 = D_{e5x} = D_{e7x}$$

y como los corrimientos horizontales de ambos extremos de la viga son iguales

$$X_3 = D_{e3x} = D_{e8x}$$

en virtud de las cuales, la (27) puede expresarse

$$T_{Ae} = X_1.(A_{e2o} + A_{e4o}) + X_2.(A_{e5o} + A_{e7o}) + X_3.(A_{e3o} + A_{e8o}) \qquad (28)$$

c) Cada acción de nudo debe ser igual a la suma de las acciones de extremo actuantes en sus respectivas direcciones. En este caso

$$A_{1o} = A_{e2o} + A_{e4o} \quad ; \quad A_{2o} = A_{e5o} + A_{e7o} \quad ; \quad A_{3o} = A_{e3o} + A_{e8o}$$

que reemplazadas en la (28) permiten obtener

$$T_{Ae} = X_1.A_{1o} + X_2.A_{2o} + X_3.A_{3o}$$

Expresión idéntica a la (24), que demuestra que

$$T_{AN} = T_{Ae} \qquad (29)$$

y que constituye la expresión del TTV aplicable al método de la rigidez, la que, teniendo en cuenta las (24) y (28) puede también formularse como

$$[X]^T.[A_{xo}] = [D_{ex}]^T.[A_{eo}] \qquad (30)$$

4. APLICACION DEL METODO DE LA RIGIDEZ EN COORDENADAS LOCALES.

Al constituir el método de la rigidez una reformulación del método de los desplazamientos en lo que hace a la mecánica operatoria para obtener las incógnitas elásticas, reemplazando el planteo y resolución del sistema de ecuaciones (que sin embargo queda implícito en el método), por determinadas operaciones entre matrices, cada una de las cuales debe ser previamente formulada, existe una total correspondencia conceptual con el método de los desplazamientos, por lo que los pasos a seguir hasta la formulación de tales matrices son totalmente análogos.

4.1. Desarrollo del método de la rigidez.

Los pasos a seguir para resolver una estructura por el método de la rigidez formulado en coordenadas locales son los siguientes:

1°) En primer lugar debe determinarse la cantidad de incógnitas, la que será igual al grado de indeterminación cinemática de la estructura.

2°) Como segundo paso se introducen todos los vínculos de sujecion necesarios a fin de imposibilitar todo desplazamiento, tanto lineal como angular, en la dirección de las incógnitas, constituyendo el denominado *sistema fijo* (SF). Las restricciones impuestas se ponen de manifiesto mediante las acciones reactivas (fuerzas y pares) que cada una de ellas genera. Con las acciones así producidas se escriben las $[A_{eo}]$ y $[A_{xo}]$, refiriéndolas respectivamente, y en una sucesión ordenada, a las direcciones extremas que sea necesario considerar en cada barra, para la primera, y a las de las incógnitas, para la segunda.

Sin perjuicio de que ambos vectores pueden ser formulados en forma directa, sus valores pueden relacionarse a través de la expresión del TTV dada por la (30), según la cual

$$[X]^T.[A_{xo}] = [D_{ex}]^T.[A_{eo}]$$

Como no se conocen a priori los valores de las incógnitas cinemáticas X_i, tampoco puede formularse la $[D_{ex}]$, pero sí se pueden suponer para tales incógnitas valores unitarios (x_u) y calcular los desplazamientos que las mismas producen en las sucesivas direcciones de extremo consideradas $[D_{exu}]$, las que se relacionarán con las verdaderas por medio de

$$[D_{ex}] = [D_{exu}].[X] \qquad (31)$$

y transponiendo

$$[D_{ex}]^T = [X]^T.[D_{exu}]^T \qquad (32)$$

Reemplazando esta expresión en la (30)

$$[X]^T.[A_{xo}] = [X]^T.[D_{exu}]^T.[A_{eo}]$$

o bien

$$[A_{xo}] = [D_{exu}]^T.[A_{eo}] \qquad (33)$$

3°) Las fijaciones introducidas en el paso anterior traen como consecuencia una situación de incongruencia o incompatibilidad. concretamente con relación a los desplazamientos reales que se producen en la dirección de cada incógnita en la estructura dada. A los efectos de recomponer la situación de la estructura en sus condiciones primitivas, al sistema fijo debe sumársele un sistema que corresponde a la misma estructura, supuesta descargada, y en la que se producen los desplazamientos reales en la dirección de cada incógnita. Tal situación de desplazamientos será congruente

con un cierto estado de acciones, que serán las $[A_{ox}]$ si se las expresa en las direcciones de las incógnitas y las $[A_{ex}]$, si se lo hace en términos ordenados de cada extremo de barra a considerar.

Este paso, así conceptualizado, no puede ser desarrollado en la forma expuesta, primero por no conocerse los valores de las incógnitas, y segundo porque no pueden aplicarse las mismas actuando simultáneamente. En consecuencia se consideran en forma sucesiva estados que corresponden a cada incógnita con valor unitario y todas las restantes con valores nulos. Cada uno de estos estados se corresponderá con un conjunto de acciones, que en forma genérica se designa como $[a_{xxu}]$.

4°) Corresponde determinar ahora los valores que deben poseer las incógnitas [X], para hacer compatibles las mismas entre los sucesivos estados unitarios y el sistema fijo. Esto exige escribir ecuaciones de superposición en las que se sumen las acciones generadas en cada estado considerado, que serán en definitiva ecuaciones de equilibrio de acciones. Expresándolas en forma matricial

$$[A_{xo}] + [a_{xxu}].[X] = 0 \quad ; \quad [X] = -[a_{xxu}]^{-1}.[A_{xo}] \qquad (34)$$

5°) En este punto pueden introducirse, a los fines de la obtención de cada término interviniente en la [X], los conceptos derivados del TTV y del empleo de la matriz de rigidez.

Para la $[A_{xo}]$, puede optarse por utilizar la (33), pero como la misma en ocasiones no es aplicable, resulta conveniente tomar el criterio general de formularla directamente en base al sistema fijo.

Por su parte, para obtener mediante operaciones matriciales la $[a_{xxu}]$, puede partirse también de la misma (33), teniendo presente que si la misma es válida para cualquier sistema de acciones, lo será no sólo para el sistema "o", sino también para el "xu". Reemplazando en consecuencia en la citada expresión los subíndices o por xu, se tendrá

$$[a_{xxu}] = [D_{exu}]^T.[A_{exu}] \qquad (35)$$

Cabe observar que las $[A_{exu}]$ se corresponden con las acciones consignadas para cada estado de desplazamiento unitario en la aplicación general del método de los desplazamientos. Para obviar este paso, se pueden calcular implícitamente tales acciones introduciendo el concepto de la matriz de rigidez, mediante la (7), que aplicada al sistema xu puede escribirse

$$[A_{exu}] = [R_E].[D_{exu}] \qquad (36)$$

Llevando a la (35)

$$[a_{xxu}] = [D_{exu}]^T.[R_E].[D_{exu}] \qquad (37)$$

Formuladas las matrices y vectores que constituyen las (33) y (37) y efectuando con ellos las operaciones consignadas en (34) se obtendrá el vector [X].

6°) El proceso de análisis de la estructura, en lo que hace a los datos necesarios para la obtención del diagrama de momentos flectores, queda concluido con la obtención directa de las acciones finales en los extremos de cada barra. Para ello basta considerar que tales acciones resultarán de la suma de las que corresponden al estado "o" más el estado "x", o sea, según la (26)

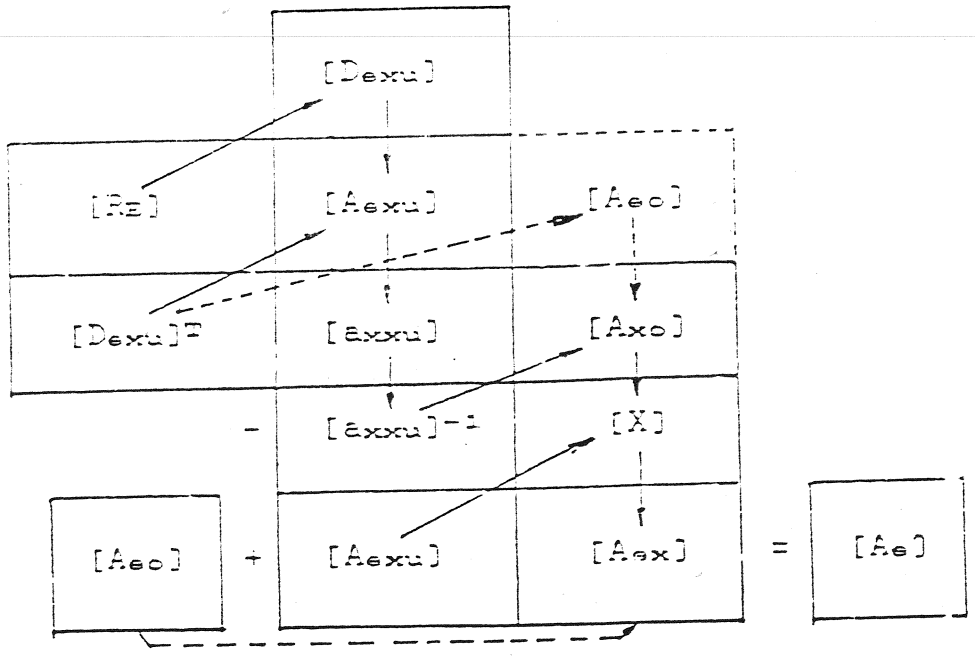
$$[A_e] = [A_{eo}] + [A_{ex}] = [A_{eo}] + [A_{exu}].[X] \qquad (38)$$

y teniendo en cuenta la (36)

$$[A_e] = [A_{eo}] + [R_E].[D_{exu}].[X] \qquad (39)$$

4.2. Diagrama de flujo de las operaciones matriciales.

Al igual que en el método de la flexibilidad, se pueden resumir en un único diagrama de flujo, las operaciones matriciales necesarias para completar el análisis de una estructura hiperestática mediante la obtención del vector [Ae], cuyos valores, conjuntamente con la consideración de las cargas exteriores actuantes, permitirán trazar los diagramas finales de solicitaciones interiores. Teniendo en cuenta para ello las (37), (38), (34), (38) y (39) resulta al efecto



(40)

4.3. Método de la rigidez simplificado.

Procediendo de acuerdo a los lineamientos seguidos hasta el presente para la formulación de los vectores y matrices necesarios para el cálculo, deben tomarse en consideración, salvo el caso de vigas continuas, tres direcciones de extremo para cada una de las barras que conforman la estructura, cuya correspondencia ha

quedado puesta de manifiesto en la figura 1a), o el procedimiento alternativo de la figura 3. La [Ae] así obtenida, contendrá en consecuencia para cada barra los siguientes tres valores: momento en el extremo 1 (A_{e1}), momento en el extremo 2 (A_{e2}) y, según el criterio que se haya seguido, fuerzas que constituyen el par reactivo de las anteriores (A_{e3}), o par equilibrante de las mismas aplicado al eje de la barra (A_{e3}').

Si se considera el trabajo de las acciones de extremo, consideradas todas como momentos, en los desplazamientos producidos en sus respectivas direcciones (figura 8), resulta (recordando que en este caso se trata de un trabajo efectivo)

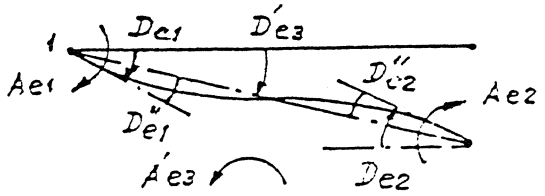


Figura 8

$$2\,T_{Ae} = A_{e1}.D_{e1} + A_{e2}.D_{e2} + A_{e3}'.D_{e3}' \qquad (41)$$

El equilibio de las acciones exige que

$$A_{e1} + A_{e2} + A_{e3}' = 0 \qquad \text{de donde} \qquad A_{e3}' = -(A_{e1} + A_{e2})$$

Reemplazando en la (41)

$$2\,T_{Ae} = A_{e1}.D_{e1} + A_{e2}.D_{e2} - (A_{e1} + A_{e2}).D_{e3}'$$

$$2\,T_{Ae} = A_{e1}.D_{e1} + A_{e2}.D_{e2} - A_{e1}.D_{e3}' - A_{e2}.D_{e3}'$$

$$2\,T_{Ae} = A_{e1}.(D_{e1} - D_{e3}') + A_{e2}.(D_{e2} - D_{e3}') \qquad (42)$$

Es decir que se llega a igual resultado que el obtenido siguiendo el procedimiento que surge de la (41) con tres direcciones de extremo, reduciendo éstas a sólo las dos direcciones necesarias para trazar el diagrama de momentos (A_{e1} y A_{e2}). Para ello deben referirse los desplazamientos a considerar para formular la D_{exu} según la (42), a las rotaciones ($D_{e1} - D_{e3}'$) y ($D_{e2} - D_{e3}'$), respectivamente, debiéndose prestar especial atención en cada caso a la correcta consideración de los signos.

Puede observarse por otra parte que (figura 6)

$$(D_{e1} - D_{e3}') = D_{e1}'' \qquad \text{y} \qquad (D_{e2} - D_{e3}') = D_{e2}'' \qquad (43)$$

constituyen los ángulos que forman las respectivas tangentes a la deformada definitiva en sus extremos 1 y 2 con el eje de giro de la barra. Al analizar los diversos tipos de estructuras (apartado 5.), se hará referencia a la mecánica de aplicación del método simplificado, concretamente para formular la [D_{exu}].

4.3.1. Formas de la [Re] para el método simplificado.

Al aplicar el método simplificado, desaparecen todos los términos (filas y columnas) correspondientes al desplazamiento relativo en la dirección perpendicular al eje de las barras; por ende, deben suprimirse en las matrices de rigidez los términos asociados a tales desplazamientos (generalmente la tercera fila y tercera columna). En virtud de lo anterior al método simplificado suele llamárselo también de la *matriz reducida*.

Como consecuencia de lo anterior las matrices de rigidez a utilizar en este caso serán:

a) Elementos solicitados a flexión, con o sin desplazamiento lineal entre los nudos

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\ E.k & 2\ E.k \\ 2\ E.k & 4\ E.k \end{bmatrix} \qquad (44)$$

b) Elementos solicitados a flexión y corte

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\ E.k'.(1+\lambda) & 2\ E.k'.(1-2\lambda) \\ 2\ E.k'.(1-2\lambda) & 4\ E.k'.(1+\lambda) \end{bmatrix} \qquad (45)$$

con $k' = k/(1+\lambda)$.

c) Elementos solicitados a flexión y esfuerzo normal

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\ E.k & 2\ E.k & 0 \\ 2\ E.k & 4\ E.k & 0 \\ 0 & 0 & E.F/l \end{bmatrix} \qquad (46)$$

d) Elementos solicitados a flexión, corte y esfuerzo normal

$$[R_e] = \begin{vmatrix} 4\ E.k'.(1+\lambda) & 2\ E.k'.(1-2\lambda) & 0 \\ 2\ E.k'.(1-2\lambda) & 4\ E.k'.(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & E.F/l \end{vmatrix} \qquad (47)$$

con $k' = k/(1+\lambda)$.

e) Elementos solicitados a flexión y torsión

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\ E.k & 2\ E.k & 0 \\ 2\ E.k & 4\ E.k & 0 \\ 0 & 0 & E.k/\tau \end{bmatrix} \qquad (48)$$

f) Elementos solicitados a flexión, esfuerzo normal y torsión

$$[R_e] = \begin{bmatrix} 4\ E.k & 2\ E.k & 0 & 0 \\ 2\ E.k & 4\ E.k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E.F/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E.k/\tau \end{bmatrix} \qquad (49)$$

5. APLICACION AL ANALISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS.

La aplicación del método de la rigidez, en la forma particular desarrollada en el apartado precedente, se presta básicamente para la resolución de estructuras compuestas por barras horizontales y verticales, y eventualmente, pero ya con cierta dificultad, con alguna barra oblicua incorporada.

5.1. Resolución de vigas continuas.

Sea por ejemplo el caso de la viga continua de la figura 9), análoga a la analizada en el apartado 6. del Capítulo IV, a fin de permitir la comparación entre las mecánicas operativas de los métodos de la rigidez y de los desplazamientos. En la misma figura se indica el estado de cargas arbitrario considerado, la sustitución del voladizo por el momento equivalente aplicado en el apoyo B y las incógnitas cinemáticas X_1 y X_2.

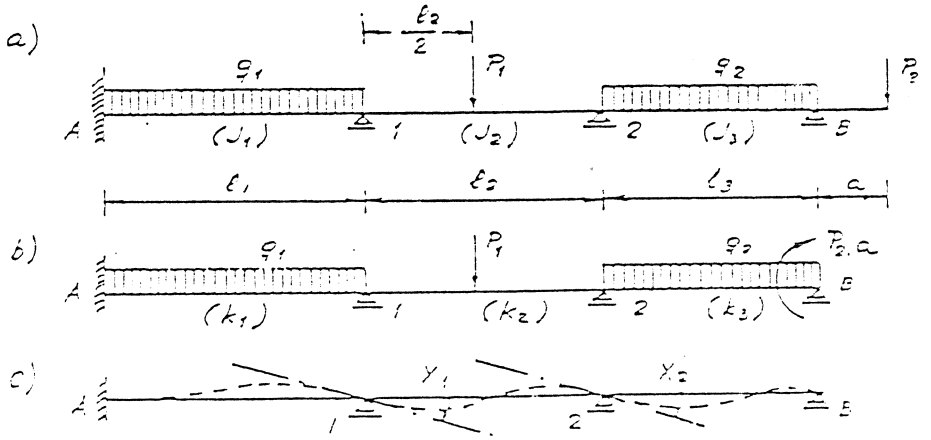


Figura 9

Para formular las matrices que se requieren según el diagrama de flujo de la expresión (40), cabe tener presente que:

a) La [Axo] resulta al conformar el sistema fijo (figura 10a)

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} q_1.l_1^2/12 - P_1.l_2/8 \\ P_1.l_2/8 - q_2.l_3^2/8 + P_2.a/2 \end{bmatrix}$$

b) Para escribir la [Dexu], se hace sucesivamente $X_1 = 1$; $X_2 = 0$ y $X_1 = 0$; $X_2 = 1$, figuras 10b) y c), que permiten formular

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$$

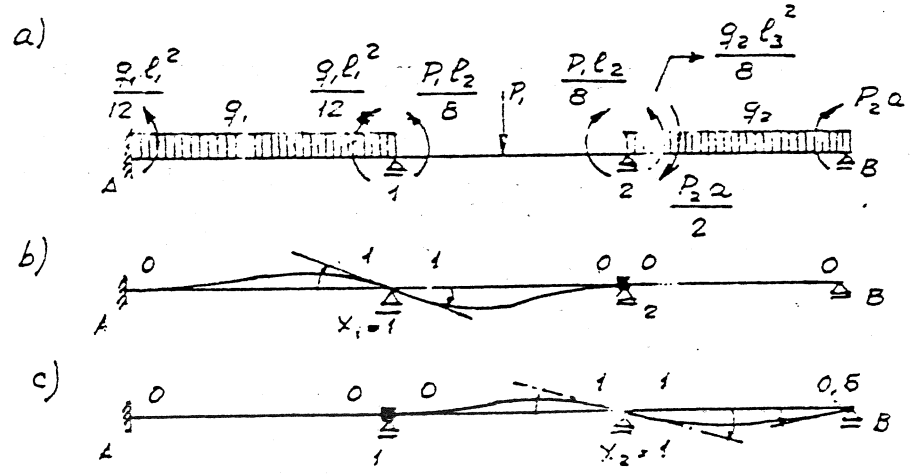


Figura 10

c) La matriz de rigidez adoptará la forma

$$[R_E] = \begin{bmatrix} 4\,Ek_1 & 2\,Ek_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,Ek_1 & 4\,Ek_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\,Ek_2 & 2\,Ek_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,Ek_2 & 4\,Ek_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\,Ek_3 & 2\,Ek_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,Ek_3 & 4\,Ek_3 \end{bmatrix} \qquad (50)$$

Obsérvese que si se efectúa el producto $[R_E].[D_{exu}]$, se tiene según la (40)

$$[A_{exu}] = \begin{bmatrix} 2\,Ek_1 & 0 \\ 4\,Ek_1 & 0 \\ 4\,Ek_2 & 2\,Ek_2 \\ 2\,Ek_2 & 4\,Ek_2 \\ 0 & 3\,Ek_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que son precisamente los valores consignados para los estados $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ en la figura 24 del Capítulo IV, cuando la resolución se plantea por el método de los desplazamientos.

d) Finalmento, para hallar las acciones finales de extremo, se requiere introducir en el diagrama de fluio la $[A_{eo}]$, que surge también de la formulación del sistema fijo (figura 10a)

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} -\,q_1.l_1^2/12 \\ q_1.l_1^2/12 \\ -\,P_1.l_2/8 \\ P_1.l_2/8 \\ -\,q_2.l_3^2/8 + P_2.a/2 \\ P_2.a \end{bmatrix}$$

Con ello se tienen todas las matrices necesarias para efectuar el proceso de cálculo que indica la (40).

5.1.1. Caso de momentos en los nudos.

Si en los nudos, o sea coincidentemente con alguna sección cuyas rotaciones constituyan las incógnitas del método actuasen momentos como parte integrante del sistema exterior de cargas, tal como es el caso que, a nivel de ejemplo, muestra la figura 11a), debe tenerse en cuenta, al conformar el sistema fijo, que para lograr la condición de $X_1 = 0$ (en el caso particular de la figura $X_1 = X_2 = 0$), deben aplicarse, *en los nudos*, momentos de fijación que deberán ser iguales y contrarios a los exteriores aplicados (figura 11b).

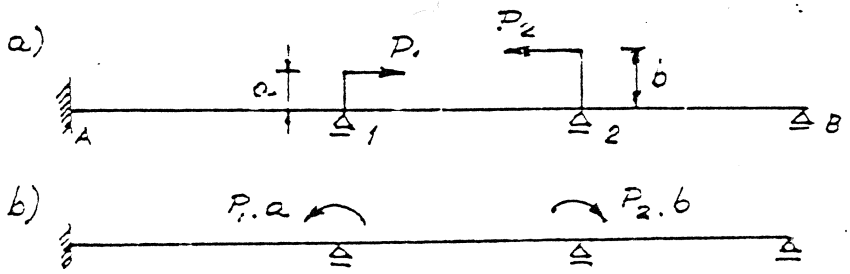


Figura 11

En consecuencia la $[A_{xo}]$ resultará

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} -P_1.a \\ \\ P_2.b \end{bmatrix}$$

Dado que estos momentos de fijación se han aplicado en los nudos, la $[A_{eo}]$ (acciones de *extremo* de las barras en el sistema fijo), estará constituida en este caso por todos valores nulos

$$[A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A su vez, los estados $X_1 = 1$, y por ende la $[D_{exu}]$, no sufren alteración respecto al caso anterior.

5.2. Estructuras aporticadas.

5.2.1. Caso de un pórtico simple.

Sea a nivel de ejemplo el pórtico de la figura 12a), solicitado por un sistema exterior de cargas P y q, siendo k_i los coeficientes de rigidez de las barras que lo constituyen.

Se analizarán sobre este caso, las distintas alternativas desarrolladas en los apartados 2.3.1. y 2.3.1.1. para la aplicación particular del método de la rigidez.

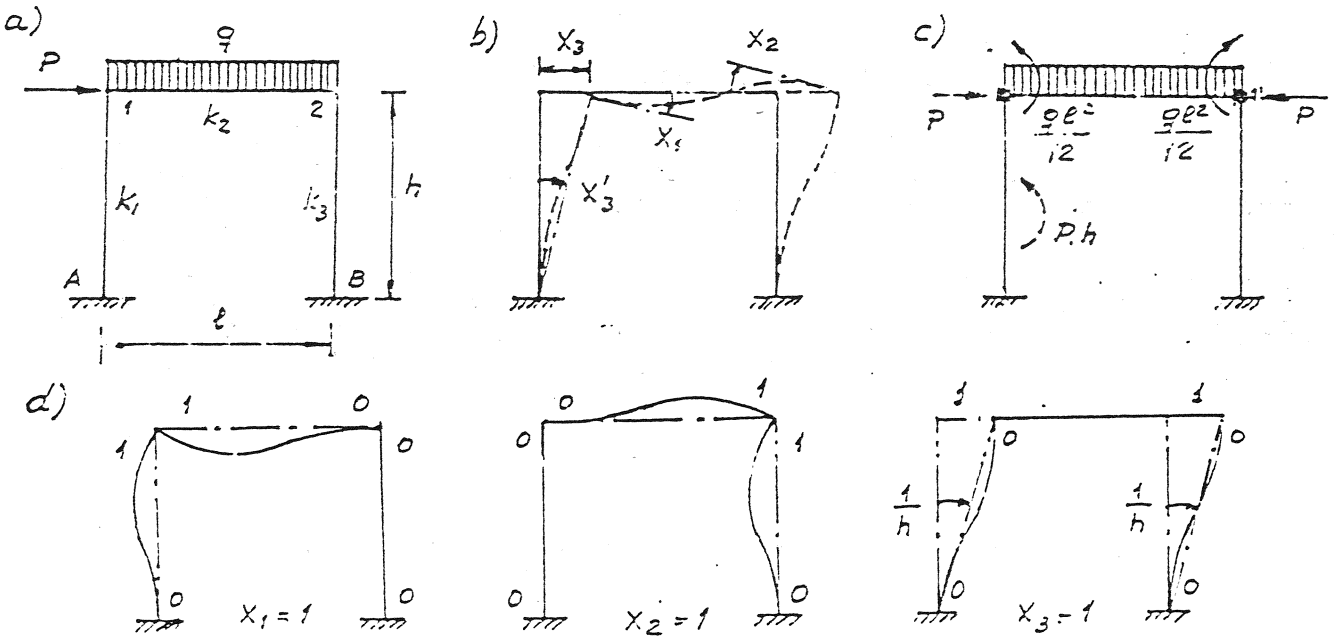


Figura 12

a) Consideración de Xa como incógnita de desplazamiento lateral (figura 12b).

Los vectores y matrices necesarios para la resolución de la estructura pueden formularse: en base al sistema fijo indicado en la figura 12c) las [Axc] y la [Acc], y tomando en consideración los desplazamientos producidos para los estados $X_1 = 1$ (figura 12d), la [Dcxu]. En consecuencia puede escribirse

$$[A_{xc}] = \begin{bmatrix} -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ -P \end{bmatrix} \; ; \; [D_{cxu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; [A_{cc}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez a aplicar, surge de la consideración para cada barra de la (8), o sea [Re] = E.

$$\begin{bmatrix} 4k_1 & 2k_1 & -6k_1/h & & & & & & \\ 2k_1 & 4k_1 & -6k_1/h & & & & & & \\ -6k_1/h & -6k_1/h & 12k_1/h^2 & & & & & & \\ & & & 4k_2 & 2k_2 & -6k_2/l & & & \\ & & & 2k_2 & 4k_2 & -6k_2/l & & & \\ & & & -6k_2/l & -6k_2/l & 12k_2/l^2 & & & \\ & & & & & & 4k_3 & 2k_3 & -6k_3/h \\ & & & & & & 2k_3 & 4k_3 & -6k_3/h \\ & & & & & & -6k_3/h & -6k_3/h & 12k_3/h^2 \end{bmatrix}$$

Todos los términos no consignados en la matriz precedente son iguales a cero.

b) Consideración del giro X_3' como incógnita de desplazamiento lateral (figura 12b).

Los desplazamientos incógnitos están constituidos en este caso por giros y todas las acciones de extremo por momentos. Las únicas modificaciones con respecto al caso anterior radican en que en el sistema fijo, el giro X_3' debe ser anulado mediante un par opuesto al momento de vuelco que actúa sobre la estructura (figura 12c), mientras que al efectuar los estados $X_1 = 1$ sólo se modifica el correspondiente a $X_3' = 1$, que adquiere la forma consignada en la figura 13.

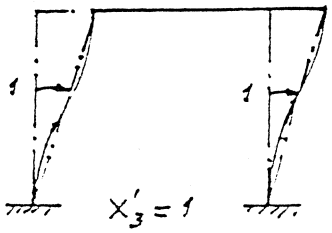


Figura 13

En consecuencia, los vectores y matrices necesarios para la resolución del problema se transforman en

$$[A_{x0}] = \begin{bmatrix} -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ -P.h \end{bmatrix} ; \quad [D_{ex1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [A_{s0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P.h \\ -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez a aplicar, surge de la consideración para cada barra de la primera de las (12), o sea

$$[R_E] = E. \begin{bmatrix} 4k_1 & 2k_1 & -6k_1 & & & & & & \\ 2k_1 & 4k_1 & -6k_1 & & & & & & \\ -6k_1 & -6k_1 & 12k_1 & & & & & & \\ & & & 4k_2 & 2k_2 & -6k_2 & & & \\ & & & 2k_2 & 4k_2 & -6k_2 & & & \\ & & & -6k_2 & -6k_2 & 12k_2 & & & \\ & & & & & & 4k_3 & 2k_3 & -6k_3 \\ & & & & & & 2k_3 & 4k_3 & -6k_3 \\ & & & & & & -6k_3 & -6k_3 & 12k_3 \end{bmatrix}$$

c) Consideración de Xs como incógnita de desplazamiento lateral y formulación según el método simplificado (figuras 12b) y d).

Deben tenerse presentes al efecto las consideraciones que condujeron a la justificación del método simplificado en el apartado 4.3., y en particular la expresión (43). De acuerdo a las mismas, la [Axo] no experimenta variación respecto a la consignada en el caso a), mientras que las [Dexu] y [Aeo] se reducen a

$$[D_{exu}]_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/h \\ 1 & 0 & -1/h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/h \\ 0 & 0 & -1/h \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resultando en la tercera columna de la [Dexu]s, para cada una de las columnas del pórtico, $D_{e1}'' = D_{e2}'' = 0 - 1/h = -1/h$.

La matriz de rigidez a aplicar será idéntica a la (50).

d) Consideración de Xs´ como incógnita de desplazamiento lateral y formulación según el método simplificado (figuras 12b) y 13).

Bajo estos supuestos la [Axo] resulta igual a la del caso b), mientras que las restantes adquieren la siguiente conformación

$$[D_{exu}]_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A_{eo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tercera columna de la [Dexu]s resulta de hacer, para cada una de las columnas del pórtico, $D_{e1}'' = D_{e2}'' = 0 - 1 = -1$.

La matriz de rigidez a aplicar será también igual a la (50).

5.2.2. Casos particulares.

5.2.2.1. Caso de momentos en los nudos.

Para formular las [Axo] y [Aeo], son extensivos los conceptos aplicados al efecto al estudiar el método de los desplazamientos, en el apartado 7.3.2. del Capítulo IV, dado que la [Dexu], propia del método de la rigidez, es independiente del estado exterior de cargas y no experimenta variaciones respecto a los casos analizados precedentemente.

5.2.2.2. Cargas laterales sobre las columnas.

Como en este caso la incidencia también se limita sólo a las [Axo] y [Aeo], se remite a las consideraciones efectuadas al respecto en el Capítulo IV, apartado 7.3.1.

5.2.2.3. Columnas de distinta altura.

Para un pórtico simple cuyas columnas tienen alturas h_1 y h_2, las modificaciones que se introducen con respecto a los 4 casos analizados para el pórtico genérico tratado en el apartado 5.2.1, resultan respectivamente (figuras 14a), b), c) y d):

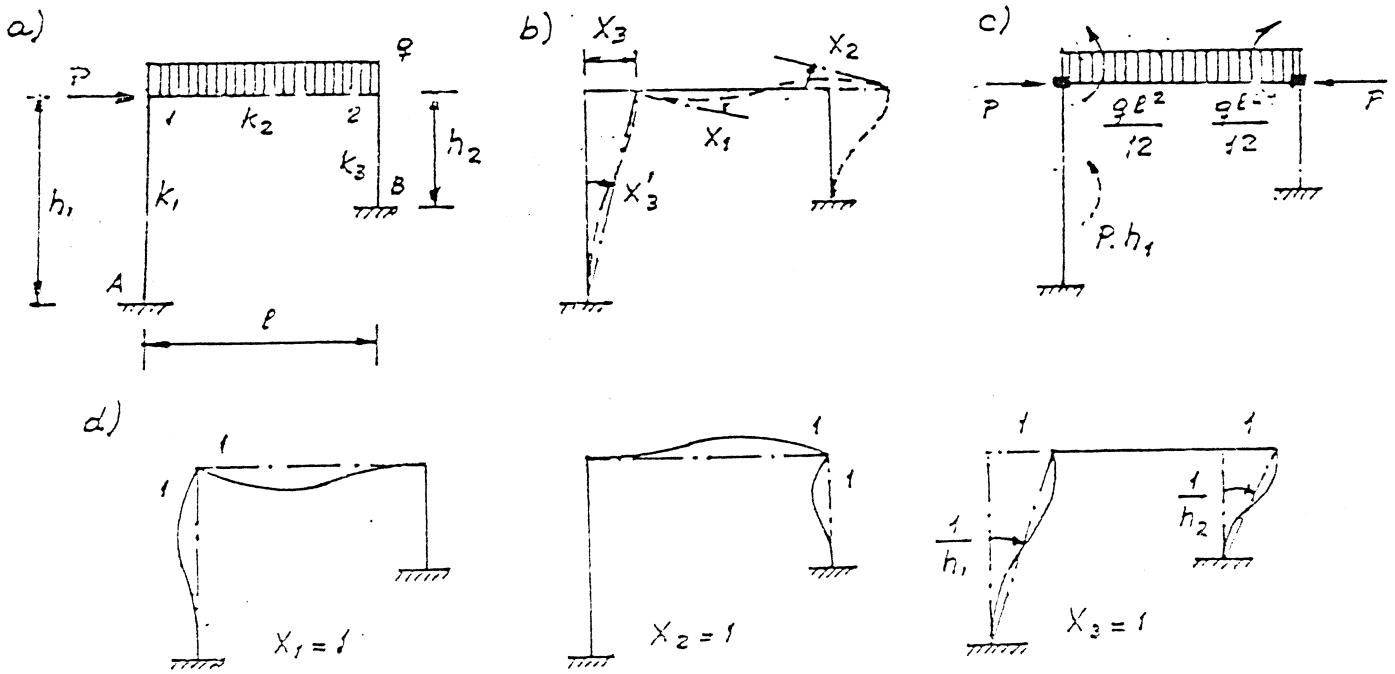


Figura 14

- Caso a) (Incógnita X_3):

No experimentan modificaciones las [Axo], [Aeo] y [Dexu]. En la matriz de rigidez [Re], por su parte, debe individualizarse la altura h_1 en la tercera fila y columna, y la altura h_2 en la novena fila y columna.

- Caso b) (Incógnita X_3'):

En este caso las [Axo], [Aeo] y [Re] no experimentan variación, mientras que la [Dexu] (figura 15) se modifica de la siguiente manera:

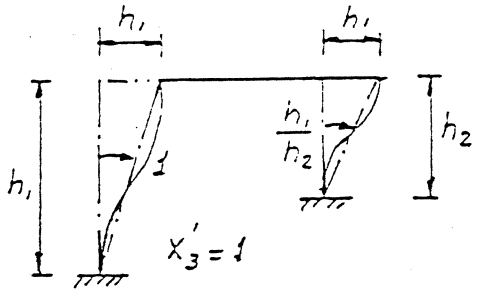


Figura 15

$$[Dexu] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1/h_2 \end{bmatrix}$$

- Caso c) (Incógnita X_3 - Método simplificado):

Deben individualizarse h_1 y h_2 en las $[D_{exu}]$ y $[R_E]$.

- Caso d) (Incógnita X_3' - Método simplificado):

Se modifica la $[D_{exu}]$, la que queda conformada de la siguiente manera (figura 15):

$$[D_{exu}]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -h_1/h_2 \\ 0 & 0 & -h_1/h_2 \end{bmatrix}$$

dado que para la columna derecha es

$$D_{e1}'' = D_{e2}'' = 0 - h_1/h_2 = - h_1/h_2$$

5.2.2.4. Caso de columnas con apoyos articulados.

Si se tiene el caso de vinculación que muestra la figura 16a) (supuesto sobre columnas de distinta altura para generalizar), las $[A_{xo}]$ y $[A_{eo}]$, visto el estado de cargas considerado, son análogas a las correspondientes formulaciones planteadas en cada uno de los 4 caminos de resolución que se analizaron en el apartado anterior.

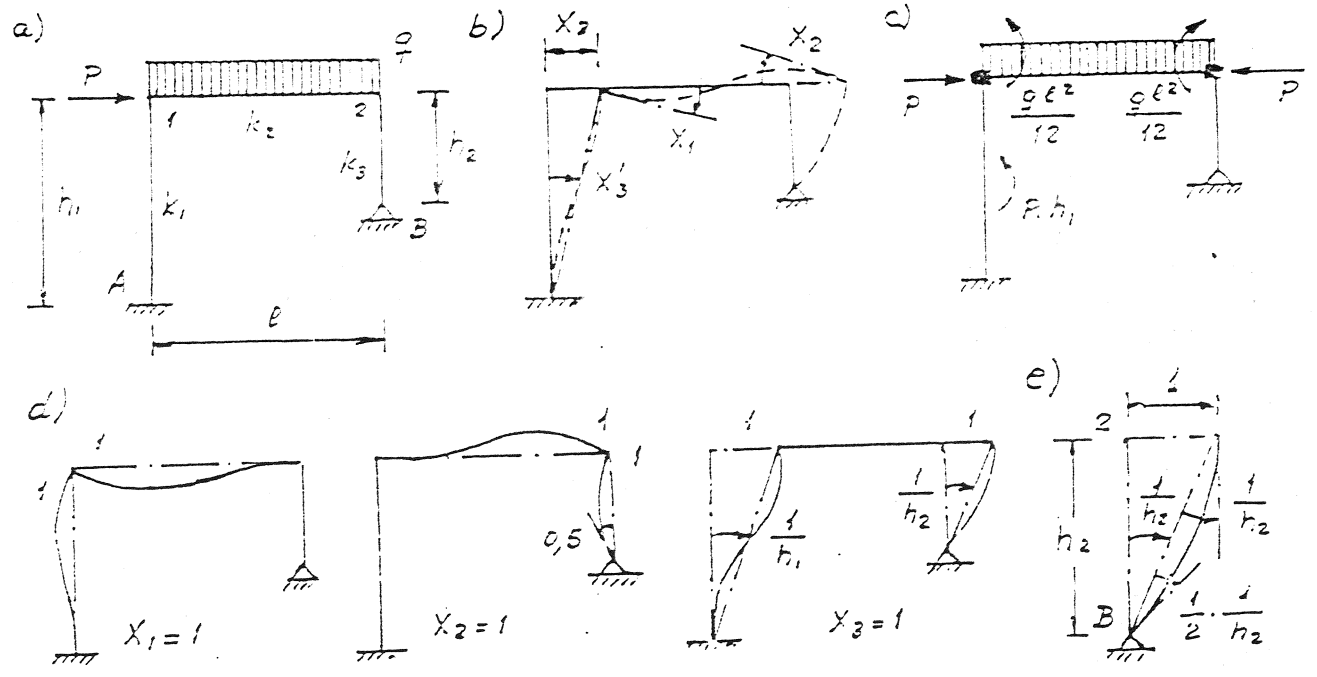


Figura 16

Para las $[D_{exu}]$ será, para cada caso

- Caso a) (Incógnita X_3): De las figuras 16d) y e)

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5.(1/h_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Caso b) (Incógnita X_3'): Los estados $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ mantienen la configuración que para los mismos se indica en la figura 16d), mientras que para el estado $X_3' = 1$, se remite a la figura 17.

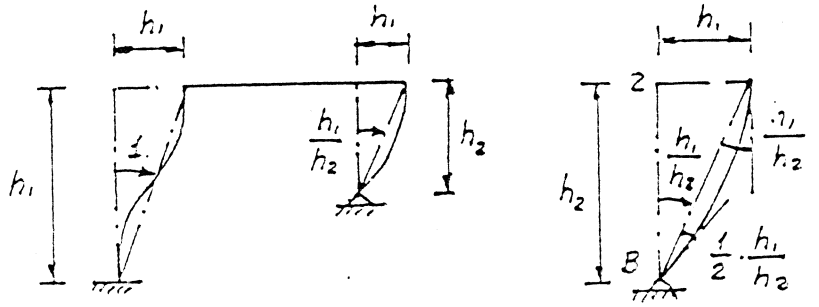


Figura 17

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1,5.(h_1/h_2) \\ 0 & 0 & (h_1/h_2) \end{bmatrix}$$

- Caso c) (Incógnita X_3 - Método simplificado):

$$[D_{exu}]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/h_1 \\ 1 & 0 & -1/h_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/h_2 \\ 0 & -0,5 & 0,5.(1/h_2) \end{bmatrix}$$

La tercera columna de esta matriz resulta, para la barra A-1

$$D_{e1}'' = D_{e2}'' = 0 - 1/h_1 = -1/h_1$$

mientras que para la columna 2-B, será

$$D_{e1}'' = 0 - 1/h_2 = -1/h_2$$

$$D_{e2}'' = 1.5.(1/h_2) - 1/h_2 = 0.5.(1/h_2)$$

- Caso d) (Incógnita X_3' - Método simplificado):

Del caso b) haciendo, para la columna derecha A-1,

$$D_{e1}'' = D_{e2}'' = 0 - 1 = -1$$

y para la columna izquierda B-2

$$D_{e1}'' = 0 - (h_1/h_2) = -(h_1/h_2)$$

$$D_{e2}'' = 1,5.(h_1/h_2) - h_1/h_2 = 0,5.(h_1/h_2)$$

$$[D_{exu}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -(h_1/h_2) \\ 0 & -0,5 & 0,5.(h_1/h_2) \end{bmatrix}$$

5.2.2.5. Pórticos con columnas oblicuas.

En el apartado 7.3.5. del Capítulo IV se formuló la resolución de un pórtico con una columna inclinada aplicando el método de los desplazamientos.

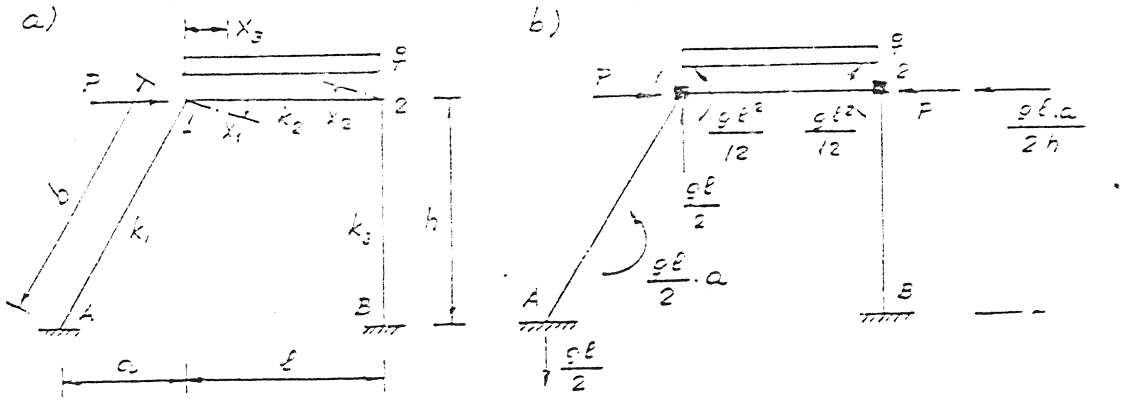


Figura 18

Si el mismo pórtico (figura 18a) se analizara por el método de la rigidez, el planteo de la $[A_{xo}]$ será totalmente análogo al seguido en el método de los desplazamientos (figura 18b)

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} -q.l^2/12 \\ q.l^2/12 \\ -(P + q.l.a/2\,h) \end{bmatrix}$$

Para escribir la [Dexu] deberán producirse los estados $X_1 = 1$ (figura 19a), b) y c), observándose que la incidencia del efecto de la columna inclinada sólo se pone de manifiesto en el estado $X_3 = 1$ (figura 19c).

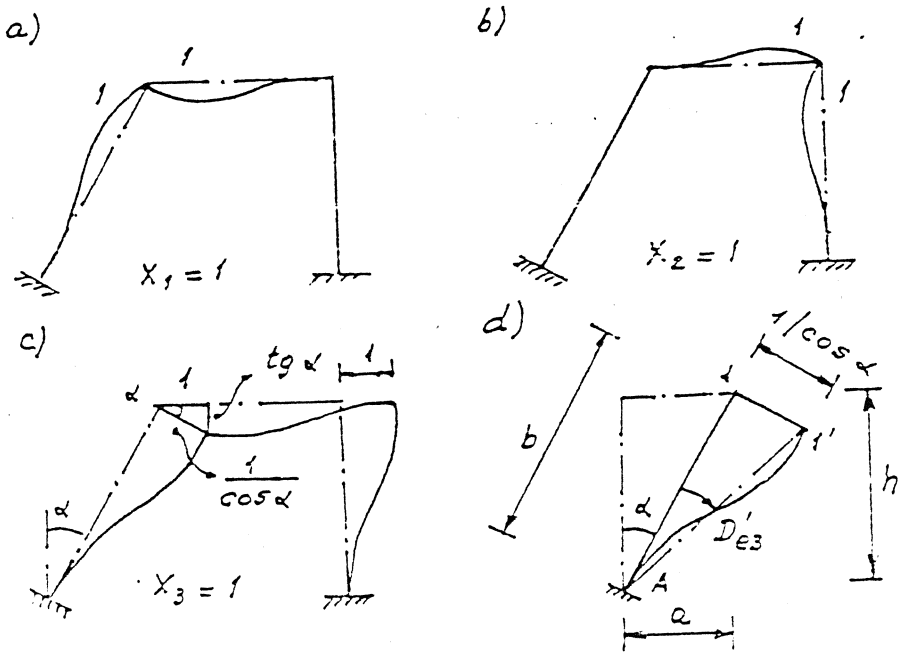


Figura 19

En este caso, al producir un corrimiento horizontal en el nudo 1, la columna A-1 experimentará (normal a su eje), un desplazamiento 1/cos α, lo que a su vez trae como consecuencia un descenso del extremo izquierdo de la viga de valor tg α, según se muestra en el detalle de la figura 19d). Por lo tanto, la [Dexu] en su formulación general será

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se desease aplicar el método simplificado, resulta:

- Para la columna A-1, en la que (figura 19d) es cos α = h/b

$$D_{e1} - D_{e3}' = 0 - \frac{1/\cos\alpha}{b} = -\frac{1}{b.\cos\alpha} = -\frac{b}{b.h} = -\frac{1}{h}$$

- Para la viga 1-2, en la que (figura 19d, es tg α = a/h

$$D_{e1} - D_{e3'} = 0 - \left(- \frac{tg\ \alpha}{l}\right) = \frac{a}{h.l}$$

- Para la columna 2-B

$$D_{e1} - D_{e3'} = 0 - \frac{1}{h} = - \frac{1}{h}$$

En definitiva se podrá plantear

$$[D_{exu}]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/h \\ 1 & 0 & -1/h \\ 1 & 0 & a/h.l \\ 0 & 1 & a/h.l \\ 0 & 1 & -1/h \\ 0 & 0 & -1/h \end{bmatrix}$$

5.2.3. Pórticos múltiples.

Considérese a nivel de ejemplo el pórtico de la figura 20a), sujeto al sistema de cargas que se indica, teniendo cada barra la longitud y el coeficiente de rigidez k_i que se consigna en la misma figura.

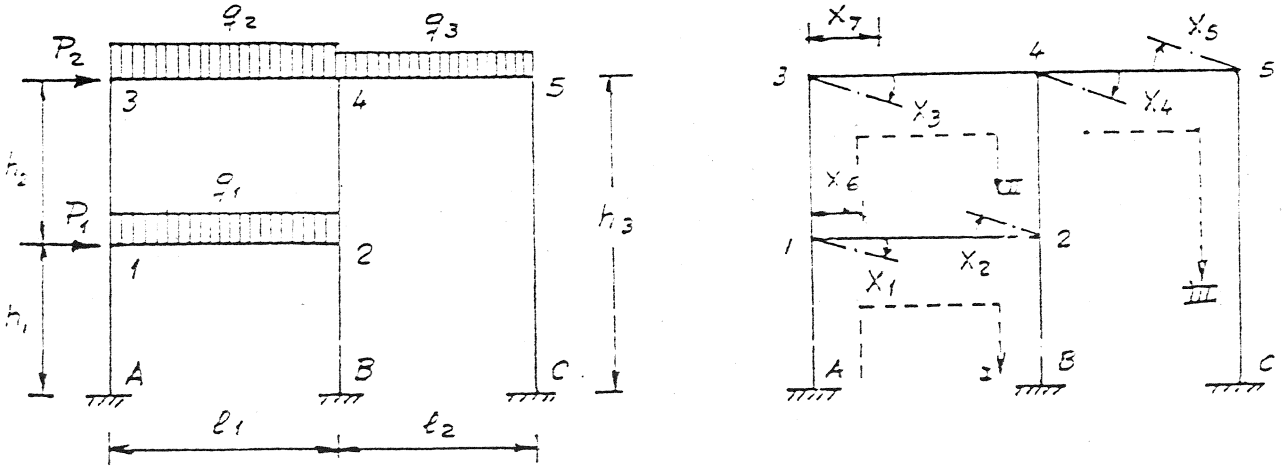
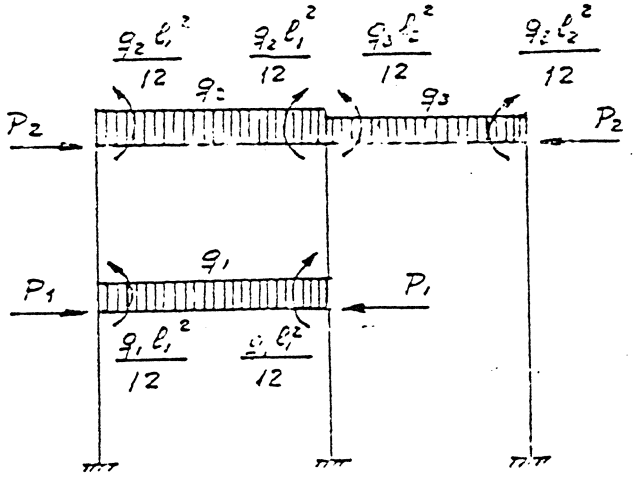


Figura 20

La estructura, despreciando la influencia del esfuerzo normal, presenta 7 incógnitas cinemáticas: 5 por giros de nudos (X_1 a X_5) y dos por desplazamientos horizontales (X_6 y X_7). En la figura 20b) se indican tales incógnitas, como así también el sentido (arbitrario) elegido para recorrer la estructura y formular las matrices.

El sistema fijo (figura 21), responde a idénticos conceptos que en los casos anteriores, por lo que la $[A_{xo}]$ toma la forma:



$$[Axo] = \begin{bmatrix} -q_1.l_1^2/12 \\ q_1.l_1^2/12 \\ -q_2.l_1^2/12 \\ q_2.l_1^2/12 - q_3.l_2^2/12 \\ q_3.l_2^2/12 \\ -P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix}$$

Figura 21

En la figura 22 se consignan los estados de desplazamiento unitario en la dirección de cada incógnita, a partir de los cuales resultan las [Dexu] y la [Dexu]s, que respectivamente adquieren la configuración

$$[Dexu] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A-1 · 1-2 · 2-B · 1-3 · 3-4 · 4-2 · 4-5 · 5-C

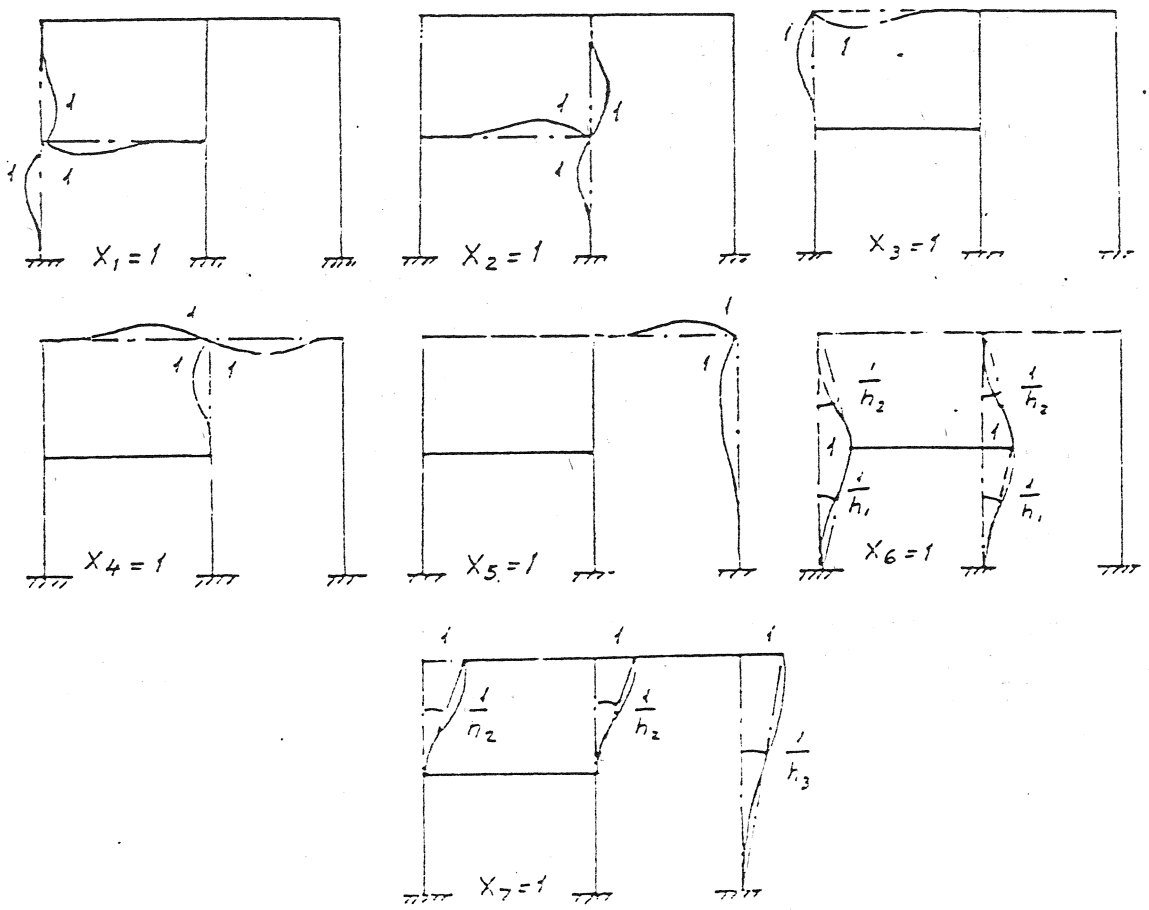


Figura 22

$$[D_{exu}]_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/h_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/h_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/h_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h_2 & -1/h_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/h_2 & -1/h_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/h_2 & -1/h_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/h_2 & -1/h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \text{ A-1} \\ \} \\ \} \text{ 1-2} \\ \} \\ \} \text{ 2-B} \\ \} \\ \} \text{ 1-3} \\ \} \\ \} \text{ 3-4} \\ \} \\ \} \text{ 4-2} \\ \} \\ \} \text{ 4-5} \\ \} \\ \} \text{ 5-C} \\ \} \end{matrix}$$

Designando por $[R_e]_{ij}$ a la matriz de rigidez propia de cada barra (en coordenadas locales), de 3 x 3 en el caso del planteo general y de 2 x 2 para el método simplificado, la $[R_E]$ será

$$[R_E] = \begin{bmatrix} [R_e]_{A1} & & & & & & & \\ & [R_e]_{12} & & & & & & \\ & & [R_e]_{2B} & & & & & \\ & & & [R_e]_{13} & & & & \\ & & & & [R_e]_{34} & & & \\ & & & & & [R_e]_{42} & & \\ & & & & & & [R_e]_{4B} & \\ & & & & & & & [R_e]_{3C} \end{bmatrix}$$

5.2.4. Pórtico con tabique.

Dado el pórtico tabique cuyas características y estado de cargas se muestran en la figura 23a), con 3 incógnitas cinemáticas (figura 23b), su sistema fijo (figura 23c) permite formular

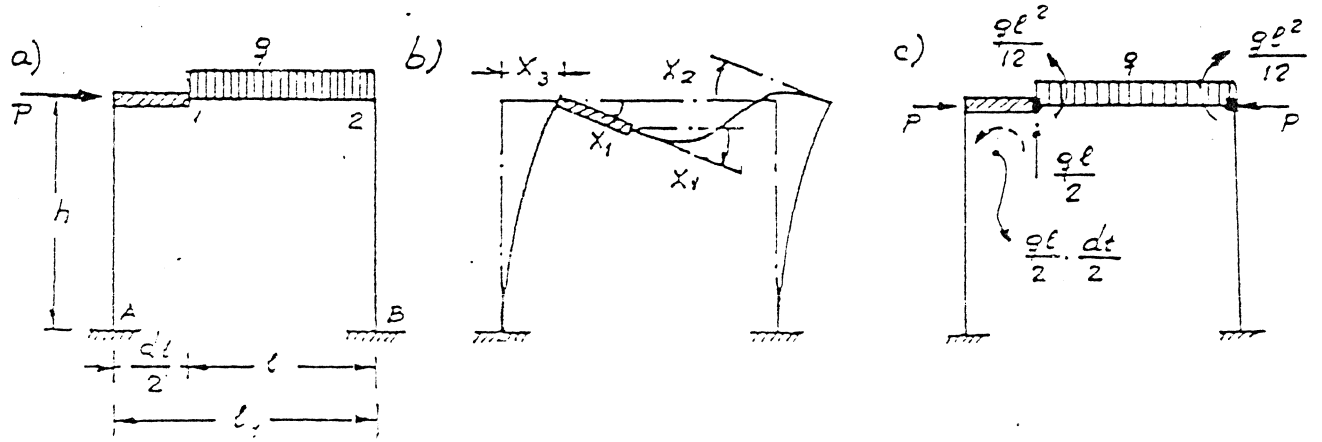


Figura 23

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} - q.l^2/12 - (q.l/2).(d_t/2) \\ q.l^2/12 \\ - P \end{bmatrix}$$

En base a los estados unitarios de desplazamiento (figura 24) puede escribirse

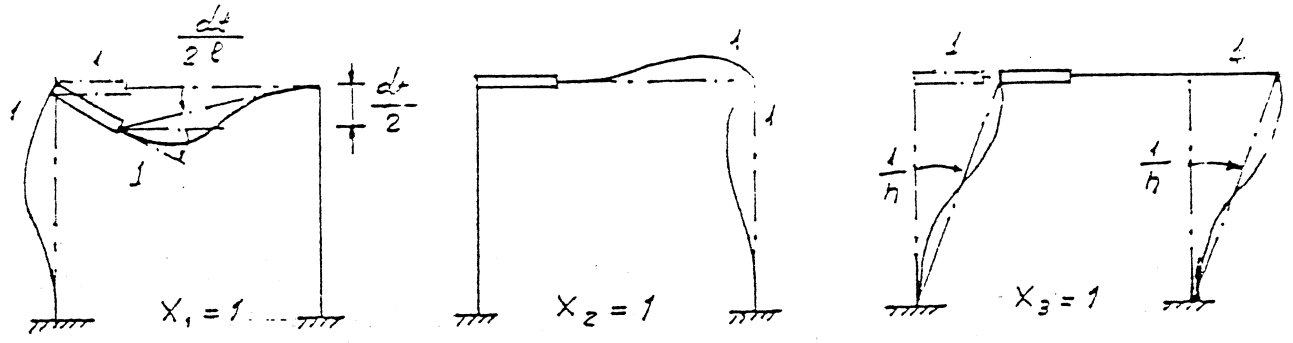


Figura 24

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d_t/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [D_{exu}]_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/h \\ 1 & 0 & -1/h \\ 1 + d_t/2l & 0 & 0 \\ d_t/2l & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/h \\ 0 & 0 & -1/h \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez, al estarse frente a una estructura aporticada de 3 barras, tendrá la misma configuración que la indicada para el pórtico simple en el apartado 5.2.1., caso a) para el planteo en su forma general, y según la (50) para la matriz de rigidez reducida. En la primera submatriz puede incorporarse (en cualquiera de las dos), la influencia del esfuerzo de corte.

5.2.5. Influencia del esfuerzo normal.

En este caso se tienen 6 incógnitas de desplazamiento, como se consigna en la figura 25b), para el pórtico de la figura 25a).

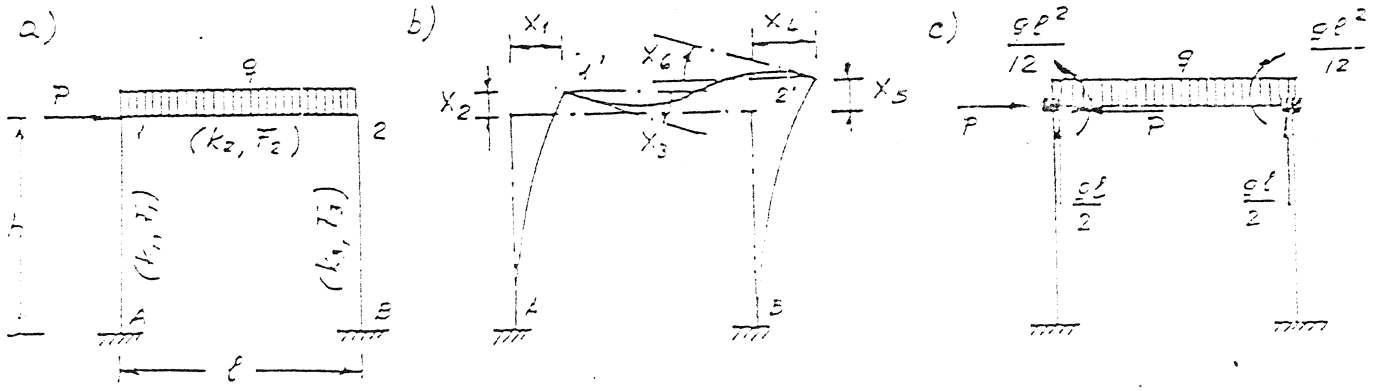


Figura 25

En la figura 25c) se señala la conformación del sistema fijo, y las acciones de restricción de desplazamientos que resultan del mismo, la cual permite escribir:

$$[A_{xc}] = \begin{bmatrix} -P \\ q.l/2 \\ -q.l^2/12 \\ 0 \\ q.l/2 \\ q.l^2/12 \end{bmatrix}$$

Para conformar la $[D_{exu}]$, se procede en forma similar que para los casos anteriores. En base a las figuras 26a) a f) pueden escribirse las expresiones de dicha matriz, la que para el método directo adquiere la siguiente forma:

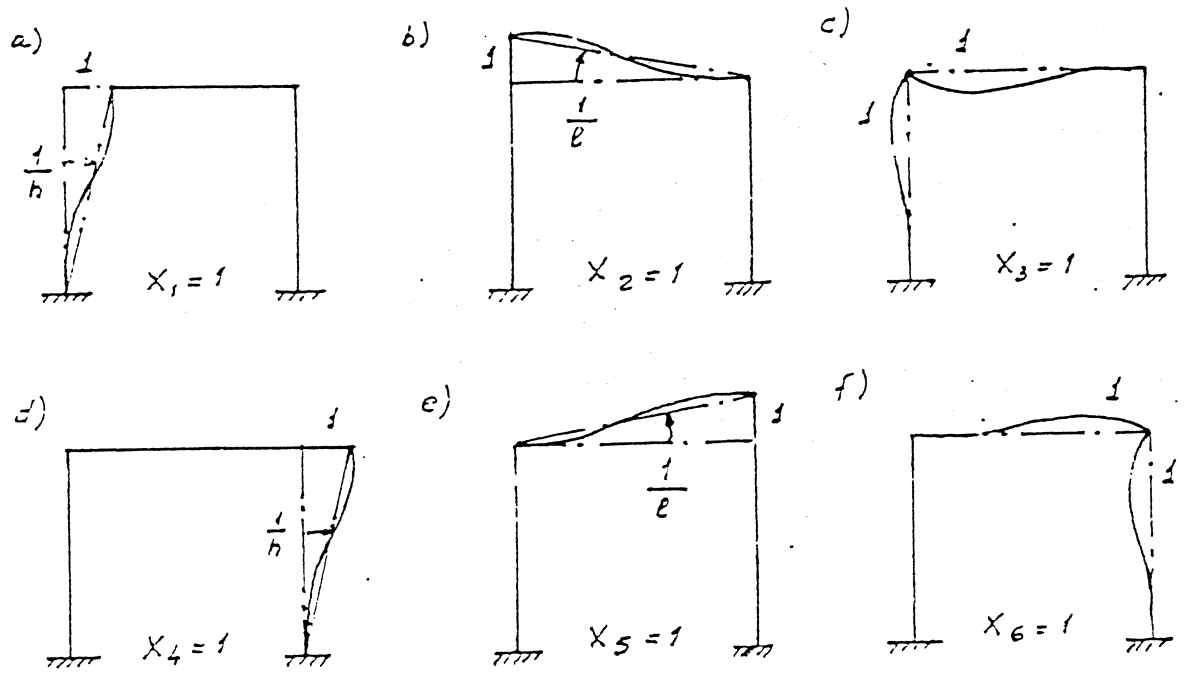


Figura 28

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La cuarta fila de cada submatriz corresponde a la deformación por esfuerzo normal. La matriz de rigidez se constituye colocando en diagonal las submatrices dadas por la expresión (16).

Por su parte para el método simplificado será

$$[D_{exu}]_S = \begin{bmatrix} -1/h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1 & 0 & 1/l & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 0 & 1/l & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez se conformará en base a la (46).

5.3. Estructuras espaciales.

Sea a nivel de ejemplo, la estructura espacial que muestra la figura 27a), constituida por una viga principal empotrada en sus extremos A y B, en cuyo punto D apoya, mediante un nudo rígido, una viga perpendicular, cuyo extremo opuesto se halla empotrado en C. El sistema presenta un triple grado de indeterminación cinemática, estando dadas las incógnitas por los desplazamientos desconocidos del nudo D, a saber (figura 27b):

- el corrimiento vertical del nudo D, X_1;
- la rotación de la sección de D considerada como perteneciente a la viga A-B, X_2 y
- la rotación de la misma sección, perpendicular a la anterior, considerada como perteneciente a la viga C-D, X_3.

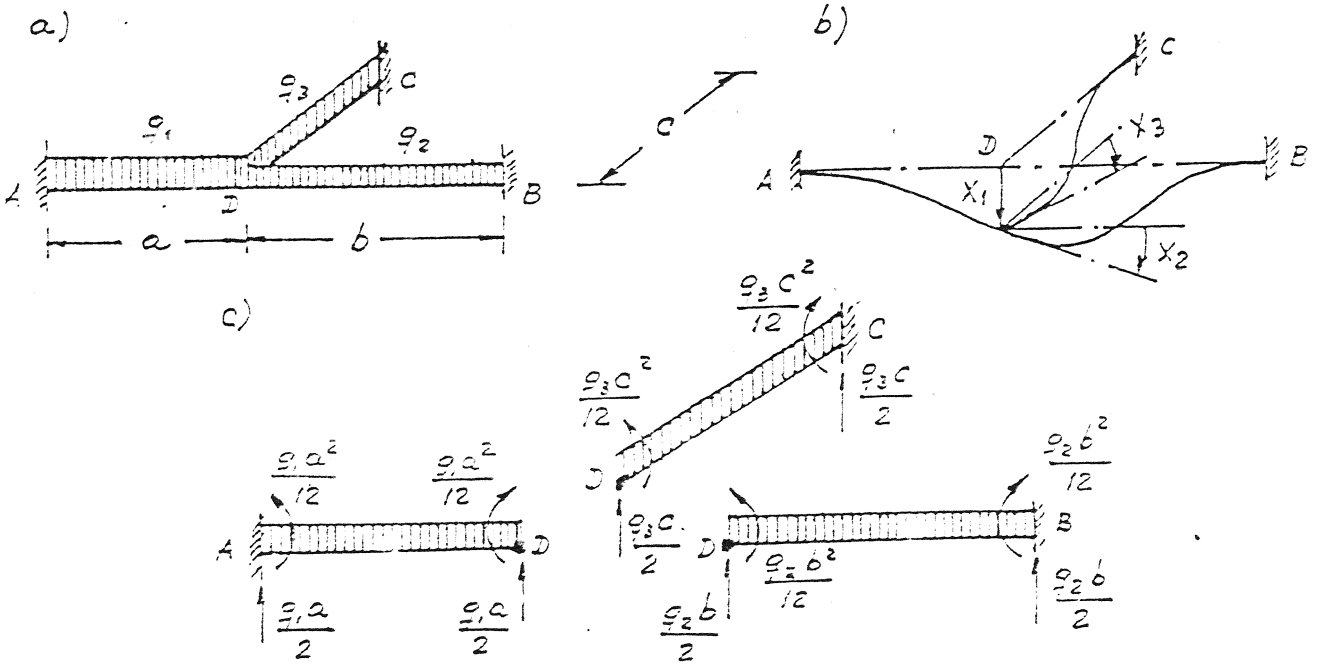


Figura 27

En la figura 27c) se consigna el sistema fijo, que permite escribir

$$[A_{xc}] = \begin{bmatrix} -(q_1.a + q_2.b + q_3.c)/2 \\ (q_1.a^2 - q_2.b^2)/12 \\ -q_3.c^2/12 \end{bmatrix}$$

Si se producen ahora desplazamientos unitarios en forma independiente y sucesiva en la dirección de las tres incógnitas, manteniendo cada vez nulos los restantes (figura 28), se puede formular la $[D_{exu}]$, tanto para el método general como para el simplificado.

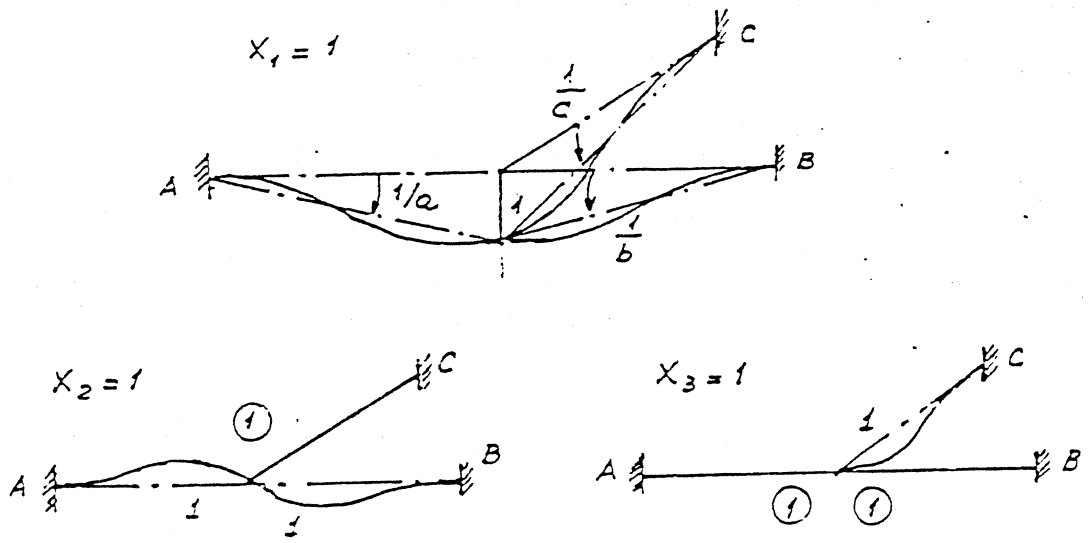


Figura 28

$$[D_{exu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde la cuarta fila de cada submatriz corresponde al desplazamiento (giro unitario positivo en cada caso) por torsión.

La matriz de rigidez se constituirá colocando en diagonal las submatrices que corresponden a la conformación dada por la (18).

$$[D_{exu}]_a = \begin{bmatrix} -1/a & 0 & 0 \\ -1/a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \\ 1/b & 1 & 0 \\ 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \\ 1/c & 0 & 1 \\ 1/c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

conformándose la matriz de rigidez a partir de la (48).

6. EXPRESIONES GENERALES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ.

6.1. Criterios para la fijación de nomenclaturas.

Es oportuno destacar que en los sucesivos capítulos del presente texto, se ha optado como criterio básico para la fijación de nomenclaturas, por el empleo de letras y subíndices que, si bien no suelen corresponderse con los usualmente empleados en la bibliografía específica, se consideró que respondían a poner de manifiesto por sí mismos, de la manera más amplia, sencilla y directa que fuera posible, los conceptos involucrados en cada expresión.

Bajo esta premisa se designaron por X a las incógnitas a resolver en los problemas planteados, independientemente de la naturaleza de las mismas (acciones o desplazamientos) y del método de resolución; por A a las acciones (activas o reactivas), ya fuesen fuerzas o momentos; por a a las acciones derivadas de la aplicación de desplazamientos unitarios; por D o por Δ a los desplazamientos, ya sean estos lineales o angulares y por δ a los desplazamientos generados por acciones unitarias. Por otra parte, para los subíndices se utilizó la e para simbolizar las direcciones de extremo, o bien para designar una barra o elemento (o aún un tramo de los mismos) de la estructura; E para simbolizar conceptos extensivos a la estructura toda; x para indicar las direcciones de las incógnitas; un N° determinado (1, 2, ...) para hacer referencia a la dirección de la incógnita de ese mismo orden; xu para referir que la causa de un determinado efecto (acción o desplazamiento) son las incógnitas con valor unitario y o cuando tal causa era el sistema exterior de cargas aplicado sobre la estructura o sobre su sistema básico.

Se considera que este temperamento brinda una mejor comprensión de los conceptos involucrados en cada algoritmo en que tales términos intervienen, ayudando además a una más fácil retención y seguimiento de los desarrollos formulísticos pertinentes.

Sin embargo, a medida que, como en el caso de los temas que se tratarán en los apartados siguientes, la necesidad del empleo de letras y subíndices aumenta en cantidad, a fin de no complicar en demasía las formas de expresar cada uno, se utilizarán letras específicas alternativas o diferentes, entendiendo sin embargo que. si se han alcanzado a fijar con claridad y fundamento los conceptos elementales, no habrá inconvenientes en comprender los desarrollos matemáticos, cualquiera sea la nomenclatura que se adopte, o aún para cambiar la misma respecto a la utilizada hasta el presente, adecuándola a la referida en otros textos, en otras asignaturas vinculadas o a otros criterios directrices.

6.2. Caso de elementos ortogonales.

Es frecuente en estructuras hiperestáticas aporticadas que sus elementos constituyentes, vigas y columnas, tengan sólo orientaciones horizontales y verticales. A estos casos son

directamente aplicables las expresiones desarrolladas en los apartados precedentes, en las cuales se consideraron, a fines de reducir las expresiones de cálculo, como acciones extremas, los momentos en cada extremo de barra (A_{e1} y A_{e2}), las fuerzas que constituyen la cupla equilibrante (A_{e3}), de dirección perpendicular al eje de la barra, y de influir en forma no despreciable, el esfuerzo normal (A_{e4}), con dirección coincidente con el eje de la barra. En forma congruente con tales acciones, se consideraron los giros de extremo D_{e1} y D_{e2}, el desplazamiento transversal *relativo* entre ambos extremos (D_{e3}) y la variación *neta* de longitud de la barra por esfuerzo normal (D_{e4}).

Para llegar a una expresión de aplicación completamente general, pueden considerarse en forma independiente, las tres acciones de extremo de cada barra, en función de sus correspondientes desplazamientos.

6.2.1. Barras de dirección horizontal.

Sea el caso de la barra que muestra la figura 29a), en la que se consideran los extremos 1 y 2, y las acciones de extremo correspondientes (M_i, X_i e Y_i, con i = 1 ; 2), supuestas todas con sentido positivo. Se pasa a esta notación para evitar confusiones en los subíndices respecto a la notación utilizada en los desarrollos precedentes, al tener ahora 6 direcciones de extremo. Además, no debe confundirse la nomenclatura X utilizada en esta última figura (componente de acciones en la dirección del eje x), con igual designación dada con carácter de general a las incógnitas que se presentan en la resolución de hiperestáticos.

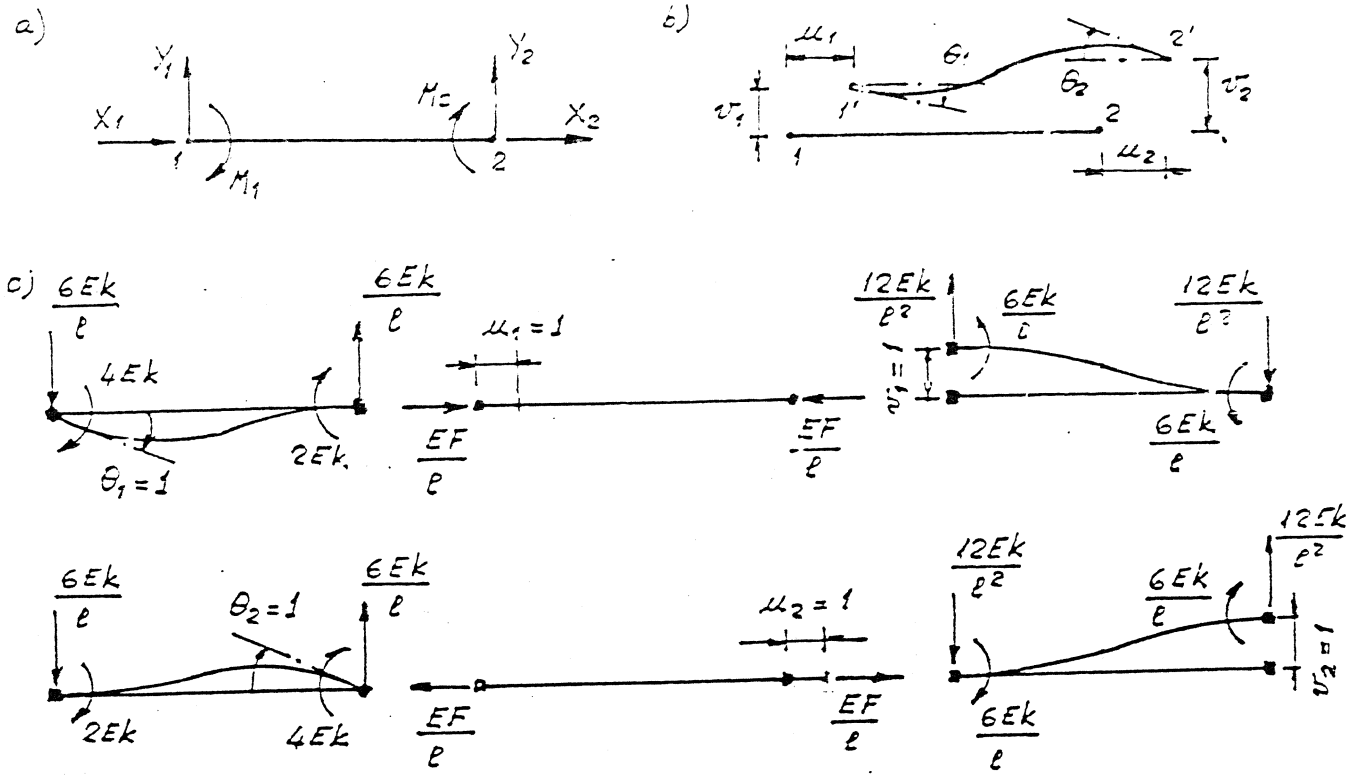


Figura 29

Si en la estructura se presentan desplazamientos θ_1, u_1 y v_1 en las 6 direcciones de extremo consideradas (figura 29b), podrá formularse la relación de los mismos con las acciones, provocando en forma independiente y sucesiva desplazamientos unitarios (positivos) en cada dirección, manteniendo nulos en cada caso los restantes desplazamientos de extremo (figura 29c).

Adecuando la (4) a la nomenclatura que se desprende de la figura 29a) y a la generalización que surge de considerar las 6 direcciones de extremo posibles en forma independiente, se tiene

$$\begin{aligned}
M_1 &= R_{11}.\theta_1 + R_{12}.u_1 + R_{13}.v_1 + R_{14}.\theta_2 + R_{15}.u_2 + R_{16}.v_2 \\
X_1 &= R_{21}.\theta_1 + R_{22}.u_1 + R_{23}.v_1 + R_{24}.\theta_2 + R_{25}.u_2 + R_{26}.v_2 \\
Y_1 &= R_{31}.\theta_1 + R_{32}.u_1 + R_{33}.v_1 + R_{34}.\theta_2 + R_{35}.u_2 + R_{36}.v_2 \\
M_2 &= R_{41}.\theta_1 + R_{42}.u_1 + R_{43}.v_1 + R_{44}.\theta_2 + R_{45}.u_2 + R_{46}.v_2 \\
X_2 &= R_{51}.\theta_1 + R_{52}.u_1 + R_{53}.v_1 + R_{54}.\theta_2 + R_{55}.u_2 + R_{56}.v_2 \\
Y_2 &= R_{61}.\theta_1 + R_{62}.u_1 + R_{63}.v_1 + R_{64}.\theta_2 + R_{65}.u_2 + R_{66}.v_2
\end{aligned} \qquad (51)$$

Procediendo en forma análoga a la seguida en el apartado 2.1., organizando los vectores

$$[A_e] = \begin{bmatrix} M_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ M_2 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [D_e] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

y deduciendo los valores de R_{ik} directamente de los casos individuales correspondientes, de cada estado de desplazamiento unitario consignado en la figura 29c), la (6), o sea $[A_e] = [R_e].[D_e]$, puede escribirse

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ M_2 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,Ek & 0 & -6\,Ek/l & 2\,Ek & 0 & 6\,Ek/l \\ 0 & E.F/l & 0 & 0 & -E.F/l & 0 \\ -6\,Ek/l & 0 & 12\,Ek/l^2 & -6\,Ek/l & 0 & -12\,Ek/l^2 \\ 2\,Ek & 0 & -6\,Ek/l & 4\,Ek & 0 & 6\,Ek/l \\ 0 & -E.F/l & 0 & 0 & E.F/l & 0 \\ 6\,Ek/l & 0 & -12\,Ek/l^2 & 6\,Ek/l & 0 & 12\,Ek/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Esta expresión muestra la forma genérica de la matriz de rigidez para barras de estructuras cuyos elementos se hallan dispuestos según una dirección horizontal.

Si en forma sintética se denomina

$$4\,Ek = A \quad ; \quad 6\,Ek/l = B \quad ; \quad 12\,Ek/l^2 = C \quad ; \quad E.F/l = D$$

la matriz de rigidez de una barra horizontal, puede escribirse

$$[R_e]_h = \begin{bmatrix} A & 0 & -B & A/2 & 0 & B \\ 0 & D & 0 & 0 & -D & 0 \\ -B & 0 & C & -B & 0 & -C \\ A/2 & 0 & -B & A & 0 & B \\ 0 & -D & 0 & 0 & D & 0 \\ B & 0 & -C & B & 0 & C \end{bmatrix} \qquad (52)$$

6.2.2. Barras de dirección vertical.

Para barras de dirección vertical puede seguirse idéntico procedimiento (figura 30), resultando

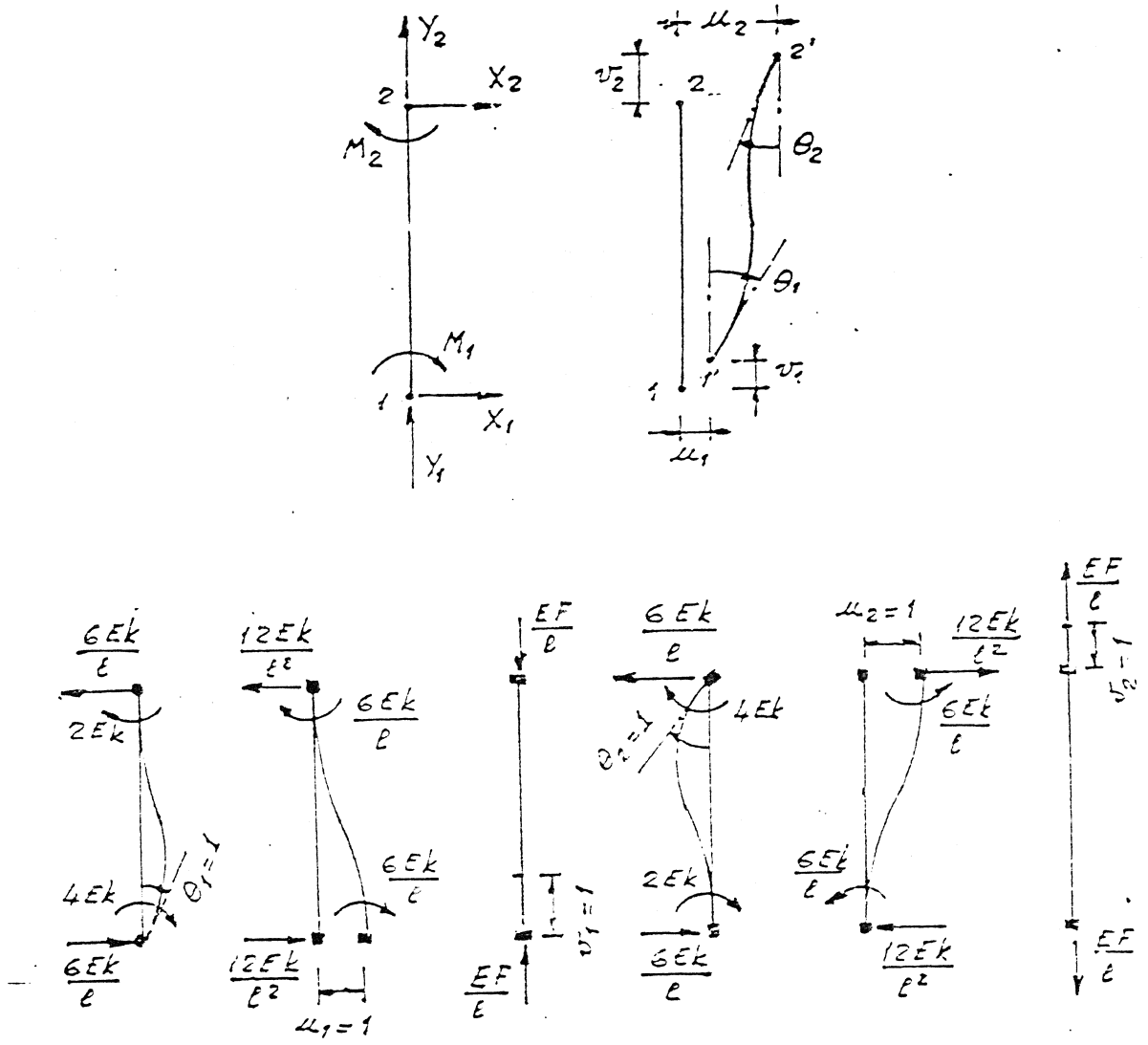


Figura 30

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ M_2 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,Ek & 6\,Ek/l & 0 & 2\,Ek & -6\,Ek/l & 0 \\ 6\,Ek/l & 12\,Ek/l^2 & 0 & 6\,Ek/l & -12\,Ek/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & E.F/l & 0 & 0 & -E.F/l \\ 2\,Ek & 6\,Ek/l & 0 & 4\,Ek & -6\,Ek/l & 0 \\ -6\,Ek/l & -12\,Ek/l^2 & 0 & -6\,Ek/l & 12\,Ek/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E.F/l & 0 & 0 & E.F/l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

que muestra la forma genérica de la matriz de rigidez para barras de estructuras cuyos elementos se hallan dispuestos según una dirección vertical.

Si al igual que en el caso anterior se denomina

$$4\,Ek = A \;;\; 6\,Ek/l = B \;;\; 12\,Ek/l^2 = C \;;\; E.F/l = D$$

la matriz de rigidez de una barra vertical genérica, puede escribirse

$$[R_e]_v = \begin{bmatrix} A & B & 0 & A/2 & -B & 0 \\ B & C & 0 & B & -C & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & -D \\ A/2 & B & 0 & A & -B & 0 \\ -B & -C & 0 & -B & C & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \qquad (53)$$

6.3. Caso de elementos inclinados.

En el apartado anterior se formuló la expresión general de la matriz de rigidez para barras (generalmente vigas y columnas), orientadas según ejes horizontales y verticales perpendiculares entre sí. Si bien muchas estructuras responden a estas características, puede darse el caso de estructuras con varios elementos inclinados, en combinación con los anteriores, ya sea en el caso de pórticos, como en el de reticulados, en que la presencia de barras oblicuas se torna general.

6.3.1. Coordenadas locales y globales.

A fin de describir la relación fuerza - desplazamiento en un elemento inclinado genérico, ya sea de alma llena o perteneciente a un reticulado, es conveniente establecer dos sistemas coordenados, uno *local* y otro *global*.

El sistema coordenado local se establece trazando el eje x local a lo largo del eje inclinado del elemento (figura 31a). Este eje se designará por *x'* para distinguirlo del eje x global. El eje y local, designado por *y'*, se dibuja perpendicularmente al eje x'. El origen de coordenadas del sistema local se ubica en el extremo "cercano" de cada miembro estructural, y el eje x' positivo está dirigido hacia el extremo "alejado". *

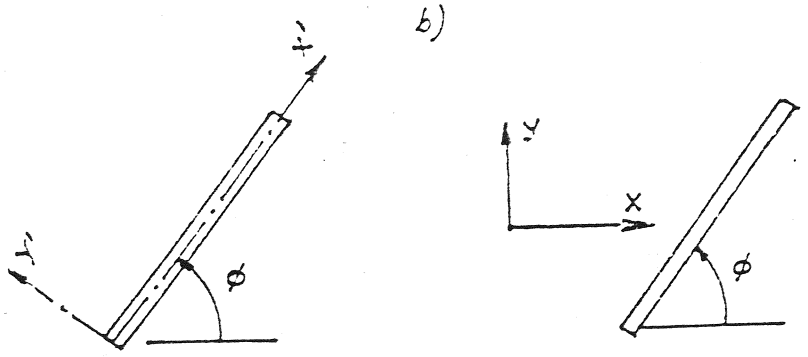


Figura 31

La ubicación del eje x' queda definida por la orientación propia de la barra, mientras que en la mencionada figura, el eje

y' local se consignó dirigido hacia arriba y hacia la izquierda, si bien esta elección de dirección es arbitraria. Se ha optado como criterio el de escoger el sentido del eje y' *hacia arriba* si x' señala *hacia la derecha* del observador. En consecuencia, al definir el sentido de x', el del eje y' queda automáticamente determinado.

El sistema coordenado global es un sistema de ejes establecido por el analista para referenciar la estructura completa (figura 31b). Los ejes globales se denominan ***x*** e ***y*** en las estructuras planas y se los posiciona de manera que todos los nudos y extremos de barra de la estructura tengan coordenadas positivas.

Por su parte, el ángulo ø que forma la orientación del elemento con respecto a los ejes globales se mide en sentido antihorario, partiendo del semieje positivo x hasta encontrar el semieje positivo x'. Las figuras 32a) y b) ilustran la manera de orientar dos conjuntos de ejes particulares.

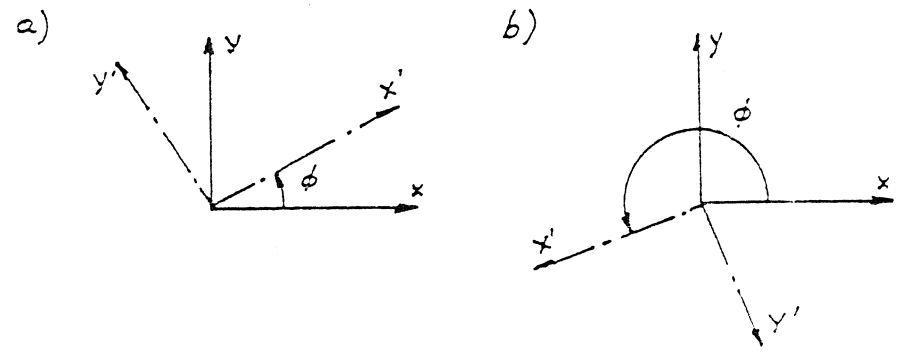


Figura 32

6.3.2. Elementos con fuerza axil.

Es el caso que corresponde considerar en la resolución de estructuras de reticulado, que por su configuración presentan una serie de barras cuyos ejes se encuentran orientados según ángulos diversos, respecto a un eje horizontal de referencia.

Las fuerzas y los desplazamientos relacionados con ejes locales se designan con primas; así por ejemplo, S_1' representa una fuerza paralela al eje x' en el extremo 1 (no requiriendo un primer subíndice pues en coordenadas locales su dirección queda definida), en tanto que u_1' representa un desplazamiento paralelo a ese eje en el mismo extremo (figura 33a).

Inversamente, las fuerzas y desplazamientos escritos sin primas representan valores relacionados con ejes globales. De esta manera S_{1x} y S_{1y} representan fuerzas paralelas a los ejes globales x e y, respectivamente, en tanto se designará por u_1 y v_1 a las componentes de desplazamiento paralelas a esos ejes (figura 33b).

Análogas consideraciones son aplicables en cada caso al extremo 2.

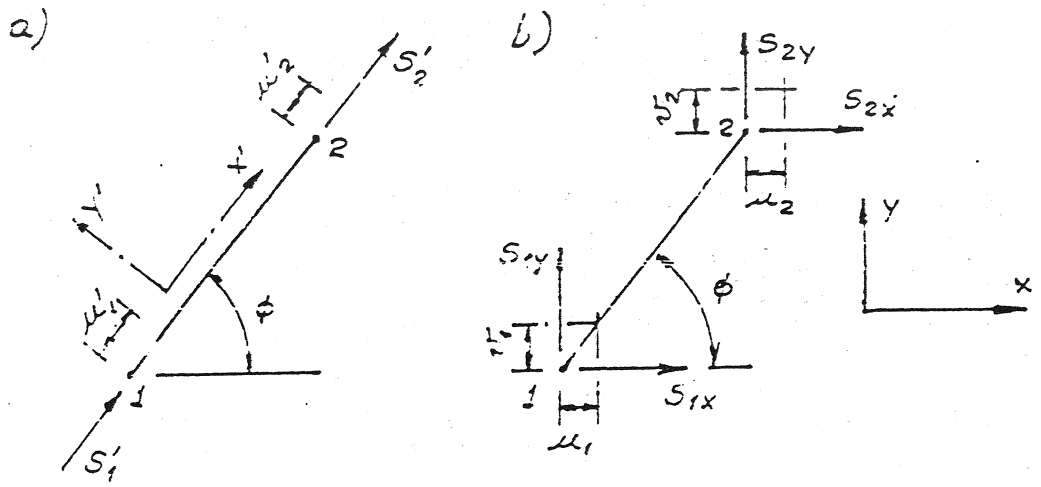


Figura 33

La expresión de la rigidez de una barra, en coordenadas locales, solicitada sólo por esfuerzos axiles será (expresión de R_{44} en el apartado 2.3.3.)

$$R_e = E.F/l \qquad (54)$$

Si varias barras de diversas inclinaciones concurren en un nudo o vértice, como en el caso de las estructuras de reticulado, habrá en tal vértice varios conjuntos de ejes locales de referencia. Como la dirección de las fuerzas axiales y la de los desplazamientos locales de las barras que concurren a un vértice son diferentes, sus rigideces individuales no pueden sumarse directamente. En consecuencia, las relaciones fuerza - desplazamiento para una barra deben derivarse respecto a ejes globales, de manera que las rigideces individuales puedan ser sumadas entre sí. Para ello debe darse un desplazamiento unitario, en forma sucesiva, a cada una de las componentes globales de desplazamiento, manteniendo en cero todas las otras componentes de desplazamiento.

Para establecer estas relaciones, adecuando la (4) a la nomenclatura que se desprende de la figura 33b) y a la generalización que surge de considerar las 4 direcciones de extremo posibles en forma independiente, se puede escribir:

$$\begin{aligned} S_{1x} &= R_{11}.u_1 + R_{12}.v_1 + R_{13}.u_2 + R_{14}.v_2 \\ S_{1y} &= R_{21}.u_1 + R_{22}.v_1 + R_{23}.u_2 + R_{24}.v_2 \\ S_{2x} &= R_{31}.u_1 + R_{32}.v_1 + R_{33}.u_2 + R_{34}.v_2 \\ S_{2y} &= R_{41}.u_1 + R_{42}.v_1 + R_{43}.u_2 + R_{44}.v_2 \end{aligned} \qquad (55)$$

a) Cálculo de R_{11}:

La figura 34a) muestra una barra genérica en la que se produce un desplazamiento unitario en la dirección del eje x en el extremo

1. $u_1 = 1$ (manteniendo nulos los restantes desplazamientos posibles. v_1, u_2 y v_2), el cual puede ser descompuesto en componentes perpendiculares y paralelos a los ejes locales (u_1' y v_1'), tal como se muestra en la referida figura.

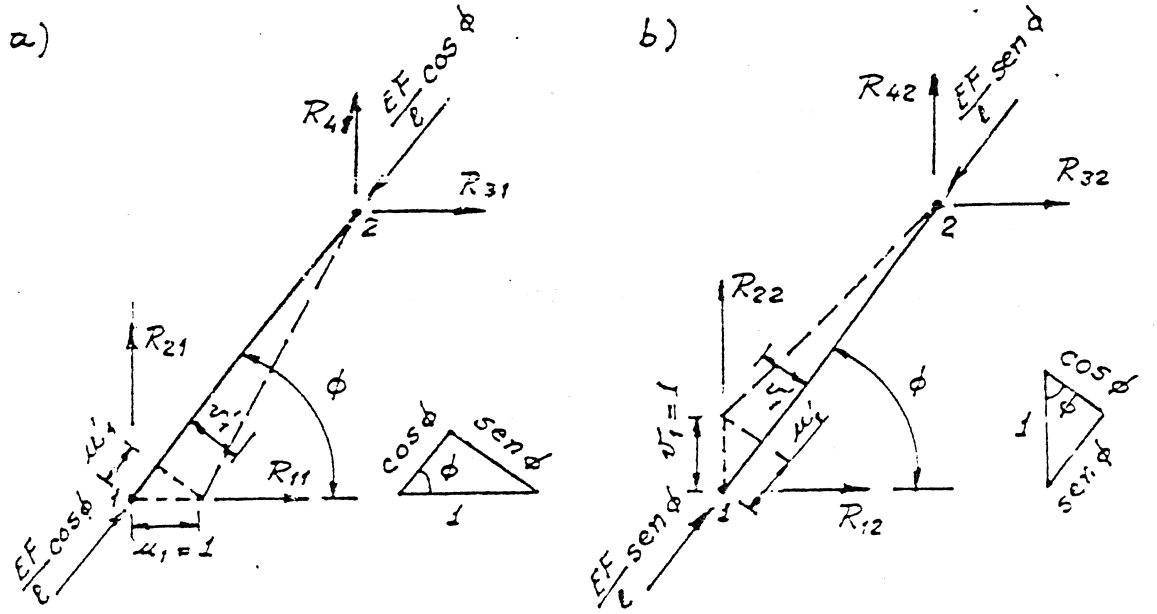


Figura 34

La componente de tal desplazamiento unitario en la dirección de la barra (dirección u_1') será cos ø, y en la dirección perpendicular al eje de la barra (dirección v_1'), sen ø. Esta última componente de corrimiento no cambia de manera significativa la longitud de la barra, y de acuerdo con la adopción de la hipótesis de desplazamientos pequeños, no produce esfuerzos en la misma. Por el contrario, la componente según u_1' (orientada en la dirección del eje de la barra, y por ende del esfuerzo que la solicita) puede ser importante y causar efectos apreciables sobre ella.

Teniendo en cuenta que si provoca en una barra un desplazamiento unitario, la fuerza axil (rigidez) vale, según la (54), E.F/l, al producir en la misma dirección un desplazamiento cos ø, el esfuerzo valdrá (E.F/l).cos ø.

Efectuando en consecuencia las proyecciones según x e y en los extremos 1 y 2, se tendrá (figura 34a):

$$R_{11} = (E.F/l).\cos^2 \phi$$
$$R_{21} = (E.F/l).\cos \phi.\operatorname{sen} \phi$$
$$R_{31} = -(E.F/l).\cos^2 \phi$$
$$R_{41} = -(E.F/l).\cos \phi.\operatorname{sen} \phi$$

b) Cálculo de R_{12}:

Razonando de igual manera, puede producirse un desplazamiento unitario en la dirección de v_1 al mismo extremo 1, manteniendo

nulos todos los demás desplazamientos (figura 34b). Este desplazamiento $v_1 = 1$ puede descomponerse según las proyecciones u_1' y v_1', resultando en este caso también despreciable el efecto de la componente v_1', mientras que en la dirección de la barra el acortamiento que la misma experimenta es sen ø, por lo que el esfuerzo axil será (E.F/l).sen ø.

Proyectando

$$R_{12} = (E.F/l).\text{sen } ø.\cos ø$$
$$R_{22} = (E.F/l).\text{sen}^2 ø$$
$$R_{32} = -(E.F/l).\text{sen } ø.\cos ø$$
$$R_{42} = -(E.F/l).\text{sen}^2 ø$$

c) Cálculo de R_{13}:

De manera análoga a las anteriores (figura 35a)

$$R_{13} = -(E.F/l).\cos^2 ø$$
$$R_{23} = -(E.F/l).\cos ø.\text{sen } ø$$
$$R_{33} = (E.F/l).\cos^2 ø$$
$$R_{43} = (E.F/l).\cos ø.\text{sen } ø$$

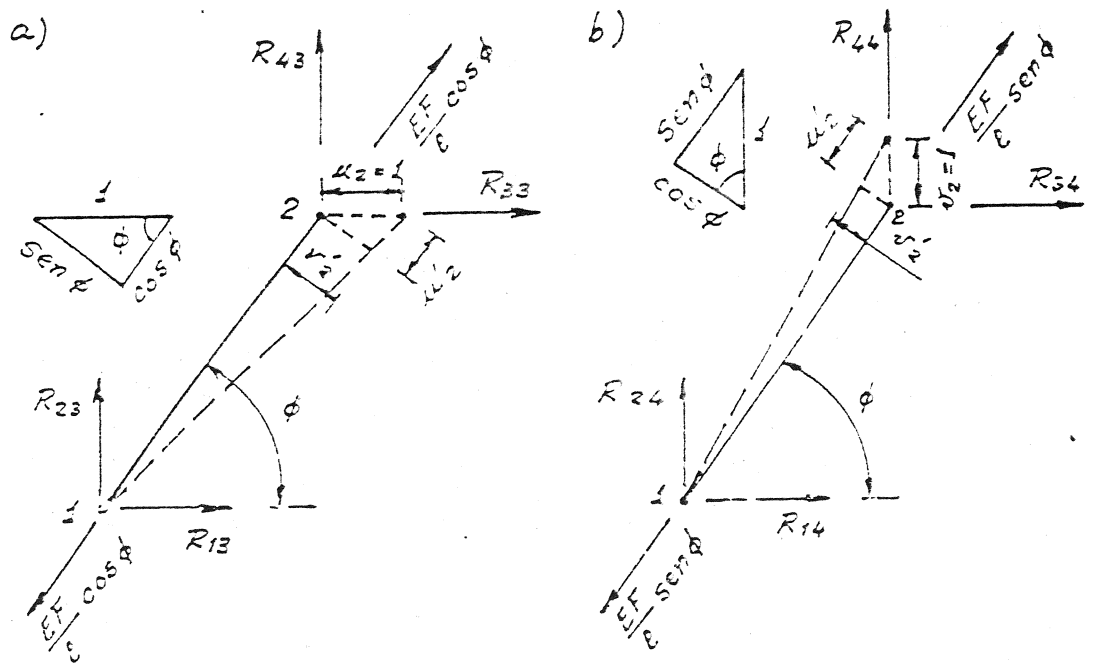


Figura 35

d) Cálculo de R_{14} (figura 35b):

$$R_{14} = -(E.F/l).\text{sen } ø.\cos ø$$
$$R_{24} = -(E.F/l).\text{sen}^2 ø$$
$$R_{34} = (E.F/l).\text{sen } ø.\cos ø$$
$$R_{44} = (E.F/l).\text{sen}^2 ø$$

Reemplazando cada uno de los valores de R_{ik} obtenidos en los pasos precedentes en la (55) y expresando en forma matricial

$$\begin{bmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ S_{2x} \\ S_{2y} \end{bmatrix} = \frac{E.F}{l} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (56)$$

en donde a nivel simplificativo de la nomenclatura se denomina:

$$s = \text{sen } \phi \quad y \quad c = \cos \phi$$

La expresión (56) constituye una relación completamente general entre los esfuerzos en las barras de un reticulado y los desplazamientos extremos de éstas, en la que todas las componentes han sido formuladas con respecto a ejes globales. La misma puede ser empleada para calcular las componentes globales de desplazamiento de una estructura, o incorporándola al procedimiento general de aplicación para la resolución de estructuras hiperestáticas, que se analizará en el apartado 7. en base a coordenadas globales.

Si en un problema dado resulta necesario encontrar las componentes de desplazamientos expresadas en términos de ejes locales, las relaciones que surgen de las figuras 34a) y b)

$$u_1' = u_1.\cos \phi \quad ; \quad u_1' = v_1.\text{sen } \phi$$
$$v_1' = -u_1.\text{sen } \phi \quad ; \quad v_1' = v_1.\cos \phi$$

pueden resumirse en forma matricial mediante

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Puede escribirse una relación similar para el extremo 2 de la barra, sustituyendo el subíndice 1 por el subíndice 2 en la expresión anterior.

6.3.3. Elementos a flexión.

Las expresiones de la matriz de rigidez para elementos solicitados a flexión orientados arbitrariamente, pueden ser deducidas del mismo modo general empleado para las barras de reticulados.

Considérese para este análisis el elemento simple a flexión mostrado en la figura 36, indicando la figura 36a) las acciones en los extremos y los sentidos de los desplazamientos expresados en términos de ejes locales y la figura 36b) iguales parámetros, pero referidos en términos de ejes globales.

Para generalizar el estudio, los efectos del momento flector, así como el de los esfuerzos normales y de corte serán tratados en forma conjunta.

Efectuando el mismo análisis que en los casos anteriores, resultan para este caso, por tener 6 direcciones de extremo a considerar, idénticas expresiones generales que las dadas por las (51).

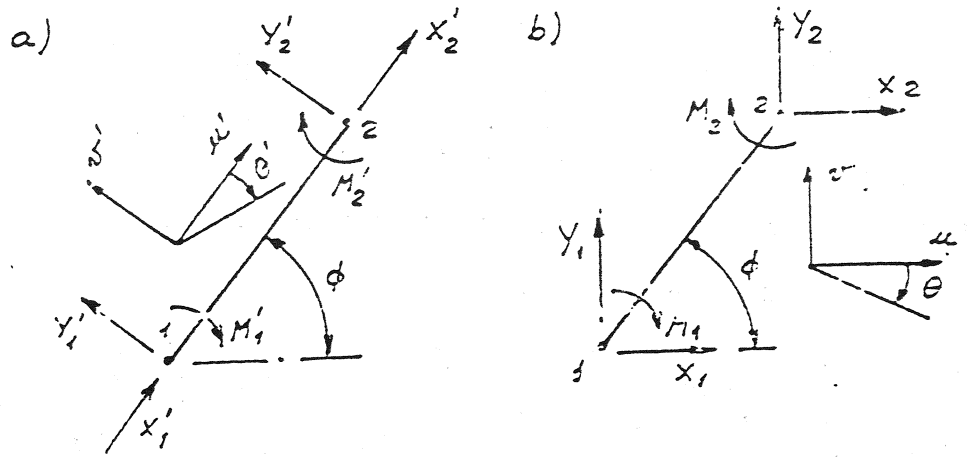


Figura 36

a) Cálculo de R_{11}:

Haciendo $\theta_1 = 1$ y manteniendo nulos los restantes desplazamientos de extremo (figura 37a), se tendrá:

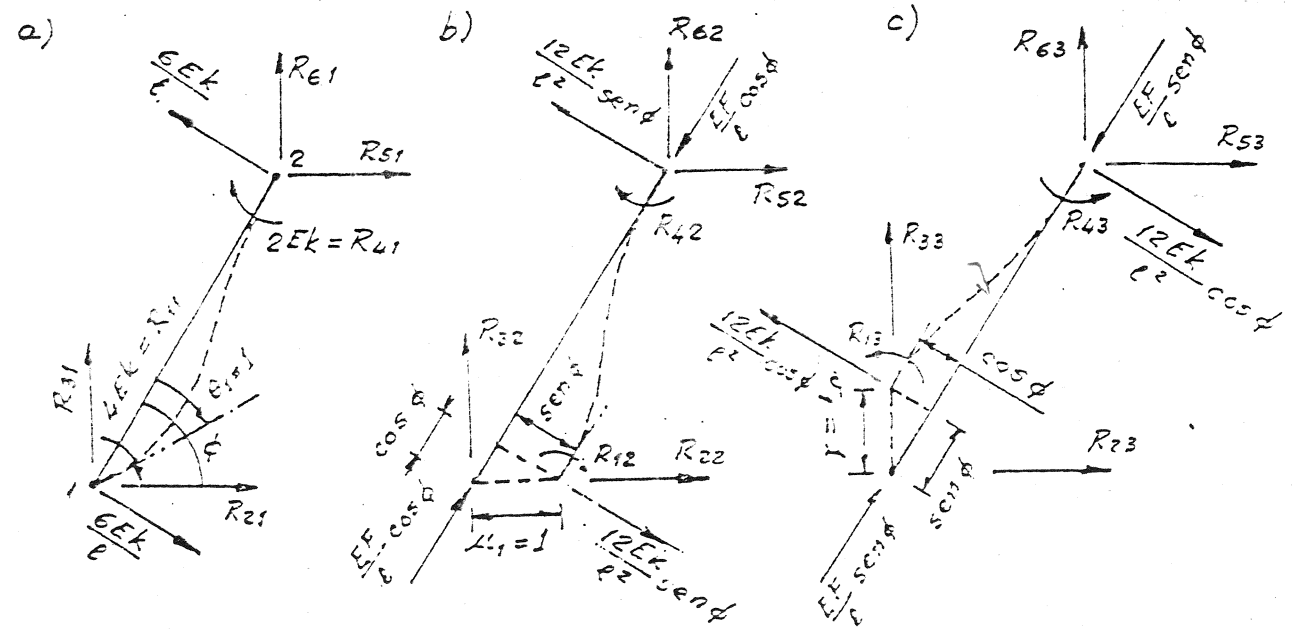


Figura 37

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \ \ 4\ Ek &&= A \\
R_{21} &= \ (6\ Ek/l).\text{sen}\ \phi &&= Bs \\
R_{31} &= -(6\ Ek/l).\cos\ \phi &&= -Bc \\
R_{41} &= \ \ 2\ Ek &&= A/2 \\
R_{51} &= -(6\ Ek/l).\text{sen}\ \phi &&= -Bs \\
R_{61} &= \ (6\ Ek/l).\cos\ \phi &&= Bc
\end{aligned}
$$

b) Cálculo de R_{12}:

En este caso debe darse un corrimiento horizontal (en la dirección de u_1) unitario, tal como se consigna en la figura 37b).

que generará componentes de valor cos ø en la dirección del eje de la barra y sen ø en dirección perpendicular. En consecuencia, las acciones compatibles con el estado de deformación dada a la barra son las consignadas en la referida figura.

Efectuando en los casos de las fuerzas las proyecciones correspondientes resulta:

$R_{12} = (6\,Ek/l).\text{sen}\,ø = Bs$
$R_{22} = (E.F/l).\cos^2 ø + (12\,Ek/l^2).\text{sen}^2 ø = (Dc^2 + Cs^2)$
$R_{32} = (E.F/l).\cos ø.\text{sen}\,ø - (12\,Ek/l^2).\text{sen}\,ø.\cos ø = (D - C)sc$
$R_{42} = (6\,Ek/l).\text{sen}\,ø = Bs$
$R_{52} = -(E.F/l).\cos^2 ø - (12\,Ek/l^2).\text{sen}^2 ø = -(Dc^2 + Cs^2)$
$R_{62} = -(E.F/l).\cos ø.\text{sen}\,ø + (12\,Ek/l^2).\text{sen}\,ø.\cos ø = -(D - C)sc$

c) Cálculo de R_{13}:

Al dar un corrimiento vertical (en la dirección de v_1) unitario, tal como se consigna en la figura 37c), se producirán componentes de valor sen ø en la dirección del eje de la barra y cos ø en dirección perpendicular. En consecuencia, las acciones compatibles con el estado de deformación dada a la barra en este caso, son las consignadas en la referida figura. En consecuencia

$R_{13} = -(6\,Ek/l).\cos ø = -Bc$
$R_{23} = (E.F/l).\text{sen}\,ø.\cos ø - (12\,Ek/l^2).\cos ø.\text{sen}\,ø = (D - C)sc$
$R_{33} = (E.F/l).\text{sen}^2 ø + (12\,Ek/l^2).\cos^2 ø = (Ds^2 + Cc^2)$
$R_{43} = -(6\,Ek/l).\cos ø = -Bc$
$R_{53} = -(E.F/l).\text{sen}\,ø.\cos ø + (12\,Ek/l^2).\cos ø.\text{sen}\,ø = -(D - C)sc$
$R_{63} = -(E.F/l).\text{sen}^2 ø - (12\,Ek/l^2).\cos^2 ø = -(Ds^2 + Cc^2)$

d) Cálculo de R_{14} (figura 38a):

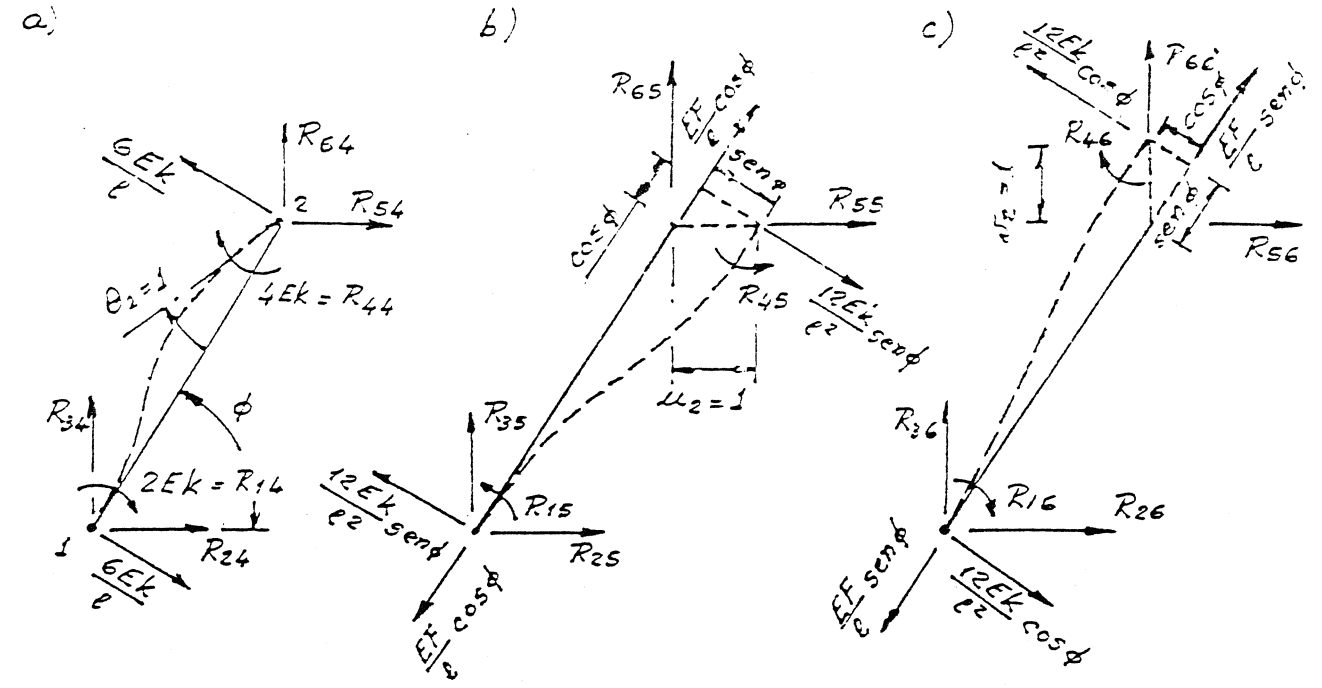


Figura 38

$$
\begin{aligned}
R_{14} &= \;\; 2\,Ek &&= \;\; A/2\\
R_{24} &= \;\; (6\,Ek/l).\mathrm{sen}\,\phi &&= \;\; Bs\\
R_{34} &= -(6\,Ek/l).\cos\phi &&= -Bc\\
R_{44} &= \;\; 4\,Ek &&= \;\; A\\
R_{54} &= -(6\,Ek/l).\mathrm{sen}\,\phi &&= -Bs\\
R_{64} &= \;\; (6\,Ek/l).\cos\phi &&= \;\; Bc
\end{aligned}
$$

e) Cálculo de R_{15} (figura 38b):

$$
\begin{aligned}
R_{15} &= -(6\,Ek/l).\mathrm{sen}\,\phi &&= -\,Bs\\
R_{25} &= -(E.F/l).\cos^2\phi - (12\,Ek/l^2).\mathrm{sen}^2\phi &&= -(Dc^2 + Cs^2)\\
R_{35} &= -(E.F/l).\cos\phi.\mathrm{sen}\,\phi + (12\,Ek/l^2).\mathrm{sen}\,\phi.\cos\phi &&= -(D - C)sc\\
R_{45} &= -(6\,Ek/l).\mathrm{sen}\,\phi &&= -\,Bs\\
R_{55} &= \;\; (E.F/l).\cos^2\phi + (12\,Ek/l^2).\mathrm{sen}^2\phi &&= \;\; (Dc^2 + Cs^2)\\
R_{65} &= \;\; (E.F/l).\cos\phi.\mathrm{sen}\,\phi - (12\,Ek/l^2).\mathrm{sen}\,\phi.\cos\phi &&= \;\; (D - C)sc
\end{aligned}
$$

f) Cálculo de R_{16} (figura 38c):

$$
\begin{aligned}
R_{16} &= \;\; (6\,Ek/l).\cos\phi &&= \;\; Bc\\
R_{26} &= -(E.F/l).\mathrm{sen}\,\phi.\cos\phi + (12\,Ek/l^2).\cos\phi.\mathrm{sen}\,\phi &&= -(D - C)sc\\
R_{36} &= -(E.F/l).\mathrm{sen}^2\phi - (12\,Ek/l^2).\cos^2\phi &&= -(Ds^2 + Cc^2)\\
R_{46} &= \;\; (6\,Ek/l).\cos\phi &&= \;\; Bc\\
R_{56} &= \;\; (E.F/l).\mathrm{sen}\,\phi.\cos\phi - (12\,Ek/l^2).\cos\phi.\mathrm{sen}\,\phi &&= \;\; (D - C)sc\\
R_{66} &= \;\; (E.F/l).\mathrm{sen}^2\phi + (12\,Ek/l^2).\cos^2\phi &&= \;\; (Ds^2 + Cc^2)
\end{aligned}
$$

En definitiva, la forma general que adopta la relación matricial entre las acciones y los desplazamientos de extremo a través de la matriz de rigidez, expresada en coordenadas globales, para una barra genérica inclinada estará dada por

$$
\begin{bmatrix} M_1\\ X_1\\ Y_1\\ M_2\\ X_2\\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Bs & -Bc & A/2 & -Bs & Bc\\ Bs & (Dc^2+Cs^2) & (D-C)sc & Bs & -(Dc^2+Cs^2) & -(D-C)sc\\ -Bc & (D-C)sc & Ds^2+Cc^2 & -Bc & -(D-C)sc & -(Ds^2+Cc^2)\\ A/2 & Bs & -Bc & A & -Bs & Bc\\ -Bs & -(Dc^2+Cs^2) & -(D-C)sc & -Bs & (Dc^2+Cs^2) & (D-C)sc\\ Bc & -(D-C)sc & -(Ds^2+Cc^2) & Bc & (D-C)sc & (Ds^2+Cc^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1\\ u_1\\ v_1\\ \theta_2\\ u_2\\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (57)
$$

Cabe observar que la matriz de rigidez obtenida según la (57) puede ser particionada en 4 submatrices, en las formas

$$
\begin{bmatrix} M_1\\ X_1\\ Y_1\\ \cdot\cdot\\ M_2\\ X_2\\ Y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc} A & Bs & -Bc & A/2 & -Bs & Bc\\ Bs & (Dc^2+Cs^2) & (D-C)sc & Bs & -(Dc^2+Cs^2) & -(D-C)sc\\ -Bc & (D-C)sc & Ds^2+Cc^2 & -Bc & -(D-C)sc & -(Ds^2+Cc^2)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A/2 & Bs & -Bc & A & -Bs & Bc\\ -Bs & -(Dc^2+Cs^2) & -(D-C)sc & -Bs & (Dc^2+Cs^2) & (D-C)sc\\ Bc & -(D-C)sc & -(Ds^2+Cc^2) & Bc & (D-C)sc & (Ds^2+Cc^2) \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \theta_1\\ u_1\\ v_1\\ \cdot\cdot\\ \theta_2\\ u_2\\ v_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} M_1\\ X_1\\ Y_1\\ \cdot\cdot\\ M_2\\ X_2\\ Y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ [K]_{11} & \vdots & [K]_{12}\\ & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots\\ & \vdots & \\ [K]_{21} & \vdots & [K]_{22}\\ & \vdots & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \theta_1\\ u_1\\ v_1\\ \cdot\cdot\\ \theta_2\\ u_2\\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (58)
$$

en donde, en la notación simbólica, $[K]_{11}$ contiene las rigideces (acciones debidas a desplazamientos unitarios) correspondientes a las acciones actuantes en el extremo 1 (M_1, X_1, Y_1), cuando en el mismo extremo se producen desplazamientos unitarios en las direcciones de θ_1, u_1 y v_1. La $[K]_{21}$ a su vez está formada por las acciones que se producen en el nudo 2 (M_2, X_2, Y_2) cuando se producen los mismos desplazamiemntos unitarios en el nudo 1. En forma análoga pueden razonarse los conceptos de conformación de las $[K]_{12}$ y $[K]_{22}$, correspondientes respectivamente a las acciones en los nudos 1 y 2, cuando se producen desplazamientos unitarios en las 3 direcciones del nudo 2.

6.3.4. Comparaciones.

6.3.4.1. Barra de dirección horizontal.

De la matriz de rigidez general expresada en la (57) puede deducirse fácilmente que si la barra estuviese orientada según una dirección horizontal, al ser: sen $\phi = s = 0$ y cos $\phi = c = 1$, la matriz particular resultante se convertiría en la dada por la (52).

6.3.4.2. Barra de dirección vertical.

En este caso correspondería hacer en la (57): sen $\phi = s = 1$ y cos $\phi = c = 0$, con lo que la matriz particular resultante se convertiría en la deducida según la (53).

6.3.4.3. Barra de dirección inclinada con acciones axiles.

Finalmente, si en la matriz de rigidez en su expresión general que resulta de la (57), se considera la presencia sólo de acciones dirigidas según el eje de la barra, resultaría que $A = B = C = 0$, con lo que se anularían las filas y columnas primera y cuarta, y además, al quedar toda la expresión en función de $D = E.F/l$, que puede sacarse factor común, se llega a la expresión (58), obtenida para tal caso en el apartado 6.3.2.

6.4. Obtención a partir del Principio de Contragradiencia.

El cálculo de la matriz de rigidez de una barra en su formulación general expresada en coordenadas globales, puede hallarse más fácilmente partiendo de las expresiones de las matrices de rigidez desarrolladas para una barra en el apartado 2.3., que habían sido formuladas en coordenadas locales (aunque en su momento este concepto aún no había sido introducido) y empleando a tales efectos el Principio de Contragradiencia.

6.4.1. Relaciones básicas entre los sistemas de coordenadas.

Si se considera una barra cualquiera de una estructura, referida a un sistema de coordenadas locales, designando genéricamente por $[D_1]$ a los desplazamientos en las direcciones de extremo que deban considerarse y por $[A_1]$ a las acciones correspondientes en tales direcciones de extremo, ambos vectores

se vincularán entre sí a través de la matriz de rigidez de la barra o elemento [R1], es decir que según la (6)

$$[A_1] = [R_1].[D_1] \qquad (59)$$

Un sistema de este tipo, que conceptualmente ya fuera utilizado en el desarrollo efectuado en el apartado 2.1., es propio de cada barra, y en la expresión (59), la matriz [R1] deberá ser calculada en base a las características geométricas y mecánicas de la barra, en forma independiente de su posición en la estructura, de acuerdo a cualquiera de las formas deducidas en el apartado 2.3. en función de las solicitaciones interiores que se hallen presentes en el caso particular bajo estudio.

Si se efectúa ahora la consideración en coordenadas globales. se estará frente a un sistema de referenciación único para la estructura, y por ende común para todas las barras que la constituyen, en el que se consideran como grados de libertad la rotación y los corrimientos horizontales y verticales de cada nudo, englobados en el vector [D_E] y las acciones asociadas a ellos en [A_E], sistema que puede plantearse según la expresión

$$[A_E] = [R_E].[D_E] \qquad (60)$$

6.4.2. Relación de contragradiencia.

La *relación de contragradiencia* se enuncia como: Si existe una relación matricial [T] que vincula los desplazamientos [D1] y [D_E] referidos a dos sistemas de coordenadas distintos, esa misma relación matricial transpuesta, es decir [T]T, es la que vincula las acciones [A1] y [A_E] referidas respectivamente a esos mismos sistemas.

Es decir que si $[D_1] = [T].[D_E]$ (61)

se verifica que $[A_E] = [T]^T.[A_1]$ (62)

En efecto. Aplicando el TTV a las acciones y los desplazamientos que se producen en la barra, referidos al sistema global, primero, y al sistema local, después, se tendrá:

$$T_{AE} = D_{E1}.A_{E1} + D_{E2}.A_{E2} + D_{E3}.A_{E3} + ... = [D_E]^T.[A_E]$$

$$T_{A1} = D_{11}.A_{11} + D_{12}.A_{12} + D_{13}.A_{13} + ... = [D_1]^T.[A_1]$$

La igualdad (ya demostrada) de los trabajos involucra

$$[D_E]^T.[A_E] = [D_1]^T.[A_1] \qquad (63)$$

pero por hipótesis, según la (61)

$[D_1] = [T].[D_E]$ o también $[D_1]^T = [D_E]^T.[T]^T$

Reemplazando esta expresión en la (63)

$$[D_E]^T.[A_E] = [D_E]^T.[T]^T.[A_1]$$

Simplificando

$$[A_g] = [T]^T.[A_1]$$

que es precisamente la expresión (62).

6.4.3. Cálculo de $[R_g]$ en función de $[R_1]$.

Para aplicar la relación de contragradiencia a la transformación de la $[R_1]$ en la $[R_g]$, la expresión (61) puede reemplazarse en la (59)

$$[A_1] = [R_1].[T].[D_g]$$

Premultiplicando por $[T]^T$

$$[T]^T.[A_1] = [T]^T.[R_1].[T].[D_g]$$

y teniendo en cuenta que el primer miembro, según la (62) corresponde al valor de $[A_g]$

$$[A_g] = [T]^T.[R_1].[T].[D_g]$$

Comparando con la (60), según la cual era $[A_g] = [R_g].[D_g]$

$$[R_g] = [T]^T.[R_1].[T] \qquad (64)$$

Las expresiones deducidas resultan como una consecuencia directa del TTV; por lo tanto serán válidas bajo las mismas hipótesis que condujeron a la formulación de aquél, es decir, admitiendo que las deformaciones de los miembros estructurales son suficientemente pequeñas como para permitir realizar el cálculo en el estado no deformado de la estructura.

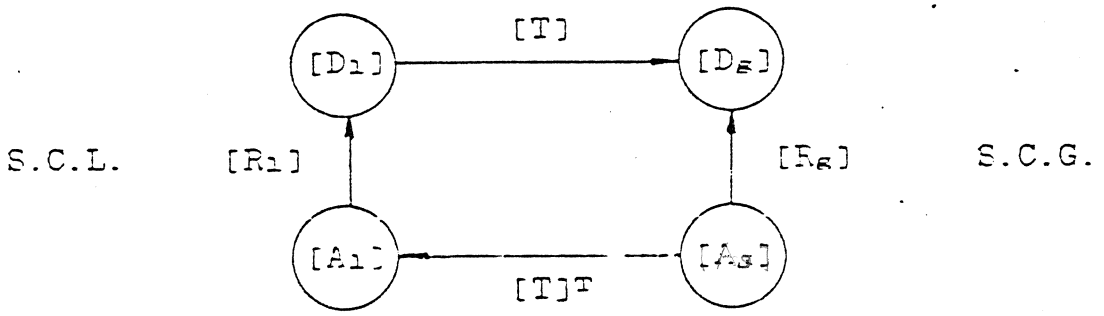
Las relaciones anteriores encierran un profundo significado conceptual, porque muestran que la condición cinemática de compatibilidad de desplazamientos, referida por la expresión (61), medidos respecto de dos sistemas distintos, no es independiente de la condición estática de equilibrio de acciones, que expresa la (62), asociadas a esos desplazamientos. Es decir que la compatibilidad cinemática y el equilibrio estático se establecen a través de la misma relación.

Desde otro punto de vista, la expresión (64) indica que la matriz de rigidez global $[R_g]$ es una forma cuadrática de la matriz de transformación $[T]$ asociada a la rigidez local $[R_1]$. Esta conclusión es totalmente lógica si se considera que la matriz $[T]$ es la que permite establecer las condiciones de compatibilidad y equilibrio y por lo tanto el hecho de que $[R_g]$ sea el doble producto entre $[T]$ y $[R_1]$ indica que la solución será compatible y equilibrada.

Por otra parte corresponde tener presente que en las consideraciones precedentes, si bien se han empleado los términos desplazamientos y acciones, los conceptos involucrados son

extensivos en forma genérica a parámetros cinemáticos y estáticos, respectivamente.

En conclusión, la forma en que se relacionan las distintas variables entre sí, puede sintetizarse en el siguiente esquema:



En forma análoga puede demostrarse también que los conceptos desarrollados son de aplicación para el caso en que se trabaje con matrices de flexibilidad en lugar de matrices de rigidez.

6.4.4. Formulación de la Matriz de Transformación.

Para establecer la configuración que, en forma general aplicable a cualquier caso, corresponde a la matriz de transformación, puede partirse aplicando la expresión (62) a una barra genérica, de inclinación ø con respecto al eje x. Si la misma se halla solicitada por las acciones de extremo consideradas hasta el presente (figura 38a), debe tenerse presente que el equilibrio de la barra exige que

$$|X_1'| = |X_2'| \qquad \text{y que:} \qquad |Y_1'| = |Y_2'| = \frac{M_1' + M_2'}{l}$$

Para signos positivos de M_1' y X_1', se tendrán para M_1', X_1' e Y_1' los sentidos indicados en la figura 39a). En consecuencia, relacionándolos con la figura 39b), resulta

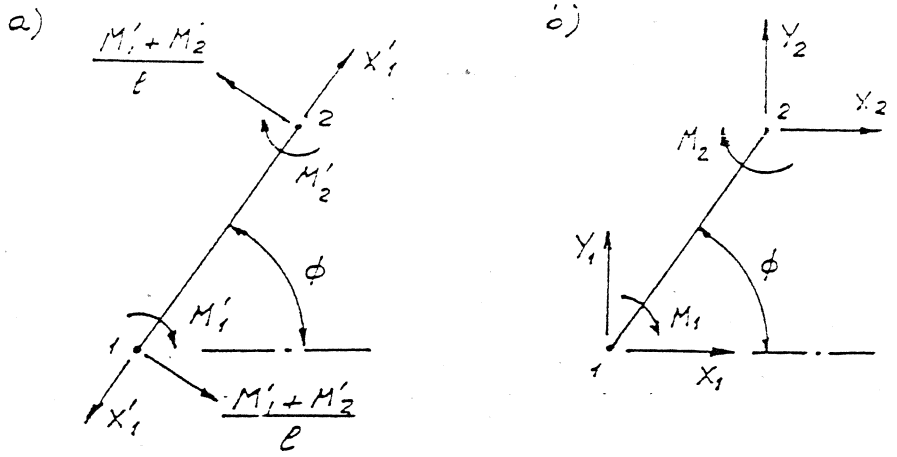


Figura 39

$$M_1 = M_1'$$

$$X_1 = \frac{M_1' + M_2'}{l}.\text{sen } \phi - X_1'.\cos \phi =$$

$$= \frac{\text{sen } \phi}{l}.M_1' + \frac{\text{sen } \phi}{l}.M_2' - \cos \phi.X_1'$$

$$Y_1 = - \frac{M_1' + M_2'}{l}.\cos \phi - X_1'.\text{sen } \phi =$$

$$= - \frac{\cos \phi}{l}.M_1' - \frac{\cos \phi}{l}.M_2' - \text{sen } \phi.X_1'$$

$$M_2 = M_2'$$

$$X_2 = - \frac{M_1' + M_2'}{l}.\text{sen } \phi + X_1'.\cos \phi =$$

$$= - \frac{\text{sen } \phi}{l}.M_1' - \frac{\text{sen } \phi}{l}.M_2' + \cos \phi.X_1'$$

$$Y_2 = \frac{M_1' + M_2'}{l}.\cos \phi - X_1'.\text{sen } \phi =$$

$$= \frac{\cos \phi}{l}.M_1' + \frac{\cos \phi}{l}.M_2' + \text{sen } \phi.X_1'$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ M_2 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sen } \phi/l & \text{sen } \phi/l & -\cos \phi \\ -\cos \phi/l & -\cos \phi/l & -\text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \phi/l & -\text{sen } \phi/l & \cos \phi \\ \cos \phi/l & \cos \phi/l & \text{sen } \phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} M_1' \\ M_2' \\ X_1' \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que la (62) expresaba $[A_B] = [T]^T.[A_1]$, la matriz de transformación [T] corresponde a la transpuesta de la matriz hallada. Es decir que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \phi/l & -\cos \phi/l & 0 & -\text{sen } \phi/l & \cos \phi/l \\ 0 & \text{sen } \phi/l & -\cos \phi/l & 1 & -\text{sen } \phi/l & \cos \phi/l \\ 0 & -\cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \end{bmatrix} \qquad (65)$$

6.4.5. Cálculo de la $[R_B]$ a partir de la [T].

Partiendo de la expresión general de la [T], y operando según la (64), puede obtenerse la matriz de rigidez de una barra genérica expresada en coordenadas globales. La $[R_1]$ a considerar, corresponde a la matriz de rigidez de la misma barra expresada en coordenadas locales y referida a sólo tres direcciones extremas, y fue deducida al tratar el método simplificado en el apartado 4.3., expresión (46).

El producto parcial $[T]^T.[R_1]$ arroja por resultado

			4Ek 2Ek 0	2Ek 4Ek 0	0 0 EF/l
1	0	0	4Ek	2Ek	0
s/l	s/l	-c	(4Ek/l)s+(2Ek/l)s	(2Ek/l)s+(4Ek/l)s	-(EF/l)c
-c/l	-c/l	-s	-(4Ek/l)c-(2Ek/l)c	-(2Ek/l)c-(4Ek/l)c	-(EF/l)c
0	1	0	2Ek	4Ek	0
-s/l	-s/l	c	-(4Ek/l)s-(2Ek/l)s	-(2Ek/l)s-(4Ek/l)s	(EF/l)c
c/l	c/l	s	(4Ek/l)c+(2Ek/l)c	(2Ek/l)c+(4Ek/l)c	(EF/l)s

Efectuando las sumas algebraicas, expresando los valores obtenidos en función de la notación sintética A, B, C y D, empleada ya en los casos anteriores, y multiplicando por [T]

			1 0 0	s/l s/l -c	-c/l -c/l -s	0 1 0	-s/l -s/l c	c/l c/l s
A	A/2	0	A	Bs	-Bc	A/2	-Bs	Bc
Bs	Bs	-Dc	Bs	(Dc^2+Cs^2)	(D-C)sc	Bs	$-(Dc^2+Cs^2)$	-(D-C)sc
-Bc	-Bc	-Ds	-Bc	(D-C)sc	Ds^2+Cc^2	-Bc	-(D-C)sc	$-(Ds^2+Cc^2)$
A/2	A	0	A/2	Bs	-Bc	A	-Bs	Bc
-Bs	-Bs	Dc	-Bs	$-(Dc^2+Cs^2)$	-(D-C)sc	-Bs	(Dc^2+Cs^2)	(D-C)sc
Bc	Bc	Ds	Bc	-(D-C)sc	$-(Ds^2+Cc^2)$	Bc	(D-C)sc	(Ds^2+Cc^2)

matriz que se corresponde exactamente con la obtenida según la expresión (87).

6.5. Formulación de la matriz de rigidez de la estructura.

Al expresar la resolución de una estructura en coordenadas globales, la matriz de rigidez extendida a toda ella (R_{EG}) en dicho sistema referencial, debe obtenerse efectuando el ensamble adecuado de las matrices $[R_{iG}]$ de las n barras que componen la estructura. Ello es debido a que en coordenadas globales, los nudos (o vértices) de encuentro de 2 o más barras constituyen extremos comunes, cuyos desplazamientos y acciones son únicos, y que resultan de la suma de los desplazamientos individuales de cada barra concurrente en las tres direcciones consideradas (giro θ, desplazamiento según x, desplazamiento según y).

Este ensamble se realiza considerando las características de la topología estructural, es decir, de la forma en que las distintas barras se vinculan o conectan entre sí.

Para mostrar el proceso a seguir, considérese una barra genérica i (figura 40), cuyos nudos extremos sean f y h. Su matriz de rigidez, en coordenadas globales puede particionarse en 4

submatrices (de 3 filas por 3 columnas cada una), en la forma indicada en la expresión (58). O sea

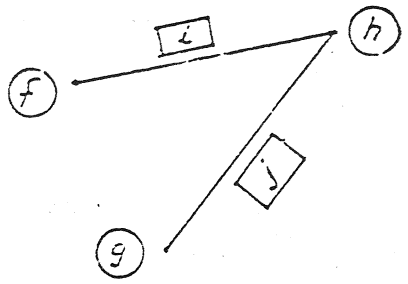


Figura 40

$$[R_{ig}] = \begin{bmatrix} [K_i]_{ff} & [K_i]_{fh} \\ [K_i]_{hf} & [K_i]_{hh} \end{bmatrix}$$

donde por ejemplo $[K_i]_{fh}$ indica las acciones asociadas a los grados de libertad del extremo f, cuando se provocan en el extremo h desplazamientos unitarios.

Si se considera que la estructura posee m nudos, la ubicación correspondiente a estas submatrices en la $[R_{mg}]$ será

$[R_{mg}]$ =	(1)	(2)	(.)	(.)	(f)	(g)	(h)	(.)	(.)	(m)
(1)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(2)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(f)	.	.	.	.	$[K_i]_{ff}$	.	$[K_i]_{fh}$	.	.	.
(g)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(h)	.	.	.	.	$[K_i]_{hf}$	.	$[K_i]_{hh}$	.	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(m)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Si se pasa ahora a considerar la barra siguiente j (figura 40), que une los nudos g y h, las submatrices correspondientes serán

$$[R_{jg}] = \begin{bmatrix} [K_j]_{gg} & [K_j]_{gh} \\ [K_j]_{hg} & [K_j]_{hh} \end{bmatrix}$$

Al incorporarlas a la matriz $[R_{mg}]$ resultará, tomando en consideración sólo las filas y columnas interesadas

	(.)	(.)	(f)	(g)	(h)	(.)	(.)
(.)	.	.	.	.	.	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.
(f)	.	.	$[K_i]_{ff}$	.	$[K_i]_{fh}$	.	.
(g)	.	.	.	$[K_j]_{gg}$	$[K_j]_{gh}$	.	.
(h)	.	.	$[K_i]_{hf}$	$[K_j]_{hg}$	$[**]_{hh}$	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.
(.)	.	.	.	.	.	.	.

Es decir que en el lugar correspondiente a la fila y columna de orden h, deben colocarse, por pertenecer el punto a dos barras, simultáneamente las submatrices $[K_i]_{hh}$ resultante de considerar la barra i y la $[K_j]_{hh}$ correspondiente al análisis de la barra j. Como cada término, en cualquier caso se refiere ordenadamente al giro, a la dirección del eje x y a la del eje y, los términos de ambas submatrices son perfectamente adicionables, por lo que en tal ubicación se escribirá la submatriz que resulta de sumar

$$[**]_{hh} = [K_i]_{hh} + [K_j]_{hh}$$

Se observa, de acuerdo al procedimiento descripto para el ensamble de la matriz de rigidez global de toda la estructura, que su configuración dependerá del ordenamiento que se haya adoptado para la identificación de los nudos.

Para ejemplificar el procedimiento y lo anteriormente expresado, en las figuras 41a) y b), se muestra en forma simplificada la manera de armar la matriz global total a partir de cada una de las submatrices [K], indicándose esquemáticamente con un asterisco en el casillero correspondiente cada una de las submatrices que se ensamblan (los casilleros en blanco corresponden a cero).

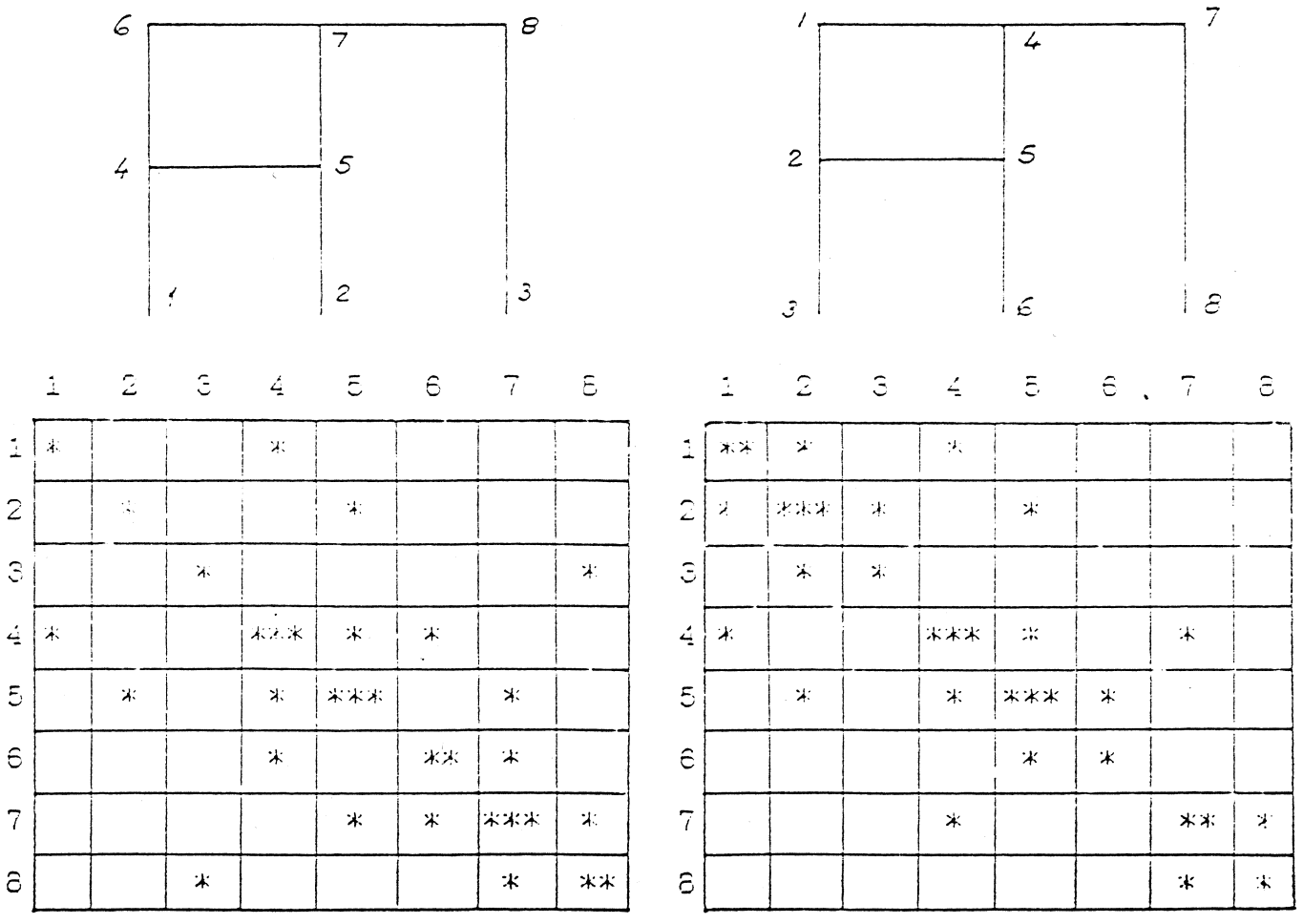


Figura 41

La figura muestra también la distinta configuración resultante cuando una misma estructura se numera con secuencias diferentes. En ambos casos se hace abstracción de la vinculación de la estructura.

6.6. Consideraciones respecto a los vínculos.

Toda estructura, para que sea estable frente a la acción de cualquier tipo de cargas, debe hallarse vinculada a tierra. lo que implica que los desplazamientos en la dirección de los vínculos están restringidos. Esta restricción puede ser total o parcial, según se trate de vínculos perfectos o elásticos.

6.6.1. Vínculos perfectos.

En esta situación se admite que los desplazamientos de los vínculos (según la naturaleza de cada uno de ellos) son nulos y por lo tanto aquéllos pueden ser eliminados como grados de libertad de la estructura.

Desde el punto de vista matricial esto implica eliminar la o las filas y columnas correspondientes a o a los desplazamientos impedidos, en la matriz de rigidez global de la barra $[R_e]_i$, y por ende, en la de toda la estructura $[R_{Ee}]$. Así, por ejemplo, un empotramiento en un apoyo genérico A equivale a suprimir las filas y columnas correspondientes a θ_A, X_A e Y_A; una articulación en un apoyo genérico B equivale a suprimir las filas y columnas correspondientes a X_B e Y_B y un apoyo móvil de desplazamiento horizontal en el vínculo C equivale a suprimir la fila y columna correspondiente a Y_C.

Así por ejemplo, si en la estructura aporticada de la figura 41 se suponen empotrados los extremos 1, 2 y 3 (para el primer caso), se deberán suprimir las 3 filas y columnas que se indican bajo tales designaciones, con lo que la $[R_{Ee}]$ se reduce a una matriz de 15 x 15, equivalente a la cantidad de incógnitas de desplazamiento que en tal caso presentará la estructura (3 por nudo). Para el segundo sistema de numeración y para igual supuesto de vinculación, se suprimen todas las filas y columnas designados bajo los números 3, 6 y 8.

Si bien existen otras formas de encarar el problema, la adoptada tiene la ventaja de reducir el número total de incógnitas a resolver.

6.6.2. Vínculos elásticos.

Se presentan vínculos elásticos cuando los mismos pueden experimentar un desplazamiento D_s proporcional a la reacción R_s que se produce en el apoyo. Admitiendo un comportamiento lineal

$$R_s = r_s . D_s$$

donde r_s es el valor de la reacción de apoyo que produce en la dirección del vínculo elástico un desplazamiento unitario, es

decir, la rigidez del vínculo en la dirección considerada, dependiendo su valor de las características de cada caso particular. Los conceptos atinentes a este tipo de vínculos y las constantes intervinientes fueron desarrollados en el apartado 6.3. del Capítulo IV.

Conocidos los valores de r_j (que constituyen magnitudes escalares) para cada una de las direcciones en las que existan vínculos elásticos, se los suma al término K_{jj} de la matriz de rigidez global, previamente calculada en la forma habitual, es decir que a la rigidez aportada por las barras, se le adiciona la correspondiente a los vínculos elásticos.

6.7. Características de las matrices de rigidez.

Las matrices de rigidez, expresadas en coordenadas globales, responden a las siguientes propiedades:

1°) Son matrices definidas positivas, cuadradas y simétricas, o sea $R_{ik} = R_{ki}$. La verificación de esta última característica puede efectuarse a partir de la ley de los desplazamientos recíprocos de Maxwell.

2°) La matriz completa de rigidez, ya sea para un solo elemento o toda una estructura, es singular. Sin embargo, si se especifican suficientes condiciones de frontera (de acuerdo a las vinculaciones presentes), de manera que la estructura sea estable, y la matriz de rigidez se modifica para reflejar esas condiciones, la matriz resultante debe ser no singular, admitiendo en consecuencia inversa.

3°) Los términos de la diagonal principal de la matriz de rigidez (R_{ii}) son siempre positivos. La razón de esta característica tiene que ver con el hecho de que tales rigideces representan, cada una, la acción necesaria en un nudo o dirección de extremo, para producir un desplazamiento correspondiente (corrimiento o giro), en ese mismo nudo. Una acción negativa para producir un desplazamiento positivo, es contrario al comportamiento observado en las estructuras.

4°) Son invariantes estructurales que dependen de las características geométricas, mecánicas y topológicas de la estructura, y del número de grados de libertad que se asignen al modelo.

5°) Son independientes de las acciones que solicitan la estructura.

6°) La disposición de los términos no nulos en la matriz dependen de la forma en que se numeren los nudos de la estructura, según se muestra esquemáticamente en la figura 41.

6.8. Conceptos básicos asociados a las matrices de rigidez.

Tal cual se pusiera de manifiesto en la parte introductoria de los Capítulos V y del presente, la idea de rigidez se halla

asociada a una relación entre esfuerzos y deformaciones. Por lo general se acepta la validez de relaciones lineales entre ambas variables, lo que implica ubicar el problema dentro del campo elástico definido por la ley de Hooke. Sin embargo, son también posibles otras relaciones y en algunos casos es necesario recurrir a ellas, con lo que el análisis deja de ser lineal, al no poder considerarse ya como constante la rigidez.

El concepto fundamental radica en que la rigidez se halla siempre asociada a un desplazamiento posible, o en términos matemáticos, a un grado de libertad del sistema estructural. Si éste poseyera un único grado de libertad, su estado de deformación quedaría definido por un sólo desplazamiento y la rigidez adquiere un valor único y característico, función de las dimensiones del elemento, su tipo de vinculación, las propiedades mecánicas del material que lo constituye y los esfuerzos interiores que se consideran y aquellos que se desprecian. En cambio, cuando el sistema posee varios grados de libertad, o sea que para describir su estado deformado es necesario definir más de un desplazamiento, la relación queda expresada por medio de una *matriz de rigidez*, cuyos términos serán las acciones que aparecen en cada grado de libertad cuando en forma sucesiva e independiente se produce en cada uno de ellos un desplazamiento unitario. Tanto las acciones como los desplazamientos deben ser entendidos en forma generalizada y congruente, es decir que pueden ser fuerzas asociadas con corrimientos o momentos asociados con giros.

La inversa de la matriz de rigidez de un sistema es la matriz de flexibilidad, cuyos coeficientes son los desplazamientos en la dirección de cada uno de los grados de libertad, cuando en forma independiente y sucesiva se aplican en todos ellos acciones unitarias.

Como conclusión de lo expuesto resulta que, para una estructura cualquiera, la matriz de rigidez (o de flexibilidad), dependerá del sistema de grados de libertad cuyo análisis interesa. En tales condiciones, es posible definir por lo general, un sistema de grados de libertad en función de otro u otros, lo que lleva a la posibilidad de obtener una matriz de rigidez a partir de otra y a conformar la de un sistema complejo a partir de las que corresponden a sistemas más simples, y las de éstos, a su vez, a partir de las componentes individuales de la estructura (barras en el caso de un pórtico múltiple, elementos verticales individualmente considerados en el de una construcción sismorresistente).

Para una correcta formulación sobre la base de las pautas anteriormente expresadas, resulta indispensable reconocer y definir la relación existente entre la matriz de rigidez y los grados de libertad implicados. Esta consideración pone en evidencia el aspecto más importante del análisis: la adecuada elección del sistema de grados de libertad. A tales fines, el analista, al encarar la resolución de una estructura, deberá decidir cuántos y cuáles grados de libertad (desplazamientos) resultan necesarios para definir con la precisión requerida (o a veces solamente posible), el comportamiento de la estructura. Esta

elección, por consiguiente, dependerá del análisis que se desee efectuar.

Supóngase para ejemplificar el concepto, que se debe encarar la resolución de una estructura aporticada plana. Si se pretenden determinar las solicitaciones internas que producen todas las deformaciones presentes, será necesario considerar los corrimientos y giros de todos los nudos, o sea tres grados de libertad por nudo. Si simplificativamente se decide que puede prescindirse de la influencia de las deformaciones axiles en la determinación del valor de las solicitaciones internas, será suficiente con la elección de un sistema que tenga tantos grados de libertad de giro como nudos tenga la estructura, más un grado de libertad de corrimiento por cada desplazamiento lineal independiente que aquélla presente.

Si en cambio interesan los desplazamientos horizontales en cada nivel para la determinación de la distribución de fuerzas sísmicas (tema que es objeto del Capítulo VII), sólo será necesario considerar un grado de libertad por piso para cada elemento individual y tres por piso para la estructura en su conjunto.

Es obvio que las matrices de rigidez (o de flexibilidad) asociadas a cada uno de los casos anteriores son muy distintas, aunque cabe consignar que a partir del planteo del primer caso (pórtico de varios niveles), es posible obtener la segunda (matriz de rigidez a desplazamientos horizontales del mismo pórtico), mediante el proceso denominado de condensación estática de la matriz de rigidez, que también será analizado en el Capítulo VII.

7. RESOLUCION GENERAL DE ESTRUCTURAS POR EL METODO DE LA RIGIDEZ.

Tal como fuera puesto de manifiesto en el Capítulo I, los objetivos básicos del análisis estructural son:

a) Conocer el régimen de solicitaciones interiores (M, N y Q) que provocan las acciones externas actuantes sobre la estructura.

b) Determinar el estado de deformación producido en la estructura por tales acciones.

Ambos objetivos son alcanzados en la forma más directa, general y fácilmente aplicable al cálculo mediante computadoras, por medio del método de la rigidez, con la base conceptual del método de los desplazamientos. Generalizando, los pasos a seguir para la resolución integral de una estructura por este método, son los siguientes:

a) Paso 1: Se numeran e identifican los nudos y las barras de la estructura y se formula el modelo de cálculo, analizando las restricciones impuestas por los vínculos y estableciendo la cantidad de grados de libertad que presenta la estructura, en términos de desplazamientos de extremos de barra globales.

Por lo general, los nudos se especifican mediante un número dentro de un círculo y las barras por medio de un número en un cuadrado. Los extremos "cercano" y "alejado" de cada barra se identifican mediante flechas consignadas a lo largo de las mismas, señalando hacia el extremo alejado (figura 42a).

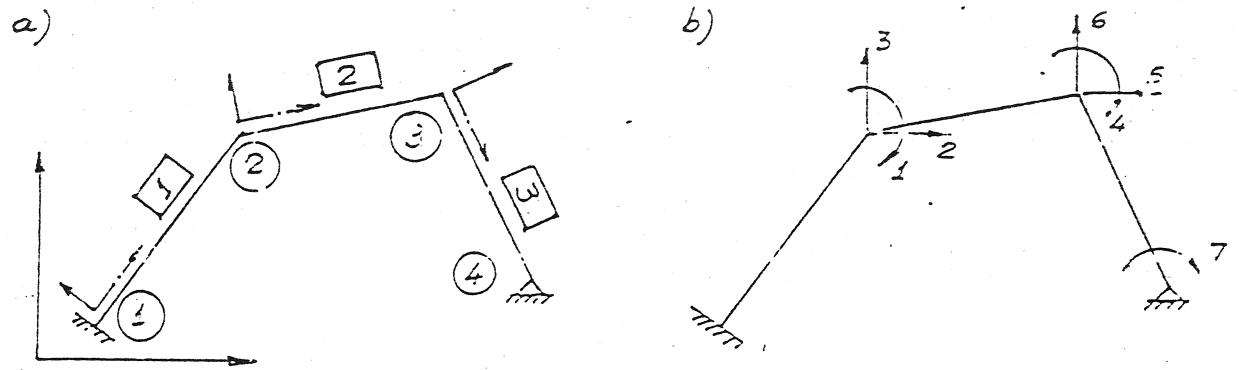


Figura 42

Las direcciones de los desplazamientos que constituyen las 7 incógnitas, que conformarán el vector [X], son las indicadas en la figura 42b), presentando la estructura considerada 3 incógnitas de giro (X_1, X_4 y X_7) y 4 de corrimientos (X_2, X_3, X_5 y X_6).

b) Paso 2: Se formula la matriz de rigidez local $[R_{11}]$ correspondiente a cada barra. Para ello se aplican las expresiones desarrolladas al respecto en el apartado 4.3., dado que las mismas fueron obtenidas con igual criterio que el seguido en el método simplificado, es decir el de no considerar los términos correspondientes a los desplazamientos en la dirección transversal a la barra, pues éstos se hallan implícitos en las expresiones de aplicación, las que en definitiva serán:

- Para el caso de barras sin corrimientos relativos entre sus extremos, la expresión (44),

- Para el caso general de barras en estructuras de alma llena con corrimientos transversales, en que puede despreciarse la influencia del esfuerzo de corte, la expresión (46).

Si en el análisis de una estructura con desplazamientos transversales relativos en sus barras, es despreciable la influencia del esfuerzo normal, puede también en este caso aplicarse directamente la (44).

- Para el caso general de barras en estructuras de alma llena con corrimientos transversales, en que no sea despreciable la influencia del esfuerzo de corte, la expresión (47).

- Para el caso general de barras en estructuras de alma llena espaciales, la expresión (49).

c) Paso 3: Se transforma cada matriz $[R_{11}]$ a coordenadas globales, a través de la matriz de transformación $[T_1]$ propia de cada barra, por aplicación sucesiva de la (64)

$$[R_{1G}] = [T_1]^T.[R_{11}].[T_1]$$

d) Paso 4: Se conforma la matriz de rigidez global de toda la estructura $[R_{EG}]$ mediante el ensamble adecuado de las submatrices que componen cada $[R_{1G}]$ y la eliminación de las filas y columnas que corresponden a los desplazamientos restringidos por los vínculos, en la forma expuesta en el apartado 6.6.

e) Paso 5: Se plantea el sistema de ecuaciones de equilibrio de nudos entre las acciones exteriores actuantes sobre el sistema fijo en la dirección de las incógnitas $[A_{xo}]$ y los esfuerzos internos, a través de la

$$[A_{xo}] + [A_{xx}] = 0$$

y siendo en coordenadas globales, de acuerdo a la expresión básica de la rigidez

$$[A_{xx}] = [R_{EG}].[X]$$

resulta

$$[A_{xo}] + [R_{EG}].[X] = 0 \qquad \text{luego:} \qquad [X] = -[R_{EG}]^{-1}.[A_{xo}] \qquad (66)$$

f) Paso 6: Se calculan los desplazamientos de extremo de cada barra mediante la (61)

$$[D_{11}] = [T_1].[D_{1G}] \qquad (67)$$

en donde las $[D_{1G}]$ se formulan en forma directa conociendo las incógnitas X_1 obtenidas en el paso anterior.

g) Paso 7: Finalmente se calculan los esfuerzos de extremo de cada barra

$$[A_e]_1 = [A_{eo}]_1 + [A_{ex}]_1 \qquad (68)$$

$$[A_e]_1 = [A_{eo}]_1 + [R_{11}].[D_{11}] \qquad (69)$$

en donde las expresiones de las $[D_{11}]$ fueron obtenidas en el paso anterior, y las $[A_{eo}]_1$ surgen del sistema exterior de cargas aplicado al sistema fijo. Cada vector de la (68) contendrá tres términos: los dos primeros corresponderán a los momentos de los extremos de cada barra, mientras que el tercero será el esfuerzo normal en la misma.

Los pasos seguidos permiten cumplimentar los objetivos expresados en los puntos a) y b) de la parte introductoria del presente apartado. El primero queda definido para cada barra o elemento estructural a través de la (69), que contiene los valores de M_1, M_2 y N, mientras que los de Q son de obtención inmediata mediante la relación $Q = (M_1 + M_2)/l$.

El segundo objetivo, por su parte, se obtiene a partir de la (66), en términos de coordenadas globales para la estructura considerada en su conjunto, y por medio de las [Dig] para cada barra individual.

Una vez determinados, tanto las acciones como los desplazamientos, en los extremos de cada barra, resulta inmediata la obtención de tales parámetros para la estructura toda, en función del sistema exterior de cargas actuante sobre la misma.

8. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana S.A. - México - 1997.

3. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

4. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

5. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Jan J. Tuma - Mc Graw-Hill de México - 1978.

6. "ANALISIS ESTRUCTURAL AVANZADO" - Jan J. Tuma y R. H. Munshi - Mc Graw-Hill de México - 1978.

7. "RESOLUCION MATRICIAL DE ESTRUCTURAS" - Capítulo 4: Método de la Rigidez - Ing. Francisco Sentinelli - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo - Mendoza - 1981.

8. "APLICACION DE LA RELACION DE CONTRAGRADIENCIA AL CALCULO DE ESTRUCTURAS - METODO DE LA RIGIDEZ" - Ing. Francisco Crisafulli - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo - Mendoza.

9. "DISTRIBUCION ESPACIAL DE FUERZAS SISMICAS EN EDIFICIOS DE VARIOS NIVELES" - Ings. Agustín B. Reboredo, Susana E. Puig y Jorge E. Cano - Mendoza - 1985.

10. "APUNTES DE CLASE" - Ing. Carlos D. Segerer - Cátedra de Estabilidad III (Análisis Estructural I) - Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

INDICE

CAPITULO VI: METODO DE LA RIGIDEZ

Página

1. Introducción 1

2. Matriz de rigidez 2
   2.1. Matriz de rigidez de un elemento individual 2
   2.2. Matriz de rigidez de una estructura 4
   2.3. Formas de la matriz de rigidez para distintos tipos de solicitaciones interiores. 5
   2.4. Consideraciones sobre las matrices de rigidez 10
   2.5. Comparación entre las matrices de flexibilidad y de rigidez. 11

3. Expresión del TTV aplicada al método de la rigidez 11
   3.1. Conceptos básicos 11

4. Aplicación del método de la rigidez en coordenadas locales. 14
   4.1. Desarrollo del método de la rigidez 15
   4.2. Diagrama de flujo de las operaciones matriciales. . . 17
   4.3. Método de la rigidez simplificado 17

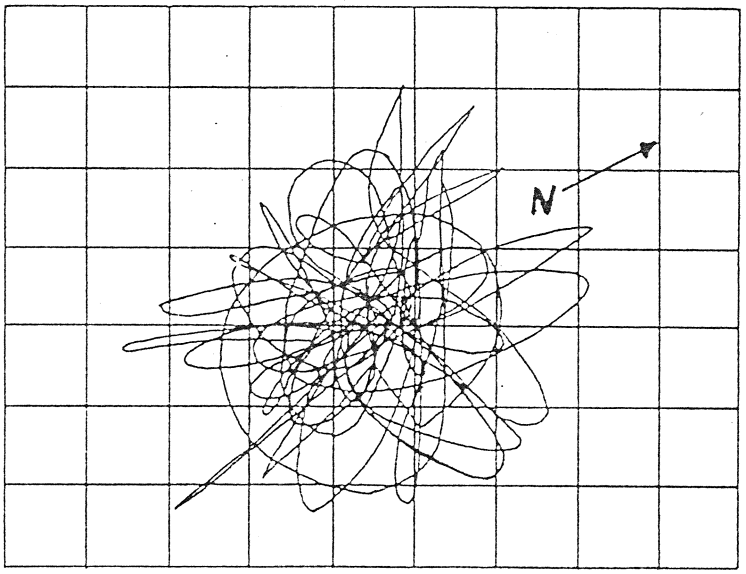
5. Aplicación al análisis de estructuras hiperestáticas . . . 20
   5.1. Resolución de vigas continuas 20
   5.2. Estructuras aporticadas 22
   5.3. Estructuras espaciales. 37

6. Expresiones generales de la matriz de rigidez. 39
   6.1. Criterios para la fijación de nomenclaturas 39
   6.2. Caso de elementos ortogonales 39
   6.3. Caso de elementos inclinados. 43
   6.4. Obtención a partir del Principio de Contragradiencia. 52
   6.5. Formulación de la matriz de rigidez de la estructura. 57
   6.6. Consideraciones respecto a los vínculos 60
   6.7. Características de las matrices de rigidez. 61
   6.8. Conceptos básicos asociados a las matrices de rigidez 61

7. Resolución general de estructuras por el método de la rigidez. 63

8. Bibliografía consultada 66

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO VII

DISTRIBUCION DE FUERZAS SISMICAS

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2002

CAPITULO VII

DISTRIBUCION DE FUERZAS SISMICAS

1. CARACTERISTICAS QUE DEFINEN LA ACCION SISMICA.

1.1. Definiciones y clasificación.

Se define un *sismo* (o seísmo) como un movimiento vibratorio, más o menos rápido y violento de la superficie terrestre, provocado por perturbaciones de distinta naturaleza. Cuando es leve se lo suele denominar *temblor*; cuando por el contrario es muy fuerte y ocasiona daños, se lo llama *terremoto*.

La clasificación de los sismos se efectúa de acuerdo con el origen de los mismos. Los más frecuentes y de mayor interés en ingeniería, son debidos a desplazamientos relativos súbitos producidos dentro de la corteza terrestre, resultantes de la acción de fuerzas geológicas, y se denominan *tectónicos*. Otros terremotos ocurren debido a la erupción de volcanes y por ello se llaman *volcánicos*. La falla de los techos de cavernas o de minas o el deslizamiento de volúmenes importantes de tierra, da lugar a sismos de *colapso*, que son en general de menor magnitud que los tectónicos. También existen terremotos *artificiales*, tales como los debidos a explosiones o aquellos inducidos por el llenado de presas de embalse.

1.2. Sismos de origen tectónico.

La mayor parte, si no todos los sismos tectónicos, se originan en desplazamientos relativos de las fallas geológicas. Las fallas principales son los bordes de las placas, ya que la corteza terrestre consta de varias placas con movimiento relativo entre ellas. Algunas fallas del interior de las placas presentan también movimientos relativos que ocasionan terremotos considerables.

Las fuerzas que mueven las placas son tema de estudio. Una explicación plausible sostiene que nuestro planeta se formó por la unión de meteoritos. El incremento en la masa aumentó la radioactividad. Consecuentemente el planeta se ha calentando y su núcleo crece a expensas de la fusión del manto. Los materiales fundidos tienen diversas composiciones y por consiguiente diferentes densidades, debido a sus distintos orígenes. Los materiales más pesados caen hacia el centro de la tierra y forman el núcleo sólido interno. Los más ligeros emigran y alcanzan la superficie en forma de lava. Esto empuja las placas en la misma dirección que las corrientes establecidas por diferencia de densidad de los diversos materiales al fundirse.

La teoría de que los sismos ocurren cuando la fricción ha sido vencida en las fallas se ha confirmado plenamente, si bien no pueden excluirse otros fenómenos que generan algunos sismos tectónicos. De acuerdo a esta teoría, la corteza terrestre se considera sujeta a esfuerzos asociados con deformaciones cortantes. Cuando se sobrepasa la resistencia en una falla, la corteza tiende a recuperar su configuración no deformada. La energía acumulada por la deformación elástica de las rocas es así bruscamente liberada y se produce un sismo. Estos movimientos son sumamente lentos y ocurren desde hace millones de años. Como consecuencia de ello resulta muy difícil predecir la evolución del proceso y la ocurrencia de terremotos en un área determinada, puesto que los datos instrumentales disponibles abarcan, en el mejor de los casos, un par de siglos.

1.3. Ondas sísmicas.

Aunque un terremoto se origina en un cierto volumen de corteza terrestre, se denomina *foco* al punto donde se considera que emanan primero las ondas sísmicas. La proyección de este punto en la superficie se conoce como *epicentro* o epifoco.

Del foco se emiten distintos tipos de ondas sísmicas, las que, como consecuencia de la complejidad de los mecanismos focales, de la irregularidad de las formaciones geológicas por las que se transmiten, de las múltiples reflexiones y refracciones en distintas capas del terreno, etc., dan lugar a que las vibraciones en el sitio donde se desea erigir la construcción sean muy irregulares.

Por lo general la duración de un gran terremoto es relativamente pequeña, del orden de los segundos y rara vez llega al minuto. Durante el sismo general se presentan con frecuencia uno o más picos de gran magnitud en el movimiento, los que representan el máximo efecto del terremoto. Aún cuando la intensidad de un sismo se mide en función de la energía liberada en el foco, el efecto crítico en una estructura dada se determina por los movimientos del terreno en el lugar de ubicación de la misma. La magnitud de estos movimientos es afectada principalmente por la distancia de la estructura al epicentro, pero influyen también las condiciones geológicas existentes directamente por debajo de la estructura y la naturaleza de la totalidad de la masa de la corteza terrestre que se encuentra entre el epicentro y la estructura.

1.4. Magnitud e intensidad.

La **magnitud** es una medida de la energía liberada durante un sismo y se la determina tomando el logaritmo en base 10 del mayor movimiento registrado durante la llegada de cierto tipo de ondas sísmicas y aplicando una corrección estándar para tomar en consideración la distancia entre el epicentro y el lugar donde se tomó el registro (a veces también se corrige para considerar las características del aparato). A todo sismo le corresponde una sola magnitud, la que se expresa según la escala de Richter.

La intensidad es una medida de la severidad de un terremoto en cierto lugar. Un mismo temblor tiene distintas intensidades en diferentes lugares. La escala de intensidad más comúnmente usada es la de *Mercalli Modificada*, que es una escala de tipo subjetivo, que asigna a la intensidad valores (o grados) entre I y XII, con base en informes de cómo fue sentido el sismo, de cómo dañó a las construcciones (o sus estructuras), de qué cambios se produjeron en la superficie de la tierra en el lugar en cuestión, etc.

1.5. Registros y su empleo en el diseño.

Entre los aparatos de que se dispone para medir el movimiento de la superficie del terreno, los más importantes para la ingeniería estructural son los *acelerógrafos*, que miden la historia de las aceleraciones en el lugar donde están colocados. Los registros así obtenidos se conocen con el nombre de *acelerogramas*, en los que se llevan en ordenadas los valores de las aceleraciones que experimenta el terreno, generalmente en dirección horizontal, expresadas en fracciones decimales de la aceleración de la gravedad g, para las direcciones principales correspondientes a cada caso, y el tiempo t en segundos sobre el eje de las abscisas (figura 1).

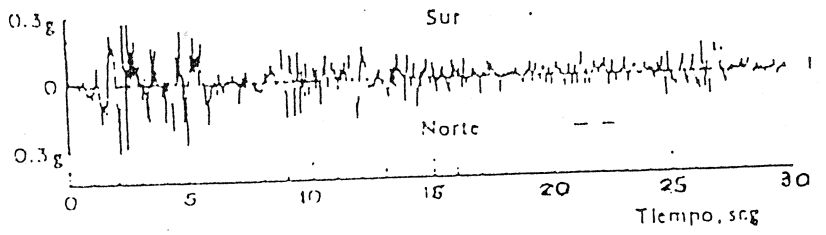


Figura 1

Las determinaciones experimentales y los equipos de registro modernos proporcionan las representaciones de los movimientos del terreno en varias ubicaciones, lo que permite simular los efectos de los grandes terremotos. Para su uso en ensayos físicos de laboratorio o en modelos computacionales, la acción de los sismos se puede "reproducir" en las estructuras por aplicación de registros reales observados, a fin de analizar las respuestas de las mismas frente a las solicitaciones inducidas. Estas reproducciones se emplean en general en la investigación para desarrollar los criterios de análisis de los sistemas resistentes a fuerzas laterales, y ocasionalmente se aplican en forma directa al cálculo de estructuras grandes o complejas.

Sin perjuicio de lo anterior, el análisis y diseño de edificios sismorresistentes se suele efectuar mediante criterios y procedimientos que se han desarrollado a través de una combinación de experiencia práctica, estudios teóricos y algunas relaciones empíricas derivadas de la investigación y del análisis e interpretación de observaciones directas. El conjunto de los conocimientos así adquiridos quedan establecidos en forma de procedimientos de análisis y criterios de diseño recomendados, que se incorporan a los códigos de construcción sismorresistente.

Aunque parezca desagradable decirlo, cada vez que se produce un gran terremoto que origina importantes daños estructurales en los edificios, los ingenieros elevan su nivel de competencia en el análisis y diseño. Las sociedades de ingenieros y los grupos de investigación envían equipos de profesionales a los sitios en que han ocurrido grandes sismos para analizar e informar acerca de los efectos ocasionados en las estructuras, sobre todo las de construcción más reciente, debido a que estos edificios constituyen pruebas a escala natural de la validez de las técnicas de análisis y pautas de diseño vigentes al momento del sismo. Por lo general cada nueva revisión y edición de los códigos de construcciones sismorresistentes refleja algunos de los resultados de este aumento acumulativo del conocimiento, adquirido a partir de los últimos desastres.

2. RESPUESTA ESTRUCTURAL FRENTE A LA ACCION SISMICA.

2.1. Ductilidad y resistencia.

La energía liberada durante un sismo se propaga por la corteza terrestre en forma de vibraciones que provocan desplazamientos del terreno. Los movimientos son erráticos y pueden producirse en cualquier dirección, tanto horizontal como vertical. Debido a esta circunstancia, las construcciones en su conjunto y en sus partes experimentarán aceleraciones y desplazamientos, produciéndose como consecuencia esfuerzos y deformaciones en los distintos elementos, ya sean estos estructurales o no, cuya magnitud dependerá de la energía recibida por el edificio, la que a su vez es función de la naturaleza del suelo en que se apoya y de las características dinámicas de la construcción. Resulta así necesario determinar la energía probable que recibe el edificio ante la ocurrencia de un sismo, a fin de proporcionar, tanto al conjunto como a las partes, propiedades mecánicas adecuadas que le permitan absorberla y disiparla.

Dentro de este contexto, por tratarse de acciones impulsivas, la ductilidad es la propiedad estructural de mayor importancia, más aún que la resistencia. Se dice que un sistema estructural es dúctil si es capaz de experimentar deformaciones considerables bajo carga sensiblemente constante, sin generar daños excesivos o pérdida de resistencia por aplicaciones subsecuentes de la carga. Las curvas (a) y (b) de la figura 2 muestran relaciones típicas entre la carga (P) y la deformación (D) durante la aplicación primaria de carga en sistemas dúctiles y frágiles, respectivamente.

Resulta evidente que la estructura cuyo comportamiento está representado por la curva (a), correspondiente por ejemplo, a la respuesta bajo carga lateral de un pórtico de hormigón armado adecuadamente diseñado y cuyos efectos de esbeltez no sean significativos, tiene una ductilidad mayor, aunque menor resistencia, que la indicada en (b), típica de estructuras de mampostería, con poco refuerzo. El área encerrada por las respectivas curvas mide la energía de rotura en cada caso.

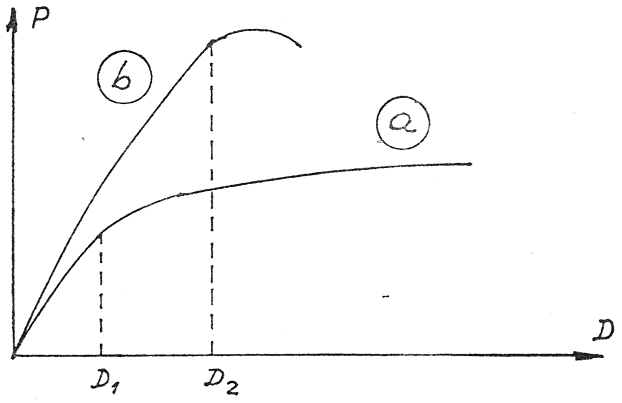


Figura 2

Puede entonces definirse desde un punto de vista riguroso, la **ductilidad** como la propiedad de absorber energía de deformación, y se la puede medir por la energía por unidad de volumen gastada hasta la rotura. Para que la ductilidad sea significativa, la deformación plástica previa a la falla debe ser considerablemente mayor que la deformación elástica hasta el punto de fluencia. Sin embargo, debe señalarse que el desarrollo total del comportamiento anelástico puede importar deformaciones tan grandes que el mecanismo estructural quede alterado por completo.

Por su parte, la **resistencia** es la propiedad de soportar un determinado esfuerzo sin que se produzca la rotura de la pieza; se la mide por el esfuerzo máximo alcanzado durante el proceso de rotura.

Aclarados los aspectos anteriores, resulta fundamental retener el concepto que una estructura cuyo comportamiento queda definido por una curva como la (a), tiene más probabilidad de supervivencia que la otra frente a cargas sísmicas. Sin embargo, cuando se deba considerar el efecto de varios ciclos de carga, no se puede inferir un comportamiento dúctil únicamente de la observación de curvas tales como las de la figura 2, asociadas sólo con la primera aplicación de la carga; el daño producido durante los primeros ciclos de carga puede menoscabar la capacidad del sistema de absorber energía en ciclos posteriores, así como reducir su rigidez.

2.2. Rigidez y deformaciones.

La **rigidez** en las estructuras se refiere a la oposición a la deformación; una carencia de rigidez indica una estructura *flexible*. La **rigidez relativa** se refiere por lo general a la deformación comparativa de dos o más elementos estructurales que comparten una carga.

La rigidez estructural regula el período natural y, por consiguiente, las fuerzas sísmicas; estas últimas son menores para períodos más largos, o sea para rigideces pequeñas, pero entonces las deformaciones y los desplazamientos pueden resultar excesivos.

Además de garantizar factores adecuados de seguridad contra el colapso, los criterios de diseño sismorresistente deben tender a controlar las deformaciones, puesto que éstas son directamente responsables de los daños a los elementos no estructurales, del impacto con estructuras adyacentes, del pánico y de la incomodidad. En todos los casos las deformaciones deben pues ser compatibles con el uso de la construcción y con la supervivencia de los elementos secundarios de la misma.

Resumiendo, la naturaleza de los esfuerzos, la deformación tolerable y el grado de seguridad necesario dependerán de la organización estructural de la construcción en general y de la posición y características de los elementos sismorresistentes en particular.

3. ANALISIS DE ESTRUCTURAS SISMORRESISTENTES.

3.1. Consideraciones básicas.

El análisis estructural para la absorción de las acciones provenientes de los sismos implica dos consideraciones fundamentales.

La primera es que las fuerzas actuantes por tal motivo se hallan aplicadas en **dirección horizontal**, lo cual las hace perpendiculares a las fuerzas de gravedad. Debido a que la mayoría de los sistemas estructurales de edificios son concebidos básicamente en función de su resistencia a la gravedad, el análisis sismorresistente implica la necesidad de incorporar elementos estructurales complementarios, de forma tal que un sistema intrínsecamente resistente a la gravedad, sea asimismo capaz de absorber esfuerzos laterales. Aún cuando esta práctica pueda resultar cuestionable como método básico de cálculo, constituye hasta el presente la forma más común de procedimiento de análisis que se ha desarrollado.

Cabe notar que a pesar de la suposición anterior respecto a la dirección de las fuerzas debidas a sismo, las mismas no son sólo horizontales. Las ondas de choque emitidas desde las fallas geológicas que producen los sismos, ocasionan el movimiento en todas las direcciones, incluso hacia arriba y hacia abajo, de la superficie del suelo, de los edificios que asientan sobre él, y como consecuencia, de los elementos horizontales salientes de los mismos. Debido a la reserva resistente proveniente de los factores de seguridad empleados en el análisis por gravedad, los efectos verticales sobre el esqueleto estructural rara vez son críticos, pero en análisis detallados no se los debiera ignorar por completo.

La segunda consideración especial en relación con las fuerzas sísmicas es su **naturaleza dinámica**, o sea que son cargas que implican movimiento. El análisis de sus efectos requiere por lo tanto considerar las propiedades dinámicas esenciales de la estructura, las que se determinan por el tamaño, peso, rigidez relativa, período fundamental, tipo de vinculación y grado de

elasticidad de sus materiales constitutivos y mediante las diversas influencias de amortiguamiento que se pueden presentar.

Las cargas dinámicas producen en las estructuras una energía que puede presentarse en la forma de impacto, en el caso del viento, mientras que en el de los sismos, el origen de la carga no es una fuerza como tal, sino más bien, una consecuencia del movimiento inducido en la estructura, en cuyo caso la masa del edificio es realmente la fuente de la carga.

Cabe destacar que los efectos de una carga dinámica sobre una estructura están determinados tanto por la respuesta de ésta como por la naturaleza de la carga. Es así como la misma acción dinámica puede producir efectos diferentes sobre estructuras distintas. Dos edificios adyacentes pueden tener respuestas significativamente disímiles ante una misma sacudida sísmica, si sus propiedades dinámicas también lo son.

Una consideración importante en el diseño frente a cargas dinámicas es el significado que pueda tener la respuesta de la estructura en relación con el edificio tomado como un todo. De esta manera, aún cuando la estructura pueda permanecer intacta, esto puede constituir un logro menor si existe daño significativo en la construcción integralmente considerada. Un edificio alto puede oscilar y ladearse durante un sismo sin que ocurra ningún daño de importancia en la estructura, pero si los ocupantes son zarandeados, los cielorrasos se caen, las ventanas se destrozan, la plomería se rompe y los ascensores se desalinean, difícilmente se podrá decir que el edificio estaba adecuadamente diseñado.

3.2. Análisis basado en efectos estáticos equivalentes.

El empleo de efectos estáticos equivalentes para el análisis de estructuras sujetas a acciones horizontales, permite una formulación y desarrollo más simple, al eliminar los complicados procedimientos del análisis dinámico. Para que esto sea posible se deben transformar a términos estáticos los efectos de las cargas y la respuesta de la estructura. Así, para la *carga de viento*, la transformación básica consiste en la conversión de la energía cinética del viento en una presión estática equivalente, la que después se considera de manera similar a una carga distribuida como las gravitatorias, pero aplicada horizontalmente. Si bien se efectúan consideraciones adicionales para varios efectos aerodinámicos, como la influencia de la superficie del terreno, la forma del edificio y la succión, las mismas no alteran la naturaleza básica estática del análisis.

Para los *efectos sísmicos* la transformación fundamental consiste en establecer una hipotética fuerza estática horizontal que se aplica a las estructuras para simular los efectos de los movimientos laterales durante las sacudidas del terreno. El valor de esta fuerza se calcula como un cierto porcentaje del peso muerto del edificio, el que constituye la fuente real de la carga de energía cinética una vez que aquél está en movimiento, en forma similar a como el peso de un péndulo y el resorte conservan su movimiento después del desplazamiento inicial y la liberación. El

porcentaje específico a emplear se halla determinado por varios factores, incluyendo algunas de las características de respuesta dinámica de la estructura.

A pesar de la cantidad de factores que intervienen y de las transformaciones, existen algunas limitaciones respecto a la idoneidad de un análisis estático equivalente para tener en cuenta el comportamiento dinámico. En efecto, mediante el mismo no se pueden considerar muchos efectos de amortiguamiento y resonancia; la verdadera capacidad de almacenar energía de la estructura no puede medirse con precisión en función de los esfuerzos y las deformaciones. En virtud de ello existen casos en los cuales es deseable un verdadero análisis dinámico, ya sea realizado matemáticamente o mediante ensayos físicos. Sin embargo, estas situaciones son bastante raras. La gran mayoría de los diseños de edificios presentan situaciones similares a muchas otras en que la eficacia de los resultados obtenidos ha sido corroborada en la práctica con el análisis del comportamiento de las estructuras bajo la acción de sismos reales.

El desarrollo del análisis fundado en la consideración de acciones estáticas equivalentes será tratado en profundidad en el apartado 5.

3.3. Elementos de los sistemas resistentes a cargas laterales.

La mayoría de los sistemas estructurales lateralmente resistentes consisten en alguna combinación de elementos verticales con elementos horizontales. Entre los primeros, los más usuales son muros, tabiques, pórticos y combinaciones de los mismos. Los elementos horizontales son por lo general las estructuras de cubierta y entrepisos. Cuando estas últimas conforman planos con la suficiente resistencia y rigidez, se los denomina *diafragmas horizontales*, y su función es la de colectar las fuerzas horizontales en un nivel determinado del edificio, distribuyéndolas luego a los elementos verticales del sistema lateralmente resistente. Para las fuerzas de viento, la carga lateral del diafragma horizontal es recibida por lo general en su contorno, a través de su unión con las paredes exteriores. Para las solicitaciones sísmicas, por su parte, la acción es consecuencia del peso del diafragma horizontal en sí y el de las demás partes del edificio vinculadas solidariamente al mismo.

3.3.1. Comportamiento de los diafragmas horizontales.

El comportamiento particular de los diafragmas horizontales y la manera en que las cargas se distribuyen a los elementos verticales depende fundamentalmente de los siguientes aspectos:

a) *Rigidez relativa del diafragma horizontal.*

Si el diafragma horizontal es relativamente flexible, se deformará en un grado tal que su continuidad será despreciable, no dando lugar a una transmisión y distribución de la carga a los relativamente rígidos elementos verticales, los que deberán resistir por sí, en forma individual, la acción horizontal, salvo

la transmisión que puedan efectuar los miembros estructurales periféricos. Por el contrario, si el diafragma es suficientemente rígido, la acción horizontal será distribuida entre los elementos verticales sismorresistentes distribuidos en la planta del nivel correspondiente.

b) *Efectos de torsión.*

Si el punto de aplicación de la acción sísmica en el diafragma horizontal (coincidente con el centro de masas de los pesos involucrados), no coincide con el centroide de las rigideces de los elementos verticales, se producirá una acción torsionante en la estructura, denominada *efecto de rotación* o *efecto de torsión*, que se agrega al efecto de la fuerza directa. Para que este efecto sea significativo es necesario que el diafragma horizontal sea relativamente rígido.

c) *Rigidez relativa y ubicación de los elementos verticales.*

La fuerza que recibe cada elemento vertical es función de:

- su rigidez relativa (comparada con la de los restantes elementos verticales contenidos en la planta), que define la acción directa, y

- de su ubicación en la planta del nivel considerado, la que determina, conjuntamente con su rigidez relativa, la componente correspondiente al efecto torsional.

3.3.2. Comportamiento de los elementos verticales.

Por lo general los elementos sismorresistentes verticales son algunos de los siguientes, de acuerdo a las definiciones del CCSRMza, o combinación de ellos:

* **Muro:** Sistema resistente vertical, generalmente plano, que soporta principalmente acciones en su plano (verticales y horizontales).

* **Tabique:** Muro o placa de hormigón armado, vertical o casi vertical, cuya misión principal es soportar acciones en su plano (horizontales y verticales). Las deformaciones por corte y por flexión son comparables.

* **Pórtico:** Sistema resistente formado por múltiples elementos cuya deformación predominante se debe a la flexión.

Los muros y tabiques suelen ser paredes (periféricas o interiores) del edificio. Como tales, adicionalmente a su función como elemento sismorresistente, deben cumplir con los pertinentes requisitos arquitectónicos, pudiendo también verse obligados a funcionar como elementos portantes para recibir cargas de gravedad.

A los anteriores deben agregarse las **columnas aisladas**, en las que usualmente las rigideces en ambas direcciones principales son comparables.

Algunos de los requisitos estructurales que por lo general deben cumplir los elementos verticales resistentes a cargas laterales son los siguientes:

a) Resistencia al corte directo, necesaria como consecuencia de la transferencia de una fuerza lateral actuante en la dirección del plano del elemento desde algún nivel superior al mismo a otro más bajo o directamente a su parte inferior. Esto conduce a la típica situación del esfuerzo (y la consiguiente tensión) de corte y de las tensiones normales asociadas en direcciones a 45° (figura 3a).

b) Resistencia al momento como ménsula, puesto que los muros o tabiques trabajan por lo general como voladizos verticales, desarrollando compresión en un borde y tracción en el opuesto, trasladando el momento de vuelco a su base (figura 3b).

c) Resistencia al deslizamiemto horizontal. La transmisión directa de la carga lateral a la base del elemento vertical produce la tendencia de éste a deslizarse horizontalmente sobre su plano de apoyo (figura 3c).

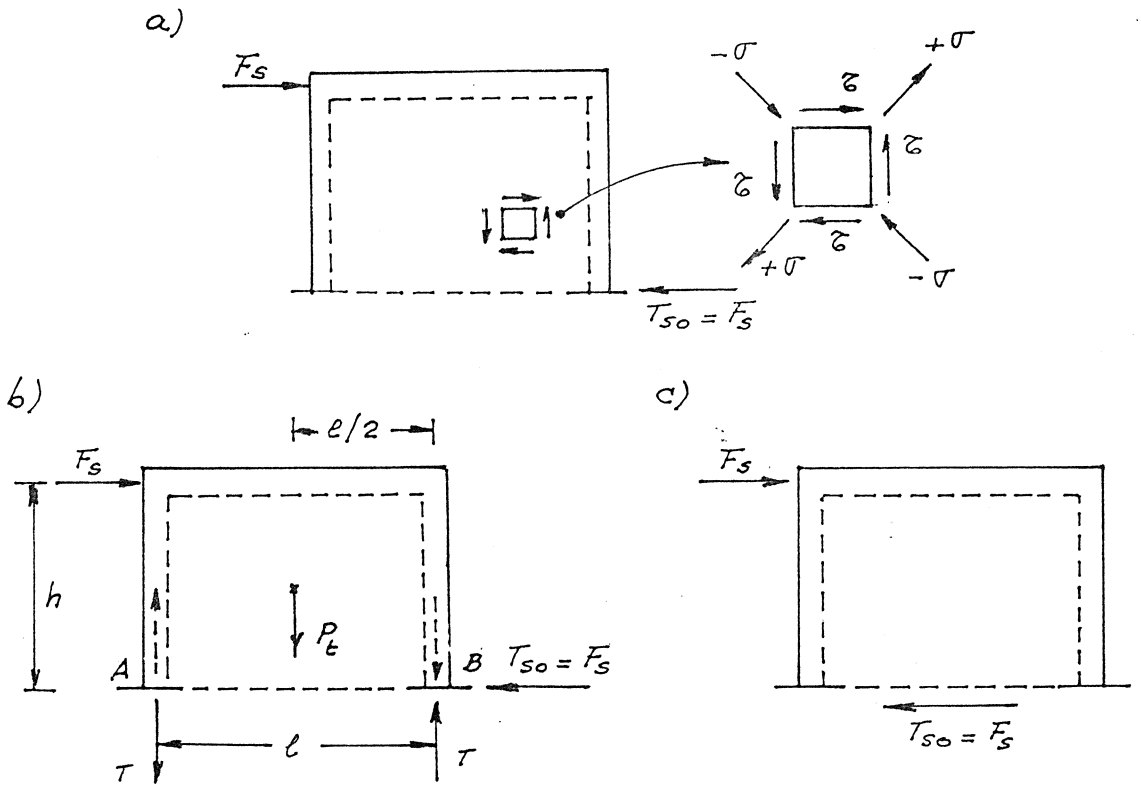


Figura 3

Casi siempre la solicitación debida el esfuerzo de corte se considera en forma independiente de las demás fuerzas estructurales actuantes sobre el elemento. Para la verificación de la suficiencia de las dimensiones asignadas a los elementos sismorresistentes se calcula el máximo esfuerzo de corte (rotacional más traslacional producto de la combinación de las situaciones más desfavorables) y se compara la tensión producida en el elemento (o su capacidad

resistente), con la que es capaz de soportar el material constitutivo del mismo (mampostería u hormigón), haciendo intervenir en el cálculo el coeficiente de seguridad pertinente.

Aún cuando existe la posibilidad del pandeo como consecuencia del efecto de la compresión diagonal, por lo general esto no es crítico, debido a que existen limitaciones, tanto de orden reglamentario como constructivo que restringen la esbeltez de los elementos, de modo que el caso de muros o tabiques sismorresistentes de escaso espesor no son frecuentes, excepto en la construcción prefabricada.

Por lo general se recomienda que el efecto del momento en los muros o tabiques sismorresistentes sea resistido por los dos bordes verticales del elemento, donde se suponen concentrados los esfuerzos axiles de tracción y compresión. En el caso de elementos de hormigón o mampostería esto conduce a considerar los bordes verticales de los mismos como columnas, con la consiguiente colocación de las armaduras que correspondan a tal configuración, y en su caso, materializándolas como tales mediante el engrosamiento de la pared en sus extremos.

El efecto de vuelco que tienden a producir las cargas verticales deberá ser resistido por el elemento, con un coeficiente de seguridad adecuado (S), efectuándose la determinación del esfuerzo de tracción que se genera en el borde vertical correspondiente, despejando T de la expresión (figura 3a)

$$S.(F_s.h) = P_t.(l/2) + T.l \qquad (1)$$

que surge de tomar momentos respecto al punto B.

La acción T resultante, que tiende a levantar el elemento en el extremo A, deberá se absorbida por el anclaje de los elementos estructurales del borde del muro o tabique, y para el nivel inferior, mediante el peso de la cimentación o la inclusión (en caso de no ser suficiente aquél), de dispositivos de fundación capaces de absorber dicha solicitación.

Por lo general, la resistencia al deslizamiento horizontal en la base de fundación del elemento, es proporcionada, por lo menos parcialmente, por la resistencia friccional causada por las cargas muertas, la que, para elementos de mampostería y de hormigón suele ser más que suficiente.

4. RIGIDEZ A DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES.

4.1. Construcciones de un nivel.

4.1.1. Concepto y definiciones.

En todo sistema hiperestático, cada elemento estructural absorbe una fracción del esfuerzo total actuante, fracción que se halla en función de su rigidez. Tal como ya se hizo referencia en el apartado 2.2., conceptualmente expresada, la rigidez es la

capacidad de resistir (o de oponerse) a la deformación. Resulta importante observar que cada elemento individual, cada plano estructural, y aún la estructura completa, poseerán una determinada rigidez según cual sea la deformación que se pretende inducir, y que además, estas rigideces excepcionalmente serán iguales para deformaciones distintas.

Cuantificando y concretando para el caso bajo estudio el concepto precedente, se define la rigidez de un elemento estructural de un nivel al desplazamiento horizontal, como la fuerza horizontal que aplicada a nivel del extremo superior del elemento, le provoca un desplazamiento unitario en su propia dirección. Este concepto resulta como una consecuencia directa de la relación básica de la rigidez (A = R.D), en la que, si se hace el valor de D = 1, resulta R = A. También, recordando la relación inversa existente entre los conceptos de rigidez y flexibilidad, puede definirse la rigidez a desplazamientos horizontales como la inversa del desplazamiento producido por una acción unitaria, en las condiciones indicadas.

Para el caso de la acción sísmica a distribuir, la deformación enunciada será el desplazamiento relativo entre el plano (o diafragma) de distribución y el plano de fundación, es decir, en general, un movimiento horizontal entre ambos extremos de los elementos verticales de conexión.

Por otra parte, según cual sea la dirección del desplazamiento, será distinta la rigidez correspondiente de los elementos individualmente considerados o de la estructura completa. Se podrán establecer así dos direcciones según las cuales se alcanzan los valores máximo y mínimo de sus rigideces, las que resultan perpendiculares entre sí; por analogía con el planteo matemático correspondiente a los momentos de inercia, estas direcciones pueden designarse como direcciones principales. Para muchos elementos el valor mínimo es despreciable frente al máximo; en consecuencia puede considerárselos como "planos resistentes". Desde el punto de vista del análisis, es conveniente sustituir cada elemento no plano por dos, según sus direcciones principales y con los respectivos valores de rigidez máxima y mínima.

Se deducirán a continuación las expresiones correspondientes a la rigidez antes definida, para diversos tipos de elementos aislados o componentes estructurales, para edificios de un nivel.

4.1.2. Caso de elementos aislados.

Sea la estructura de la figura 4a), asimilable a los efectos de la determinación del valor del desplazamiento de su extremo superior D_x, en la dirección del eje x de la sección transversal, a una viga vertical empotrada en su base con una carga concentrada en su extremo superior, en la que, aplicando el TTV con consideración de la influencia del esfuerzo de corte (figura 4b), resulta

$$D_x = \frac{P_x.h^3}{3\,E.J_y} + \psi.\frac{P_x.h}{G.F} = \frac{P_x.h^3}{3\,E.J_y}.\left(1 + \psi.\frac{3\,E.J_y}{h^2.G.F}\right) \qquad (2)$$

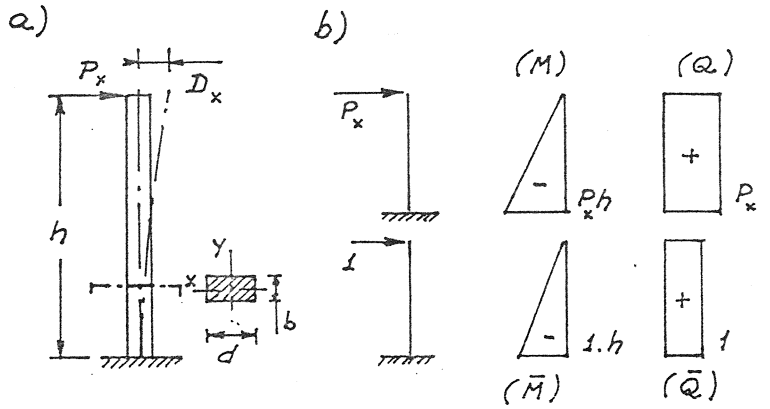


Figura 4

De esta expresión surge que la influencia del segundo sumando del paréntesis, o sea la del esfuerzo de corte, será más significativa mientras mayor sea el valor de J_y, es decir que mayor sea la dimensión d de la sección transversal del elemento (figura 4a). Esta situación se podrá presentar en secciones rectangulares de apreciable longitud en la dirección del esfuerzo aplicado, compatibles generalmente con estructuras de hormigón armado. En consecuencia la (2) puede particularizarse para este tipo de material y secciones transversales de forma rectangular.

Bajo tales supuestos, y manteniendo los mismos criterios ya aplicados en el apartado 2.2.3.4. (Caso 9) del Capítulo IV, será

$$G_{H^\circ} = 0{,}4\ E_{H^\circ} \quad ; \quad F = b.d \quad ; \quad J_y = b.d^3/12 \quad ; \quad \Psi = 1{,}2$$

resultando al reemplazar estos valores en la (2)

$$D_x = \frac{P_x.h^3}{3\ E.J_y}.\left(1 + 1{,}2\ \frac{3\ E.b.d^3}{0{,}4\ E \times 12\ h^2.b.d}\right) =$$

$$= \frac{P_x.h^3}{3\ E.J_y}.\left[\ 1 + \frac{3}{4}.\left(\frac{d}{h}\right)^2\ \right]$$

y llamando

$$\lambda = \frac{3}{4}.\left(\frac{d}{h}\right)^2 \qquad (3)$$

se tiene

$$D_x = \frac{P_x.h^3}{3\ E.J_y}.(1 + \lambda\ ) \qquad (4)$$

Si $D_x = 1$, resulta por definición $P_x = R_x$ (figura 5a), con lo que se obtendrá

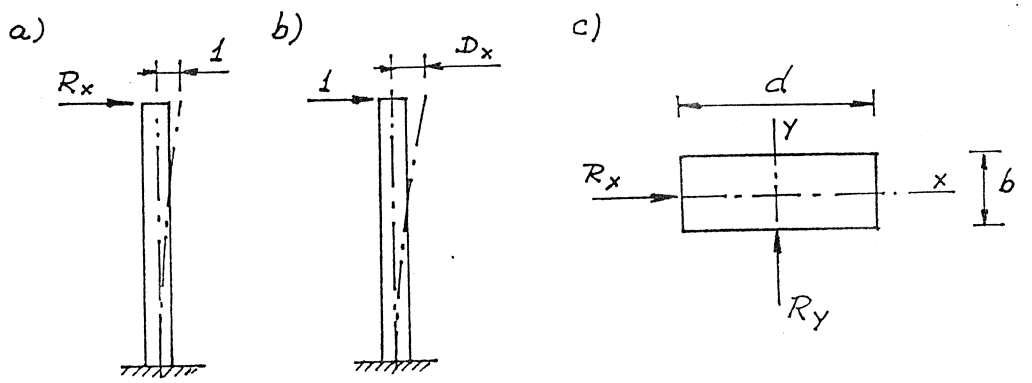


Figura 5

$$1 = \frac{R_x.h^3}{3\,E.J_y}.(1+\lambda) \quad ; \quad \text{o bien:} \quad R_x = \frac{3\,E.J_y}{h^3.(1+\lambda)} \qquad (5)$$

Cabe observar que podría también haberse partido de la segunda definición de la rigidez a desplazamientos horizontales (o sea la inversa del desplazamiento producido por una acción unitaria), en cuyo caso (figura 5b) la (4) se reduce a

$$D_x = \frac{h^3}{3\,E.J_y}.(1+\lambda)$$

cuya inversa se corresponde con la expresión de la rigidez obtenida según la (5).

Como expresiones de cálculo en aplicaciones prácticas, pueden también ser útiles las siguientes:

$$R_x = \frac{3\,E.(b.d^3/12)}{h^3.(1+\lambda)} = \frac{E.b.(d/h)^3}{4.(1+\lambda)} \qquad (6)$$

La expresión obtenida es válida para cualquier elemento estructural que puede suponerse aislado en su extremo superior y empotrado en su base, independientemente de sus dimensiones relativas, es decir, que es aplicable tanto al caso de columnas como de tabiques.

Si d es sensiblemente menor que h (caso de columnas), (o sea la influencia del esfuerzo de corte expresada en forma relativa a la de la flexión), λ es despreciable, por lo que puede aplicarse directamente

$$R_x = \frac{3\,E.J_y}{h^3}$$

En cambio, si d y h tienen magnitudes semejantes (caso de tabiques o de columnas cortas), la consideración de λ incide en

forma más o menos significativa en el valor de la rigidez, debiéndose aplicar en consecuencia la expresión completa.

Por otra parte, si la rigidez se considera en sentido transversal, o sea según el eje y de la sección (figura 5c), resultará $J_x = b^3.d/12$, y en consecuencia

$$R_y = \frac{3\,E.J_x}{h^3.(1+\lambda)} = \frac{3\,E.(b^3.d/12)}{h^3.(1+\lambda)} = \frac{E.d.(b/h)^3}{4.(1+\lambda)} \qquad (7)$$

que puede resultar muy inferior respecto a R_x, si d>>b, dando lugar al concepto de planos resistentes, definidos en 4.1.1.

4.1.2.1. Discusión de la incidencia del esfuerzo de corte.

De las expresiones desarrolladas en el apartado anterior surge que la incidencia del esfuerzo de corte en el valor del desplazamiento D, es función de λ, o sea de la relación d/h (o b/h), entre la dimensión d para la rigidez máxima (o b para la mínima) de la sección transversal del elemento estructural y la altura h del mismo.

Para evaluar la magnitud de dicha incidencia, para valores crecientes de la relación d/h, se indican en el cuadro adjunto, los parámetros característicos que permiten definir la misma. En la columna (2) se consignan los valores de λ calculados por medio de la expresión (3), para cada valor de d/h que se indica en la columna (1).

d/h	λ	Iq(%)	4 Rx/E.b		Error(%)
			(M)	(M + Q)	
1	2	3	4	5	6
0,10	0,0075	0,74%	0,0010	0,0010	0,75%
0,15	0,0169	1,66%	0,0034	0,0033	1,7 %
0,20	0,0300	2,91%	0,0080	0,0078	3,0 %
0,25	0,0469	4,48%	0,0156	0,0149	4,7 %
0,30	0,0675	6,32%	0,0270	0,0253	6,8 %
0,40	0,1200	10,71%	0,0640	0,0571	12,0 %
0,50	0,1875	15,79%	0,1250	0,1053	18,8 %
0,60	0,270	21,26%	0,216	0,1701	27,0 %
0,80	0,480	32,43%	0,512	0,3459	48,0 %
1,00	0,750	42,86%	1,000	0,5714	75,0 %
1,25	1,172	53,95%	1,953	0,8992	117,2 %
1,50	1,688	62,78%	3,375	1,2556	168,8 %
2,00	3,000	75,00%	8,000	2,0000	300,0 %
3,00	6,750	87,10%	27,000	3,4839	675,0 %

Del análisis de las expresiones (2) y su equivalente para el caso de estructuras de hormigón armado de sección rectangular, la (4), se desprende que λ indica la influencia del esfuerzo de corte

en la magnitud del desplazamiento D del extremo superior de la barra, tomando como base de comparación el valor 1 para el desplazamiento debido a la acción del momento flector. La incidencia porcentual del esfuerzo de corte en el valor total de los desplazamientos lineales D se señala en la columna (3), calculada en consecuencia mediante la expresión

$$I_Q\ (\%) = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.100$$

Para poner de manifiesto la influencia de la consideración de Q en el cálculo de las rigideces, que obviamente es también función de d/h, se han calculado los valores de la relación

$$\frac{4\ R_x}{E.b} = \frac{(d/h)^3}{(1 + \lambda)} = \frac{(d/h)^3}{[1 + 0{,}75\ (d/h)^2]}$$

que se obtiene directamente de la (6). En la columna (4) figuran los valores de dicha relación prescindiendo del término λ (o sea de todo el denominador), es decir, calculando la rigidez relativa frente a la solicitación de la flexión exclusivamente (M), mientras que en la columna (5) se ha calculado la misma relación, tomando en consideración ambos efectos (M + Q).

Finalmente, la columna (6) expresa el error porcentual que se cometería en el cálculo de la rigidez relativa, al prescindir de la consideración del efecto de Q, determinado mediante

$$\text{Error}\ (\%) = \frac{(M) - (M + Q)}{(M + Q)}.100$$

Se observa que tal error es también directamente igual al valor de λ multiplicado por 100, lo que se desprende fácilmente si se desarrolla la expresión anterior

$$\text{Error}\ (\%) = \frac{(d/h)^2 - \dfrac{(d/h)^3}{(1 + \lambda)}}{\dfrac{(d/h)^3}{(1 + \lambda)}}.100 = \frac{\dfrac{1 + \lambda - 1}{1 + \lambda}}{\dfrac{1}{1 + \lambda}}.100 = \lambda.100$$

Del análisis de los valores que muestra el cuadro de referencia surge como conclusión:

a) En general, para los grados de exactitud usuales en los cálculos de la ingeniería de estructuras, la influencia del esfuerzo de corte no es significativa cuando d/h < 0,20 (o menor que 0,25 para cálculos preliminares).

b) Si se prescinde del esfuerzo de corte, se obtienen desplazamientos menores a los reales y rigideces mayores a las verdaderas.

c) Graficando las columnas (1) versus (5) de la tabla, resulta que a partir de valores de d/h = 1 (λ = 0,75), la función R = f(d/h) presenta una ley de variación lineal (figura 6).

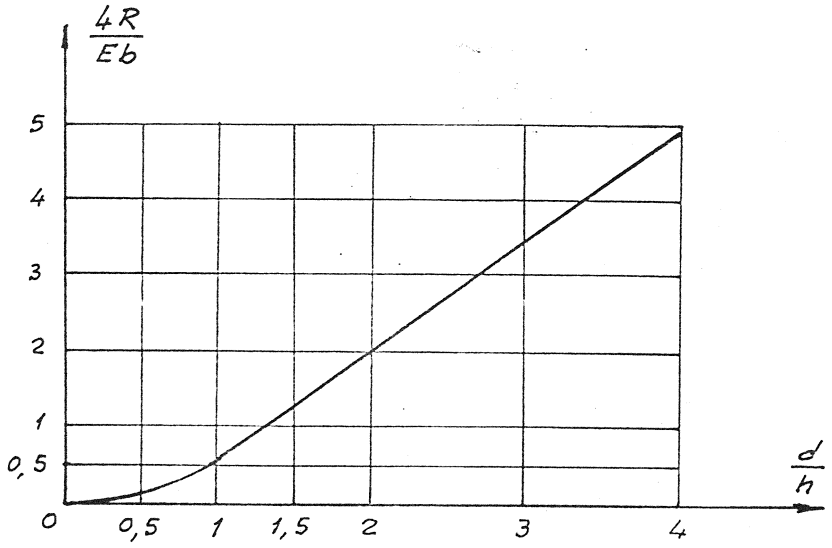


Figura 6

4.1.3. Pórtico isostático simétrico.

En el caso de la determinación de la rigidez de pórticos, puede despreciarse la deformación por corte cuando las dimensiones transversales de los diversos elementos no son comparables con sus respectivas longitudes.

Sea el pórtico isostático simétrico de la figura 7a), del que se debe calcular el desplazamiento horizontal del dintel (igual al corrimiento en dicha dirección de las secciones superiores extremas de cada columna), producido por la fuerza P.

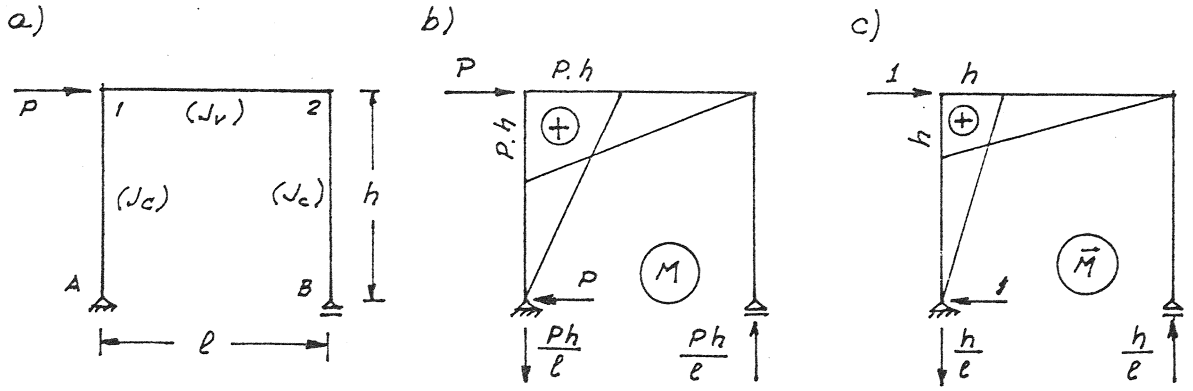


Figura 7

Aplicando el TTV para efectuar la resolución, el sistema auxiliar lo constituye una acción unitaria en la dirección del desplazamiento que se calcula. En las figuras 7b) y c) se indican los correspondientes diagramas de momentos a integrar.

$$D = \frac{1}{3}.\frac{P.h.h.h}{E.J_c} + \frac{1}{3}.\frac{P.h.h.l}{E.J_v} = \frac{P.h^3}{3\ E.J_c}.\left(1 + \frac{J_c}{J_v}.\frac{l}{h}\right)$$

Introduciendo los coeficientes de rigidez y su relación

$$\frac{J_c}{h} = k_c \quad ; \quad \frac{J_v}{l} = k_v \quad ; \quad \frac{k_v}{k_c} = \beta$$

resulta

$$D = \frac{P.h^3}{3\ E.J_c}.\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{P.h^3}{3\ E.J_c}.\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)$$

Si D = 1, por definición es P = R

$$1 = \frac{R.h^3}{3\ E.J_c}.\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) \quad ; \quad R = \frac{3\ E.J_c}{h^3}.\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) \qquad (8)$$

O bien

$$R = \frac{12\ E.J_c}{h^3}.\left[\frac{\beta}{4.(1+\beta)}\right] \qquad (9)$$

4.1.4. Pórtico biarticulado simétrico.

Si bien (figura 8a) se trata de una estructura estáticamente indeterminada, por simetría resulta

$$R_A^x = R_B^x = -\frac{P}{2} \quad ; \quad R_{A1}^x = R_{B1}^x = -\frac{1}{2}$$

para los sistemas deformante y no deformante respectivamente, cuyos diagramas de momentos resultan en consecuencia los que se indican en las figuras 8b) y c).

Integrando los diagramas se obtiene

$$D = 2.\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{P.h}{2}.\frac{h}{E.J_c} + 2.\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{P.h}{2}.\frac{l}{2}.\frac{1}{E.J_v}$$

$$D = \frac{P.h^3}{6\ E.J_c} + \frac{P.h^2.l}{2 \times 6\ E.J_v} = \frac{P.h^3}{6\ E.J_c}.\left(1 + \frac{J_c}{2\ J_v}.\frac{l}{h}\right)$$

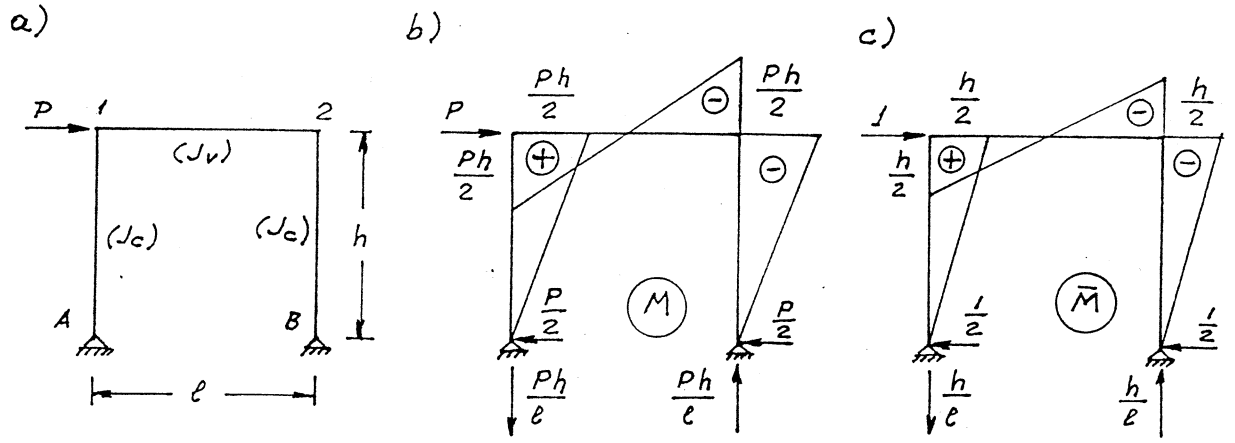


Figura 8

$$D = \frac{P.h^3}{6\,E.J_c}.\left(1 + \frac{k_c}{2\,k_v}\right) = \frac{P.h^3}{6\,E.J_c}.\left(1 + \frac{1}{2\,\beta}\right)$$

$$D = \frac{P.h^3}{6\,E.J_c}.\left(\frac{2\,\beta + 1}{2\,\beta}\right) = \frac{P.h^3}{12\,E.J_c}.\left(\frac{1 + 2\,\beta}{\beta}\right)$$

Si D = 1, resulta P = R, luego

$$1 = \frac{R.h^3}{12\,E.J_c}.\left(\frac{1 + 2\,\beta}{\beta}\right) \quad ; \quad R = \frac{12\,E.J_c}{h^3}.\left(\frac{\beta}{1 + 2\,\beta}\right) \qquad (10)$$

4.1.5. Pórtico biempotrado simétrico.

Sea el pórtico de la figura 9a), en el que se debe calcular el desplazamiento horizontal del dintel producidc por una carga P actuando a nivel del mismo. De los métodos estudiados en los capítulos precedentes, se aplicará para la resolución el de los desplazamientos, donde este caso se planteó en el apartado 7.2.1. del Capítulo IV.

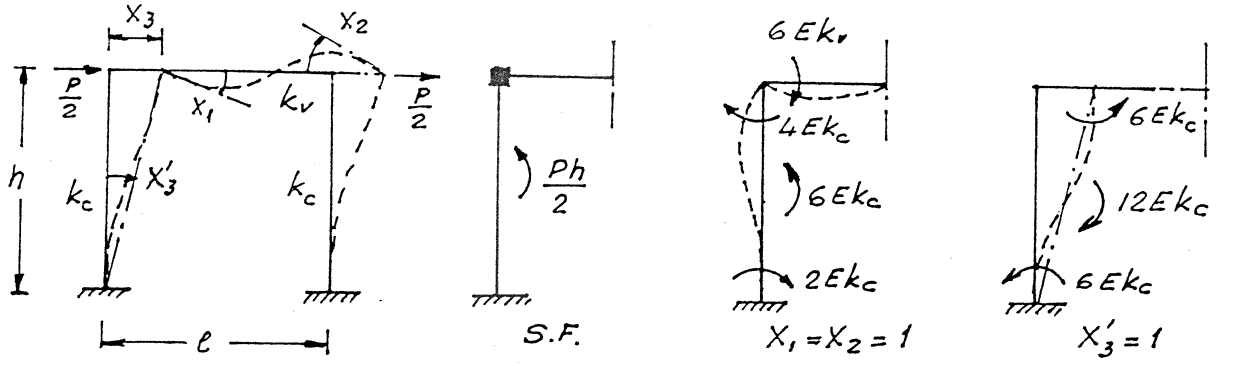


Figura 9

Por la simetría estructural y la antisimetría de cargas $X_1 = X_2$. Eligiendo como tercera incógnita X_3' se tendrá

$$[A_{xo}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -Ph/2 \end{bmatrix} \; ; \; [a_{xxu}] = E.\begin{bmatrix} 4k_c+6k_v & -6k_c \\ -6k_c & 12k_c \end{bmatrix} = 2Ek_c.\begin{bmatrix} (2+3\beta) & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[a_{xxu}]^{-1} = \frac{1}{2Ek_c.\Delta}.\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & (2+3\beta) \end{bmatrix} = \frac{1}{6Ek_c.(1+6\beta)}.\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & (2+3\beta) \end{bmatrix}$$

al ser: $\Delta = 12 + 18\,\beta - 9 = 3.(1 + 6\beta)$

$$[X] = -[a_{xxu}]^{-1}.[A_{xo}] = -\frac{1}{6Ek_c.(1+6\beta)}.\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & (2+3\beta) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ -Ph/2 \end{bmatrix}$$

Resultando necesario calcular sólo el valor de X_3'

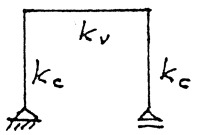
$$X_3' = \frac{P.h.(2+3\beta)}{12\,E.k_c.(1+6\beta)} = \frac{P.h^2.(2+3\beta)}{12\,E.J_c.(1+6\beta)} = \frac{X_3}{h} = \frac{D}{h}$$

Haciendo $X_3 = D = 1$, será $P = R$. Luego

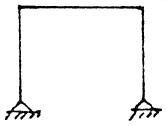
$$R = \frac{12\,E.J_c}{h^3}.\frac{(1+6\beta)}{(2+3\beta)} \qquad (11)$$

4.1.6. Resumen y cuadro comparativo.

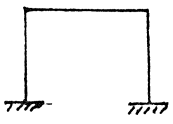
Con las expresiones obtenidas en los apartados anteriores (9), (10) y (11), puede efectuarse el siguiente resumen (figura 10), donde asimismo se modifica la forma de expresión deducida, a fin de levantar indeterminaciones en la consideración de β.

I 

$$R = \frac{12\,E.J_c}{h^3}\left[\frac{\beta}{4(1+\beta)}\right] = \frac{12\,E.J_c}{h^3}\left[\frac{1}{4(\frac{1}{\beta}+1)}\right]$$

II 

$$R = \frac{12\,E.J_c}{h^3}\left[\frac{\beta}{1+2\beta}\right] = \frac{12\,E.J_c}{h^3}\left[\frac{1}{\frac{1}{\beta}+2}\right]$$

III 

$$R = \frac{12\,E.J_c}{h^3}\left[\frac{1+6\beta}{2+3\beta}\right] = \frac{12\,E.J_c}{h^3}\left[\frac{\frac{1}{\beta}+6}{\frac{2}{\beta}+3}\right]$$

Figura 10

Con estas expresiones puede confeccionarse el cuadro siguiente, para distintos valores de β, donde se indica el valor del factor F = (β) que afecta a la relación común 12 E.J_c/h^3.

β	I	II	III
0	0	0	0,500
0,5	0,083	0,250	1,143
1,0	0,125	0,333	1,400
2,0	0,167	0,400	1,625
3,0	0,188	0,429	1,727
5,0	0,208	0,455	1,824
∞	0,250	0,500	2,000

Del análisis del cuadro precedente y su graficación (figura 11) surge:

a) Para valores iguales de k_v y de k_c, la rigidez aumenta apreciablemente a medida que aumenta el grado de hiperestaticidad de la estructura.

b) Para cada tipo de vinculación, la rigidez se incrementa a medida que aumenta el valor de k_v frente al de k_c, hasta alcanzar un valor límite al que se tiende asintóticamente.

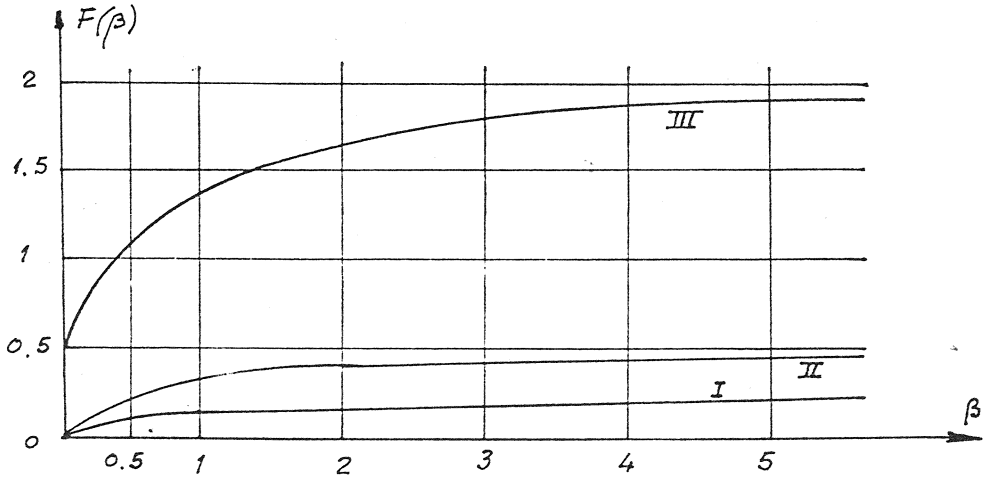


Figura 11

4.1.7. Caso general. Pórticos asimétricos.

En el caso de pórticos de columnas de distinta rigidez, incluyendo el caso de los pórticos con tabique, como así también el de los pórticos múltiples (figura 12), la determinación de su rigidez al desplazamiento horizontal se efectúa en cada caso particular aplicando los conceptos básicos que la definen.

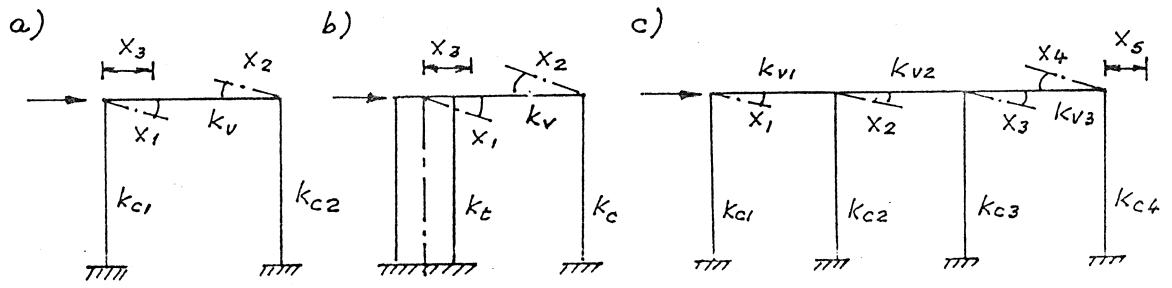


Figura 12

En consecuencia podrá optarse por alguno de los siguientes procedimientos:

a) Aplicar a nivel de la viga una acción P; hallar el valor de la incógnita de desplazamiento horizontal (X3 en el caso de las figuras 12a) y b) o X5 en el caso de la figura 12c), ya sea a través del método de los desplazamientos o del método de la rigidez; hacer tal desplazamiento igual a uno y despejar el valor de P correspondiente.

b) Aplicar a nivel de la viga una acción unitaria, hallar al igual que en el caso anterior la incógnita de desplazamiento horizontal e invertir directamente su valor.

4.1.8. Pórticos con mampostería: Método de la diagonal equivalente.

En el caso de un pórtico que por razones funcionales del diseño arquitectónico del edificio debe estar completamente relleno con mampostería (figura 13a), se puede analizar su comportamiento a acciones horizontales asimilándolo al de un muro equivalente cuyas características se determinan para la sección resultante de homogeneizar los materiales en base a la relación de los módulos de elasticidad.

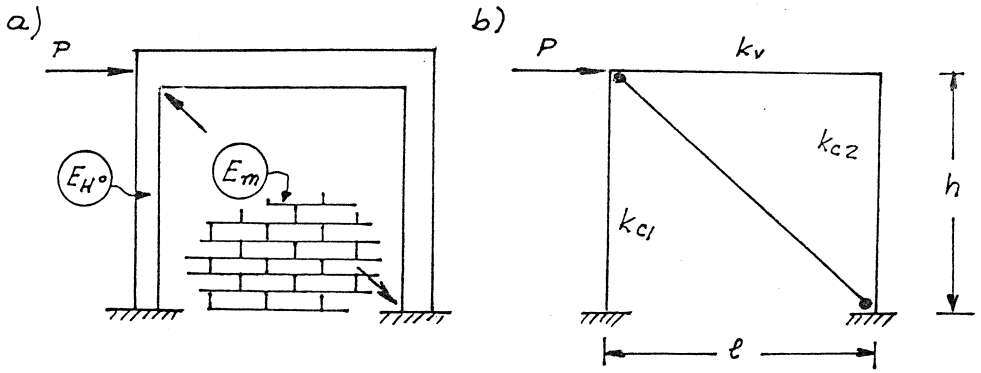


Figura 13

En el denominado *método de la diagonal equivalente*, los paños de mampostería pueden ser representados por una barra ubicada según la diagonal comprimida (figura 13b), articulada en sus extremos interiormente a los nudos, o sea no en el nudo mismo, que sigue comportándose como rígido. Cabe observar que la dirección de la diagonal comprimida en relación con el sentido de la fuerza horizontal aplicada al pórtico surge de la consideración de la figura 3a).

La sección de esta barra equivalente a la acción del muro, de acuerdo al CCSRMza, está dada por

$$F_{eq} = 0{,}4\ e\ \frac{E_m}{E_{H^\circ}} \cdot \frac{(l^2 + h^2)^{1,5}}{l.h}$$

donde: e, es el espesor del panel de mampostería; E_m, el módulo de elasticidad de la mampostería; E_{H°, el del material estructural (hormigón en este caso) y l y h las dimensiones que se indican en la figura 13b).

Para determinar en este caso la rigidez a desplazamientos horizontales se aplican los principios generales expuestos. Recurriendo por ejemplo al método de los desplazamientos, para formular el sistema básico de ecuaciones que permita calcular X_3 se tendrá (figura 14)

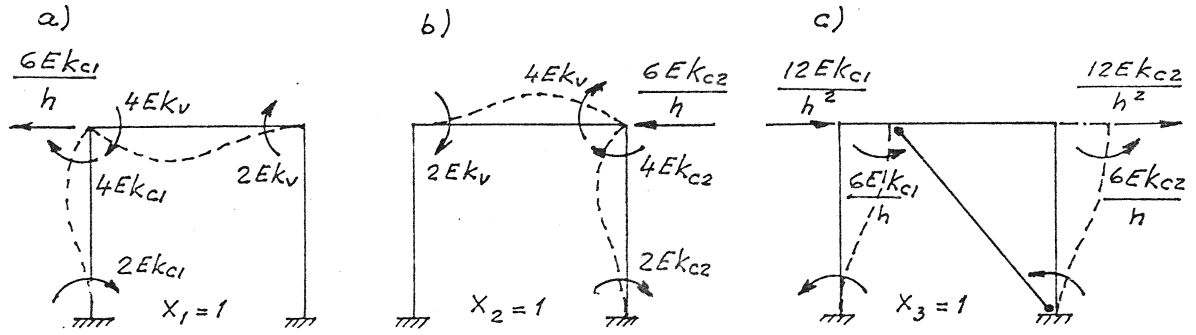


Figura 14

$a_{11} = 4\ E.k_{c1} + 4\ E.k_v$; $A_{10} = 0$
$a_{12} = a_{21} = 2\ E.k_v$; $A_{20} = 0$
$a_{13} = a_{31} = -\ 6\ E.k_{c1}/h$; $A_{30} = -\ P$ (o bien $= -\ 1$)
$a_{22} = 4\ E.k_v + 4\ E.k_{c2}$
$a_{23} = a_{32} = -\ 6\ E.k_{c2}/h$

Para determinar el valor de a_{33}, debe agregarse a las acciones conocidas, el efecto que surge de la presencia de la diagonal equivalente, por lo que al estado indicado en la figura 14c), corresponde añadir el que muestra la figura 15. Al producir el desplazamiento $X_3 = 1$ (según la dirección horizontal), la barra se acorta en una magnitud

$$\delta_d = 1.\cos\alpha$$

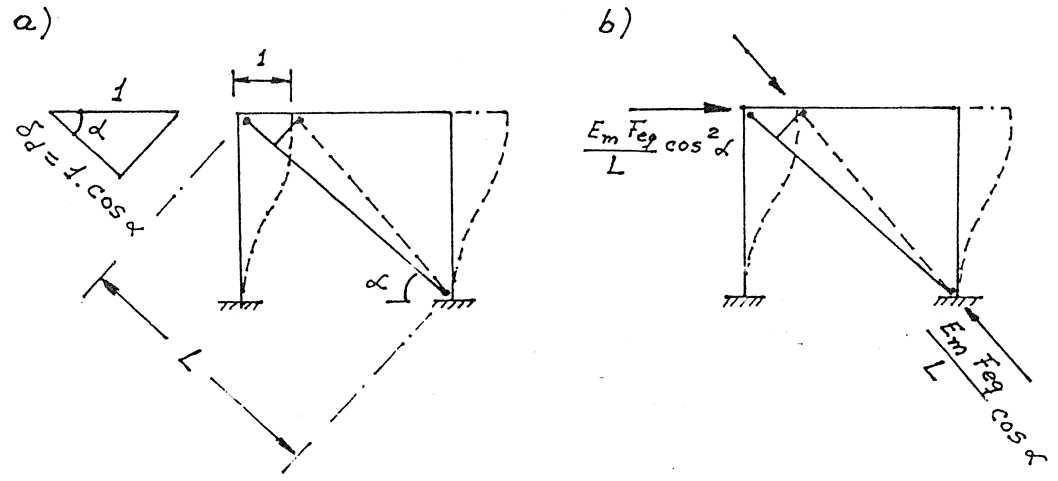


Figura 15

por lo que el esfuerzo asociado a tal deformación será (caso 7 de la Tabla N° 1 del Anexo del Capítulo IV, adecuado al desplazamiento producido) (figura 15b)

$$\frac{E_m.F_{eq}}{L}.\cos\alpha$$

El valor de a_{33}' resultará de la proyección de esta fuerza en la dirección del desplazamiento X_3

$$\frac{E_m.F_{eq}}{L}.\cos^2\alpha \qquad (12)$$

En definitiva

$$a_{33} = \frac{12\ E.k_{c1}}{h^2} + \frac{12\ E.k_{c2}}{h^2} + \frac{E_m.F_{eq}}{L}.\cos^2\alpha$$

Una vez planteado el sistema de ecuaciones, la obtención de la rigidez a desplazamientos horizontales se efectúa en forma análoga a los casos precedentes.

4.2. Construcciones de dos o más niveles.

4.2.1. Concepto general.

En el caso de elementos sismorresistentes de edificios de dos o más niveles, la formulación conceptual básica de las relaciones entre las acciones horizontales actuantes a nivel de cada piso y los desplazamientos producidos en sus respectivas direcciones, lleva al planteo de las ecuaciones de equilibrio en la forma conocida (figura 16)

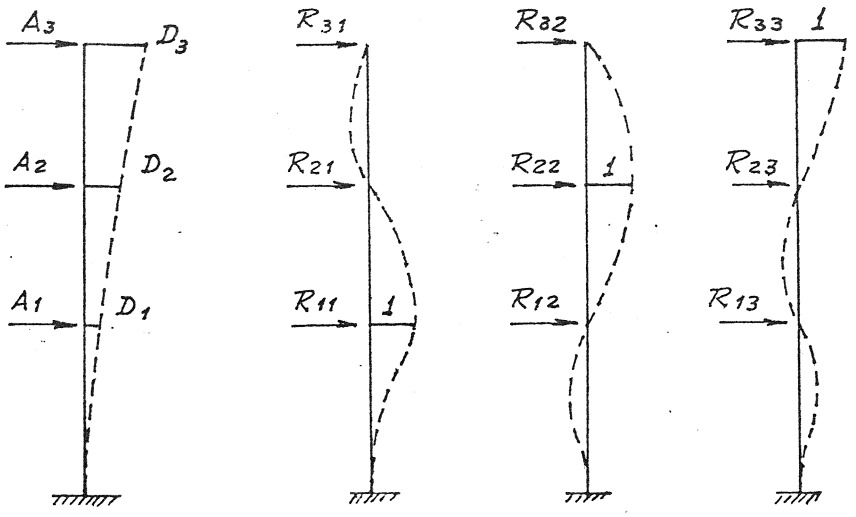


Figura 16

$$\begin{aligned} A_1 &= R_{11}.D_1 + R_{12}.D_2 + R_{13}.D_3 \\ A_2 &= R_{21}.D_1 + R_{22}.D_2 + R_{23}.D_3 \\ A_3 &= R_{31}.D_1 + R_{32}.D_2 + R_{33}.D_3 \end{aligned} \qquad (13)$$

Expresando mediante vectores y matrices

$$[A_e] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} ; [R_e] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} ; [D_e] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$[A_e] = [R_e].[D_e]$$

En consecuencia, en construcciones de dos o más niveles, la rigidez a desplazamientos horizontales de cada elemento sismorresistente individualmente considerado se expresa mediante una matriz cuadrada de tantas filas y columnas como niveles posea el edificio.

Para su formulación (figura 16), es necesario aplicar al nivel de cada piso acciones (en este caso fuerzas) que produzcan un desplazamiento horizontal unitario en uno de ellos, manteniendo en cero todos los restantes, permitiendo que se desarrollen los giros en los nudos. En virtud de ello, no sólo será necesario aplicar sucesivamente una fuerza R_{11} en cada nivel que produzca $D_1 = 1$, sino que también se deben considerar las acciones R_{j1} (reactivas), que aseguren que $D_{j1} = 0$.

En definitiva, cada fila de la $[R_e]$ está formada por los coeficientes de las incógnitas de la ecuación de equilibrio del nivel correspondiente, según las (13), mientras que cada columna representa las fuerzas que deben aplicarse en cada nivel para mantener el desplazamiento unitario en uno de ellos.

4.2.2. Elemento aislado de dos niveles.

Sea el caso del muro o tabique de la figura 17a).

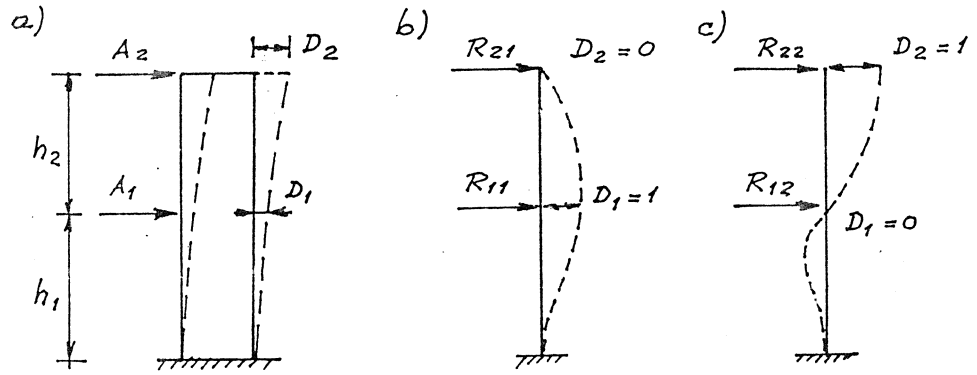


Figura 17

El concepto desarrollado en el apartado anterior permite formular (figuras 17b) y c)

$$A_1 = R_{11}.D_1 + R_{12}.D_2$$
$$A_2 = R_{21}.D_1 + R_{22}.D_2$$

Teniendo en cuenta que en este caso resulta más sencillo el cálculo de desplazamientos que el de las acciones, se opta para elementos estructurales de este tipo en desarrollar la matriz de flexibilidad, determinando luego la de rigidez en base al conocimiento de que ambas se relacionan entre sí en forma inversa.

Recordando que en general D = F.A, y que si A = 1 resulta D = F, se tendrá:

a) Para el estado de la figura 17b) (figura 18)

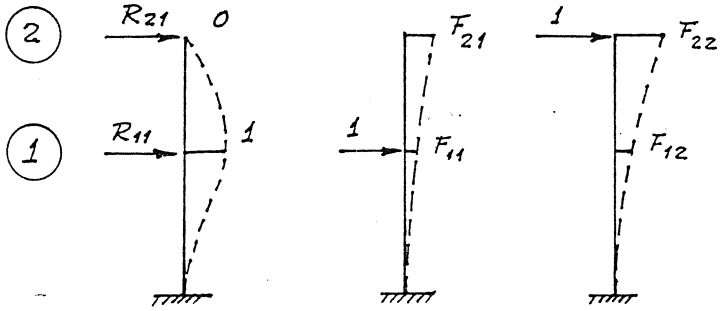


Figura 18

- En la dirección del nivel 1: $F_{11}.R_{11} + F_{12}.R_{21} = 1$
- En la dirección del nivel 2: $F_{21}.R_{11} + F_{22}.R_{21} = 0$

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

b) Para el estado de la figura 17c) (figura 19)

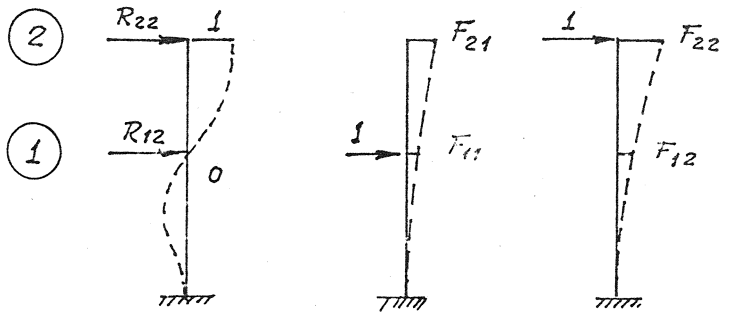


Figura 19

- En la dirección del nivel 1: $F_{11}.R_{12} + F_{12}.R_{22} = 0$
- En la dirección del nivel 2: $F_{21}.R_{12} + F_{22}.R_{22} = 1$

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Formulando las (14) y (15) mediante una expresión única

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

o sea que

$$[F_e].[R_e] = [I]$$

o bien

$$[R_e] = [F_e]^{-1} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (16)$$

Los valores de F_{ij} pueden ser fácilmente calculados aplicando el TTV, con consideración del momento flector y del esfuerzo de corte.

4.2.3. Pórticos. Condensación estática de la matriz de rigidez.

Sea el pórtico de dos niveles de la figura 20. Se supone actuando en el primer nivel una acción Ax_1 y en el segundo Ax_2. Como consecuencia de la deformación del pórtico, cada uno de los niveles experimenta desplazamientos horizontales X_1 y X_2. Siguiendo el concepto básico, debe encontrarse la matriz que relaciona las acciones con los desplazamientos, es decir, la matriz de rigidez, que debe satisfacer

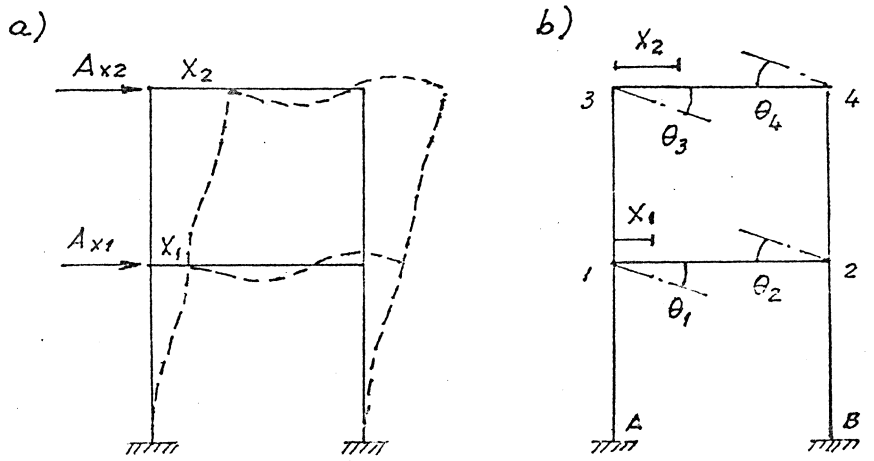


Figura 20

$$\begin{bmatrix} Ax_1 \\ Ax_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [Ax] = [R].[X] \qquad (17)$$

Sin embargo, en este caso es necesario tener presente que el sistema no sólo presenta las dos direcciones de desplazamiento que intervienen en la (17), sino que su grado de indeterminación cinemática es de 6, al producirse también los desplazamientos angulares en los nudos, cuya incidencia no puede obviarse para la determinación de X_1 y X_2, pero cuyos valores no es necesario conocer. Por ello se diferenciará la nomenclatura, llamando θ_i a las incógnitas de giro (θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4) y X_i a las de desplazamiento horizontal (X_1 y X_2), tal como se indica en la figura 20b).

Aplicando para la formulación del sistema de ecuaciones de equilibrio el método de los desplazamientos, corresponde plantear el sistema fijo (figura 21a) y los sucesivos estados $\theta_1 = 1$; $\theta_2 = 1$; ... $X_2 = 1$.

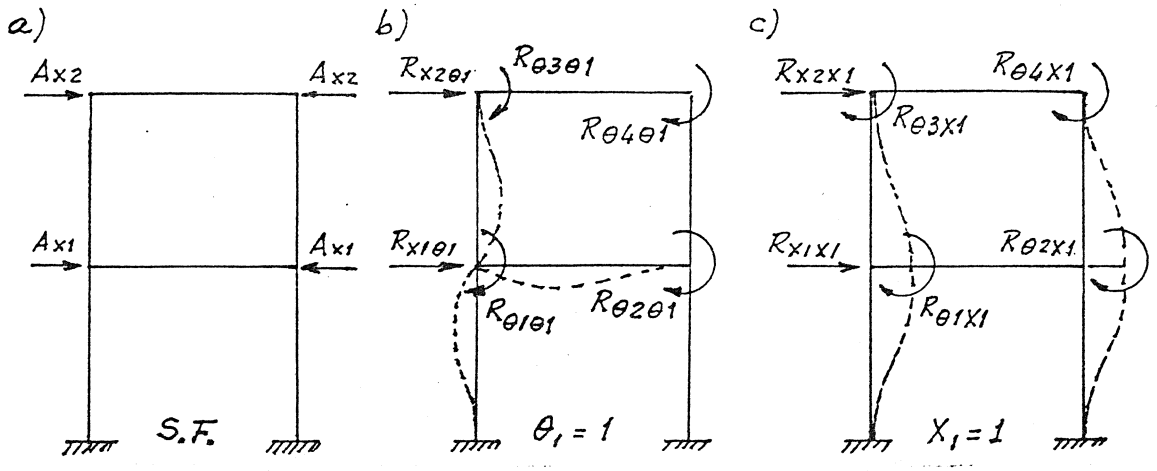


Figura 21

A nivel de ejemplo para la comprensión de las acciones que en tales estados se producen, se consignan en las figuras 21b) y c), los estados $\theta_1 = 1$ y $X_1 = 1$, siendo sencilla la interpretación de los restantes.

En consecuencia puede plantearse

$$
\begin{aligned}
A_{e1} &= R_{e1e1}.\theta_1 + R_{e1e2}.\theta_2 + R_{e1e3}.\theta_3 + R_{e1e4}.\theta_4 + R_{e1x1}.X_1 + R_{e1x2}.X_2 \\
A_{e2} &= R_{e2e1}.\theta_1 + R_{e2e2}.\theta_2 + R_{e2e3}.\theta_3 + R_{e2e4}.\theta_4 + R_{e2x1}.X_1 + R_{e2x2}.X_2 \\
A_{e3} &= R_{e3e1}.\theta_1 + R_{e3e2}.\theta_2 + R_{e3e3}.\theta_3 + R_{e3e4}.\theta_4 + R_{e3x1}.X_1 + R_{e3x2}.X_2 \\
A_{e4} &= R_{e4e1}.\theta_1 + R_{e4e2}.\theta_2 + R_{e4e3}.\theta_3 + R_{e4e4}.\theta_4 + R_{e4x1}.X_1 + R_{e4x2}.X_2 \\
A_{x1} &= R_{x1e1}.\theta_1 + R_{x1e2}.\theta_2 + R_{x1e3}.\theta_3 + R_{x1e4}.\theta_4 + R_{x1x1}.X_1 + R_{x1x2}.X_2 \\
A_{x2} &= R_{x2e1}.\theta_1 + R_{x2e2}.\theta_2 + R_{x2e3}.\theta_3 + R_{x2e4}.\theta_4 + R_{x2x1}.X_1 + R_{x2x2}.X_2
\end{aligned}
$$

Este sistema de ecuaciones puede ser expresado en forma matricial, resultando conveniente a los fines perseguidos, considerar por una parte las ecuaciones de equilibrio en la dirección de las rotaciones de nudos (o sea las 4 primeras), y por otra las que corresponden al equilibrio en la dirección de los desplazamientos de cada dintel (o sea las dos últimas).

Llamando

$$
[A_e] = \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \\ A_{e3} \\ A_{e4} \end{bmatrix} \quad ; \quad [R_{ee}] = \begin{bmatrix} R_{e1e1} & R_{e1e2} & R_{e1e3} & R_{e1e4} \\ R_{e2e1} & R_{e2e2} & R_{e2e3} & R_{e2e4} \\ R_{e3e1} & R_{e3e2} & R_{e3e3} & R_{e3e4} \\ R_{e4e1} & R_{e4e2} & R_{e4e3} & R_{e4e4} \end{bmatrix} \quad ; \quad [\theta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}
$$

$$
[R_{ex}] = \begin{bmatrix} R_{e1x1} & R_{e1x2} \\ R_{e2x1} & R_{e2x2} \\ R_{e3x1} & R_{e3x2} \\ R_{e4x1} & R_{e4x2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [R_{xe}] = \begin{bmatrix} R_{x1e1} & R_{x1e2} & R_{x1e3} & R_{x1e4} \\ R_{x2e1} & R_{x2e2} & R_{x2e3} & R_{x2e4} \end{bmatrix}
$$

$$
[A_x] = \begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{x2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [R_{xx}] = \begin{bmatrix} R_{x1x1} & R_{x1x2} \\ R_{x2x1} & R_{x2x2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}
$$

el sistema de ecuaciones algebraicas precedentemente desarrollado puede expresarse en forma matricial

$$[A_e] = [R_{ee}].[\theta] + [R_{ex}].[X] \qquad (18)$$

$$[A_x] = [R_{xe}].[\theta] + [R_{xx}].[X] \qquad (19)$$

La primera de estas expresiones corresponde al vector de las acciones en la dirección de las rotaciones de los nudos θ_i (contrarias a las acciones de fijación), mientras que la segunda es el vector de las acciones en la dirección de los desplazamientos horizontales de los dinteles (opuesto también a las fuerzas de fijación).

Por otra parte, y dado que las acciones nodales en el sentido de las rotaciones son nulas, al no actuar, por hipótesis, cargas sobre las vigas, será $[A_e] = 0$ (figura 21a), por lo que la (18) resulta

$$[Ree].[\theta] + [Rex].[X] = 0 \quad ; \quad [Ree].[\theta] = - [Rex].[X]$$

$$[\theta] = -[Ree]^{-1}.[Rex].[X]$$

Sustituyendo este valor en la (19)

$$[Ax] = -[Rxe].[Ree]^{-1}.[Rex].[X] + [Rxx].[X]$$

$$[Ax] = \{[Rxx] - [Rxe].[Ree]^{-1}.[Rex]\}.[X]$$

Comparando esta expresión con la (17) resulta

$$[R] = [Rxx] - [Rxe].[Ree]^{-1}.[Rex] \qquad (20)$$

La obtención de la matriz de rigidez a desplazamientos horizontales del pórtico a través de este procedimiento, en el cual no debe plantearse el sistema completo de ecuaciones de equilibrio, se conoce como *condensación estática de la matriz de rigidez.*

4.2.4. Pórtico de dos niveles con muro de mampostería.

En el caso de un pórtico de dos niveles, en el cual uno o ambos pisos estén rellenos con mampostería, el procedimiento a seguir surge de la aplicación de los desarrollos efectuados en los apartados 4.1.8. y 4.2.3.

Si a manera de ejemplo se supone el pórtico que se consigna en la figura 22a) (mampostería en el piso superior), la diagonal equivalente corresponde ser introducida en la forma indicada en la figura 22b.

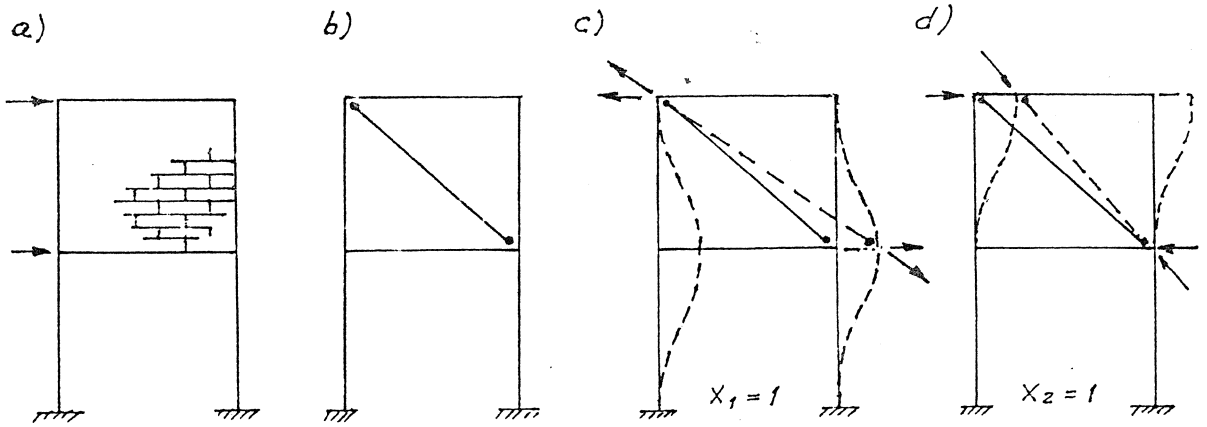


Figura 22

El efecto de la acción complementaria debida a la diagonal articulada incorporada se pondrá en evidencia con la aparición de los esfuerzos horizontales adicionales, con los sentidos y ubicaciones que se indican en las figuras 22c) y d), y cuyos valores están dados por la (12).

5. ANALISIS ESTRUCTURAL APLICADO A LA DISTRIBUCION DE FUERZAS SISMICAS.

5.1. Procedimientos de análisis e hipótesis básicas.

El Análisis Estructural aplicado a la Ingeniería Sismorresistente se constituye en el proceso que permite determinar los esfuerzos a que se verán sometidas las distintas partes de una construcción, para luego poder dimensionarlas de manera que los resistan sin deformaciones excesivas y con un grado de seguridad suficiente. Los procedimientos de análisis disponibles para tales fines son variados, sin embargo se los puede agrupar en dos familias que no son contrapuestas sino, por el contrario, complementarias: los procedimientos teóricos y los experimentales.

En la actualidad, los procedimientos teóricos conducen a la formulación de un modelo matemático representativo del comportamiento estructural, en el que determinados indicadores (tensión de trabajo, resistencia límite) convenientemente elegidos, permiten establecer el grado de seguridad alcanzado. Este modelo matemático para el análisis de la estructura será válido como representación de su funcionamiento siempre y cuando se satisfagan las hipótesis en que se basan la teoría en general y el caso en particular, y siempre que los indicadores elegidos correspondan realmente al problema bajo estudio. Su grado de validez por lo tanto, será el del cumplimiento de tales condiciones.

Sin embargo, y pese a que la aproximación a problemas físicos reales es siempre dificultosa, particularmente en el campo de las construcciones, los métodos empleados con mayor frecuencia son los teóricos, mientras que los experimentales se aplican al área de la investigación (para contrastar o producir nuevas teorías) o para comprobar los resultados obtenidos por vía teórica en casos muy complejos e importantes (presas, puentes).

En conclusión, el procedimiento teórico, si bien constituye una poderosa herramienta en sí y de indudable valor, es sólo una representación del fenómeno estructural. Utilizado dentro de las limitaciones de sus hipótesis de partida, conducirá a resultados seguros, describiendo eficientemente el funcionamiento de la estructura. Pero no debe perderse de vista que en el caso de fenómenos vibratorios en general y de acciones sísmicas en particular, como consecuencia de la complejidad de las construcciones, la descripción del fenómeno es especialmente trabajosa.

Consecuencia de lo anterior, resulta imprescindible realizar un cierto número de hipótesis simplificativas a fin de conformar el esquema de análisis, las que usualmente son:

a) La distribución real de la masa del sistema se sustituye por un conjunto de masas discretas (concentradas a la altura de cada entrepiso, o de la cubierta en el caso de construcciones de un nivel) vinculadas por los elementos estructurales supuestos sin masa.

b) Los entrepisos (diafragmas) tienen suficiente rigidez y resistencia como para impedir los movimientos relativos entre sus puntos; en otras palabras, sus deformaciones deben ser despreciables frente a los corrimientos relativos que experimentan los elementos verticales entre sus extremos superior e inferior.

c) Los elementos resistentes se comportan manteniendo la dependencia lineal entre acciones y desplazamientos.

d) No hay límite en la deformación que puede admitir cada elemento, es decir no se produce rotura física.

e) Las deformaciones no alteran el estado de cargas original, es decir se considera al sistema dentro de la teoría de primer orden.

5.2. Método estático.

Aún con la adopción de las hipótesis enunciadas en el apartado precedente, cuyo cumplimiento es aproximado, el planteo y desarrollo del análisis es sumamente laborioso. Consecuencia de ello, ha sido elaborado un procedimiento tipificado, que sin sacrificar confiabilidad en los resultados, permite representar el estado dinámico por medio de un conjunto estático de fuerzas aplicadas a las masas del sistema, tales que produzcan las mismas solicitaciones máximas en todos los puntos, al que se conoce como *método estático*.

Teniendo en cuenta el contenido y alcance de la asignatura, se limitará el presente Capítulo a la consideración del método estático, en primera instancia aplicado a construcciones de un sólo nivel, dando por supuesto que se verifican las hipótesis antes enunciadas.

La acción sísmica actuante en el plano de la cubierta ($F_s = A$) será proporcional a la masa total de la construcción que se considera que participa en el momento del sismo. Dado que resulta más sencillo trabajar con los pesos, se suelen adoptar estos.

5.2.1. Distribución de los esfuerzos.

Los diversos elementos resistentes a fuerzas horizontales distribuidos en la planta, experimentarán desplazamientos condicionados por los vínculos externos y por las conexiones existentes entre ellos. De estos condicionamientos resultará la distribución de los esfuerzos. Particularizando sobre fuerzas horizontales, en el plano de aplicación de la carga, que es aquél donde existe la conexión, se producirá una distribución de la acción exterior total actuante entre cada uno de los elementos destinados a absorberla, consistiendo la resolución en la determinación de la fracción de esa fuerza total que recibirá cada elemento, para verificar luego si los mismos son capaces de resistirla.

Planteado así el problema, la distribución de los esfuerzos horizontales corresponde a la resolución de un sistema

hiperestático, cuya mayor o menor complejidad dependerá de la cantidad de elementos presentes. Para efectuar la formulación se dispone de dos grupos de ecuaciones: las de equilibrio y las de compatibilidad de desplazamientos. Cabe observar además que el problema es "plano", dado que se trata de distribuir una fuerza A (equivalente a la acción sísmica F_s), entre varias direcciones (las de los planos resistentes), todas ellas coplanares con la fuerza (figura 23).

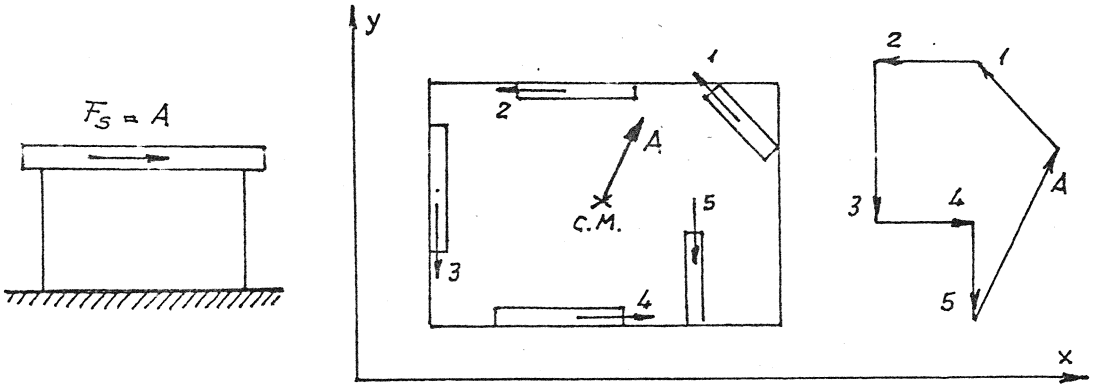


Figura 23

Habiendo adoptado la hipótesis de la inexistencia de movimientos relativos entre los extremos superiores de los elementos resistentes debido a la rigidez asumida para el diafragma, la resolución del problema se simplifica notoriamente, puesto que cualquiera sea el número de tales elementos, el sistema quedará determinado si se establece la posición deformada del plano horizontal, la que puede definirse por medio de las componentes de traslación (X e Y) de un punto dado, paralelas a ambos ejes de referencia, y la rotación (Z) del plano alrededor de dicho punto (figura 24).

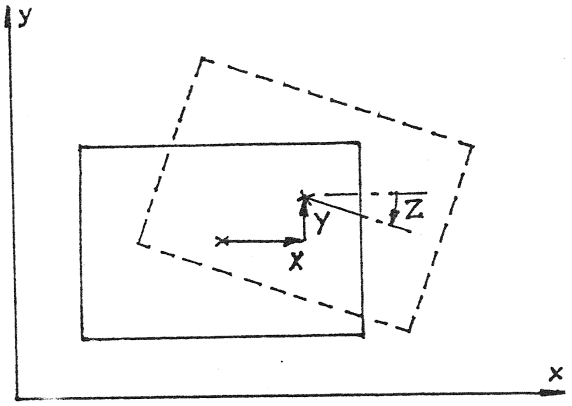


Figura 24

En consecuencia, si la resolución del sistema hiperestático se encara por el método de los desplazamientos, se presentarán tres

incógnitas de tal carácter (X, Y y Z), y como para el plano se pueden establecer tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$), el sistema queda determinado.

5.3. Caso de elementos ortogonales.

Sea la planta de la figura 25, de contorno supuesto rectangular (la forma de la planta no es limitativa para la aplicación de la metodología a desarrollar), la que se refiere a un sistema de ejes según las direcciones principales (x - y), con origen en un punto arbitrario O.

La planta cuenta con un conjunto de elementos de rigidez a desplazamientos horizontales de valor conocido (los que no se dibujan en la figura para mayor claridad), orientados en principio según las dos direcciones principales de la misma, pudiéndose presentar como tales, cualquiera de los definidos y estudiados en los apartados 3.3.2. y 4.1., los que pueden hallarse tanto en el perímetro como en el interior de la planta. Por otra parte, estos elementos pueden ser considerados como planos (rigidez en el sentido transversal despreciable comparada con la del sentido longitudinal), o no, cuando la rigidez transversal (mínima) sea de un orden de magnitud tal que influya en los valores de las acciones a absorber por los distintos elementos de la planta.

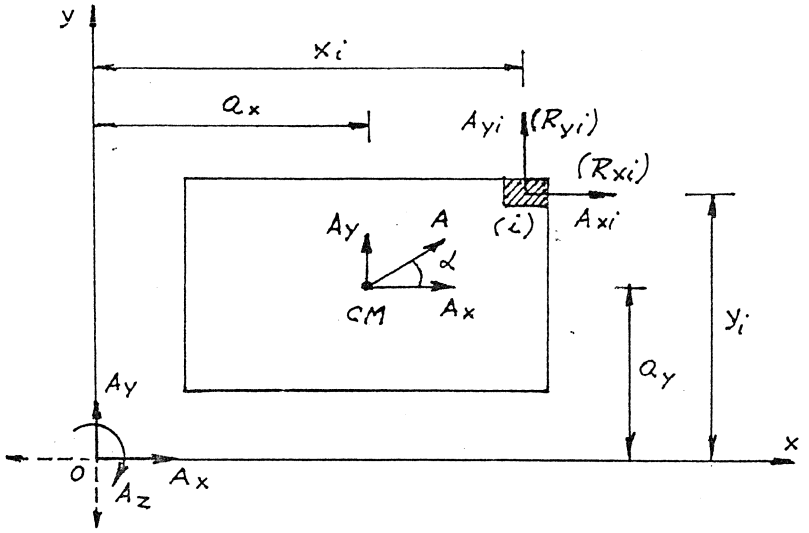


Figura 25

A los efectos de realizar el análisis pertinente, se considerará un elemento genérico i, cuyas rigideces en las direcciones principales de la planta se designarán por Rxi y Ryi, las que pueden ser calculadas de acuerdo a las expresiones que correspondan en cada caso, según los desarrollos efectuados en el apartado 4.1. La ubicación del centroide de este elemento queda definida por las coordenadas del punto de aplicación de R_{xi} y de R_{yi}, que respecto al sistema de ejes adoptado serán x_i e y_i.

Considérese una fuerza exterior cualquiera A, que actúa según la placa que vincula solidariamente todos los extremos superiores de los elementos de rigidez, aplicada en el centro de masas y con una dirección cualquiera, definida por el ángulo α. Descomponiendo esta fuerza en las direcciones de los ejes x e y, y efectuando la traslación paralela de la fuerza (o la de sus componentes) al punto O, se obtendrá

$$\begin{aligned} A_x &= A.\cos\alpha \\ A_y &= A.\operatorname{sen}\alpha \\ A_z &= A_x.a_y - A_y.a_x \end{aligned} \qquad (21)$$

siendo a_x y a_y las proyecciones de la distancia entre los puntos CM y O, según la dirección de cada eje coordenado (figura 25). En las (21), los signos dependerán de la dirección de A y su ubicación relativa respecto del punto O.

Como consecuencia de la acción de la fuerza A, se producirá el desplazamiento del plano donde actúa la misma, y por ende el de todos los extremos superiores de los elementos de rigidez. Tal movimiento, en esencia será, en su forma más general, un giro alrededor de un polo absoluto de rotación. A fin de definir el desplazamiento D_{ei} que experimenta el centroide del elemento resistente considerado i, en función de sus componentes D_{exi} y D_{eyi}, puede considerarse el desplazamiento de la placa como compuesto por una traslación paralela de todos sus puntos, que a su vez puede ser descompuesta en dos componentes de desplazamiento lineal según cada una de las direcciones principales de la planta Xo e Yo (figura 26a), y una rotación Z respecto a la posición trasladada (figura 26b).

Los desplazamientos D_{exi} y D_{eyi} experimentados por el punto de aplicación de las rigideces R_{xi} y R_{yi}, pueden calcularse sumando algebraicamente a los corrimientos generales Xo e Yo producidos por la traslación, los corrimientos ΔX y ΔY debidos a la rotación Z (figuras 26a) y b), siendo de aplicación los signos indicados, para la situación supuesta en las mencionadas figuras

$$\begin{aligned} D_{exi} &= X_o + \Delta X \\ D_{eyi} &= Y_o - \Delta Y \end{aligned} \qquad (22)$$

De la figura 26c), en donde se detalla la rotación que experimenta el elemento i

$$\Delta = d.Z$$

y sus componentes serán

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta.\operatorname{sen}\beta = d.Z.\operatorname{sen}\beta \\ \Delta Y &= \Delta.\cos\beta = d.Z.\cos\beta \end{aligned}$$

pero

$$d.\operatorname{sen}\beta = y_i \quad ; \quad d.\cos\beta = x_i \qquad \text{luego}$$

$$\begin{aligned} \Delta X &= y_i.Z \\ \Delta Y &= x_i.Z \end{aligned}$$

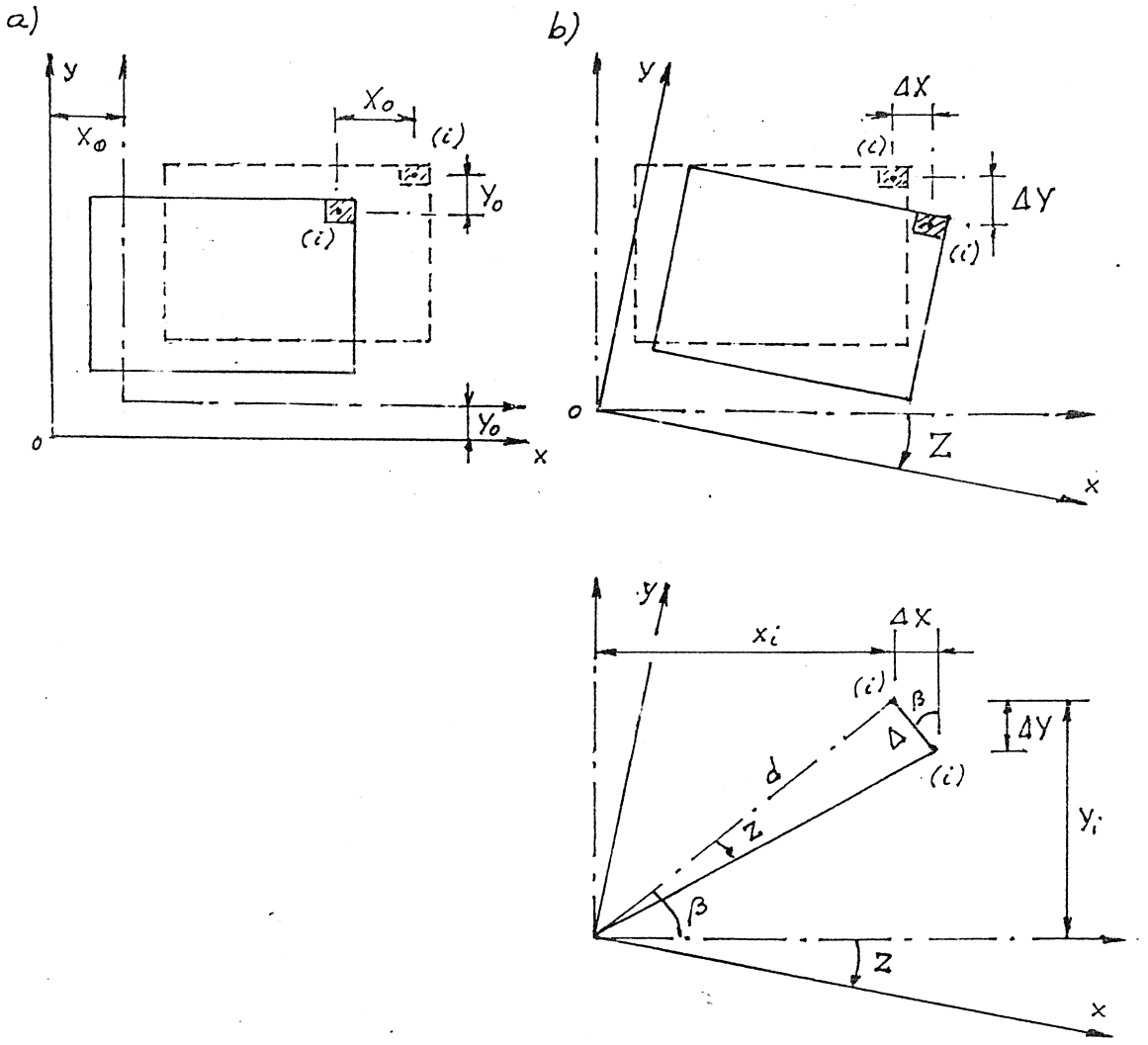


Figura 26

Reemplazando en las (22)

$$D_{ex1} = X_o + y_1.Z \qquad (23)$$
$$D_{ey1} = Y_o - x_1.Z$$

Debe observarse que los valores obtenidos de D_{ex1} y D_{ey1} son independientes de la ubicación respecto a la planta, que se hubiese adoptado para el sistema de ejes de referencia y su origen. De haberse elegido cualquier otro sistema, se modificarían los valores de X_o e Y_o, no así el de Z, que es independiente del punto de referencia adoptado (para una misma acción A). Evidentemente que en tal caso variarán también los valores de x_1 e y_1, manteniéndose la constancia de las magnitudes de los desplazamientos D_{ex1} y D_{ey1}.

Relacionando la rigidez del elemento con las deformaciones que en él se producen, pueden calcularse las componentes de la acción

que solicita el extremo superior del elemento resistente considerado, mediante la (23)

$$A_{xi} = R_{xi}.D_{exi} = R_{xi}.(X_o + Z.y_i) = R_{xi}.X_o + R_{xi}.y_i.Z \qquad (24)$$
$$A_{yi} = R_{yi}.D_{eyi} = R_{yi}.(Y_o - Z.x_i) = R_{yi}.Y_o - R_{yi}.x_i.Z$$

La suma de todas las acciones individuales que actúan sobre cada uno de los elementos resistentes con que cuenta la estructura, debe ser igual a la componente de la acción externa actuante, en la dirección considerada, o sea

$$A_x = \Sigma A_{xi} = \Sigma R_{xi}.X_o + \Sigma R_{xi}.y_i.Z = X_o.\Sigma R_{xi} + Z.\Sigma R_{xi}.y_i \qquad (25)$$
$$A_y = \Sigma A_{yi} = \Sigma R_{yi}.Y_o - \Sigma R_{yi}.x_i.Z = Y_o.\Sigma R_{yi} + Z.(\Sigma -R_{yi}.x_i)$$

Las acciones A_{xi} y A_{yi} producen un momento respecto al centro de referencia O, de valor

$$A_{zi} = A_{xi}.y_i - A_{yi}.x_i \qquad (26)$$

La suma de los momentos que producen todas las acciones actuantes en los elementos de rigidez, debe ser igual al par exterior actuante A_z, por lo que

$$A_z = \Sigma A_{zi} = \Sigma A_{xi}.y_i - \Sigma A_{yi}.x_i$$

y teniendo en cuenta las (24)

$$A_z = \Sigma (R_{xi}.X_o + R_{xi}.y_i.Z).y_i - \Sigma (R_{yi}.Y_o - R_{yi}.x_i.Z).x_i$$

$$A_z = X_o.\Sigma R_{xi}.y_i + Z.\Sigma R_{xi}.y_i^2 - Y_o.\Sigma R_{yi}.x_i + Z.\Sigma R_{yi}.x_i^2$$

$$A_z = X_o.\Sigma R_{xi}.y_i + Y_o.(\Sigma -R_{yi}.x_i) + Z.(\Sigma R_{xi}.y_i^2 + \Sigma R_{yi}.x_i^2) \qquad (27)$$

El sistema de tres ecuaciones constituido por las (25) y la (27), permite hallar los valores de los desplazamientos X_o, Y_o y Z experimentados por la planta, mediante las cuales, aplicando las (24), pueden calcularse los esfuerzos A_{xi} y A_{yi} a que se encuentra solicitado cada elemento resistente.

Transcribiendo las tres ecuaciones que constituyen el sistema básico hallado, se tiene

$$\begin{aligned} A_x &= X_o.\Sigma R_{xi} &&+ Z.\Sigma R_{xi}.y_i \\ A_y &= Y_o.\Sigma R_{yi} &&+ Z.(\Sigma -R_{yi}.x_i) \\ A_z &= X_o.\Sigma R_{xi}.y_i + Y_o.(\Sigma -R_{yi}.x_i) &&+ Z.(\Sigma R_{xi}.y_i^2 + \Sigma R_{yi}.x_i^2) \end{aligned} \qquad (28)$$

Del análisis de dichas expresiones surge que las incógnitas se obtienen en función de las componentes de la solicitación exterior actuante, como términos independientes, estando dados los coeficientes de las incógnitas mediante diversas expresiones función de las rigideces de los elementos resistentes a las acciones horizontales y su ubicación relativa en la planta considerada, referida a un determinado sistema de ejes de referencia.

Las mencionadas expresiones se presentan bajo las siguientes configuraciones:

- ΣR_{xi} ; ΣR_{yi}: corresponden a la suma de las rigideces de todos los elementos resistentes individuales, orientados según cada una de las direcciones principales. Simplificativamente se las denominará

$$\Sigma R_{xi} = R_{xx} \quad ; \quad \Sigma R_{yi} = R_{yy} \tag{29}$$

- $\Sigma R_{xi}.y_i$; $\Sigma R_{yi}.x_i$: términos que corresponden respectivamente a la suma de los momentos estáticos de las rigideces de los elementos resistentes orientados según la dirección x, respecto al eje x, y de los elementos orientados según la dirección y, respecto a ese mismo eje, o sea

$$\Sigma R_{xi}.y_i = S_x \; ; \quad \Sigma R_{yi}.x_i = S_y \tag{30}$$

  Cada término de las sumatorias tendrá signo positivo o negativo, según sea el signo del momento de primer orden individual, función a su vez de la posición del elemento respecto a los ejes coordenados adoptados.

- $\Sigma R_{xi}.y_i^2 + \Sigma R_{yi}.x_i^2$: término que corresponde a la suma de los momentos de segundo orden de las rigideces con respecto a los ejes x e y que pasan por O, o sea el momento de inercia polar de las mismas respecto a dicho punto. A este término (siempre positivo), se lo representará por

$$\Sigma R_{xi}.y_i^2 + \Sigma R_{yi}.x_i^2 = I_{xy} \tag{31}$$

En consecuencia de las (29), (30) y (31), el sistema de ecuaciones (28) puede ser expresado en forma simplificativa

$$\begin{aligned} A_x &= R_{xx}.X_o + S_x.Z \\ A_y &= R_{yy}.Y_o + S_y.Z \\ A_z &= S_x.X_o + S_y.Y_o + I_{xy}.Z \end{aligned} \tag{32}$$

Cabe notar que de los términos que aparecen en el sistema de ecuaciones, A_x; A_y; Z; R_{xx}; R_{yy} son independientes del sistema de ejes de referencia que se adopte, mientras que dependen de él los términos X_o; Y_o; A_z; S_x; S_y e I_{xy}.

En conclusión, el problema queda resuelto con la determinación de los valores de los esfuerzos A_{xi} y A_{yi} que solicitan a cada uno de los elementos resistentes a acciones horizontales distribuidos en la planta. Para su obtención debe resolverse el sistema de ecuaciones (32), calcular mediante el mismo los valores de X_o, Y_o y Z, los que llevados a las (24) permiten arribar a los valores requeridos.

En el caso concreto del análisis sismorresistente, la fuerza estática equivalente a la acción sísmica (F_e = A), se determina afectando al peso de la parte de la construcción considerada, de un factor denominado *coeficiente sísmico*, en cuya cuantificación interviene la ubicación zonal, la influencia del terreno y del

período de la construcción, el destino de la misma y sus características estructurales dominantes. Esta fuerza, tal como se expuso en el desarrollo precedente, se considera aplicada en el centro de masas, entendiendo por tal, el baricentro de las cargas gravitatorias operantes, y cuya determinación se efectúa empleando los principios básicos que establece la Estática para tales fines, en función de la distribución y características de los pesos de las masas que componen la estructura. Los baricentros de los elementos verticales, se consideran proyectados sobre el diafragma rígido.

5.3.1. Resolución por reducción al centro de rigidez.

Si bien el sistema de ecuaciones (32) que permite resolver la distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos de rigidez de una planta puede ser formulado respecto a cualquier punto del plano, tal como ocurre en toda estructura hiperestática, existe un punto (el centro elástico), que simplifica su resolución, al volver a las ecuaciones independientes entre sí. El centro elástico coincide en este caso con el denominado *centro de rigidez*, que es el centro de masas de las rigideces consideradas como un sistema discreto de masas. De esta manera, si las ecuaciones de equilibrio se refieren a las direcciones principales y al centro de rigidez, resultarán independientes y su resolución es directa. O, en otras palabras, la distribución de fuerzas para traslaciones en las direcciones principales y para giros alrededor del centro de rigidez, resultan independientes entre sí.

Cuando, como en el caso bajo estudio, todos los elementos tienen sus direcciones principales paralelas a un par de ejes ortogonales, la resolución del hiperestático se simplifica aún más, al ser conocidas de antemano tales direcciones principales, pues coincidirán con las de los elementos; así el centro de rigidez se ubicará en la intersección de las rectas de acción de las resultantes de las rigideces en cada una de las dos direcciones.

Procediendo analíticamente, el centro de rigidez (CR) puede ubicarse aplicando los conceptos básicos de la Estática, determinando la posición del centro de masas de las rigideces de los elementos presentes en la planta, cuyas coordenadas respecto del sistema de ejes genérico x - y estarán dadas por

$$x_{CR} = \frac{\Sigma\, R_{yi}.x_i}{\Sigma\, R_{yi}} \quad ; \quad y_{CR} = \frac{\Sigma\, R_{xi}.y_i}{\Sigma\, R_{xi}} \qquad (33)$$

Cabe observar que reemplazando las (29) y (30) en las (33) se tiene

$$x_{CR} = \frac{S_x}{R_{xx}} \quad ; \quad y_{CR} = \frac{S_y}{R_{yy}} \qquad (34)$$

por lo que el planteo del sistema de ecuaciones genérico (32) permite a través de las operaciones indicadas en las (34) con 4 de sus coeficientes, determinar las coordenadas del centro de rigidez

referidas al mismo par de ejes que sirvió de base para la formulación de dicho sistema de ecuaciones.

Por Estática resulta también que la suma de los momentos estáticos de un conjunto plano discreto de masas respecto de un eje cualquiera que pase por su centro de masas, es nulo. Por ello, si en lugar de adoptar a los ejes x - y, con origen en O, como sistema de referencia para la determinación de X_O; Y_O y Z, se adoptase a tal fin un par de ejes paralelos a los anteriores con origen en CR, resultará

$$S_x = \Sigma\ R_{xi}.y_i = 0 \quad ; \quad S_y = \Sigma\ R_{yi}.x_i = 0$$

siendo en este caso x_i e y_i la abscisa y la ordenada del centroide del elemento resistente genérico i, respecto al sistema de ejes con origen en CR.

Observando el sistema de ecuaciones fundamentales (32), surge, tal como se expresara conceptualmente, que mediante la adopción de este cambio de ejes, al anularse los coeficientes correspondientes a los momentos estáticos, aquél se reduce a un sistema de tres ecuaciones independientes, con una incógnita cada una, de la forma

$$\begin{aligned} A_x &= R_{xx}.X_R \\ A_y &= R_{yy}.Y_R \\ A_z &= I_{xy}.Z \end{aligned} \qquad (35)$$

las que una vez resueltas, permiten también calcular los valores de A_{xi} y de A_{yi}, mediante las (24), las que en este caso resultan

$$\begin{aligned} A_{xi} &= R_{xi}.X_R + R_{xi}.y_i.Z \\ A_{yi} &= R_{yi}.Y_R - R_{yi}.x_i.Z \end{aligned} \qquad (36)$$

en las que obviamente también x_i e y_i se hallan referidos al sistema de ejes con origen en CR.

A las distancias entre el centro de masas CM y el centro de rigidez CR, medidas perpendicularmente a las direcciones principales, se las denomina *excentricidades estructurales* (e_y y e_x en el caso de las figuras 27a) y b), con

$$e_y = y_{CR} - y_{CM} \quad ; \quad e_x = x_{CR} - x_{CM} \qquad (37)$$

A su vez, la traslación de la fuerza A aplicada en CM a CR introduce un par, al que se denomina *par o momento torsor* de la planta, cuyo valor, para cada dirección resultará de

$$M_t^x = A_x.e_y \quad ; \quad M_t^y = A_y.e_x \qquad (38)$$

dependiendo sus signos del sentido de la componente de la fuerza y de la posición relativa entre CM y CR.

5.3.1.1. Acción horizontal en la dirección del eje x (figura 27a).

En este caso resulta $\alpha = 0°$, por lo que las (35) se reducen a

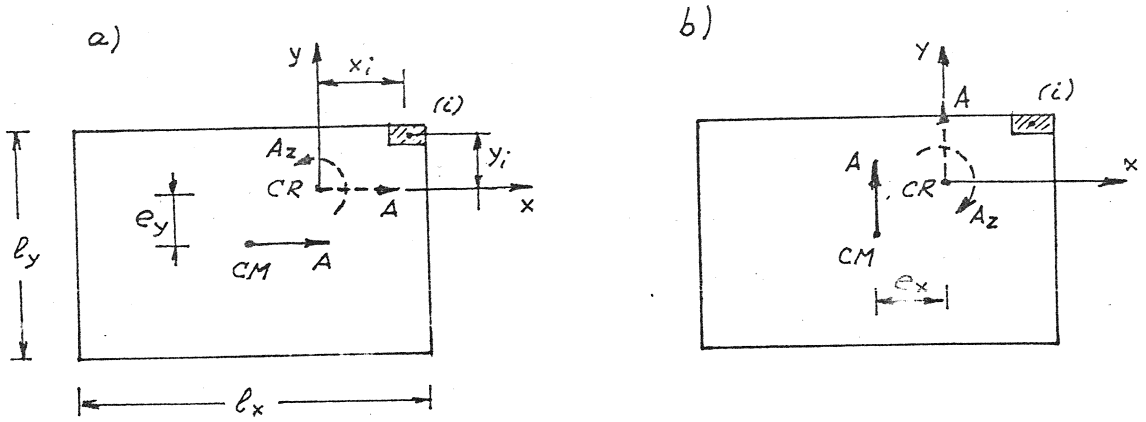


Figura 27

$$A_x = A \quad ; \quad A_y = 0 \quad ; \quad A_z = \pm A.e_y \tag{39}$$

Para la acción A_z se indica doble signo a fin de generalizar el concepto. Para el sentido de A supuesto en la figura (de izquierda a derecha) corresponderá a A_z signo + si CR se halla debajo de CM, y viceversa.

Despejando X_R, Y_R y Z de las (35) y teniendo en cuenta las (39)

$$X_R = \frac{A_x}{R_{xx}} = \frac{A}{R_{xx}} \; ; \quad Y_R = \frac{A_y}{R_{yy}} = 0 \; ; \quad Z = \frac{A_z}{I_{xy}} = \pm \frac{A.e_y}{I_{xy}} \tag{40}$$

Para calcular las solicitaciones que afectan al elemento de rigidez genérico i, se reemplazan en las (36), los valores de las (40), con lo que se obtiene

$$A_{xi} = R_{xi}.\frac{A}{R_{xx}} \pm \frac{R_{xi}.y_i.A.e_y}{I_{xy}} = A.\frac{R_{xi}}{R_{xx}} \pm \frac{M_t^x.S_{xi}}{I_{xy}} \tag{41}$$

$$A_{yi} = 0 \pm \frac{R_{yi}.x_i.A.e_y}{I_{xy}} = \pm \frac{M_t^x.S_{yi}}{I_{xy}} \tag{42}$$

donde: $M_t^x = A.e_y$, es el momento torsor producido por la acción horizontal actuando en la dirección x, y $S_{xi} = R_{xi}.y_i$; $S_{yi} = R_{yi}.x_i$, son los momentos de primer orden de las rigideces del elemento considerado, respecto al eje indicado en el subíndice, cuyo origen es CR. Para su cálculo deben tenerse en cuenta en cada caso los signos que correspondan, tanto de las abscisas y ordenadas, como de las rigideces.

5.3.1.2. Acción horizontal en la dirección del eje y (figura 27b).

En este caso es $\alpha = 90°$, reduciéndose las (35) a

$$A_x = 0 \quad ; \quad A_y = A \quad ; \quad A_z = \pm A.e_x \tag{43}$$

Para el sentido de A supuesto en la figura (en el sentido positivo del eje de las y), corresponderá signo + en la expresión de A_z cuando CR se halle a la derecha de CM, y viceversa.

Despejando X_R, Y_R y Z de las (35) y teniendo en cuenta las (43)

$$X_R = \frac{A_x}{R_{xx}} = 0 \; ; \quad Y_R = \frac{A_y}{R_{yy}} = \frac{A}{R_{yy}} \; ; \quad Z = \frac{A_z}{I_{xy}} = \pm \frac{A.e_x}{I_{xy}} \qquad (44)$$

Reemplazando en las (36), las expresiones de las (44)

$$A_{xi} = 0 \pm \frac{R_{xi}.y_i.A.e_x}{I_{xy}} = \pm \frac{M_t{}^y.S_{xi}}{I_{xy}} \qquad (45)$$

$$A_{yi} = R_{yi}.\frac{A}{R_{yy}} \pm \frac{R_{yi}.x_i.A.e_x}{I_{xy}} = A.\frac{R_{yi}}{R_{yy}} \pm \frac{M_t{}^y.S_{yi}}{I_{xy}} \qquad (46)$$

donde $M_t{}^y = A.e_x$, es el momento torsor producido por la acción horizontal actuando en la dirección y.

Ampliando el concepto del centro de rigidez, se observa que aquél coincide con el centro de rotación del diafragma cuando en el mismo se aplica un par o cupla, motivo por el cual se lo denomina también centro de giro o centro de torsión. Inversamente, si una fuerza exterior estuviese aplicada en el centro de rigidez, provocaría sólo traslaciones a la planta; si la dirección de tal fuerza, coincidiese además con una de las direcciones principales, la traslación resultante tendría también esa dirección.

5.3.1.3. Conclusiones.

De la consideración de las expresiones obtenidas para cada caso [(41)-(42) y (45)-(46)], se concluye que para la acción de la fuerza horizontal actuando en una dirección principal determinada, el esfuerzo transmitido a cada elemento estructural resistente orientado en dicha dirección y según la misma, es función de dos sumandos [expresiones (41) y (46)]. El primero de ellos está dado por el producto de la intensidad de la acción total actuante por el factor de distribución de la rigidez correspondiente a dicho elemento en la dirección considerada, y su sentido será siempre igual al de la fuerza A, tal como se observa en los casos mostrados en la planta de la figura 28, en la cual se han supuesto arbitrariamente 4 elementos sismorresistentes. Este primer sumando suele ser denominado *esfuerzo de corte directo o traslacional* en el elemento de rigidez considerado (A_a). La relación $R_i/\Sigma R_i$ es el llamado factor de distribución del corte para la dirección dada y constituye el coeficiente de influencia del esfuerzo en el elemento i para un esfuerzo de corte en su dirección aplicado en el diafragma.

El segundo sumando es función del momento torsor y del momento estático de la rigidez del elemento, ambos considerados respecto al eje según el cual actúa A, y de la relación constante I_{xy}, anteriormente definida. Este sumando se suele denominar *esfuerzo de corte por torsión o rotacional* (A_t), y de acuerdo al sentido de giro de la planta (definido por el del par A_z), se sumará o se restará al valor de A_q (figura 28). Evidentemente que el denominador I_{xy} es la rigidez torsional de la planta y la (31) muestra que crece más rápidamente con la distancia al centro de rigidez que con la rigidez propia del elemento. Cuanto mayor sea su valor, menores resultarán los esfuerzos de corte por torsión. El cociente S_i/I_{xy}, dependiente sólo de la estructura y no de las cargas, es el coeficiente de influencia del esfuerzo en el elemento i debido a un par torsor aplicado a la planta.

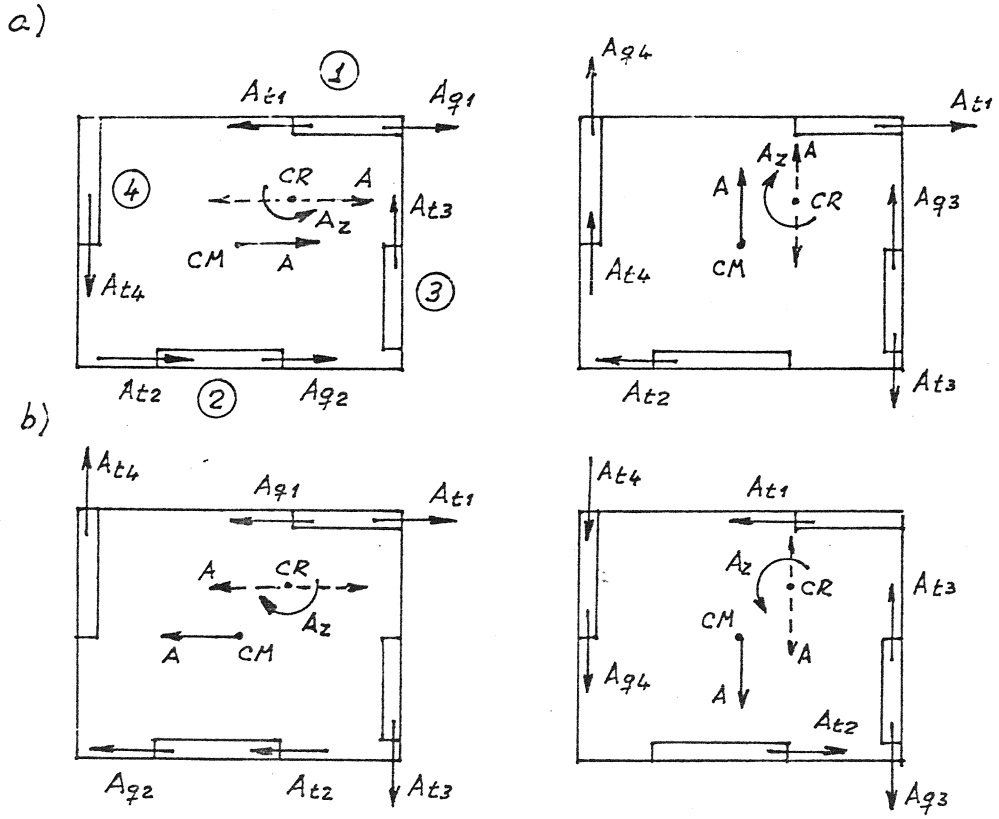


Figura 28

En definitiva, según cualquiera de las direcciones principales se tiene, como expresión genérica

$$A_i = A_{qi} + A_{ti} = A.\frac{R_i}{\Sigma R_i} \pm \frac{M_t.S_i}{I_{xy}} \qquad (47)$$

Por otra parte, las expresiones (42) y (45) indican que aún para el caso de la fuerza sísmica actuando en una dirección determinada, los elementos resistentes orientados en dirección perpendicular, se encuentran solicitados a un cierto esfuerzo de corte por torsión (A_t'), con la misma expresión del segundo sumando de la (47), y con sentidos definidos por el de la rotación impuesta a la planta, como se indica en cada caso de la figura 28.

De las consideraciones anteriores surge que para cada elemento estructural se tienen dos valores de solicitación, uno para cada dirección de acción de la fuerza horizontal. Por lo general, el término $A_q + A_t$ suele ser mayor que el A_t', excepto en elementos resistentes próximos al contorno de la planta, o directamente perimetrales, en caso de grandes excentricidades. Un diseño adecuado debe evitar la aparición de casos en los cuales para algún elemento resulte $A_t' > A_q + A_t$.

Si para una dirección dada (x o y), se invierte el sentido en que se supone actuando A (hacia la izquierda o hacia abajo, respectivamente, como se indica en las figuras 28b), se invierte el signo de A_q, mientras que, al invertirse el sentido de la rotación, lo hace también el signo de A_t. En consecuencia, el valor absoluto del esfuerzo total actuante sobre cada elemento estructural no se modifica, al no cambiar tampoco el sentido de la suma o la diferencia entre A_q y A_t.

Obsérvese que la ubicación relativa entre los puntos CM y CR, al efectuar la traslación paralela de la fuerza A, permite determinar de inmediato en cada caso el sentido de la rotación que tiende a producir el par A_z, y con él, el sentido de cada una de las componentes A_{ti}. Se determina así fácilmente, en cuáles de los elementos los términos A_q y A_t se suman y en cuáles se restan. Como regla general se desprende, como lo confirman todos los casos de la figura 28, que si se traza una divisoria a través de la planta por el CR paralela a la acción de A, en todos aquellos elementos situados en el sector en el que quedó ubicado el CM (ya sean perimetrales o interiores), ambas acciones (A_q y A_t) se suman, mientras que para los del otro sector, se restan. Esta regla resulta útil para efectuar verificaciones expeditivas, sobre todo al realizar la resolución por procedimientos matriciales.

5.3.1.4. Torsión accidental.

Las reglamentaciones vigentes modifican la excentricidad estructural (también llamada excentricidad estática) anteriormente definida, con el propósito de tener en cuenta los efectos de concentraciones accidentales de cargas gravitatorias, de variaciones instantáneas de rigidez y de amplificaciones dinámicas, desplazando el punto calculado para la aplicación de las fuerzas sísmicas en correspondencia con el centro de gravedad de las masas o cargas propensas a experimentar movimientos. A tal fin, el CCSRMza actualmente vigente, especifica que la fuerza $A = F_s$ deberá desplazarse 0,15 l_i en dirección perpendicular a su recta de acción, hacia ambos lados del CM y según cada dirección principal; siendo l_i la máxima dimensión de la planta del edificio medida en dirección perpendicular a la acción sísmica considerada.

Consecuencia de lo anterior se obtiene la excentricidad de cálculo sumando y restando a la excentricidad estructural, definida según las (37), el referido valor de 0,15 l_1, resultando así para el momento torsor la expresión genérica

$$M_t = A.(e \pm 0{,}15.l) \qquad (48)$$

Dado que el doble signo de la (48) implica obtener dos valores (que pueden ser de signos iguales o contrarios) para el momento torsor, al aplicar la (47) deben considerarse todas las combinaciones posibles, determinando el esfuerzo de corte por torsión empleando los valores de M_t que originen las solicitaciones más desfavorables en cada elemento sismorresistente.

5.3.2. Solicitaciones más desfavorables.

Analizando la acción sísmica según las dos direcciones principales y con el doble valor del momento torsor para cada una de ellas que surge según la (48), resultan para cada elemento sismorresistente cuatro combinaciones, de las que debe adoptarse la de mayor valor absoluto. Puede ocurrir asimismo que algún elemento se descargue por efecto de la torsión, en cuyo caso se debe tomar directamente el valor correspondiente al corte directo.

Por consiguiente, para cada elemento se tomará el mayor, en valor absoluto, de los cinco valores siguientes:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (R_1/\Sigma\ R_1).A + (S_1/I_{xy}).M_t^{max} \\ A_{12} &= (R_1/\Sigma\ R_1).A + (S_1/I_{xy}).M_t^{min} \\ A_{11}' &= (S_1/I_{xy}).M_t^{max} \\ A_{12}' &= (S_1/I_{xy}).M_t^{min} \\ A_{q1} &= (R_1/\Sigma\ R_1).A \end{aligned} \qquad (49)$$

Se determina así el corte estático horizontal equivalente (que se hace actuar sobre el elemento tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda), estados que superpuestos a las demás acciones presentes, permiten establecer las solicitaciones totales en los distintos planos estructurales, con las que corresponde verificar el predimensionado efectuado al iniciar el análisis.

Las consideraciones efectuadas en el apartado anterior permiten determinar en forma inmediata para cada elemento la situación más desfavorable de entre las 4 primeras opciones. En efecto, si A_q y A_t se suman, corresponde considerar el mayor momento flector de entre los dos que corresponden a la dirección considerada. Si se restan debe considerarse el momento torsor mínimo, cabiendo aquí dos posibilidades: si M_t^{min} es de signo contrario al de M_t^{max}, A_t se suma al valor de A_q, mientras que si son del mismo signo, se toma directamente el valor de A_q en virtud de la quinta condición de las (49).

5.3.3. Superposición de efectos.

En los apartados 5.3.1.1. y 5.3.1.2. se desarrollaron los efectos producidos por las traslaciones según las dos direcciones

principales y por las rotaciones del diafragma rígido. A los efectos de estudiar el comportamiento de la estructura para un estado de solicitación complejo, como por hipótesis la distribución de esfuerzos se realiza en régimen elástico, es válido el principio de superposición.

Supuesta la acción estática equivalente al sismo de proyecto ($A = F_s$) actuando en una dirección cualquiera, aplicada en CM, la misma puede ser reemplazada por el sistema equivalente de sus tres componentes según los ejes principales que pasan por el centro de rigidez

$$A_x = A.\cos\alpha \quad ; \quad A_y = A.\operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad M_t = A.(e \pm 0{,}15.l)$$

Puede demostrarse que el esfuerzo máximo en cada elemento ocurre para una dirección que en general no coincide con las principales, y que ademas, es distinta para cada uno; sin embargo, la diferencia es poco notable mientras el ángulo sea inferior a 20°. Esto ocurre en la mayoría de las construcciones y justifica el criterio de todos los reglamentos que se limitan a exigir el análisis independiente en las dos direcciones principales para los casos usuales, con lo que aquél se simplifica sin que los errores superen los que se derivan de las propias hipótesis básicas y de la misma naturaleza aleatoria del fenómeno.

Cuando no todos los elementos se ajusten a las direcciones principales y no se realice su determinación siguiendo el procedimiento que se indicará en el apartado 5.4., suele ser suficiente analizar la construcción para dos direcciones perpendiculares y una tercera a 45° con ellas.

5.3.4. Resolución Matricial.

5.3.4.1. Formulación por reducción al centro de rigidez.

Escribiendo en forma matricial las (35)

$$\begin{matrix} A_x = R_{xx}.X_R \\ A_y = R_{yy}.Y_R \\ A_z = I_{xy}.Z \end{matrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & R_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xy} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z \end{bmatrix} \qquad (50)$$

expresión en la que se relacionan las acciones y los desplazamientos totales (o nodales) actuantes sobre la estructura, con las correspondientes rigideces traslacionales y rotacional, también totales, a través de la denominada matriz de rigidez de nudo. Llamando en consecuencia

$$[A_n] = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \; ; \; [R_n] = \begin{bmatrix} R_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & R_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xy} \end{bmatrix} \; ; \; [D_n] = \begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z \end{bmatrix}$$

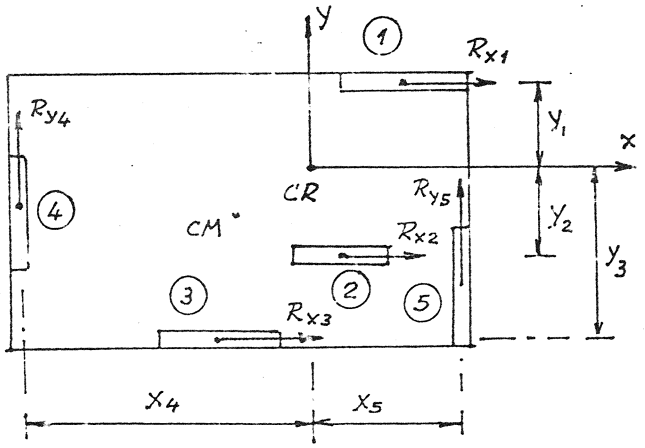
la (50) puede escribirse también

$$[A_n] = [R_n].[D_n] \qquad (51)$$

de donde

$$[D_n] = [R_n]^{-1}.[A_n] \qquad (52)$$

Si se aplica ahora el mismo concepto a los elementos sismorresistentes verticales individualmente considerados, de rigidez R_{xi} o R_{yi}, solicitados por acciones A_{xi} o A_{yi} y que experimentan desplazamientos D_{exi} o D_{eyi} (figura 29, donde a nivel genérico se supusieron 5 elementos sismorresistentes), la aplicación individual de los dos primeros miembros de las (24) permitirá escribir



$$A_{x1} = R_{x1}.D_{ex1}$$
$$A_{x2} = R_{x2}.D_{ex2}$$
$$A_{x3} = R_{x3}.D_{ex3}$$
$$A_{y4} = R_{y4}.D_{ey4}$$
$$A_{y5} = R_{y5}.D_{ey5}$$

Figura 29

o bien, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{x2} \\ A_{x3} \\ A_{y4} \\ A_{y5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{x2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{y4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{y5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D_{ex1} \\ D_{ex2} \\ D_{ex3} \\ D_{ey4} \\ D_{ey5} \end{bmatrix} \qquad (53)$$

Llamando

$$[A_e] = \begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{x2} \\ A_{x3} \\ A_{y4} \\ A_{y5} \end{bmatrix} ; \quad [R_e] = \begin{bmatrix} R_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{x2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{y4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{y5} \end{bmatrix} ; \quad [D_e] = \begin{bmatrix} D_{ex1} \\ D_{ex2} \\ D_{ex3} \\ D_{ey4} \\ D_{ey5} \end{bmatrix}$$

se puede expresar la (53) mediante

$$[A_e] = [R_e].[D_e] \qquad (54)$$

que relaciona las acciones y los desplazamientos de los elementos individuales con la matriz de rigidez de tales elementos.

Teniendo presente las (23), para el caso genérico supuesto, puede expresarse algebraicamente

$$D_{ex1} = X_R + y_1.Z$$
$$D_{ex2} = X_R + y_2.Z$$
$$D_{ex3} = X_R + y_3.Z$$
$$D_{ey4} = Y_R + x_4.Z$$
$$D_{ey5} = Y_R + x_5.Z$$

o bien, en formulación matricial

$$\begin{bmatrix} D_{ex1} \\ D_{ex2} \\ D_{ex3} \\ D_{ey4} \\ D_{ey5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y_R \\ Y_R \\ Z \end{bmatrix} \qquad (55)$$

En donde el vector del primer miembro corresponde a $[D_e]$, mientras que la matriz que constituye el primer factor del segundo miembro, contiene los valores de los desplazamientos en las direcciones de *x*, de *y* y de la rotación, cuando $X_R = 1$; $Y_R = 1$ y $Z = 1$, de modo que la referida matriz corresponde a la $[D_{exu}]$. En consecuencia

$$[D_e] = [D_{exu}].[D_n] \qquad (56)$$

Llevando esta expresión a la (54)

$$[A_e] = [R_e].[D_{exu}].[D_n] \qquad (57)$$

Las analogías precedentemente expresadas con relación al desarrollo efectuado en el apartado 3 del Capítulo VI, permiten hacer extensivo al presente caso, los conceptos de los trabajos de nudo y de elementos, expresados mediante las (24) y (26) del referido Capítulo VI, o sea

$$T_{An} = X_R.A_x + Y_R.A_y + Z.A_z = [D_n]^T.[A_n]$$

$$T_{Ae} = D_{ex1}.A_{x1} + D_{ex2}.A_{x2} + D_{ex3}.A_{x3} + D_{ey4}.A_{y4} + D_{ey5}.A_{y5} =$$

$$= [D_e]^T.[A_e]$$

En virtud de la demostración efectuada en el referido apartado y aplicando la conclusión del TTV aplicado al método de la rigidez (expresión (30) del Capítulo VI)

$$[D_n]^T.[A_n] = [D_e]^T.[A_e]$$

Llevando a esta expresión la correspondiente a la (56), previa transposición, y la (57)

$$[D_n]^T.[A_n] = [D_n]^T.[D_{exu}]^T.[R_e].[D_{exu}].[D_n]$$

Simplificando

$$[A_n] = [D_{exu}]^T.[R_e].[D_{exu}].[D_n] \qquad (58)$$

comparando con la (51) se observa que

$$[R_n] = [D_{exu}]^T.[R_e].[D_{exu}] \qquad (59)$$

Llamando a

$$[R_e].[D_{exu}] = [B] \qquad (60)$$

$$[R_n] = [D_{exu}]^T.[B] \qquad (61)$$

Teniendo en cuenta que los valores a resolver son los que corresponden a la fracción de la acción sísmica a la que cada elemento se ve sometido, contenida en el vector $[A_e]$, reemplazando las (60) y (52) en la (57)

$$[A_e] = [B].[R_n]^{-1}.[A_n] \qquad (62)$$

y llamando

$$[B].[R_n]^{-1} = [A] \qquad (63)$$

se tiene finalmente

$$[A_e] = [A].[A_n] \qquad (64)$$

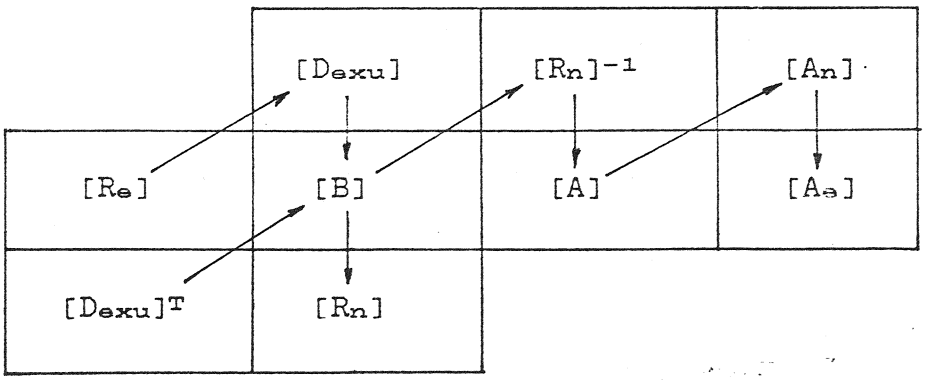
en donde $[A_e]$ contiene las acciones actuantes en cada elemento individual; $[A]$ es una matriz de distribución y $[A_n]$ es la matriz de las acciones sísmicas en la planta para las 4 primeras situaciones contempladas según las (49), cuya configuración será, adoptando para la fuerza sísmica la nomenclatura de F_s para evitar confusiones con los términos "A" de la (64)

$$[A_n] = \begin{bmatrix} F_s & F_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_s & F_s \\ M_{t1}{}^x & M_{t2}{}^x & M_{t1}{}^y & M_{t2}{}^y \end{bmatrix} \qquad (65)$$

La eventual ocurrencia de la quinta condición de las (49) debe ser analizada por separado.

5.3.4.2. Esquema de operaciones matriciales.

Considerando ordenada y sucesivamente las (60), (61), (63) y (64), se puede formular el siguiente esquema de secuencia de operaciones matriciales



(66)

Cabe observar la correspondencia de esta expresión con la (40) del Capítulo VI, donde [B] equivale a la [A_{exu}] (acciones en cada elemento para desplazamientos unitarios en la planta); [R_n] equivale a la [a_{xxu}] (acciones nodales para igual condición) y [A_n] se corresponde con la [A_{xo}] (acciones de nudo).

Asimismo, la inversión de la [R_n], al ser ésta siempre una matriz diagonal, se obtiene en forma directa. En efecto, recordando los criterios para inversión de matrices de 3 x 3 desarrollados en el punto b) del Anexo 3 del Capítulo III, si

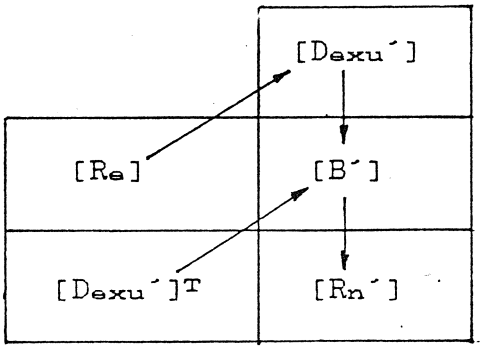
$$[R_n] = \begin{bmatrix} R_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & R_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xy} \end{bmatrix}$$

$$[R_n]^{-1} = \frac{1}{R_{xx}.R_{yy}.I_{xy}} \begin{bmatrix} R_{yy}.I_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & R_{xx}.I_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & R_{xx}.R_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{xy} \end{bmatrix}$$

5.3.4.3. Generalización considerando un sistema de ejes arbitrario.

El procedimiento matricial desarrollado en el apartado anterior exige efectuar en forma independiente al mismo, los cálculos conducentes a la determinación de las coordenadas del centro de rigidez, a fin de referir (a través de x_1 y de y_1), las posiciones de cada elemento sismorresistente al sistema de ejes con origen en aquél y el cálculo de los valores de los 4 momentos torsores a considerar.

Todas las operaciones mencionadas pueden quedar incorporadas en el proceso de cálculo matricial, efectuando la referenciación de partida a un par de ejes arbitrarios. Bajo tal supuesto, son extensivas las consideraciones y pasos de análisis desarrollados en el apartado anterior hasta la obtención de la [R_n], o sea



(67)

Sin embargo, teniendo en cuenta el sistema de ejes ahora adoptado, la [R_n´] tomará la forma que surge del sistema de ecuaciones (32), es decir

$$[R_n'] = \begin{bmatrix} R_{xx} & 0 & S_x \\ 0 & R_{yy} & S_y \\ S_x & S_y & I_{xy} \end{bmatrix}.$$

De aquí pueden calcularse x_{CR} e y_{CR} mediante las (34) y a partir de ellas el valor de las excentricidades.

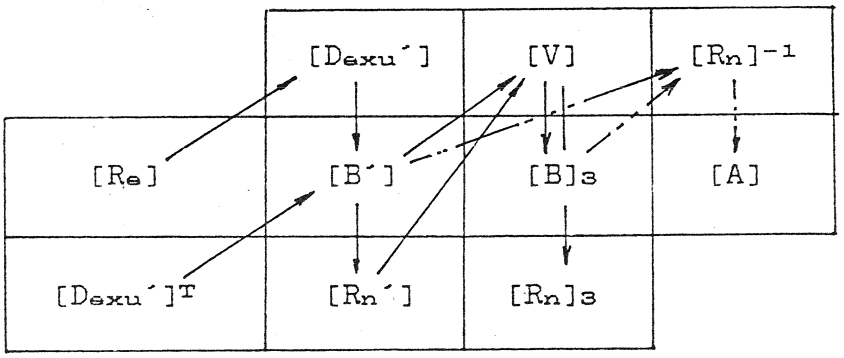
Si en estas condiciones se agrega al esquema de cálculo matricial parcial dado por la (67) una columna más, constituida por el vector

$$[V] = \begin{bmatrix} -y_{CR} \\ -x_{CR} \\ 1 \end{bmatrix}$$

y si se multiplica

$$[B'].[V] = [B]_3 \qquad y \qquad [R_n'].[V] = [R_n]_3$$

se obtendrán ordenadamente, las terceras columnas de las matrices [B] y $[R_n]$ resultantes del proceso de cálculo anterior, permaneciendo las dos primeras columnas de la [B] análogas en ambos procedimientos, mientras que la $[R_n']$ puede reformularse en su forma de matriz diagonal, invertirla y multiplicarla por la [B] (considerando las dos primeras columnas de la [B'] y como tercera columna la $[B]_3$, o sea que el proceso iniciado mediante la (67) se completa con



(68)

Un segundo cuadro matricial permite incorporar el cálculo de los momentos torsores, a fin de obtener la $[A_n]$. Para ello se formula una matriz [F] que contiene las acciones sísmicas, de la forma (recordando que $F_e = A$)

$$[F] = \begin{bmatrix} F_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_e & -F_e \end{bmatrix}$$

y una matriz [C] con las excentricidades y las dimensiones principales de la planta multiplicadas por 0,15

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_y & 0 & 0{,}15\ l_y & 0 \\ 0 & e_x & 0 & 0{,}15\ l_x \end{bmatrix}$$

Si en lugar de un sistema de ejes arbitrarios se adopta el par de ejes con origen en CM, la anterior se expresará directamente por

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_{CR} & 0 & 0{,}15\ l_y & 0 \\ 0 & x_{CR} & 0 & 0{,}15\ l_x \end{bmatrix}$$

Finalmente se introduce una matriz auxiliar [T], independiente de los datos y de la forma

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

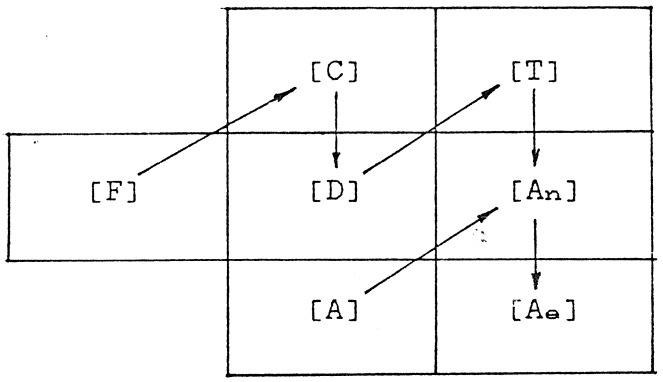
Llamando

$$[D] = [F].[C]$$

se tendrá finalmente

$$[A_n] = [D].[T] \qquad y \qquad [A_e] = [A].[A_n]$$

Resumiendo, el segundo cuadro de operaciones responde al siguiente esquema



(69)

que permite la determinación de las acciones actuantes sobre cada elemento sismorresistente bajo las cuatro primeras condiciones extremas supuestas.

5.4. Elementos no ortogonales.

En el caso más general, aunque menos frecuente, de que los elementos sismorresistentes tengan direcciones cualesquiera, las ecuaciones planteadas se complican, hallándose su deducción fuera del alcance del presente Capítulo, por lo que sólo se consignarán las expresiones finales de aplicación.

Al ser los elementos no ortogonales, las direcciones principales ya no son conocidas de antemano y no coincidirán, en general, con las de los planos resistentes. Determinar su posición se constituye en consecuencia como el primer paso del proceso.

Si se denomina por β_i el ángulo que forma el elemento genérico i de rigidez R_i, el ángulo α que define la posición de la dirección principal I con respecto al eje de referencia x (figura 30), resulta de

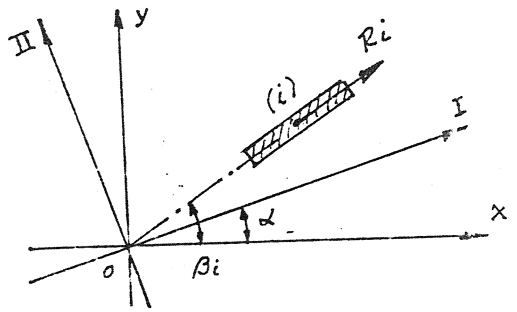


Figura 30

$$\alpha = \frac{1}{2}.\text{arc tg} \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i.\text{sen } 2\beta_i}{\sum_{i=1}^{n} R_i.\cos 2\beta_i}$$

La segunda dirección principal (II) forma un ángulo de 90° + α respecto al eje x.

La rigidez total de la planta según cada una de las direcciones principales se calcula mediante

$$R_{I-I} = \sum_{i=1}^{n} R_i.\cos^2(\beta_i - \alpha)$$

$$R_{II-II} = \sum_{i=1}^{n} R_i.\text{sen}^2(\beta_i - \alpha)$$

tomando para α el valor del primer cuadrante.

El paso siguiente lo constituye establecer la ubicación del centro de rigidez. Para ello debe determinarse la intersección de las rectas de acción de las rigideces totales, ya sea en forma gráfica o analítica.

Para un desplazamiento unitario del diafragma en la dirección principal I, aparecerá en cada elemento una fuerza

$$F_i^I = R_i.\cos(\beta_i - \alpha)$$

y para un desplazamiento unitario en la dirección principal II

$$F_i^{II} = R_i.\text{sen}(\beta_i - \alpha)$$

Si se toman momentos respecto al origen de coordenadas

$$R_{I-I}.d_I = \Sigma\, F_i^{I}.d_i \quad ; \quad d_I = \frac{\Sigma\, F_i^{I}.d_i}{R_{I-I}}$$

$$R_{II-II}.d_I = \Sigma\, F_i^{II}.d_i \quad ; \quad d_{II} = \frac{\Sigma\, F_i^{II}.d_i}{R_{II-II}}$$

Con estos valores de d_I y d_{II} pueden determinarse las coordenadas del centro de rigidez mediante

$$x_{CR} = -\, d_I.\mathrm{sen}\,\alpha + d_{II}.\cos\alpha$$
$$y_{CR} = \; d_I.\cos\alpha + d_{II}.\mathrm{sen}\,\alpha$$

Finalmente los esfuerzos en cada elemento se calculan por

$$F_i^{I} = F_e.\frac{R_i.\cos(\beta_i - \alpha)}{R_{I-I}} + M_t^{I}.\frac{R_i.d_{iR}}{\Sigma\, R_i.d_{iR}^2}$$

$$F_i^{II} = F_e.\frac{R_i.\mathrm{sen}(\beta_i - \alpha)}{R_{II-II}} + M_t^{II}.\frac{R_i.d_{iR}}{\Sigma\, R_i.d_{iR}^2}$$

La deducción de estas expresiones puede consultarse en la referencia bibliográfica 7.

6. PRINCIPOS BASICOS DE DISEÑO SISMORRESISTENTE.

6.1. El diseño estructural.

Es frecuente en la práctica, que la mayor parte del tiempo que se dedica al diseño estructural de un edificio, se invierta en los procesos de análisis y dimensionado de los elementos componentes, mientras que se examinan con brevedad los aspectos de diseño conceptual, de estructuración y de detalles constructivos. Desde el punto de vista del diseño sísmico, esta costumbre es particularmente peligrosa, puesto que no se puede lograr que un edificio mal estructurado se comporte en forma satisfactoria ante sismos, por mucho que se refinen los procedimientos de cálculo. Por el contrario, la experiencia obtenida en muchos terremotos muestra que los edificios bien concebidos estructuralmente han tenido comportamientos adecuados, aunque no hayan sido objeto de cálculos sofisticados.

El concepto que debe orientar el diseño estructural de una construcción a erigir en zona sísmica lo constituye la naturaleza dinámica de las solicitaciones. No se trata en estos casos de cargas o fuerzas en el sentido estricto, sino de movimientos que inducen aceleraciones variables en todos los componentes de la construcción. Como consecuencia, las diversas partes del edificio experimentarán desplazamientos relativos durante el transcurso del

fenómeno, es decir, en un lapso tan breve que no permite reacomodamientos de los materiales. La amplitud de estos movimientos depende de muchas circunstancias, pero puede llegar a ser muy apreciable y seguramente superar, salvo que sean debidamente considerados, las posibilidades de deformación de las partes no estructurales: muros de cerramiento, conductos de instalaciones, artefactos y carpinterías.

En íntima relación con los conceptos precedentes está la respuesta dinámica de la construcción y del sistema construcción - fundación - terreno. En definitiva interesa la energía que la construcción recibe durante el sismo, la que se debe tratar de disminuir mediante el diseño adecuado, tanto del conjunto como de sus partes.

6.2. Criterios de estructuración.

Los conceptos a tomar en consideración al estructurar edificios propensos a soportar sismos, constituyen una guía que se debe procurar seguir en el diseño sísmico de edificios, aunque, naturalmente, sólo se trata de lineamientos generales, que corresponde sean conjugados con el criterio y la experiencia ingenieriles. No obstante, en lo posible se debe evitar apartarse de estos lineamientos; de no ser así, el edificio debe ser materia de un análisis y dimensionado muy cuidadosos que consideren los efectos desfavorables que podrían originarse. Se encontrará en ciertos casos que del mismo análisis particular surge la inconveniencia del sistema propuesto y la necesidad de su modificación.

La respuesta de un edificio ante la acción de solicitaciones sísmicas depende de las características de masa y rigidez de su sistema estructural. Son asimismo importantes la resistencia, el amortiguamiento y la capacidad de absorción de energía. Cabe destacar que arquitectos e ingenieros pueden, en el momento de concebir la forma y características generales de un edificio, influir apreciablemente en la magnitud y distribución de varias de estas propiedades y, por tanto, incidir en forma decisiva en el comportamiento sísmico del futuro edificio.

Se describen a continuación características que, según la experiencia adquirida del estudio de los efectos de los sismos intensos en edificios, son recomendables para lograr un comportamiento satisfactorio.

6.2.1. Poco peso.

Reconociendo que las fuerzas de inercia son proporcionales a la masa y, en consecuencia, al peso del edificio, las acciones que por sismo se ejercen sobre la estructura serán tanto más intensas cuanto más pesada sea la construcción. Así la carga muerta (que en términos muy generales puede ser del orden del 85% de las cargas verticales totales), constituye en general una desventaja durante los sismos; por ello debe procurarse que tanto la estructura como los elementos no estructurales tengan el menor peso posible, resultando necesario desarrollar los detalles de construcción y la

selección de los materiales a utilizar, en forma tal de evitar la creación de carga muerta innecesaria, en especial en los niveles superiores del edificio. Sin embargo, para lograr un adecuado balance, debe tenerse presente que, por el contrario, las cargas permanentes son útiles para la resistencia al vuelco y constituyen una necesidad para las cimentaciones que deben anclar al edificio.

Es importante observar asimismo que en voladizos o en vigas de gran luz, el peso excesivo puede producir también fuerzas de inercia verticales de magnitud apreciable, que se sumarían a las de gravedad, y que conviene reducir al mínimo.

6.2.2. Transferencia de cargas.

En el diseño para cargas laterales resulta fundamental que las trayectorias de las fuerzas sean completas, debiendo éstas "viajar" desde sus lugares de origen, a través de todo el sistema, hasta el terreno. El diseño de las vinculaciones entre los elementos que transmiten las cargas y los que las reciben, es altamente importante para la integridad de todo el sistema sismorresistente. La habilidad para visualizar las trayectorias de las cargas y un razonable entendimiento del funcionamiento de los diversos elementos estructurales y de los detalles constructivos del edificio son requisitos previos para un correcto análisis de diseño.

Con frecuencia las fuerzas sísmicas generan demandas resistentes muy severas en las uniones de los elementos estructurales, debido a los efectos dinámicos de las sacudidas. Muchas formas de conexión que pueden ser adecuadas para resistir cargas estáticas, fallan ante el impacto y los efectos de aflojamiento que produce la acción sísmica. La falla de una buena parte de edificios y otras construcciones durante los sismos, se ha debido a problemas en las conexiones, aún cuando las estructuras estuviesen diseñadas de acuerdo con los requerimientos de los códigos atinentes y con las prácticas aceptadas. De allí que se preste cada vez más atención a este tipo de problemas.

6.2.3. Sencillez, simetría y regularidad en planta.

Existen diversas razones para buscar la *sencillez* en la estructuración. En primer lugar, se entiende mejor de esta forma el comportamiento sísmico global con respecto al de una estructura compleja; en segundo lugar es más fácil preparar, dibujar, comprender y construir detalles estructurales. Además, la falta de regularidad de la estructura da lugar, generalmente, a falta de simetría, ya sea en masas, rigideces o resistencias, produciendo por ello efectos de torsión difíciles de evaluar con precisión y, en el caso de sismos intensos, hace que las deformaciones anelásticas se concentren en determinadas zonas (las más débiles), produciendo daños que pueden llegar a ser muy apreciables.

La seria influencia de la asimetría en el comportamiento estructural ha sido reconocida en los estudios técnicos atinentes al tema, dándosele por lo general mucha importancia. Las directrices para eliminar (o por lo menos reducir sus efectos) se

han concentrado en la propuesta de ajustar las rigideces con el objeto de evitar excentricidades torsionantes apreciables. Sin embargo, aún si las excentricidades calculadas fuesen despreciables, pueden desarrollarse momentos torsores significativos, por ejemplo, en el caso que rigideces elevadas de determinados miembros estructurales ubicados en el extremo del edificio, estén equilibradas por elementos muy disímiles en el otro, ya que los valores teóricamente calculados para las rigideces relativas pueden, en tales condiciones, no ajustarse plenamente a la realidad.

Adicionalmente a lo anterior, existe la posibilidad que se generen excentricidades de magnitud variable como consecuencia de un comportamiento no lineal en la respuesta de los elementos sismorresistentes, aún en aquellos casos en que un análisis lineal prediga esfuerzos no torsionantes. Por todas estas razones es deseable que las estructuraciones sean lo más simétricas posibles, no sólo respecto a las rigideces totales, sino también en lo relativo a la magnitud de los valores correspondientes a cada elemento y al tipo y material constitutivo de los mismos.

Concordantemente con lo anterior, no son convenientes formas muy alargadas en planta y, en lo posible, deben evitarse las plantas con entrantes o salientes. A título ilustrativo, en la figura 31 se muestran algunas plantas que presentan entrantes o salientes con dimensiones que, de acuerdo a lo preconizado por el Applied Technology Council de los Estados Unidos, ya deben ser consideradas como irregularidades, situación que se presenta cuando A/L > 0,15 a 0,20.

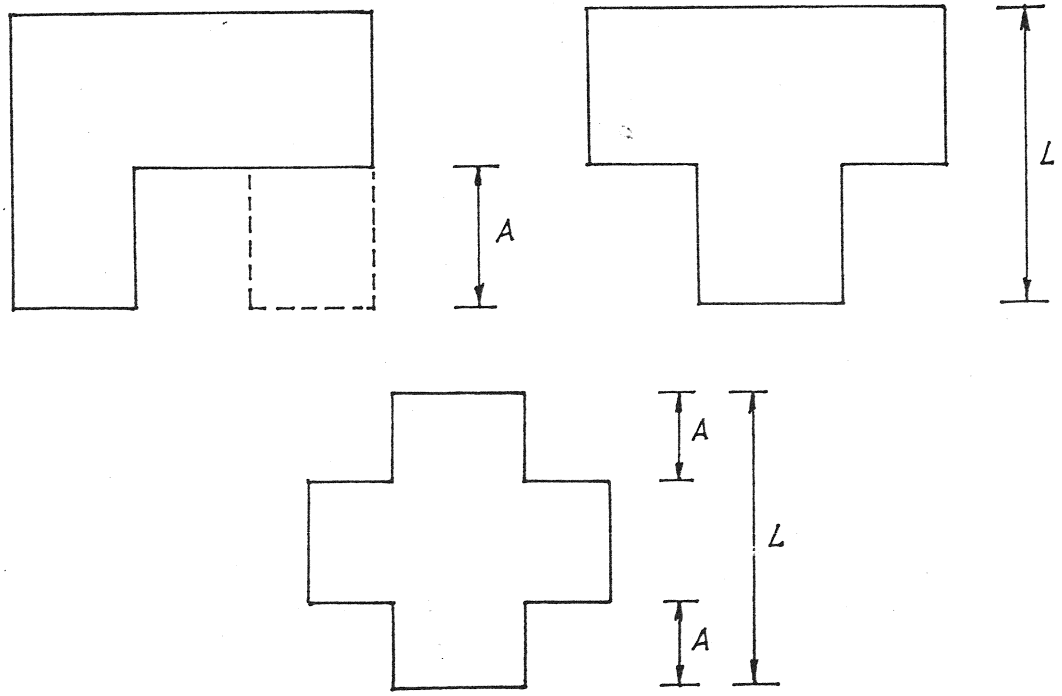


Figura 31

En caso que las dimensiones de entrantes sean mayores (plantas en forma de T, L, H, U, etc.), y la magnitud de la dimensión L lo justifique, puede resultar conveniente utilizar juntas de construcción que dividan la planta global en varias formas rectangulares independientes.

Aún cuando geométricamente la planta cumpla los requisitos anteriores (siendo rectangular por ejemplo), también puede llegar a deber ser considerada como irregular debido a una distribución excéntrica de rigideces o de masas, tal como se muestra en la figura 32, donde se han remarcado en negro los elementos verticales sismorresistentes y con área rayada una eventual masa más pesada. También las situaciones presentadas constituyen una fuente de torsiones indeseables y riesgosas.

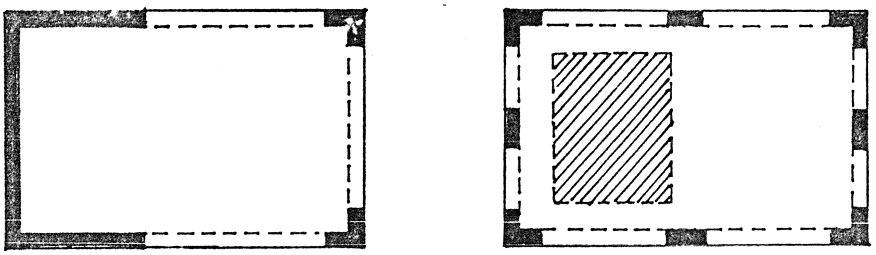


Figura 32

La figura 33 ilustra un tercer caso de irregularidad en planta, debido a que los diafragmas presentan diferentes rigideces en su plano, lo cual da lugar a distribuciones irregulares de las fuerzas de inercia que se producen en los pisos respectivos entre los elementos verticales sismorresistentes. El caso que presenta la figura 33a) supone la presencia de una losa rígida en el sector A y de un diafragma flexible en el B, mientras que en la figura 33b), la losa de rigidez tiene un hueco o vacío en su parte central.

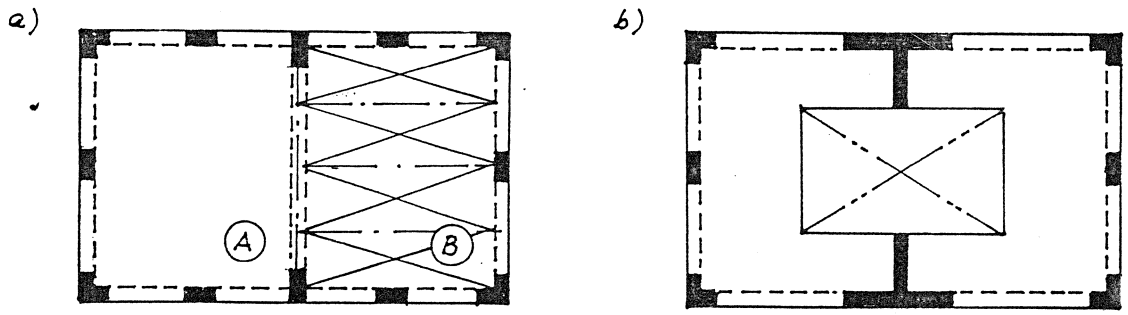


Figura 33

Una recomendación adicional es la de no concentrar los elementos más rígidos y resistentes en la zona central de las

plantas, ya que son menos efectivos para resistir torsiones. Así, aunque puedan llegar a ser aceptables las plantas de la figura 34a), son preferibles las de la figura 34b), que difieren de las anteriores en que cuentan con elementos de mucha rigidez en la periferia. Los elementos de los casos a) podrían verse sujetos a esfuerzos de corte por torsión sensiblemente mayores que las de los casos b), en donde reciben importante ayuda de los muros o tabiques periféricos. Cabe observar que en los 4 casos presentados, coinciden la ubicación del centro de masas y del centro de rigidez, pero en las plantas de la figura 34b), es mucho mayor el valor de I_{xy}, con lo que resulta mucho menor la incidencia del momento torsor y como consecuencia, del esfuerzo de corte por torsión resultante en los elementos externos.

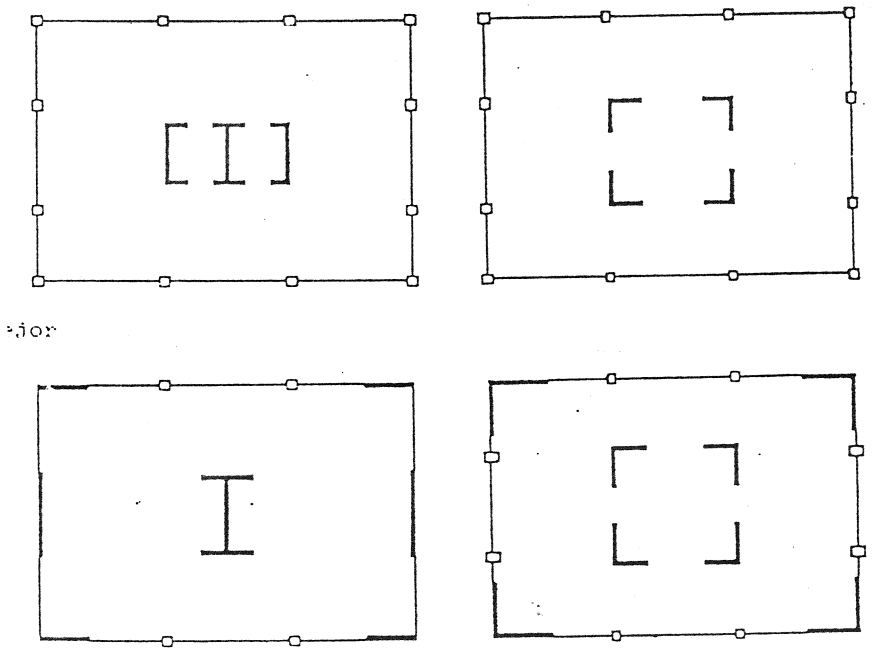


Figura 34

Las ventajas de eliminar (o reducir al máximo) la torsión y lograr estructuraciones sensiblemente simétricas son tanto mayores cuanto más alto sea el edificio. Ello obedece a que las amplificaciones dinámicas de los efectos de torsión son más importantes en estructuras flexibles y existe la posibilidad de que sean limitadas por absorción de energía en el intervalo plástico. La atención que se preste a la simetría estructural, debe ser, por tanto, función creciente de la altura del edificio.

6.2.4. Plantas poco alargadas.

Es recomendable también procurar que las plantas no sean muy alargadas, pues mientras mayor sea la dimensión relativa de un lado respecto al perpendicular, mayor es la posibilidad de que actúen sobre el edificio movimientos que difieren entre un extremo y otro del mismo, lo cual es opuesto a la suposición usual de análisis sísmico, y puede producir en el edificio efectos perjudiciales.

Nuevamente se sugieren, en casos extremos, juntas que dividan al edificio en varios cuerpos de formas no alargadas.

6.2.5. Sencillez, simetría y regularidad en elevación.

La sencillez y simetría en elevación son recomendables por los mismos motivos que lo son en planta. Además, en elevación es conveniente que no existan cambios bruscos en las dimensiones del edificio, ni en las distribuciones de masas, rigideces y resistencias. El principal objetivo es evitar que se produzcan concentraciones de esfuerzos en ciertos pisos que resulten *débiles* con respecto a los demás, lo que puede dar lugar a que en un solo piso se forme un mecanismo de desplazamiento lateral, como se analizará en el apartado 6.3., con articulaciones plásticas en los extremos de las columnas de ese nivel, siendo probable que en esas secciones se generen demandas de giros anelásticos mayores de las que son capaces de soportar, por lo que se producirá el colapso del piso entero.

Los cambios bruscos en elevación hacen también que ciertas partes del edificio se comporten como apéndices, con el riesgo de que se produzca el fenómeno de amplificación dinámica de fuerzas conocido como *chicoteo*, que en sismos reales ha demostrado ser muy dañino.

Para graficar los conceptos precedentes, se muestran en la figura 35 algunos cambios bruscos de geometría, para los que se recomienda que A/L sea menor al valor que en cada caso se indica; en la figura 36 casos de concentraciones de masas en algunos niveles que deben ser consideradas como irregularidades, y finalmente en la figura 37, estructuras que presentan cambios bruscos de rigideces y resistencias. Además de los inconvenientes antes señalados, estos casos son difíciles de analizar por sismo, aún con el uso de computadoras.

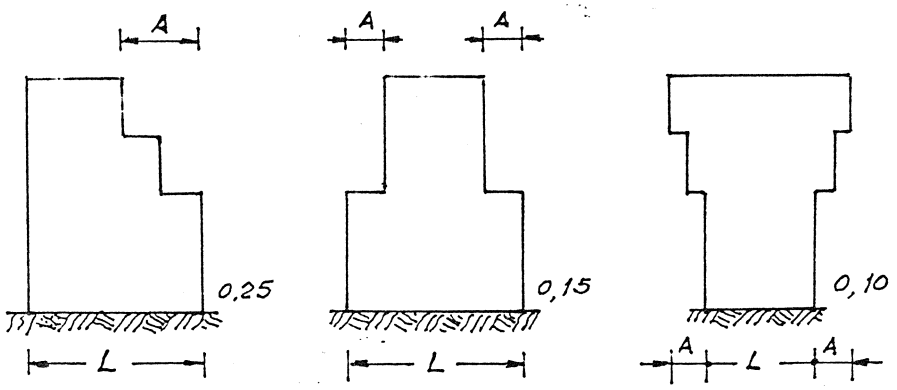


Figura 35

En cuanto a la relación entre la altura total y la dimensión mínima de la base del edificio, algunos autores sugieren que ésta no pase de cuatro, con el objeto de poder transmitir adecuadamente los momentos de vuelco a los pisos inferiores y a la cimentación y, en particular, de reducir las fuerzas que estos momentos producen en las columnas exteriores de los primeros niveles.

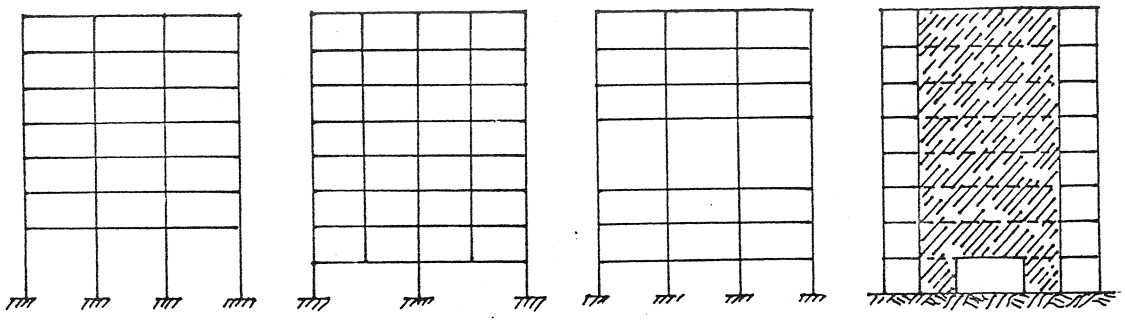


Figura 36

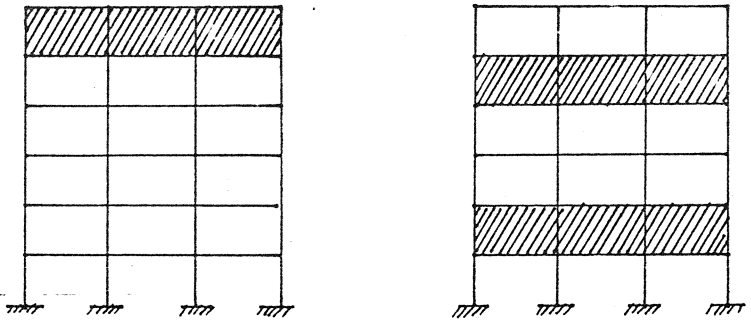


Figura 37

6.2.6. Uniformidad en la distribución de resistencia y rigidez.

Esta recomendación se halla ligada a las de regularidad y simetría en planta y elevación. Se pueden formular además algunas reglas de uniformidad que brindarán a la estructura mejores posibilidades de un buen comportamiento ante un sismo. Entre ellas están:

* que los elementos que soportan las cargas verticales (columnas, muros y/o tabiques) estén distribuidos uniformemente y sean continuos desde la fundación hasta el último nivel;
* que en lo posible, las luces y las alturas (cada cual por su parte) tengan dimensiones similares;
* que las vigas y columnas estén en el mismo plano y que sus ejes se intersecten, con el propósito de lograr que exista una adecuada transmisión de esfuerzos entre tales elementos;
* que las columnas y vigas contiguas sean de dimensiones similares, para igual fin que el indicado precedentemente;
* que ningún elemento estructural importante cambie bruscamente de dimensiones ni de armadura.

Cabe tener presente que el empleo de luces muy desiguales en un pórtico de varias líneas de columnas ocasiona por la acción de las solicitaciones sísmicas, esfuerzos de corte y momentos flectores elevados en las vigas correspondientes a los tramos más cortos, que pueden llegar a alcanzar valores excesivos en edificios

altos y provocar, incluso, variaciones inconvenientes en la carga axial de las columnas adyacentes, variaciones que a su vez repercuten hasta en el diseño de la fundación, mientras que en edificios bajos estos efectos pueden ser insignificantes. En virtud de ello el grado de uniformidad que es deseable en los edificios altos puede ser innecesario en los bajos.

6.2.7. Hiperestaticidad: líneas escalonadas de defensa estructural.

La resistencia de un edificio a sismos depende de su ductilidad, o sea de su capacidad para disipar energía. Es prudente por ello el empleo de sistemas estructurales que puedan soportar sobrecargas considerables sin entrar en colapso y que posean una capacidad elevada de trabajo en régimen plástico, pues de este modo, cuanto más crítica sea la situación, mayor será la disipación de energía y en mayor medida la estructura tenderá a amortiguar la acción sísmica. En consecuencia, mientras mayor continuidad y monolitismo tenga el sistema estructural, o sea, mientras más hiperestático sea, mayor será su posibilidad de que, sin convertirse en un mecanismo inestable, se formen en él articulaciones plásticas, con alta capacidad de absorción de energía mediante deformaciones plásticas, con el consiguiente comportamiento aceptable ante sismos. En otras palabras, el grado de hiperestaticidad y el comportamiento en fase plástica hacen posible que las estructuras hiperestáticas tengan varias líneas de defensa ante los terremotos, y que aunque se produzca la falla en algunos elementos, quedan todos los restantes para seguir resistiendo al sismo. Siguiendo la misma idea, puede convenir diseñar la estructura para que durante un sismo intenso los daños se concentren en zonas previstas, de fácil reparación, para servir como *fusibles estructurales*, disipadores, mediante deformaciones plásticas, de la mayor parte de la energía que introduce el sismo, sin que se produzcan daños graves en el resto de la estructura.

Como consecuencia de los conceptos anteriores, es poco favorable el uso de uno o pocos tabiques como elementos resistentes principales a cargas laterales, siendo preferible el empleo de una serie de elementos de estas características acoplados por vigas diseñadas para que en ellas se formen articulaciones plásticas (figura 40).

En esta misma dirección, se hallan las recomendaciones que señalan las ventajas de permitir conscientemente la falla de elementos relativamente frágiles ante sismos de intensidad media, dejando intacto un esqueleto más flexible y dúctil para resistir sismos de mayor violencia y movimientos subsecuentes. Los elementos frágiles pueden ser, por ejemplo, muros divisorios de mampostería poco resistente. Ante sismos moderados tales muros tomarán casi la totalidad de las cargas laterales, satisfaciendo así los requerimientos de tranquilidad y comodidad de los ocupantes. Ante movimientos mayores estos muros fallarán y la mayor flexibilidad de los pórticos remanentes los hará capaces de absorber sismos de gran intensidad. Puede caber incluso la posibilidad de pensar en más de dos sistemas resistentes.

En diseños del tipo del indicado, es conveniente aprovechar como elementos condicionados a la falla, los que están revestidos de materiales poco costosos, cuya falla no involucre peligro para los ocupantes, y que sean además de reparación relativamente sencilla. Es importante también cuidar que la falla de los elementos de la primera defensa no modifique radicalmente la posición de los centros de torsión, ya que de lo contrario los sistemas posteriores de defensa podrían no cumplir adecuadamente su función.

El concepto relativo a las articulaciones plásticas y los mecanismos de colapso es tratado en el Capítulo IX.

6.3. Sistemas estructurales y de cimentación.

6.3.1. Pórticos.

Uno de los principales sistemas estructurales que se emplean para la conformación de estructuras sismorresistentes, son los pórticos con nudos rígidos continuos. En la figura 38a) se muestra esquemáticamente un pórtico sujeto a cargas laterales, junto con las articulaciones plásticas correspondientes a dos posibles mecanismos de colapso que dichas cargas pueden inducir. En el peor de los casos las articulaciones se forman en los extremos de las columnas de un solo entrepiso, dando lugar al que puede llamarse *mecanismo de movimiento lateral de columna* o mecanismo de falla de entrepiso (figura 38b), que demanda ductilidades muy grandes en las articulaciones en cuestión, casi seguramente imposibles de lograr, sobre todo en los niveles inferiores, en los que las cargas axiles son altas.

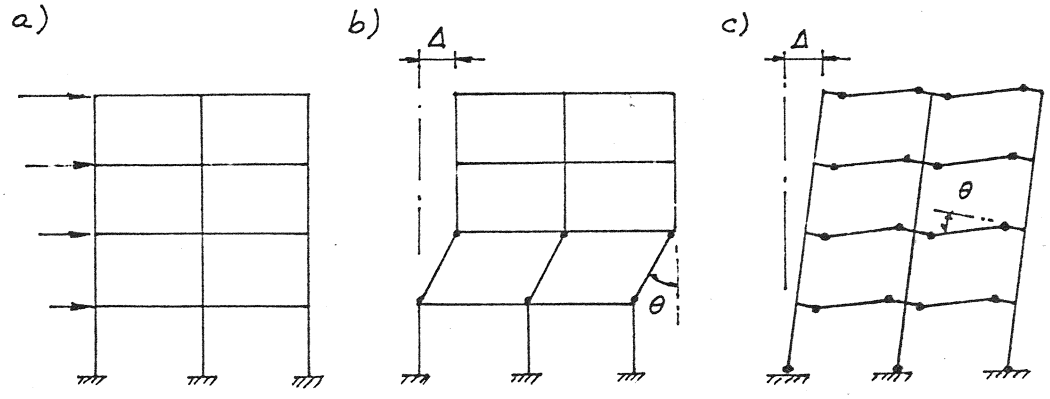


Figura 38

Por otra parte, en el caso opuesto, si la fluencia se presenta en las vigas, se desarrolla (salvo en la base del edificio) un *mecanismo de desplazamiento lateral de viga* o de falla de conjunto (figura 38c), para el que la demanda de ductilidad es mucho más moderada. Además, es más fácil diseñar las vigas para satisfacer dichas demandas y los daños en ellas son más fáciles de reparar que en las columnas.

6.3.2. Tabiques.

Otro sistema ampliamente empleado para resistir cargas laterales es el de los tabiques (o muros de rigidez), en especial en edificios de cierta altura, en los que cumplen la finalidad de limitar los desplazamientos laterales. En la figura 39a) se muestra el caso en que la estructura consiste en un solo tabique, que puede considerarse funcionalmente como una ménsula empotrada en la cimentación, por lo que en la base se producirán los momentos máximos de vuelco, con la posibilidad de que allí se forme una articulación plástica, como se ilustra en la figura 39b).

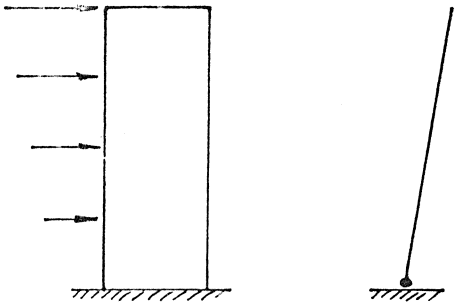


Figura 39

Se puede esperar que las demandas de ductilidad que impone este mecanismo puedan ser satisfechas por los tabiques si se cuida que las cargas axiales no sean altas y que no se produzcan problemas de inestabilidad lateral. Cabe recordar la conveniencia de concentrar la armadura en los extremos, y tener presente que la longitud que puede abarcar la articulación en la base es del orden de uno o dos pisos, y que es allí precisamente donde se producen los máximos esfuerzos de corte, por lo que deben estudiarse con cuidado los detalles constructivos en estas zonas para prevenir fallas por adherencia, por compresión en algún extremo o por corte, y lograr que rija la falla de tracción por flexión.

Con frecuencia los tabiques están acoplados por vigas a pórticos o a otros tabiques. Un caso particular es el de los tabiques vinculados entre sí por una hilera de vigas (figura 40a). En estos casos, las cargas laterales generan en las vigas de acoplamiento fuerzas cortantes y momentos flectores altos, por lo que es conveniente armar estas vigas en forma tal que tengan capacidad de rotación suficiente para que la energía introducida por el sismo se disipe mediante un mecanismo como el de la figura 40b).

Debe tenerse especial cuidado cuando las vigas de vinculación entre dos tabiques tienen una relación luz a altura menor que aproximadamente dos, porque en estas circunstancias no se puede prevenir la falla por corte mediante la armadura convencional de estribos verticales, habiéndose observado experimentalmente que resulta muy efectiva una armadura diagonal dentro de las vigas.

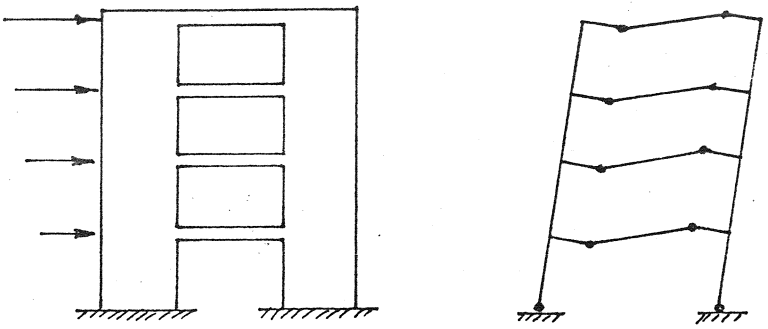


Figura 40

6.3.3. Cimentaciones.

La función esencial de una cimentación durante un sismo, es transmitir adecuadamente al suelo las acciones resultantes de las fuerzas generadas por el mismo en la superestructura y soportar apropiadamente los esfuerzos provenientes de las deformaciones del suelo circundante.

En general, para la elección del tipo de fundación, es deseable seguir los mismos lineamientos que se han recomendado para escoger la forma de la superestructura, tales como simetría, regularidad y distribución uniforme, por las mismas razones que para tales aspectos se expresaron. Así por ejemplo, debe evitarse al máximo combinar distintos sistemas de cimentaciones superficiales y profundas; se procurará que las cargas verticales se distribuyan simétricamente, que los momentos de vuelco no sean excesivos, y que la estructura no sea muy alargada en planta.

Otro principio general que debe seguirse es el de buscar que la cimentación tenga una acción de conjunto, que limite en lo posible los desplazamientos diferenciales horizontales y verticales, resultando por ello necesario vincular entre sí las zapatas, ya sea que apoyen directamente sobre el terreno o lo hagan a través de pilotes, mediante vigas de arriostramiento dimensionadas según lo especifiquen los códigos respectivos.

Las acciones que derivan de las fuerzas producidas en la estructura son momentos de vuelco y fuerzas cortantes. Los primeros usualmente no constituyen un problema para el edificio completo, a menos que éste sea muy esbelto; sin embargo, sí pueden presentarse dificultades en los casos de muros que toman la mayor parte de las cargas laterales. Naturalmente, en estos casos debe ponerse especial cuidado en que las presiones verticales no excedan de los valores admisibles del terreno, o de los pilotes o los pozos de fricción que constituyan el sistema de fundación.

El otro aspecto, con frecuencia olvidado por los diseñadores, es que la cimentación debe poder transmitir los esfuerzos de corte basales al terreno. En cimentaciones superficiales es usual suponer que la mayor parte de la resistencia a la carga lateral la

proporciona la fricción entre el suelo y la base de los elementos que resisten dicha carga lateral. Así, la resistencia total al deslizamiento de la estructura puede tomarse igual al producto de la carga muerta más la carga viva media de la estructura, multiplicada por el coeficiente de fricción correspondiente.

En suelos relativamente blandos con cimentaciones superficiales, es particularmente difícil evitar los desplazamientos diferenciales horizontales y verticales durante el sismo, por lo que resulta imperativa la práctica de vincular las zapatas entre sí por medio de vigas.

Las cimentaciones más profundas normalmente constan de un cajón, cuya resistencia y rigidez naturales son útiles para distribuir las fuerzas sísmicas en el suelo, evitando desplazamientos diferenciales. Para transmitir las fuerzas cortantes se cuenta en este caso también con los empujes pasivos del suelo sobre las paredes laterales del cajón, aunque para aprovechar esta acción deben tomarse medidas adecuadas tales como cuidar que el suelo esté bien compactado y que los muros estén correctamente dimensionados para resistir dichos empujes pasivos. En el caso de dimensiones grandes pueden requerirse muros interiores además de los perimetrales para dar suficiente rigidez y resistencia a la cimentación.

6.4. La economía estructural.

Usualmente la economía se constituye en el criterio de comparación para decidir entre varias alternativas estructurales. Es por ello que resulta de interés enunciar algunos principios de carácter general que hacen a su logro. Ante todo es preciso definir dos campos: el que se podría llamar de la *economía intrínseca* y el de la *economía funcional*. El primero se refiere a llegar al sistema estructural más económico para un conjunto de solicitaciones dado. El segundo a su vez, contempla el mayor o menor aprovechamiento del material estructural durante la vida útil de la construcción. Este último es de carácter más general.

Las acciones sísmicas intensas tienen, afortunadamente, una probabilidad de ocurrencia baja, pero su influencia es muy notable al momento de dimensionar los elementos estructurales. Todo el material adicional que se coloque para resistirlas estará en consecuencia desaprovechado la mayor parte del tiempo. Por ello, cuanto menor importancia tengan las solicitaciones generadas por las acciones sísmicas comparadas con las debidas a las cargas permanentes, tanto mayor será la economía funcional, aspecto que es de aplicación tanto a los elementos individuales como al conjunto. Por otra parte, la relación es fija para un edificio dado, de modo que la mayor economía se logra cuando todos los elementos soportan en igual proporción las solicitaciones producidas por cargas verticales y horizontales. Como consecuencia directa de ello se concluye que, al diseñar un mecanismo de resistencia para acciones sísmicas resulta conveniente utilizar aquellos elementos existentes por otros motivos, aunque sea necesario reforzarlos, evitando colocar miembros o estructuras adicionales.

Queda de esta manera definido el ámbito de la economía funcional en función de los criterios directrices que gobiernan un proyecto, o en otras palabras que constituyen su filosofía.

En cambio, la economía intrínseca se relaciona más con lo específico del diseño, vale decir, con la elección del tipo de materiales, de las tipologías para cada uno de los distintos sistemas estructurales y de su ubicación en el espacio; es decir, la elección del orden y del módulo estructural. Todos estos aspectos definen tanto para el conjunto como para cada uno de los elementos, cuales serán las solicitaciones características de trabajo y cual será su distribución en el sistema.

6.5. Compendio de criterios básicos.

Es evidente que las construcciones más resistentes contra sismos son aquellas en las que mejor se han previsto las solicitaciones que los mismos producen y más acertadamente hayan sido calculadas para resistirlas. Independientemente de esta aseveración indiscutible, las mejores edificaciones para soportar los terremotos son las siguientes:

** Por su resistencia*

Las que mejor pueden soportar empujes horizontales, ya sea oponiéndose a ellos o absorbiéndolos al flexionarse, sin romperse.

** Por su constitución*

1. Las construcciones más livianas. Como ya se ha indicado al tratar este aspecto, el hecho de que sean más ligeras no quiere decir que sean más débiles; pero como las fuerzas sísmicas son proporcionales a las masas, al ser éstas menores, también lo serán los esfuerzos resultantes.

2. Las más bajas. Cabe observar que para resistir cargas gravitacionales, una viga puede ser igual en el primer piso de un edificio bajo que en el de uno alto, pero contra sismos deberá ser mucho más resistente en el segundo caso. Hay que considerar también que la deformación en el extremo de una ménsula varía en proporción con el cubo de su longitud; que un edificio se puede considerar, con ciertas reservas, como una ménsula empotrada en el terreno y que los esfuerzos por sismo aumentan con las deformaciones. Sin embargo, la aseveración de que los edificios más bajos resisten mejor los terremotos, tiene sus limitaciones, puesto que cerca de los epicentros, donde generalmente las vibraciones del sismo son de períodos más cortos, es posible que se rompan con más facilidad las construcciones rígidas y bajas, que los edificios estructurales altos, pues éstos, gracias a su flexibilidad, amortiguan mejor los impactos.

3. Puede ser muy recomendable el uso de marquesinas resistentes, aunque no cubran toda la acera, pues protegen a los transeúntes y a quienes por instinto salen del edificio hacia

la calle, de las partes y vidrios de fachada que pueden caer durante el sismo.

4. Es fundamental emplear buenos materiales y mano de obra. Durante los sismos se han comportado mejor los edificios bien construidos que aquellos que no lo están, aunque éstos se hayan calculado mejor y tengan en su estructura elementos con secciones más generosas. Buenos materiales en las construcciones de ladrillo; soldaduras correctas en las estructuras de acero; dosajes adecuados y buen colado en las estructuras de hormigón, interrumpiendo el vaciado en partes convenientes; empalmes adecuados en las armaduras y el uso de ganchos en sus extremos, son todas medidas que han demostrado su eficacia en movimientos y vibraciones experimentadas por las construcciones.

** Por su terreno*

1. En terrenos de baja capacidad portante y sitios alejados del epicentro, donde los períodos de movimiento son más largos, se comportan mejor, por no sincronizarse con ellos, las construcciones rígidas. En virtud de ello, están en mejores condiciones los edificios con estructuras menos deformables o los apoyados en muros de carga, a condición de que éstos no sean muy altos y, por el espesor que requieran, no aumente excesivamente el peso.

2. En los suelos más duros y cercanos al epicentro, los cuales tienen períodos más cortos, se comportan mejor las construcciones que por su gran resistencia son capaces de soportar los empujes horizontales o las que, por su flexibilidad, los pueden absorber sin romperse.

** Por su forma*

1. Los edificios más compactos. Si sus plantas, por su distribución, tienen que ser en forma de E, H o U, etc., lo más probable es que durante el sismo sus cuerpos se muevan de manera distinta; por tanto, es mejor que se construyan separados, en cuyo caso, es obvio que conviene ligarlos por pasillos o comunicaciones que permitan cierto "juego" en sus uniones durante el movimiento.

2. Los más uniformes en su planta y elevación. Las irregularidades frecuentemente ocasionan torsiones peligrosas y difíciles de prever y calcular. Los edificios uniformes tienen, entre otras ventajas, la de que sus cálculos contra sismos son mucho más sencillos y precisos.

3. Por las razones anteriores también son mejores las construcciones hechas con sistemas y materiales uniformes.

4. Las construcciones de base no muy reducida. puesto que en ellas se reducen los efectos del vuelco, y los elementos sismorresistentes ayudan mejor entre sí. Las torres o las

chimeneas, por su esbeltez, siempre tienden a deformarse mucho más durante los terremotos, si no están bien calculadas.

5. Las construcciones de base no excesivamente amplia. Si las dimensiones en tal sentido son excesivas, están expuestas a que el terreno se mueva de forma distinta en sus dos extremos, ocasionando esfuerzos y deformaciones desiguales, no despreciables.

** Por su estructura*

1. Aunque la estructura de acero, por sus reducidas secciones, es casi indispensable en edificios muy altos, hay que tener en cuenta, sobre todo si se conforma con perfiles normales, que es más flexible que una estructura de hormigón armado. Tal como se refiriera anteriormente, si se trata de un terreno que con el sismo tiene un período de vibración corto, puede resultar conveniente; pero si el período es largo, son mejores las estructuras de hormigón armado o las de acero construidas con armaduras compuestas de mayor rigidez, aunque estén formadas por perfiles de pequeña sección.

2. Los edificios muy flexibles, durante un terremoto, también producen mayores desperfectos en muros, recubrimientos, ventanas y en general, en todos los elementos que no tengan "juego", así como en instalaciones y cañerías, las cuales, si son de gas, pueden incluso originar incendios, o cortocircuitos en el caso de las conducciones eléctricas.

3. En todas las estructuras tienen particular importancia, en lo que hace a su aspecto sismorresistente, las uniones de sus vigas en las respectivas columnas, tanto en lo que hace a su correcto hormigonado como al anclaje entre armaduras horizontales y verticales en el nudo.

4. Son puntos débiles en las construcciones, las partes que sin ser capaces por sí mismas de resistir el conjunto de las solicitaciones horizontales, tienen una rigidez muy superior a la de los demás elementos. Al sobrevenir el esfuerzo, por su misma rigidez, tales partes lo absorberán, y los demás elementos comenzarán a funcionar hasta que, por no resistir, se rompan. Es el caso de una estructura en la que se hayan previsto muy pocos muros de rigidez; si el terremoto es suave, cumplirán bien su función, pero si es fuerte, de poco servirán.

5. Por requerir sistemas especiales de empotramiento, los elementos preforzados pueden no ser recomendables en zonas sísmicas.

6. Para el buen comportamiento antisísmico de una estructura, especialmente ante la torsión, es importante que las losas que constituyen los entrepisos y techo estén adecuadamente vinculadas a sus vigas perimetrales, aspecto que deberá ser convenientemente asegurado en el caso de losas nervuradas

apoyadas en un solo sentido o de losas prefabricadas sobrepuestas.

** Por su relación con las construcciones vecinas*

En todos los casos deben respetarse las separaciones mínimas que establezcan los códigos, tanto entre los cuerpos individuales de una edificación, como entre ésta y los edificios colindantes.

6.6. Esquema de la secuencia de análisis y diseño.

En el análisis y diseño del sistema sismorresistente de un edificio intervienen gran número de factores. A manera de reseña de los conceptos desarrollados precedentemente, las principales consideraciones a efectuar responden a la siguiente secuencia:

6.6.1. Determinación de las cargas sísmicas.

La determinación de las cargas sísmicas se logra por lo general satisfaciendo los requerimientos del Código de Construcciones Sismorresistentes vigente para la jurisdicción donde ubica la obra. Los valores de las cargas críticas a adoptar, así como los requerimientos varios que debe cumplimentar el análisis, el diseño y el cálculo estructural, quedan reflejados en tales códigos por la preocupación local que existe acerca de las condiciones extremas que pueden producirse como consecuencia de la actividad sísmica de la región, estadísticamente valorada en base a los registros históricos disponibles y a los antecedentes de desastres producidos.

6.6.2. Diagramación del sistema estructural.

La selección y diagramación del sistema estructural sismorresistente debe estar coordinada con el que debe resitir las cargas de gravedad y con el diseño arquitectónico en general. En algunos casos (edificios en altura o de características peculiares), el diseño por cargas laterales puede constituir un factor de incidencia importante para definir la forma del edificio, sus detalles, materiales de construcción, etc. En otros casos, por el contrario, el diseño y cálculo puede consistir sólo en garantizar una construcción apropiada con los elementos y prácticas comunes de aplicación.

6.6.3. Dimensionado del sistema estructural sismorresistente.

Definidas las cargas horizontales y diagramado el sistema estructural sismorresistente, debe investigarse el comportamiento tanto de sus partes individuales como del sistema actuando como un todo. De acuerdo a lo ya referido, un aspecto importante de esta investigación lo constituye el seguimiento completo del recorrido de las cargas, desde su origen como fuerzas horizontales hasta su destino final en el suelo. Con las fuerzas y solicitaciones internas determinadas para cada parte de la estructura, su verificación requerirá sólo de los conocimientos atinentes al

Análisis Estructural y Ciencias de los Materiales aplicados a su cálculo.

6.6.4. Desarrollo de los detalles constructivos estructurales y de las especificaciones.

Este desarrollo constituye en esencia la documentación técnica (gráfica y escrita) del diseño y es una tarea de gran importancia. De nada sirven una investigación analítica exhaustiva y un conjunto completo de cálculos estructurales, si no se complementan con directrices precisas y prácticas para quienes tendrán a su cargo la construcción del edificio.

6.6.5. Presentación de la documentación técnica y obtención de los permisos de construcción.

En la mayoría de los casos los cálculos estructurales, conjuntamente con los planos y especificaciones para la construcción son revisados a fin de verificar el cumplimiento del código local de aplicación y de las prácticas aceptables del diseño y la construcción, por parte de la autoridad de aplicación en la materia (municipalidades en nuestra Provincia).

Del proceso anteriormente esquematizado, en algunos aspectos la parte más fácil suele ser la correspondiente al punto 3. El diseño y dimensionamiento pueden resultar laboriosos si el edificio es grande y complejo, pero por lo general es de naturaleza rutinaria, si se dispone de información adecuada y de la orientación que brindan los códigos y textos específicos.

Determinar las cargas laterales también es razonablemente simple, por lo menos con el empleo del método de la carga estática equivalente. Una posible complicación se debe a que la estructura tiene que estar definida con cierto grado de detalle, antes de que puedan determinarse las cargas y su propagación a través del sistema investigado, lo cual viene a ser algo así como conocer la respuesta antes de que se formule la pregunta; en otras palabras, se deben predeterminar diversos aspectos acerca de la estructura antes de que se pueda analizar su comportamiento. Como consecuencia de ello, en las etapas preliminares del diseño, se efectúan con frecuencia algunas suposiciones y se avanza por tanteos, proponiendo una solución estructural, para luego analizarla y determinar si funciona. Obviamente este proceso es tanto más fácil y rápido cuanto más haya trabajado previamente el diseñador o calculista con problemas similares, o si tiene a disposición los resultados de diseños similares previos que puedan servir de base a un primer tanteo más racional.

Los aspectos más difíciles del diseño sismorresistente son los atinentes al desarrollo de los sistemas estructurales básicos destinados a la absorción de las solicitaciones sísmicas y a la elaboración de los planos y especificaciones que garanticen luego una adecuada construcción. Estos trabajos requieren un entendimiento considerable de los problemas del diseño y la construcción de edificios en general, debido a que el sistema estructural básico y muchos de sus detalles, pueden influir de modo

considerable en la forma general y en aspectos particulares del edificio, como asimismo en la economía y en la factibilidad global de la construcción.

Finalmente, al decir de los autores de la referencia bibliográfica 3., la obtención de los permisos para la construcción de un edificio es como entablar un juicio. Las autoridades que otorgan los permisos representan a la parte acusadora, al juez y al jurado. El ingeniero estructuralista y el arquitecto representan la defensa. Como en cualquier caso judicial, conviene haber resuelto un buen caso (sin violar los requerimientos del código y sin cuestionamientos a los procedimientos de diseño o construcción) y presentarlo bien (o sea en forma clara, con cálculos estructurales completos y planos y especificaciones detalladas). Aún cuando en tales condiciones debiera esperarse una buena calificación para un esfuerzo de diseño competente y completo, muchas veces queda cabida para el juicio individual y la preferencia personal, de forma tal que es posible la existencia de algún conflicto entre el diseñador y el revisor.

7. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "DISEÑO DE ESTRUCTURAS RESISTENTES A SISMOS" - Emilio Rosenblueth (editor).

2. "MANUAL DE DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS" - Enrique Bazán Zurita y Roberto Meli Piralla.

3. "DISEÑO SIMPLIFICADO DE EDIFICIOS PARA CARGAS DE VIENTO Y SISMO" - James Ambrose y Dimitry Vergun - Editorial Limusa - México - 1986.

4. "CONFIGURACION Y DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS" - Christopher Arnold y Robert Reitherman - Editorial Limusa - México - 1995.

5. "CONSTRUCCIONES ANTISISMICAS Y RESISTENTES AL VIENTO - CRITERIO PARA SU CALCULO Y DISEÑO" - José Creixell del Moral - Editorial Limusa - México - 1993.

6. "DISEÑO DE ESTRUCTURAS RESISTENTES A SISMOS - PARA INGENIEROS Y ARQUITECTOS" - D. J. Dowrick.

7. "DISTRIBUCION DE LA FUERZA SISMICA ENTRE LOS ELEMENTOS DE RIGIDEZ DE UNA PLANTA DE EDIFICIO" - Ing. Francisco Sentinelli - Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Mendoza - 1973.

8. "DISTRIBUCION DE FUERZAS SISMICAS EN FORMA MATRICIAL" - Ing. Francisco Sentinelli - Revista de la Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo - Mendoza.

9. "MANUAL DE CONSTRUCCION SISMORRESISTENTE DE LA VIVIENDA EN ZONAS ARIDAS" - Programa de la Organización de los Estados Americanos para la Vivienda - Ing. Agustín B. Reboredo - Mendoza - 1976.

10. "PRINCIPIOS BASICOS DE DISEÑO SISMORRESISTENTE" - Ing. Carlos D. Segerer - Mendoza - 1997.

11. "ESTRUCTURAS DE RIGIDEZ PARA CARGAS HORIZONTALES" - Ing. Miguel A. Tornello - Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Mendoza.

12. "ESTABILIDAD III - Capítulo 2 (Tercera Parte): Rigidez de los elementos estructurales elásticos" - Carlos D. Segerer - 1984.

13. "CODIGO DE CONSTRUCCIONES SISMORRESISTENTES PARA LA PROVINCIA DE MENDOZA" - Edición del Consejo Profesional de Ingenieros - 1994.

INDICE

CAPITULO VII: DISTRIBUCION DE FUERZAS SISMICAS

Página

1. Características que definen la acción sísmica. 1
   1.1. Definiciones y clasificación. 1
   1.2. Sismos de origen tectónico. 1
   1.3. Ondas sísmicas. 2
   1.4. Magnitud e intensidad 2
   1.5. Registros y su empleo en el diseño. 3

2. Respuesta estructural frente a la acción sísmica 4
   2.1. Ductilidad y resistencia. 4
   2.2. Rigidez y deformaciones 5

3. Análisis de estructuras sismorresistentes. 6
   3.1. Consideraciones básicas 6
   3.2. Análisis basado en efectos estáticos equivalentes . . 7
   3.3. Elementos de los sistemas resistentes a cargas laterales 8

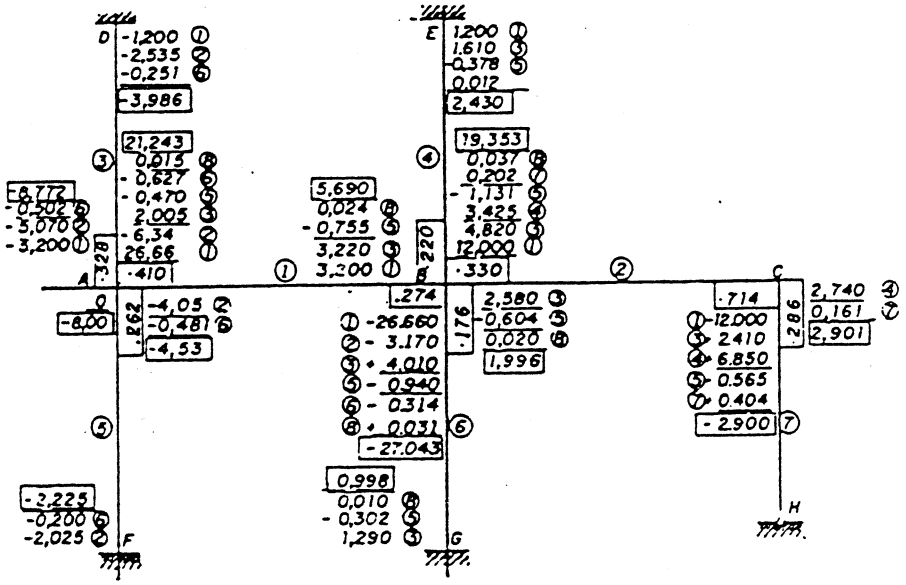
4. Rigidez a desplazamientos horizontales 11
   4.1. Construcciones de un nivel. 11
   4.2. Construcciones de dos o más niveles 24
   4.3. Método de la rigidez simplificado 17

5. Análisis estructural aplicado a la distribución de fuerzas sísmicas 31
   5.1. Procedimientos de análisis e hipótesis básicas. . . . 31
   5.2. Método estático 32
   5.3. Caso de elementos ortogonales 34
   5.4. Elementos no ortogonales. 52

6. Principios básicos de diseño sismorresistente. 54
   6.1. El diseño estructural 54
   6.2. Criterios de estructuración 55
   6.3. Sistemas estructurales y de cimentación 63
   6.4. La economía estructural 66
   6.5. Compendio de principios básicos 67
   6.6. Esquema de la secuencia de análisis y diseño. 70

7. Bibliografía consultada 72

ANALISIS ESTRUCTURAL I

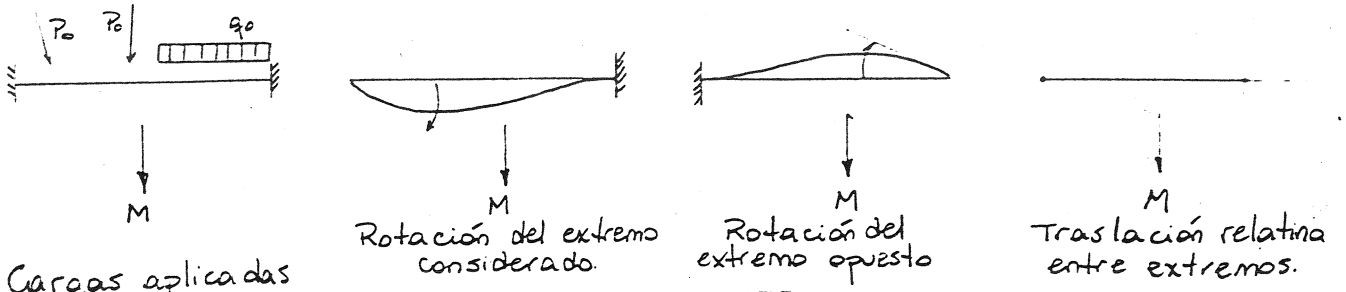


CAPITULO VIII

METODOS ITERATIVOS

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001



CAPITULO VIII

METODOS ITERATIVOS

1. EL METODO DE CROSS. GENERALIDADES.

El método de la *distribución de momentos* fue publicado por quien lo ideó, el profesor Hardy Cross, a principios de la década de 1930, bajo el título de "Análisis de Pórticos Continuos por el Método de la Distribución de Momentos de Empotramiento". Hasta el advenimiento de la computación y la aplicación casi excluyente de los métodos matriciales, fue, desde el momento de su publicación, el método normalmente utilizado para estudiar todos los tipos de pórticos y vigas estáticamente indeterminados en los que las barras se encuentran sometidas principalmente a flexión.

El proceso de la distribución de momentos se inicia aplicando las expresiones que relacionan a los mismos con los desplazamientos (rotaciones y traslaciones) deducidas en el Capítulo II.

El momento producido en un extremo de una barra es la suma algebraica de cuatro efectos:

a. El momento debido a las cargas aplicadas sobre la barra, si se la considera como una viga con extremos empotrados (momento de empotramiento).

b. El momento debido a la rotación del extremo considerado mientras el extremo opuesto sigue empotrado.

c. El momento debido a la rotación del extremo opuesto, estando fijo el extremo considerado.

d. El momento debido a la traslación relativa entre los dos extremos de la barra.

Una línea de acción a seguir para la resolución del problema sería la de permitir que los mencionados efectos tuvieran lugar separadamente a través de varios pasos, primero fijando los nudos y luego liberándolos. Por ejemplo, en una estructura de nudos rígidos sin traslación de los mismos, se fijan todos los nudos (no se permite rotación), de manera tal que cada barra queda como una viga doblemente empotrada. Al liberar (soltar) un nudo, se desarrollarán o distribuirán momentos resistentes en los extremos próximos de las barras que concurren en el nudo, en proporción a sus rigideces o de acuerdo con sus factores de distribución. Al mismo tiempo se inducen o transmiten momentos a los extremos opuestos de estas barras según sus factores de transmisión.

Siguiendo el razonamiento, los nudos pueden soltarse en forma sucesiva y volverse a fijar, uno por uno, tantas veces como sea necesario hasta que cada nudo haya rotado hasta su posición final, o lo más próximo a ella. Así pues, el proceso es esencialmente de aproximaciones sucesivas, y puede llevarse por lo tanto, hasta el grado de precisión que se desee.

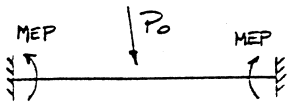
Debe tenerse presente que el método de la distribución de momentos, aunque se fundamenta en la aplicación de las expresiones conocidas de desplazamientos en función de momentos es, sin embargo, un nuevo camino de análisis estructural. Así por ejemplo, para la determinación de los momentos en los extremos de las barras de una viga continua o de pórtico rígido altamente indeterminado sin traslaciones de los nudos, no hace falta plantear y resolver sistemas de ecuaciones simultáneas como en los métodos de las fuerzas y de los desplazamientos, ni formular matrices y operar con ellas como en los métodos de la flexibilidad y de la rigidez, sino que la estructura se resuelve empleando exclusivamente las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética. Aún en el caso del análisis de pórticos con traslación de nudos, el método de la distribución de momentos no implica generalmente la resolución de un sistema con tantas ecuaciones simultáneas como las necesarias en los métodos ya examinados.

Por otra parte, este método también se adapta a programación en computadoras, por ser cíclico y repetirse las mismas operaciones varias veces. Por otra parte, puede ser aplicado tanto a estructuras formadas por barras prismáticas, como de sección variable.

Por sus características puede considerarse al método de Cross como el más ingenioso del análisis estructural, y aún útil en la actualidad para la resolución de estructuras hiperestáticas.

La convención de signos a adoptar será la misma que la empleada en los capítulos anteriores, es decir que los momentos y las rotaciones de un elemento en el sentido horario se consideran positivos.

2. CONCEPTOS BASICOS.



2.1. Momentos de empotramiento perfecto.

La aplicación del método de la distribución de momentos requiere el conocimiento de los momentos que aparecen en los extremos de las barras cargadas con el sistema exterior actuante y con ambos extremos empotrados. A estos momentos se los denomina momentos de empotramiento perfecto (MEP). Sus valores se obtienen usualmente de tablas elaboradas para los estados de carga más frecuentes.

Para barras prismáticas (de sección constante), los momentos de empotramiento perfecto pueden encontrarse en la Tabla N° 5 del Capítulo II.

2.2. Coeficiente de distribución.

La figura 1a) representa una estructura compuesta por 4 barras, cada una de las cuales tiene un extremo empotrado y el otro unido rígidamente al nudo *i*, cuya traslación está impedida por la propia configuración estructural. Si se aplica a este nudo un momento M, de sentido horario por ejemplo, se producirá en el mismo una rotación de valor θ_i y del mismo sentido (figura 1b). Dado que i es un nudo rígido, cada tangente a la elástica en los extremos que concurren a él, gira el mismo ángulo θ_i. El momento aplicado M es soportado por las 4 barras que concurren en el nudo, por lo que en los extremos de estas barras aparecerán los momentos resistentes M_{ia}, M_{ib}, M_{ic} y M_{id} para equilibrar el efecto del momento externo M, en la forma indicada en el detalle que muestra la figura 1c).

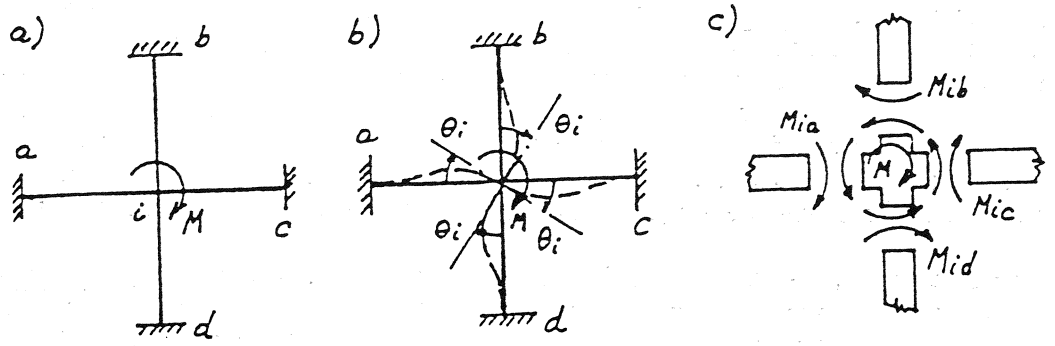
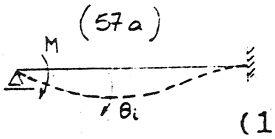


Figura 1

El equilibrio del nudo requiere que



$$M_{ia} + M_{ib} + M_{ic} + M_{id} = M \qquad (1)$$

Para determinar la relación que liga los valores de cada uno de los momentos distribuidos en los extremos de la barras concurrentes al nudo i con el valor común de θ_i, atendiendo a las condiciones de vinculación supuestas, cabe observar que las mismas se corresponden con la estudiada en la figura 57a) del Capítulo II, dando lugar a la expresión (124), por lo que, designando genéricamente con el subíndice (k) a los extremos opuestos

$$\theta_i = \frac{M_{ik}.l_{ik}}{4\,E.J_{ik}} = \frac{M_{ik}}{4\,E.k_{ik}} \qquad \text{luego:} \quad M_{ik} = 4\,E.k_{ik}\,\theta_i \qquad (2)$$

recordando que $k_{ik} = J_{ik}/l_{ik}$, es el *coeficiente* o *factor de rigidez* de la barra.

En particular, para cada una de las 4 barras consideradas, se tendrá

$$\begin{aligned} M_{ia} &= 4\,E.(J_{ia}/l_{ia}).\theta_i = 4\,E.k_{ia}.\theta_i \\ M_{ib} &= 4\,E.(J_{ib}/l_{ib}).\theta_i = 4\,E.k_{ib}.\theta_i \\ M_{ic} &= 4\,E.(J_{ic}/l_{ic}).\theta_i = 4\,E.k_{ic}.\theta_i \\ M_{id} &= 4\,E.(J_{id}/l_{id}).\theta_i = 4\,E.k_{id}.\theta_i \end{aligned} \qquad (3)$$

Sustituyendo las (3) en la (1), se obtiene

$$4\,E.(k_{ia} + k_{ib} + k_{ic} + k_{id}).\theta_i = M \qquad (4)$$

y llamando

$$k_{ia} + k_{ib} + k_{ic} + k_{id} = \Sigma\, k_{ik} \qquad (5)$$

resulta

$$\theta_i = \frac{M}{4\,E.\Sigma\, k_{ik}} \qquad (6)$$

Reemplazando la (6) en cada una de las (3) pueden calcularse los momentos que se producen en cada extremo de barra concurrente al nudo i

$$M_{ia} = \cancel{4}\,\cancel{E}.k_{ia}.\frac{M}{\cancel{4}\,\cancel{E}.\Sigma\, k_{ik}} = \frac{k_{ia}}{\Sigma\, k_{ik}}.M = \mu_{ia}.M$$

$$M_{ib} = \cancel{4}\,\cancel{E}.k_{ib}.\frac{M}{\cancel{4}\,\cancel{E}.\Sigma\, k_{ik}} = \frac{k_{ib}}{\Sigma\, k_{ik}}.M = \mu_{ib}.M$$

$$M_{ic} = \cancel{4}\,\cancel{E}.k_{ic}.\frac{M}{\cancel{4}\,\cancel{E}.\Sigma\, k_{ik}} = \frac{k_{ic}}{\Sigma\, k_{ik}}.M = \mu_{ic}.M$$

$$M_{id} = \cancel{4}\,\cancel{E}.k_{id}.\frac{M}{\cancel{4}\,\cancel{E}.\Sigma\, k_{ik}} = \frac{k_{id}}{\Sigma\, k_{ik}}.M = \mu_{id}.M$$

y en general

$$M_{ik} = \cancel{4}\,\cancel{E}.k_{ik}.\frac{M}{\cancel{4}\,\cancel{E}.\Sigma\, k_{ik}} = \frac{k_{ik}}{\Sigma\, k_{ik}}.M = \mu_{ik}.M \qquad (7)$$

en las que la relación

FACTOR o COEFICIENTE DE DISTRIBUCIÓN

$$\frac{k_{ik}}{\Sigma\, k_{ik}} = \mu_{ik} \qquad (8)$$

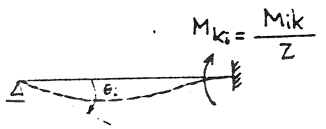
siempre debe verificarse que: $\Sigma\, \mu_{ik} = 1$

con el subíndice k = a, b, c, d, se define como el *factor* o *coeficiente de distribución*. Así pues, el momento que soporta un nudo se distribuirá entre las barras que concurren en él en proporción a sus respectivos coeficientes de distribución. Para la determinación de estos últimos, sólo se requiere conocer los valores relativos de k de las barras que concurren al nudo. En consecuencia, en la mayoría de los casos es suficiente trabajar con los valores de *rigidez relativa*, y no con la absoluta.

Cabe observar además que la suma de todos los valores de los μ_{ik} de las barras concurrentes a un mismo nudo siempre deberá arrojar como resultado el valor 1. En efecto:

$\left(\frac{1}{2}\right)$ = factor o coef. de transmisión

M_{ki} = momentos transmitidos



$$\mu_{ia} + \mu_{ib} + \mu_{ic} + \mu_{id} = \frac{k_{ia}}{\Sigma k_{ik}} + \frac{k_{ib}}{\Sigma k_{ik}} + \frac{k_{ic}}{\Sigma k_{ik}} + \frac{k_{id}}{\Sigma k_{ik}} =$$

$$= \frac{k_{ia} + k_{ib} + k_{ic} + k_{id}}{\Sigma k_{ik}} = \frac{\Sigma k_{ik}}{\Sigma k_{ik}} = 1$$

2.3. Coeficiente de transmisión y momento transmitido.

Si en el caso de la figura 1 se desean determinar los momentos en los extremos opuestos k (extremos empotrados) de las 4 barras, aplicando sucesivamente la (122) del Capítulo II

$$M_{ai} = M_{ia}/2 \quad ; \quad M_{bi} = M_{ib}/2 \quad ; \quad M_{ci} = M_{ic}/2 \quad ; \quad M_{di} = M_{id}/2$$

O sea que el momento que aparece en el extremo opuesto (empotrado) de una barra prismática es igual a la *mitad* del momento distribuido en el extremo cercano. A la relación (1/2) se la denomina *factor* o *coeficiente de transmisión* y a los momentos inducidos M_{ai}, M_{bi}, M_{ci} y M_{di}, se los llama *momentos transmitidos*.

Por lo expuesto puede definirse el coeficiente de transmisión (C_{ik}) como la relación entre el momento que aparece en el extremo opuesto (extremo empotrado) y el momento aplicado en el extremo próximo y que puede girar. En consecuencia, y en forma general

$$M_{ki} = M_{ik}/2 = C_{ik}.M_{ik} \qquad \text{con} \qquad C_{ik} = 1/2$$

Si invirtiendo el razonamiento se considerase el extremo i como opuesto (empotrado) y el k como el extremo próximo (se le permite girar), se puede, en forma similar, demostrar que

$$M_{ik} = M_{ki}/2 = C_{ki}.M_{ki} \qquad \text{con} \qquad C_{ki} = 1/2$$

por lo que para una barra de sección uniforme

$$C_{ik} = C_{ki} = 1/2 \qquad (9)$$

2.4. Resumen de conceptos.

Insistiendo en los puntos más importantes expuestos se puede resumir que, cuando se aplica un momento externo sobre un nudo sin libertad de traslación, el nudo rota; pero esta rotación es restringida por las barras que concurren al nudo. El momento resistente se distribuye entonces entre los extremos de estas barras concurrentes al nudo de acuerdo con sus coeficientes de distribución, siempre y cuando los extremos opuestos estén empotrados. El momento distribuido en el extremo cercano de cada barra, considerando a la misma como sólido aislado, es igual al producto del momento aplicado por el coeficiente de distribución, manteniendo el mismo signo del momento aplicado. Entre tanto, se transmite un momento al extremo opuesto de cada barra, que es igual a la mitad del momento distribuido en el extremo cercano, y del mismo signo.

1D = momento distribuido

1T = momento transmitido

μ = coef. de distribución

C = coef. de transmición

1EP = momento de empotramiento perfecto

$MD = \mu . M$ $\quad \left(\mu = \frac{k_{ik}}{\Sigma k_{ik}}\right)$

$MT = C . MD$ $\quad (C = 1/2)$

En los apartados siguientes se utilizará la notación MD para el momento distribuido: μ para el coeficiente de distribución: MT para el momento transmitido y C para el coeficiente de distribución, además de la ya introducida en 2.1. de MEP.

3. DISTRIBUCION DE MOMENTOS SIN TRASLACION DE NUDOS.

3.1. Proceso de fijación y liberación.

3.1.1. Caso de un nudo.

La característica esencial de la distribución de momentos radica en la fijación y liberación de los nudos, basada en el principio de superposición: es decir, el efecto de aplicar un momento ficticio a un nudo rígido de la estructura y luego eliminarlo, es equivalente a no aplicar nada en la misma, ya que ambas acciones se neutralizan. En este apartado se analizará el caso de aquellos pórticos (o estructuras en general, por extensión) que tienen todos sus nudos (incluyendo los apoyos extremos) empotrados, excepto uno, que puede girar.

Para una mayor claridad en la comprensión del mecanismo de cálculo, se efectuará la explicación sobre un caso numérico concreto, considerando al efecto el entramado rígido que se consigna en la figura 2a).

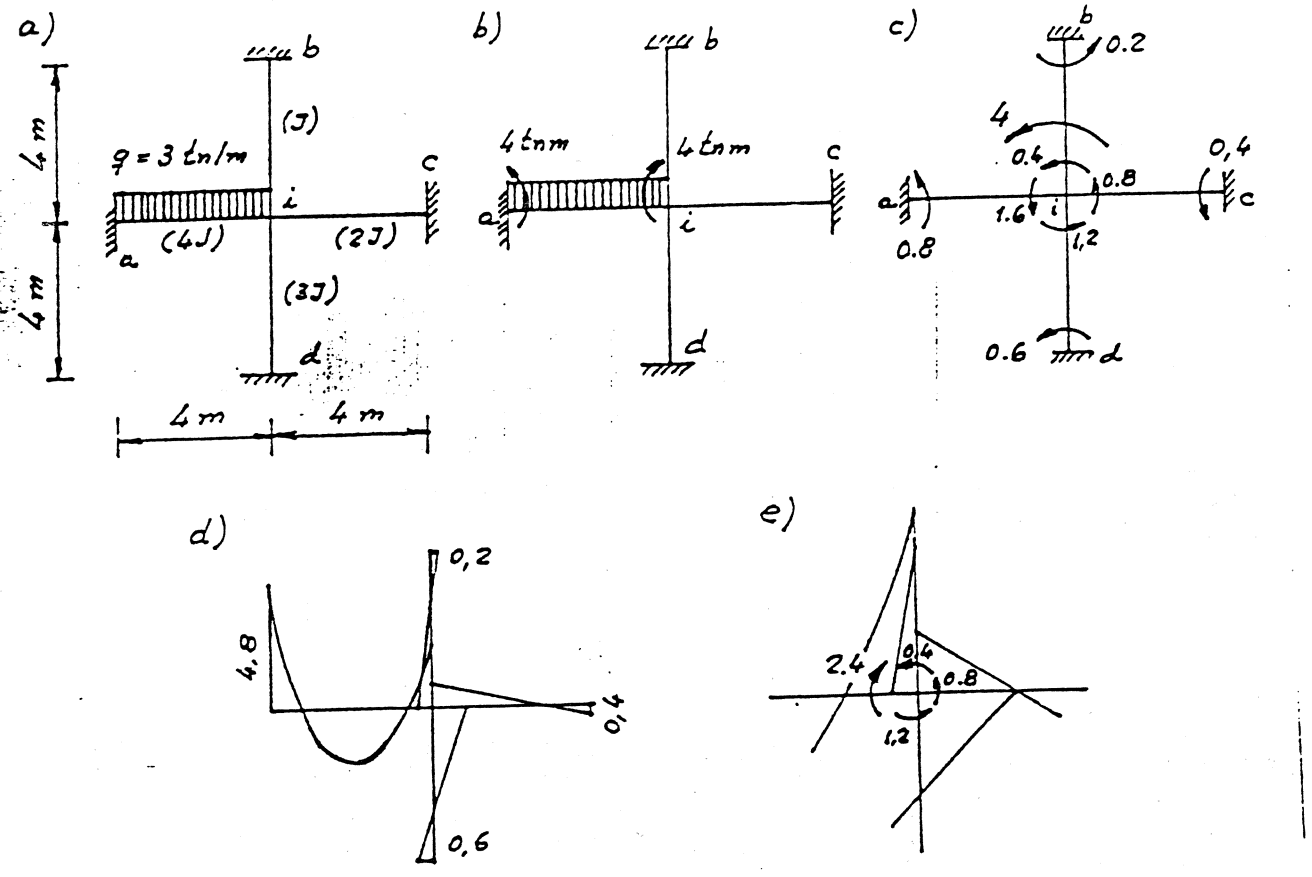


Figura 2

Los pasos a seguir son los siguientes:

* *Paso 1* Supóngase que al momento ficticio M, aplicado al nudo i (figura 2b), se le da el valor necesario para impedir la rotación del nudo (es decir para que $\theta_i = 0$), sometida la estructura a la carga original (en el presente caso, carga uniforme sobre el vano ai). En esta forma, cada barra del pórtico constituye un elemento doblemente empotrado, y en consecuencia, aparecerán los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de la barra ai, de valor

$$MEP_{ia} = - MEP_{ai} = q.(l_{ai})^2/12 = (3).(4)^2/12 = 4 \text{ tnm}$$

mientras que en los extremos de las barras restantes no aparecerá momento alguno (figura 2b).

* *Paso 2* Si ahora se libera el nudo i de la restricción artificial impuesta, aplicando un par para eliminarla, igual y opuesto al momento de fijación, se observa de la figura 2c), que debe aplicarse a tal efecto un momento M en sentido antihorario igual a 4 tnm, es decir M = - 4 tnm sobre el nudo i.

Como resultado de la aplicación de este momento de liberación, el momento resistente se distribuirá en los extremos concurrentes al nudo i según la (7), es decir

$$M_{ia} = \mu_{ia}.M = \frac{k_{ia}}{\Sigma k_{ik}}.M = \left(\frac{4}{10}\right).(-4) = -1,6$$

$$M_{ib} = \mu_{ib}.M = \frac{k_{ib}}{\Sigma k_{ik}}.M = \left(\frac{1}{10}\right).(-4) = -0,4$$

$$M_{ic} = \mu_{ic}.M = \frac{k_{ic}}{\Sigma k_{ik}}.M = \left(\frac{2}{10}\right).(-4) = -0,8$$

$$M_{id} = \mu_{id}.M = \frac{k_{id}}{\Sigma k_{ik}}.M = \left(\frac{3}{10}\right).(-4) = -1,2$$

* *Paso 3* Tal cual se explicara precedentemente se producirá la transmisión de cada uno de estos momentos a los extremos opuestos (empotrados), según la (9). O sea

$M_{ai} = (-1,6).(1/2) = -0,8$; $M_{bi} = (-0,4).(1/2) = -0,2$

$M_{ci} = (-0,8).(1/2) = -0,4$; $M_{di} = (-1,2).(1/2) = -0,6$

* *Paso 4* La suma de los valores obtenidos en cada uno de los pasos anteriores corresponde a los momentos finales reales que en cada extremo de barra presenta la estructura supuesta. Con los mismos es inmediato el trazado del diagrama de momentos flectores.

En la tabla siguiente se reseñan los pasos descriptos.

Barra:		Momentos en los extremos (tnm)							
		ai		bi		ci		di	
Paso		Mai	Mia	Mbi	Mib	Mci	Mic	Mdi	Mid
1	MEP	- 4.0	+ 4.0	0	0	0	0	0	0
2	MD	0	- 1.6	0	- 0.4	0	- 0.8	0	- 1.2
3	MT	- 0.8	0	- 0.2	0	- 0.4	0	- 0.6	0
4	Σ	- 4.8	+ 2.4	- 0.2	- 0.4	- 0.4	- 0.8	- 0.6	- 1.2

Obsérvese que se verifica la condición de equilibrio de nudo al ser $\Sigma M_{ik} = + 2.4 - 0.4 - 0.8 - 1.2 = 0$ (figura 2e).

3.1.2. Caso de dos o más nudos.

Si un pórtico rígido o una viga continua posee más de un nudo con posibilidades de rotación, el proceso de la distribución de momentos consistirá en la aplicación repetida del principio de superposición, siendo en tal caso la reseña de los pasos a seguir, la siguiente:

* *Paso 1:* En primer lugar se fijan los nudos; todas las barras, por lo tanto, quedan doblemente empotradas. Se escriben los momentos de empotramiento perfecto de todos sus extremos.

* *Paso 2:* A continuación se sueltan los nudos. Esta operación se efectúa de uno en uno. Mientras un nudo se suelta, se supone que el resto de ellos está impedido de girar. Se calcula el momento de liberación en este nudo y, previo haber calculado los valores de los coeficientes de distribución, se escriben los momentos distribuidos en los extremos concurrentes al nudo en cuestión.

* *Paso 3:* Seguidamente se escriben todos los momentos transmitidos a los extremos opuestos de las barras. Cabe observar que estos momentos transmitidos constituyen un nuevo conjunto de momentos de empotramiento en aquellos extremos.

* *Paso 4:* Se fija nuevamente el nudo y se elige el siguiente nudo que se va a liberar. Se repiten los pasos 2 y 3.

Obsérvese que después de soltar un nudo y distribuir los momentos entre las barras concurrentes en él, el nudo queda en equilibrio por haber desaparecido la restricción artificial impuesta. Sin embargo, todavía hay otros nudos que permanecen fijos por medios externos, y por ende no equilibrados; por tanto, el próximo paso debe ser el indicado, en el sentido de fijar nuevamente el nudo y luego proceder a liberar el nudo siguiente. Este proceso de fijación y liberación de cada nudo solamente constituye *un ciclo* de la distribución de momentos.

* *Paso 5!* Los nudos se liberan y vuelven a fijar uno por uno, de manera tal que los pasos 2 y 3 se repiten varias veces. Sin embargo, después de cada ciclo los valores absolutos de los momentos van decreciendo como consecuencia que sus valores se obtienen, en la distribución, multiplicando el momento precedente por $\mu_{ik} < 1$, y en la transmisión, por $C_{ik} = 1/2$, o sea también menor que uno. El proceso puede detenerse apenas los momentos transmitidos sean tan pequeños que puedan despreciarse.

* *Paso 6!* Para obtener el resultado final (momentos reales en todos los extremos de barra) se suman los MEP, MD y MT obtenidos en todos los extremos durante todo el proceso de cálculo.

En síntesis. El análisis por el método de Cross comienza con una alteración de la estructura original al fijar todos sus nudos para evitar sus rotaciones, lo cual significa que las restricciones artificiales se aplican realmente en la estructura original. La estructura así modificada, que consta de un cierto número de barras doblemente empotradas, se va llevando a su estado inicial, liberando y fijando nuevamente los nudos de uno en uno, hasta que todas las restricciones artificiales hayan desaparecido o disminuido a valores suficientemente pequeños. Así pues, la distribución de momentos es un método de aproximaciones sucesivas mediante el cual los resultados pueden obtenerse con el grado de precisión que se desee.

Como ejemplo de aplicación práctica del proceso descripto, considérese la viga continua de tres tramos de las características y con el estado de cargas que se indica en la figura 3.

De acuerdo a la forma que adquiere la expresión de los μ_{ik} dada por la (8) y según ya se destacara en la parte final del apartado 2.2., es suficiente trabajar con los valores de rigidez relativa, y no con la absoluta. En consecuencia, puede darse a J un valor arbitrario que permita obtener para los k_{ik} números fáciles de operar. Adoptando $J_{ik} = 8$ se tendrá

$$k_{A1} = k_{2B} = \frac{J_{A1}}{l_{A1}} = \frac{8}{8} = 1 \quad ; \quad k_{12} = \frac{J_{12}}{l_{12}} = \frac{1{,}25 \times 8}{10} = 1$$

Mediante la (8) se determinan los valores de los coeficientes de distribución en las barras que concurren a los nudos 1 y 2, resultando en este caso

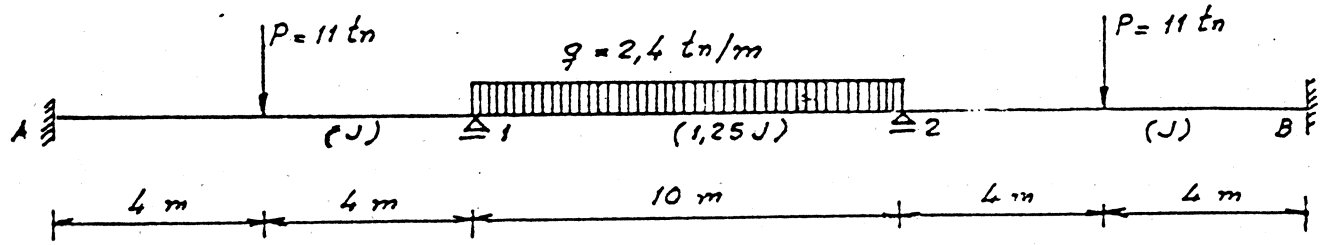
$$\mu_{1A} = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{2B} = \frac{k_{ik}}{2\,k_{ik}} = \frac{1}{1+1} = 0{,}5$$

Al estar los apoyos A y B empotrados, ambos serán completamente inmóviles, con rigidez rotacional infinita, de forma tal que serán capaces de absorber cualquier momento (de empotramiento o de transmisión) que se aplique en los mismos, lo que equivale a $\mu_{A1} = \mu_{B2} = 0$.

Los momentos de empotramiento perfecto resultan de

$$MEP_{1A} = -MEP_{A1} = MEP_{B2} = -MEP_{2B} = \frac{P.l_{1k}}{8} = \frac{11 \times 8}{8} = 11 \text{ tnm}$$

$$MEP_{21} = -MEP_{12} = \frac{q.(l_{12})^2}{12} = \frac{2,4.(10)^2}{12} = 20 \text{ tnm}$$



k_{1k}	1		1		1	
μ_{1k}	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
MEP	-11	+11	-20	+20	-11	+11
MD		+ 4.5	+ 4.5			
MT	+ 2.25			+ 2.25		
MD				- 5.625	- 5.625	
MT			- 2.813			- 2.813
MD		+ 1.406	+ 1.406			
MT	+ 0.703			+ 0.703		
MD				- 0.352	- 0.352	
MT			- 0.176			- 0.176
MD		+ 0.088	+ 0.088			
MT	+ 0.044			+ 0.044		
MD				- 0.022	- 0.022	
MT			- 0.011			- 0.011
MD		+ 0.005	+ 0.005			
MT	+ 0.002			+ 0.002		
MD				- 0.001	- 0.001	
Σ	- 8.001	+16.999	-16.998	+16.998	-16.998	+ 8.003

Figura 3

Comenzando con el nudo 1, la fijación del mismo requiere un momento + 11 - 20 = - 9, consignado dentro del rectángulo de trazos. Para eliminar este momento artificial, se debe aplicar + 9 al nudo 1, que se distribuirá según los μ_{1k} respectivos, es decir + 4,5 en cada extremo de barra concurrente a 1. Después de este

proceso de distribución, el nudo 1 queda en estado de equilibrio (+ 11 - 20 + 4,5 + 4,5 = 0), lo que se indica con la línea efectuada como cierre de la operación.

Como paso siguiente corresponde efectuar la traslación de los momentos distribuidos de + 4,5 a los extremos opuestos de las barras (las transmisiones se indican con flechas), resultando valores de MT = + 2,25, los que se constituyen en un MEP adicional en tales extremos.

Ahora el nudo 2 está sometido a un momento ficticio total de valor + 20 - 11 + 2,25 = + 11,25 (recuadrado en línea de trazos), por lo que para equilibrarlo debe distribuirse entre los extremos concurrentes, 0,5 x (- 11,25) = - 5,625, y transmitirlo a los extremos opuestos con valores - 5,625/2 = - 2,813. Si bien así se ha equilibrado el nudo 2 (+ 20 - 11 + 2,25 - 5,625 - 5,625 = 0), vuelve a estar desequilibrado el nudo 1 debido al MT = - 2,813.

Debe continuarse pues el proceso de liberación y nueva fijación de los nudos 1 y 2 alternadamente, hasta que los momentos MD se hagan lo suficientemente pequeños como para ser despreciados y no se justifique numéricamente ya su transmisión.

El momento definitivo actuante en el extremo de cada barra, se obtiene sumando todos los momentos resultantes en cada paso de distribución y transmisión, más los MEP.

El cálculo de la distribución de momentos precedentemente efectuado puede disponerse también en la forma que se indica en la figura 4. Confrontando esta forma de operar con la de la figura 3, parece a primera vista como si los nudos 1 y 2 se hubieran fijado y luego liberado simultáneamente. Sin embargo, la ejecución puede seguirse considerando limitada a soltar un nudo cada vez.

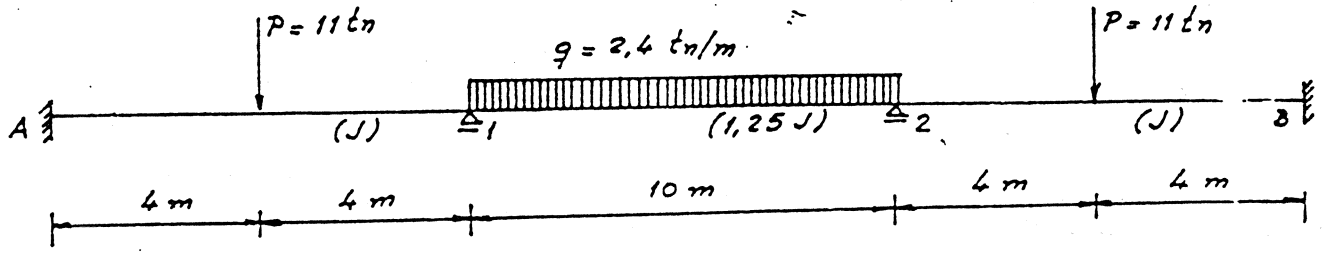
En efecto. Una vez escritos los MEP, se considera que el nudo 2 no puede rotar y el nudo 1 se suelta primero. El momento de liberación + 9 en 1 se distribuye entre los extremos concurrentes de las barras 1A y 12 (+ 4,5 en este caso en función de los valores de μ_{ik}), tal como se indica en el paso MD_1, y la mitad de su valor es inmediatamente transmitido a los extremos opuestos de estas barras, como indica el paso MT_1.

A continuación se considera el nudo 1 fijo y el nudo 2 suelto, pero sólo parcialmente, aplicándole por ahora un momento de liberación parcial de solamente -(+ 20 - 11) = - 9, ya que la completa liberación del nudo 2 requeriría la aplicación de un momento -(+ 20 - 11 + 2,25) = - 11,25. El momento de liberación parcial de - 9 se distribuye entre los extremos concurrentes de las barras 21 y 2B en función de μ_{ik} en el mismo paso MD_1, y la mitad de sus valores se transmiten a los extremos opuestos de estas barras en el mismo paso MT_1, dejando el momento previamente transmitido al nudo de + 2,25 para considerarlo posteriormente.

Al operar de esta forma se llega después del paso MT_1 así realizado a que todos los momentos transmitidos forman un nuevo conjunto de momentos de empotramiento en los extremos de cada

viga, para los cuales puede llevarse a cabo otro proceso de liberación de nudos en forma similar (paso MD2) y realizar de inmediato sus respectivas transmisiones (paso MT2).

El proceso se repite así en forma cíclica, hasta que los momentos que debieran transmitirse sean despreciables, dejando cada nudo en equilibrio, es decir, que no subsisten restricciones externas en ningún nudo de la estructura. Con ello se llega a una solución tan aproximada como se quiera al valor final real de los momentos de extremo de barra.



k_{ik}	1		1		1	
u_{ik}	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
MEP	-11	+11	-20	+20	-11	+11
MD_1		+ 4.5	+ 4.5	- 4.5	- 4.5	
MT_1	+ 2.25		- 2.25	+ 2.25		- 2.25
MD_2		+ 1.125	+ 1.125	- 1.125	- 1.125	
MT_2	+ 0.562		- 0.562	+ 0.562		- 0.562
MD_3		+ 0.281	+ 0.281	- 0.281	- 0.281	
MT_3	+ 0.140		- 0.140	+ 0.140		- 0.140
MD_4		+ 0.070	+ 0.070	- 0.070	- 0.070	
MT_4	+ 0.035		- 0.035	+ 0.035		- 0.035
MD_5		+ 0.017	+ 0.017	- 0.017	- 0.017	
MT_5	+ 0.008		- 0.008	+ 0.008		- 0.008
MD_6		+ 0.004	+ 0.004	- 0.004	- 0.004	
MT_6	+ 0.002		- 0.002	+ 0.002		- 0.002
MD_7		+ 0.001	+ 0.001	- 0.001	- 0.001	
Σ	- 8.003	+16.998	-16.998	+16.998	-16.998	+ 8.003

Figura 4

Analizando la figura 4 puede observarse que una primera aproximación, aún grosera, ya se obtendría con sólo sumar los valores obtenidos en los pasos MEP y MD_1 (primer ciclo): la

segunda aproximación puede obtenerse con la suma de los pasos MEP, MD_1, MT_2 y MD_2 (primer y segundo ciclo), que ya arroja valores de $M_{A1} = -8.75$ y $M_{1A} = +16.625$, y así sucesivamente.

3.2. Ejemplos complementarios de aplicación.

3.2.1. Ejemplo N° 1.

Analizar la viga continua de dos vanos representada en la figura 5 aplicando el método de Cross.

Adoptando $J_{1k} = 8$

$$k_{A1} = \frac{J_{A1}}{l_{A1}} = \frac{8}{8} = 1 \quad ; \quad k_{1B} = \frac{J_{1B}}{l_{1B}} = \frac{8}{4} = 2$$

Mediante la (7) se determinan los valores de los coeficientes de distribución en las barras que concurren al nudo 1

$$\mu_{1A} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mu_{1B} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Para el apoyo empotrado A son extensivas las consideraciones efectuadas al plantear el ejercicio anterior. En cambio, el extremo B, al hallarse articulado, no ofrece resistencia alguna a las rotaciones (rigidez rotacional nula), debiendo ser $M_{B1} = 0$. En consecuencia cualquier momento (de empotramiento o de transmisión) aplicado durante el desarrollo del método deberá dar lugar a un momento distribuido igual y contrario para asegurar tal condición, por lo que $\mu_{B1} = 1$.

Los momentos de empotramiento perfecto resultan de

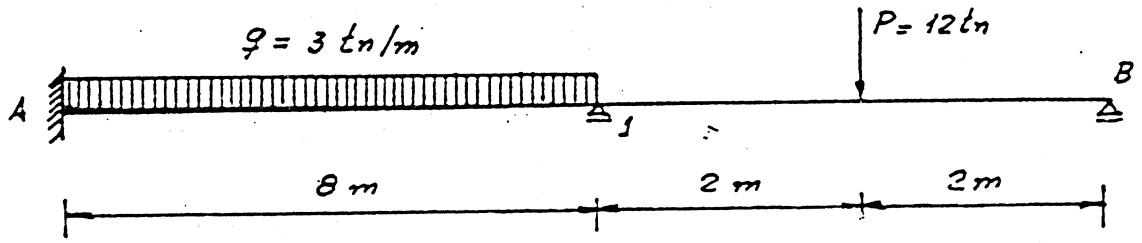
$$MEP_{1A} = -MEP_{A1} = \frac{q.(l_{A1})^2}{12} = \frac{3.(8)^2}{12} = 16 \text{ tnm}$$

$$MEP_{B1} = -MEP_{1B} = \frac{P.l_{1B}}{8} = \frac{12 \times 4}{8} = 6 \text{ tnm}$$

Para encarar el proceso resolutivo se adoptará el criterio seguido en la figura 4. Una vez escritos los valores de k_{1k}, μ_{1k} y MEP, se analiza el único nudo que presenta la estructura. El mismo se halla desequilibrado por un momento $+16 - 6 = +10$ tnm. Para obviar el razonamiento de anular este momento con el valor igual y contrario y luego distribuirlo, se parte de la base que para tener un momento total nulo, los valores a distribuir deben ser necesariamente negativos. Por lo tanto, se escriben primero los dos signos (-), y luego se calculan los momentos a colocar, que respectivamente serán, ya trabajando en valor absoluto

$$10 \times (1/3) = 3{,}333 \quad ; \quad 10 \times (2/3) = 6{,}667$$

En el extremo B. por su parte. la única forma de llevarlo al equilibrio. sabiendo que M_{B1} debe ser igual a cero. es anular el momento de fijación + 6. con uno igual y contrario. el que luego debe ser transmitido al extremo B. De allí en adelante. el desarrollo de cálculo se realiza según los pasos descriptos en las explicaciones precedentes. los que pueden ser seguidos en su secuencia completa en la figura 5 con ayuda de una calculadora.



k_{1k}	1		2	
u_{1k}	0	1/3	2/3	1
MEP	- 16	+ 16	- 6	+ 6
MD		- 3.333	- 6.667	- 6
MT	- 1.667		- 3	- 3.333
MD		+ 1	+ 2	+ 3.333
MT	+ 0.5		+ 1.667	+ 1
MD		- 0.556	- 1.111	- 1
MT	- 0.278		- 0.5	- 0.556
MD		+ 0.167	+ 0.333	+ 0.556
MT	+ 0.084		+ 0.278	+ 0.167
MD		- 0.093	- 0.185	- 0.167
MT	- 0.046		- 0.084	- 0.093
MD		+ 0.028	+ 0.056	+ 0.093
MT	+ 0.014		+ 0.046	+ 0.028
MD		- 0.015	- 0.031	- 0.028
MT	- 0.008		- 0.014	- 0.015
MD		+ 0.005	+ 0.009	+ 0.015
MT	+ 0.002		+ 0.007	+ 0.004
MD		- 0.002	- 0.005	- 0.004
MT	- 0.001		- 0.002	- 0.003
MD		+ 0.001	+ 0.001	+ 0.003
Σ	- 17.4	+ 13.202	- 13.202	0

Figura 5

3.2.2. Ejemplo N° 2.

Analizar el pórtico simétrico con cargas antisimétricas representado en la figura 6 aplicando el método de Cross.

Adoptando $J_{ik} = 12$

$$k_{A1} = k_{2B} = \frac{2x12}{6} = 4 \; ; \; k_{12} = \frac{2x12}{8} = 3 \; ; \; k_{1C} = k_{2D} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\mu_{1A} = \mu_{2B} = \frac{4}{10} = 0,4 \; ; \; \mu_{1C} = \mu_{2D} = \mu_{12} = \mu_{21} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Los MEP se obtienen de la Tabla N° 5 del Capítulo II. Estado de cargas 32, con a = 2 m y b = 6 m para la carga de la izquierda y *a* = 6 m y *b* = 2 m para la de la derecha

$$MEP_{12} = -\frac{P.a.b^2}{1^2} + \frac{P.a.b^2}{1^2} = -\frac{16x2x6^2}{8^2} + \frac{16x6x2^2}{8^2} = -12 \text{ tnm}$$

$$MEP_{21} = +\frac{P.b.a^2}{1^2} - \frac{P.b.a^2}{1^2} = +\frac{16x6x2^2}{8^2} - \frac{16x2x6^2}{8^2} = -12 \text{ tnm}$$

En este caso se presentan en los nudos 1 y 2 tres barras concurrentes, adoptándose la diagramación indicada en la figura a los fines de realizar el cálculo. También es usual escribir los sucesivos valores sobre un esquema de la estructura, junto al extremo correspondiente a cada barra, en horizontal para las vigas y en vertical para las columnas.

Para iniciar el cálculo, que fue realizado según la secuencia propuesta en la figura 4, se deben anular los efectos de los momentos de fijación actuantes sobre los nudos 1 y 2. Para ello los momentos requeridos deben ser positivos, y sus valores surgirán de aplicar sucesivamente la (7)

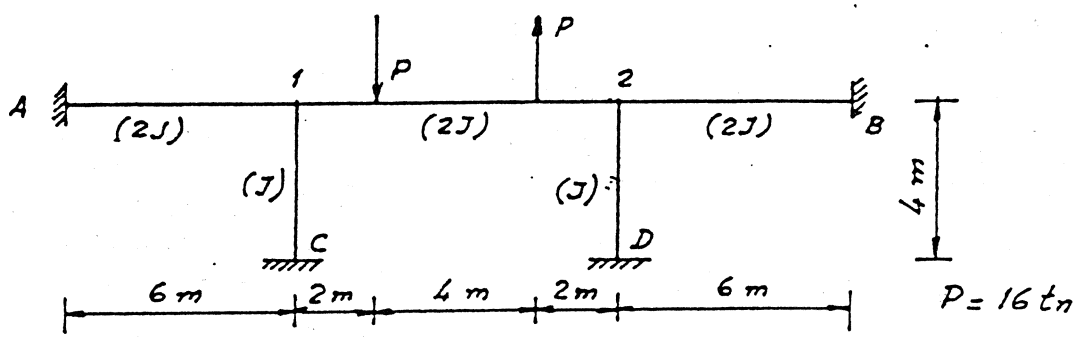
$$12 \times 0,4 = 4,8 \quad ; \quad 12 \times 0,3 = 3,6 \quad ; \quad 12 \times 0,3 = 3,6$$

El momento + 3,6 se transmite de los extremos 12 y 21 a los extremos opuestos mediante la (9), continuándose el proceso de cálculo en la forma conocida.

Para simplificar las transmisiones de momentos hacia los extremos empotrados A, C, D y B, en lugar de efectuar el cálculo de MT en cada paso y luego sumarlos, resulta más rápido obtener primero los valores de los momentos finales en los extremos opuestos 1A, 1C, 2D y 2B; luego, sabiendo que en las barras con nudos sin traslación el momento de empotramiento es igual a la mitad de los que se producen en el extremo opuesto no impedido de girar, la obtención de los momentos finales en los empotramientos es directa, en un único paso de transmisión:

$$M_{A1} = M_{B2} = + 4.174/2 = + 2.087 \text{ tnm}$$
$$M_{C1} = M_{D2} = + 3.131/2 = + 1.565 \text{ tnm}$$

Una vez obtenidos todos los valores de M. es inmediato el trazado del diagrama de momentos flectores, el que adoptará una configuración antisimétrica.



	A1	1A	1C	12		21	2D	2B	B2
k_{ik}		4	3	3		3	3	4	
u_{ik}		0.4	0.3	0.3		0.3	0.3	0.4	
MEP MD		+4.8	+3.6	-12 +3.6		-12 +3.6	+3.6	+4.8	
MT MD		-0.72	-0.54	+1,8 -0.54		+1.8 -0.54	-0.54	-0.72	
MT MD		+0.108	+0.081	-0,27 +0.081		-0.27 +0.081	+0.081	+0.108	
MT MD		-0.016	-0.012	+0.040 -0.012		+0.040 -0.012	-0.012	-0.016	
MT MD		+0.002	+0.002	-0,006 +0.002		-0.006 +0.002	+0.002	+0.002	
Σ	+2.087	+4.174	+3.131	-7.305		-7.305	+3.131	+4.174	+2.087

C1: +1.565 D2: +1.565

Figura 6

3.3. Rigideces modificadas.

Efectuando el análisis crítico de las tres estructuras hiperestáticas resueltas en el apartado anterior, se observa que:

a) Para la viga continua de la figura 5, la convergencia según el proceso seguido es muy lenta, resultando necesario efectuar un número apreciable de ciclos de iteración. Ello se debe a que el extremo articulado B devuelve continuamente momentos transmitidos bastante grandes al nudo 1. Sin embargo, el hecho que el resultado final del momento $M_B = 0$ se conozca de antemano, permite suponer que puede ser un factor a utilizar en pos de lograr una mejora en la convergencia.

b) Para la viga continua simétrica con carga también simétrica de la figura 4, cabe observar que las cantidades que van apareciendo a ambos lados del eje de simetría son correspondientemente iguales en magnitud, pero opuestos en signo. Esta disposición especial sugiere que podría introducirse alguna modificación en el método, con el fin de facilitar el proceso de la distribución de momentos operando solamente con la mitad de la estructura.

c) Finalmente, en el caso del pórtico geométricamente simétrico y con cargas antisimétricas resuelto mediante la figura 6, los valores obtenidos para los momentos a la izquierda del eje de simetría de la estructura son exactamente iguales a los de la derecha, circunstancia que permite hacer también extensivo a este caso la propuesta de modificación planteada en el punto b).

Los mencionados ejemplos han puesto de manifiesto tres casos especiales que sugieren que deberían buscarse alternativas de cálculo, con el fin de simplificar el proceso de la distribución de momentos, tomando en consideración en cada caso el hecho que se conocen a priori ciertas condiciones.

Considérese el entramado de la figura 7a), sometido a la acción de un momento externo M de sentido horario, aplicado sobre el nudo central *i*, presentando los extremos opuestos las siguientes características:

1. $\theta_a = 0$, o sea que el apoyo *a* constituye un empotramiento perfecto;

2. $M_b = 0$, o sea que la barra vertical superior se halla articulada en el extremo *b*;

3. $\theta_c = -\theta_i$, es decir que la barra *ic* rota en *c* un ángulo igual y opuesto al del otro extremo *i*, como en el caso de simetría;

4. $\theta_d = +\theta_i$, es decir que la barra *id* rota en *d* el mismo ángulo que el otro extremo (*i*), como en el caso de antisimetría.

De la figura 7b) resulta que para el equilibrio del nudo *i* se requiere

$$M_{ia} + M_{ib} + M_{ic} + M_{id} = M \qquad (10)$$

Para la determinación de cada uno de los valores de M_{ik} en función de la rotación común θ_i, se tendrá que en el caso de la barra *ai* es aplicable el resultado obtenido en el apartado 2.2. correspondiente al caso general de extremos opuestos empotrados o fijados. En consecuencia, según la expresión (2)

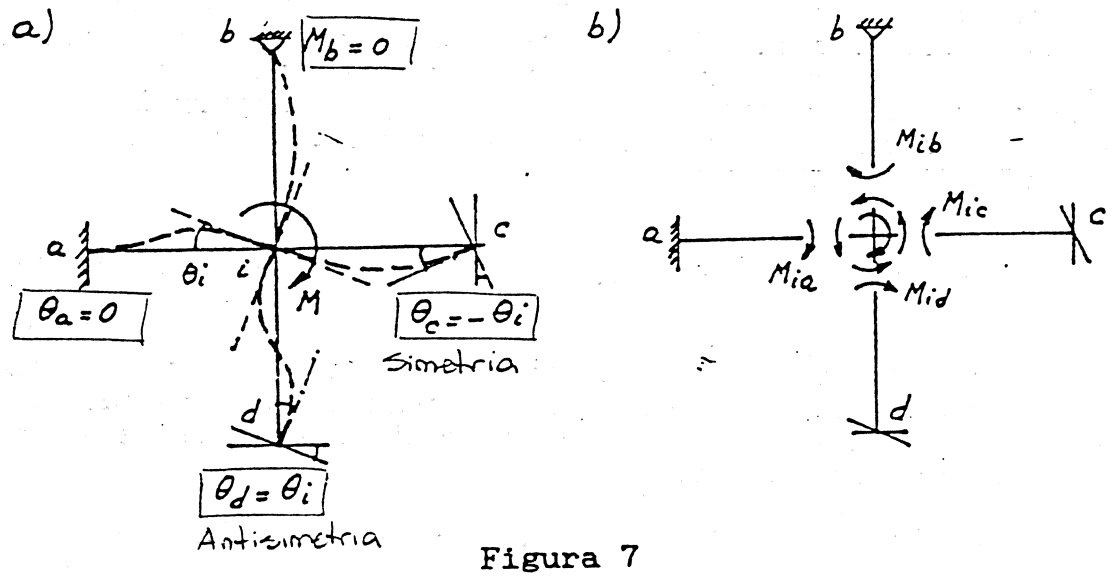


Figura 7

$$\theta_i = \frac{M_{ia}.l_{ia}}{4\ E.J_{ia}} = \frac{M_{ia}}{4\ E.k_{ia}} \qquad \text{luego:} \qquad M_{ia} = 4\ E.k_{ia}.\theta_i \qquad (11)$$

En cambio, para las barras restantes se dan las condiciones particulares que se pasan a analizar en forma individual.

En el caso de la barra con extremo opuesto articulado, aplicando la primera de las (119) del apartado 6.2.1. del Capítulo II, que se corresponde con el presente

$$\theta_i = \frac{M_{ib}.l_{ib}}{3\ E.J_{ib}} = \frac{M_{ib}}{3\ E.k_{ib}} \qquad \text{luego:} \qquad M_{ib} = 3\ E.k_{ib}.\theta_i \qquad (12)$$

Para el caso de una barra con deformación simétrica corresponde aplicar la (120) del apartado 6.2.2. del Capítulo II

$$\theta_i = \frac{M_{ic}.l_{ic}}{2\ E.J_{ic}} = \frac{M_{ic}}{2\ E.k_{ic}} \qquad \text{luego:} \qquad M_{ic} = 2\ E.k_{ic}.\theta_i \qquad (13)$$

Finalmente, para el caso de una barra con deformación antisimétrica es de aplicación la (121) del apartado 6.2.3. del Capítulo II, que se corresponde con el mismo

$$\theta_i = \frac{M_{id}.l_{id}}{6\ E.J_{id}} = \frac{M_{id}}{6\ E.k_{id}} \qquad \text{luego:} \qquad M_{id} = 6\ E.k_{id}.\theta_i \qquad (14)$$

Sustituyendo las (11), (12), (13) y (14) en la (10)

$$E.(4\ k_{ia}^{emp} + 3\ k_{ib}^{art} + 2\ k_{ic}^{sim} + 6\ k_{id}^{antsim}).\theta_i = M \qquad (15)$$

en la que por razones conceptuales, se ha individualizado el tipo de vinculación que corresponde a los extremos opuestos.

Teniendo en cuenta que el caso más frecuente es el del empotramiento del extremo opuesto (ya sea como vínculo físico o como nudo inmovilizado en el proceso de cálculo), resulta conveniente mantener el criterio seguido en el desarrollo general de extraer el término 4 como factor común en la (15), con lo que ésta quedará de la forma

$$4\,E.\left(k_{ia}^{emp} + \frac{3}{4}\,k_{ib}^{art} + \frac{1}{2}\,k_{ic}^{sim} + \frac{3}{2}\,k_{id}^{antsim}\right).\theta_i = M \qquad (16)$$

$k_{ia}+k_{ib}+k_{ic}+k_{id}=\Sigma k_{ik}$

Para asimilar la expresión entre paréntesis a la (5) y unificar a partir de la misma la secuencia del método de la distribución de momentos, pueden introducirse los siguientes coeficientes de rigidez modificados

$$k'_{ib}{}^{art} = (3/4).k_{ib}^{art} \quad ; \quad k'_{ic}{}^{sim} = (1/2).k_{ic}^{sim}$$
$$k'_{id}{}^{antsim} = (3/2).k_{id}^{antsim} \qquad (17)$$

los que sustituidos en la (16)

$$4\,E.(k_{ia}^{emp} + k'_{ib}{}^{art} + k'_{ic}{}^{sim} + k'_{id}{}^{antsim}).\theta_i = M \qquad (18)$$

y llamando

$$k_{ia}^{emp} + k'_{ib}{}^{art} + k'_{ic}{}^{sim} + k'_{id}{}^{antsim} = \Sigma\, k_{ik} \qquad (19)$$

resulta despejando θ_i de la (18)

$$\theta_i = \frac{M}{4\,E.\Sigma\,k_{ik}} \qquad (20)$$

Sustituyendo la (20) sucesivamente en las (11), (12), (13) y (14) pueden calcularse los momentos que se producen en cada extremo de barra concurrente al nudo i

$$M_{ia} = 4\,E.k_{ia}.\frac{M}{4\,E.\Sigma\,k_{ik}} = \frac{k_{ia}}{\Sigma\,k_{ik}}.M = \mu_{ia}.M$$

$$M_{ib} = 3\,E.k_{ib}.\frac{M}{4\,E.\Sigma\,k_{ik}} = \frac{(3/4).k_{ib}}{\Sigma\,k_{ik}}M = \frac{k'_{ib}}{\Sigma\,k_{ik}}.M = \mu_{ib}.M$$

$$M_{ic} = 2\,E.k_{ic}.\frac{M}{4\,E.\Sigma\,k_{ik}} = \frac{(1/2).k_{ic}}{\Sigma\,k_{ik}}M = \frac{k'_{ic}}{\Sigma\,k_{ik}}.M = \mu_{ic}.M$$

$$M_{id} = 6\,E.k_{id}.\frac{M}{4\,E.\Sigma\,k_{ik}} = \frac{(3/2).k_{id}}{\Sigma\,k_{ik}}M = \frac{k'_{id}}{\Sigma\,k_{ik}}.M = \mu_{id}.M$$

En esta forma se observa que, cuando se aplica un momento externo en un nudo i, los momentos distribuidos en los extremos de las barras que concurren en el nudo están en proporción directa a sus coeficientes de rigidez modificados en función de las condiciones de sus extremos opuestos. Al emplear este coeficiente de rigidez modificado para un extremo, se elimina la transmisión al otro extremo, debiéndose sólo escribir el resultado final para esa parte.

3.3.1. Aplicaciones de las rigideces modificadas.

Se procederá a resolver aplicando las expresiones obtenidas para las rigideces modificadas, a efectos comparativos, los mismos 3 casos resueltos en 3.1.2. y en 3.2.

3.3.1.1. Resolución simplificada del ejercicio de la figura 5.

Adoptando $J_{1k} = 8$

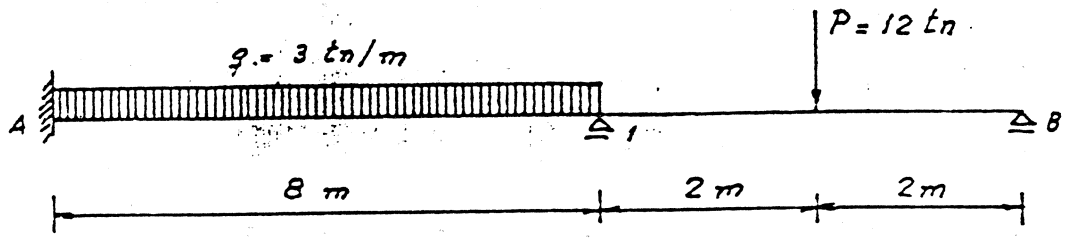
$$k_{A1} = \frac{J_{A1}}{l_{A1}} = \frac{8}{8} = 1 \quad ; \quad k'_{1B} = \frac{3}{4}.\frac{J_{1B}}{l_{1B}} = \frac{3 \times 8}{4 \times 4} = 1.5$$

$$\mu_{1A} = \frac{1}{1 + 1.5} = 0.4 \quad ; \quad \mu_{1B} = \frac{1.5}{1 + 1.5} = 0.6$$

$$MEP_{1A} = - MEP_{A1} = \frac{q.(l_{A1})^2}{12} = \frac{3.(8)^2}{12} = 16 \text{ tnm}$$

$$MEP_{1B} = - \frac{3}{16}. P.l_{1B} = - \frac{3 \times 12 \times 4}{16} = - 9 \text{ tnm}$$

correspondiendo este último momento al de una viga empotrada en un extremo y articulada en el otro.



k_{1k}	1		1.5	
μ_{1k}	0	0.4	0.6	
MEP	-16	+16	-9	
MD		- 2.8	-4.2	
MT	- 1.4			
Σ	-17.4	+13.2	-13.2	0

A

3.3.1.2. Resolución simplificada del ejercicio de la figura 4.

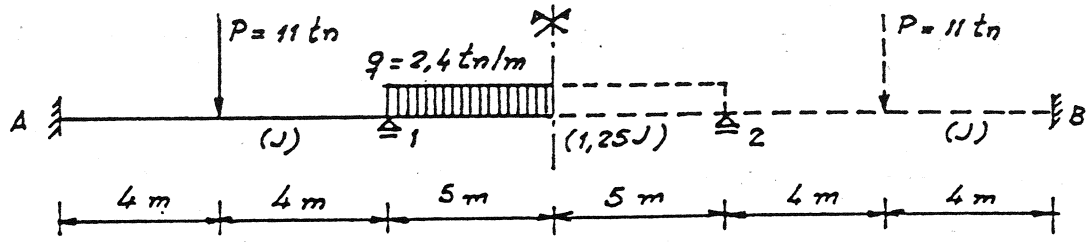
Adoptando $J_{1k} = 8$

$$k_{A1} = \frac{J_{A1}}{l_{A1}} = \frac{8}{8} = 1 \quad ; \quad k_{12} = \frac{1}{2}.\frac{J_{12}}{l_{12}} = \frac{1.25 \times 8}{2 \times 10} = 0.5$$

$$u_{1A} = \frac{1}{1 + 0.5} = \frac{2}{3} \quad ; \quad u_{12} = \frac{0.5}{1 + 0.5} = \frac{1}{3}$$

$$MEP_{1A} = - MEP_{A1} = \frac{P.l_{1A}}{8} = \frac{11 \times 8}{8} = 11 \text{ tnm}$$

$$MEP_{12} = - \frac{q.(l_{12})^2}{12} = - \frac{2,4.(10)^2}{12} = - 20 \text{ tnm}$$



k_{1k}	1		0.5			
u_{1k}	0	2/3	1/3			
MEP	-11	+11	-20			
MD		+ 6	+ 3			
MT	+ 3					
Σ	- 8	+17	-17	+17	-17	+ 8

METRIA

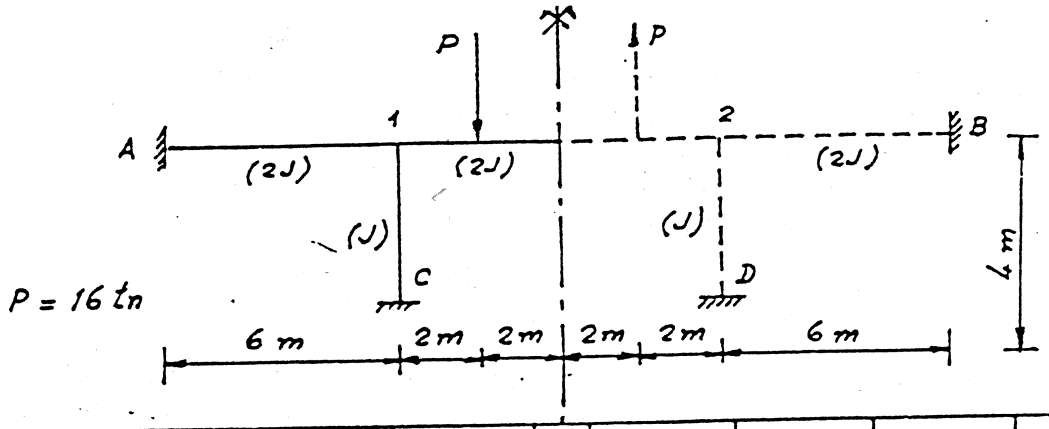
3.3.1.3. Resolución simplificada del ejercicio de la figura 6.

Adoptando $J_{1k} = 12$ *por cargas asimetricas*

$$k_{A1} = \frac{2x12}{6} = 4 \quad ; \quad k_{12} = \frac{3}{2}.\frac{2x12}{8} = 4.5 \quad ; \quad k_{1C} = \frac{12}{4} = 3$$

$$u_{1A} = \frac{4}{11.5} = 0.348 \quad ; \quad u_{1C} = \frac{3}{11.5} = 0.261 \quad ; \quad u_{12} = \frac{4.5}{11.5} = 0.391$$

$$MEP_{12} = - \frac{P.a.b^2}{1^2} + \frac{P.a.b^2}{1^2} = - \frac{16x2x6^2}{8^2} + \frac{16x6x2^2}{8^2} = - 12 \text{ tnm}$$



	A1	iA	iC	i2		C1	C2	C3	B2
kik		4	3	4.5					
uik		0.348	0.261	0.391					
MEP MD		+4.176	+3.132	-12 +4.692					
Σ	+2.088	+4.176	+3.132	-7.308		-7.308	+3.132	+4.176	+2.088

C1: +1.566 D2: +1.566

Aparte de la notable reducción en los ciclos (en los tres casos fue suficiente sólo uno), cabe destacar que las diferencias en la fracción decimal de los resultados es debida a los redondeos efectuados en el método completo para no aumentar a más de 3 el número de decimales.

4. DISTRIBUCION DE MOMENTOS CON TRASLACION DE NUDOS.

4.1. Planteo general.

En el apartado 3. se han considerado sistemas estructurales con nudos indesplazables. Este caso se presenta siempre en las vigas continuas; sin embargo, en los pórticos de tipo genérico sólo se verifica cuando la estructura es simétrica en sus dimensiones geométricas así como en los momentos de inercia de sus secciones transversales y cuando la carga es asimismo simétrica.

En todos los otros casos se producen desplazamientos horizontales de la o las vigas, que deben ser considerados en forma particular en el desarrollo del método, situación que por lo general incrementa, a veces notoriamente, el trabajo inherente al cálculo.

Para tener en cuenta esta circunstancia, la aplicación del método de la distribución de momentos para el caso de estructuras desplazables, se realiza en dos pasos:

* *Paso 1!* Se hacen iguales a cero los corrimientos, en otras palabras, no se los tiene en cuenta. Esta suposición (que equivale

Se producen — Impedimos

(1) — Giros — Desplazamientos

(2) — Desplazamientos — Giros

a considerar la presencia de un apoyo móvil en correspondencia con cada nivel horizontal con que cuente la estructura), traerá como consecuencia que el diagrama de momentos así obtenido (M_o), no verifique la condición de equilibrio de columna establecida en el apartado 5.2.2.6.b) del Capítulo IV.

Ello resulta como consecuencia de la no consideración del desplazamiento lateral que la estructura realmente experimenta. En otras palabras, el diagrama M_o resultante de este primer paso es análogo al que se obtendría resolviendo el pórtico por el método de los desplazamientos (o de la rigidez) tomando en consideración sólo las incógnitas de giro, pero no las de corrimiento.

** Paso 2.* Resulta como consecuencia lógica del paso anterior. Para llevar la estructura a su estado de deformación real deben eliminarse los vínculos ficticios introducidos, produciéndole los corrimientos Δ_1 que se producen en cada nivel. Dado que los giros ya fueron contemplados en el paso anterior, estos corrimientos deben introducirse sin rotación de las vigas, o sea como si sus nudos tuviesen empotramientos que sólo permiten el desplazamiento horizontal.

Bajo tales restricciones, aparecen en los extremos de las columnas momentos de fijación M', los que, al no existir en la estructura real, deben ser anulados mediante momentos $-M'$, los que a su vez se distribuirán entre los extremos de las barras concurrentes a cada nudo, permitiendo, por aplicación del método de Cross en su forma conocida, el trazado del diagrama de momentos resultante, el que debe ser sumado al obtenido en el paso 1.

Sin embargo, los valores de los momentos M' no son conocidos, por ser función de los desplazamientos Δ_1, también desconocidos. Por ello se le asignan valores arbitrarios, proporcionales a los reales, los que luego se ajustan mediante la resolución de un sistema de ecuaciones auxiliares, planteado bajo la necesidad de llevar la estructura a que se verifiquen en la misma las condiciones de equilibrio de columnas.

4.1.1. Relación entre los momentos M'.

4.1.1.1. Caso de columnas empotradas en su base.

Si en el pórtico de la figura 8a) se produce un desplazamiento horizontal Δ de su viga 1-2 (siendo $\Delta_1 = \Delta_2$ al suponer despreciable la variación de longitud de la barra en la estructura real deformada), manteniendo empotrado el extremo superior de cada columna, se producirán momentos en las mismas, cuyo valor está dado por la expresión (134) del Capítulo II

$$M_{A1} = M_{1A} = -\frac{6\,E.J_{A1}.\Delta}{(h_{A1})^2} = -\frac{6\,E.k_{A1}.\Delta}{h_{A1}} \qquad (21)$$

$$M_{B2} = M_{2B} = -\frac{6\,E.J_{B2}.\Delta}{(h_{B2})^2} = -\frac{6\,E.k_{B2}.\Delta}{h_{B2}} \qquad (22)$$

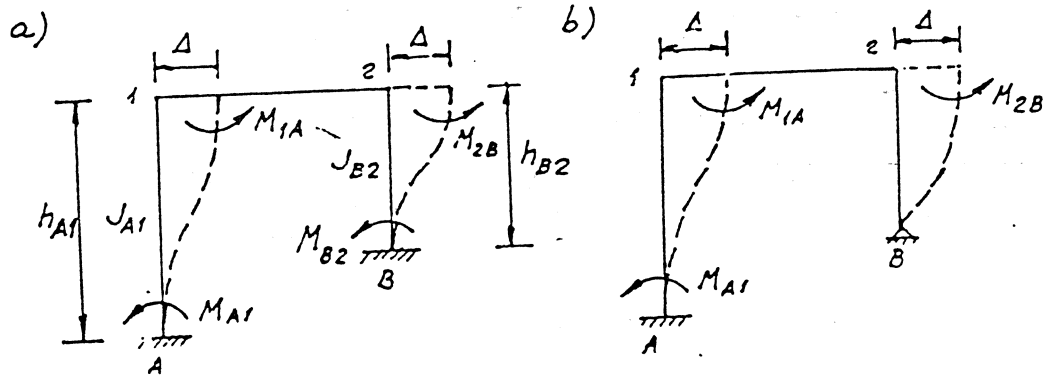


Figura 8

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones

$$\frac{M_{A1}}{M_{B2}} = \frac{6\,E.k_{A1}.\Delta}{6\,E.k_{B2}.\Delta}.\frac{h_{B2}}{h_{A1}} = \frac{k_{A1}.h_{B2}}{k_{B2}.h_{A1}}$$

y expresando M_{B2} en función de M_{A1}

$$M_{B2} = \frac{k_{B2}.h_{A1}}{k_{A1}.h_{B2}}.M_{A1} \qquad (23)$$

En consecuencia, al plantear el paso 2 precedentemente reseñado, se adopta para M_{A1} un valor arbitrario, mientras que el que corresponde emplear para M_{B2} se obtiene según la (23). Si las columnas fuesen de igual altura, los valores a considerar para los momentos de cabeza y pie de columna serán directamente proporcionales a las respectivas rigideces de éstas.

4.1.1.2. Caso de columnas articuladas en su base.

En este caso (figura 8b), para la columna con apoyo articulado, será de aplicación la expresión (132) del Capítulo II, por lo que

$$M_{A1} = M_{1A} = -\frac{6\,E.J_{A1}.\Delta}{(h_{A1})^2} = -\frac{6\,E.k_{A1}.\Delta}{h_{A1}} \qquad (24)$$

$$M_{2B} = -\frac{3\,E.J_{B2}.\Delta}{(h_{B2})^2} = -\frac{3\,E.k_{B2}.\Delta}{h_{B2}} \qquad (25)$$

pero, por hallarse el extremo de esta columna articulado, corresponde trabajar con una rigidez modificada dada por la primera de las (17), por lo que

$$k'_{B2} = (3/4).k_{B2} \qquad \text{luego:} \qquad k_{B2} = (4/3).k'_{B2}$$

Reemplazando en la (25)

$$M_{2B} = -\frac{3\,E.k_{B2}.\Delta}{h_{B2}} = -\frac{4\,E.k'_{B2}.\Delta}{h_{B2}} \qquad (26)$$

Dividiendo miembro a miembro las (24) y (26)

$$\frac{M_{A1}}{M_{2B}} = \frac{6\,E.k_{A1}.\Delta}{4\,E.k'_{B2}.\Delta}.\frac{h_{B2}}{h_{A1}} = \frac{3}{2}.\frac{k_{A1}.h_{B2}}{k'_{B2}.h_{A1}}$$

y expresando M_{B2} en función de M_{A1}

$$M_{2B} = \frac{2}{3}.\frac{k'_{B2}.h_{A1}}{k_{A1}.h_{B2}}.M_{A1} \qquad (27)$$

4.2. Pórticos de un nivel.

4.2.1. Sin cargas horizontales.

En cualquier pórtico, aunque no se halle sometido a la acción de cargas horizontales, se producirán desplazamientos laterales siempre que su configuración geométrica no sea simétrica, o aún en el caso en que lo fuera, cuando no sea simétrico el sistema de cargas actuante.

Los pasos a seguir se ejemplificarán a través de un caso práctico. Sea el pórtico de la figura 9a), geométricamente simétrico, pero solicitado por una carga vertical asimétrica P_1 sobre la viga.

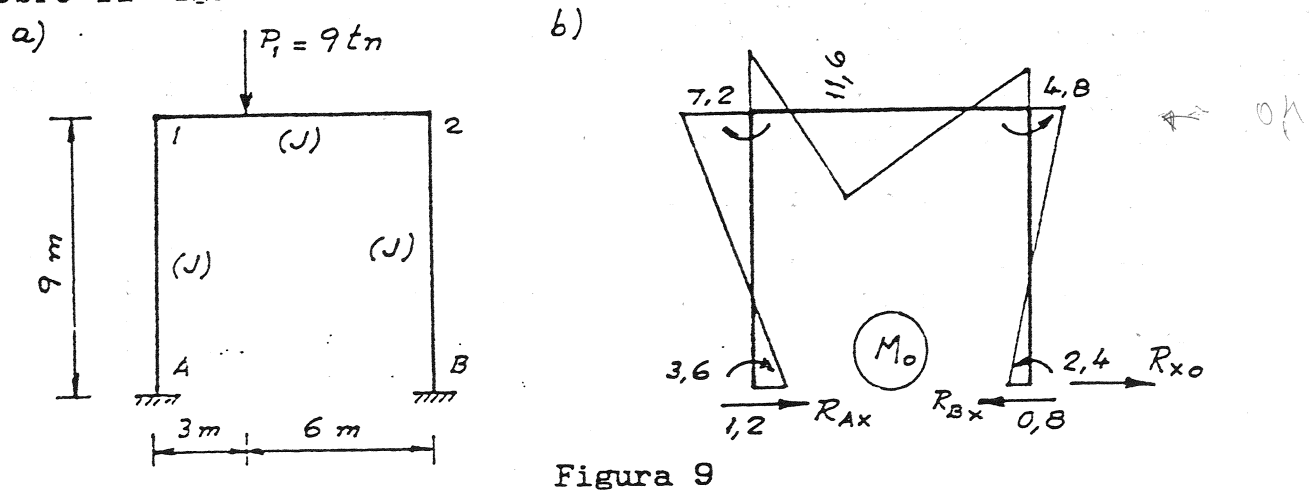


Figura 9

De acuerdo al paso 1 reseñado en 4.1., se aplica en primer lugar el método de Cross en la forma conocida. En este caso

$$k_{A1} = k_{12} = k_{2B} = 1 \quad ; \quad \mu_{1A} = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{2B} = 0,5$$

$$MEP_{12} = -\frac{P_1.a.b^2}{l^2} = -\frac{9 \times 3 \times 6^2}{9^2} = -12 \text{ tnm}$$

$$MEP_{21} = \frac{P_1 . a^2 . b}{l^2} = \frac{9 \times 3^2 \times 6}{9^2} = 6 \text{ tnm}$$

	A1	1A	12	21	2B	B2
k_{ik}	1		1		1	
μ_{ik}	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
MEP			-12	+ 6		
MD		+6	+ 6	- 3	- 3	
MT			- 1.5	+ 3		
MD		+0.75	+ 0.75	- 1.5	- 1.5	
MT			- 0.75	+ 0.375		
MD		+0.375	+ 0.375	- 0.188	- 0.188	
MT			- 0.094	+ 0.188		
MD		+0.047	+ 0.047	- 0.094	- 0.094	
MT			- 0.047	+ 0.024		
MD		+0.024	+ 0.024	- 0.012	- 0.012	
MT			- 0.006	+ 0.012		
MD		+0.003	+ 0.003	- 0.006	- 0.006	
MT			- 0.003	+ 0.002		
MD		+0.001	+ 0.001	- 0.001	- 0.001	
Σ	+3.6 ←	+7.2	- 7.2	+ 4.8	- 4.8 →	- 2.4

El diagrama de momentos flectores resultante (M_o) se consigna en la figura 9b).

Habiéndose efectuado el cálculo aplicando el método de Cross, que no contempla los desplazamientos traslacionales de los nudos, no se verificará la condición de equilibrio de columnas y la suma de las reacciones horizontales de los vínculos, que debe ser nula (por no existir cargas horizontales), no lo será, resultando en consecuencia $R_{Ax} + R_{Bx} \neq 0$, con lo que la estructura así calculada no se halla en equilibrio.

En efecto. Del diagrama de momentos M_o de la figura 9b) resulta

$$R_{Ax} = \frac{3.6 + 7.2}{9} = + 1.2 \text{ tn} \quad ; \quad R_{Bx} = \frac{- 2.4 - 4.8}{9} = - 0.8 \text{ tn}$$

$$R_{xo} = R_{Ax} + R_{Bx} = + 1.2 - 0.8 = + 0.4 \text{ tn} \neq 0$$

Corresponde en consecuencia agregar a la resolución anterior el efecto del desplazamiento lateral de la estructura. Si se da al mismo un valor arbitrario Δ (figura 10a), que se traduce en la aparición de momentos iguales en los extremos de cada columna (por ser en este caso $h_{A1} = h_{B2}$ y $k_{A1} = k_{B2}$), por ejemplo de valor $M_{A1} = M_{1A} = M_{B2} = M_{2B} = -10$ tnm como momentos de fijación, su anulación y posterior distribución permite calcular los momentos flectores correspondientes.

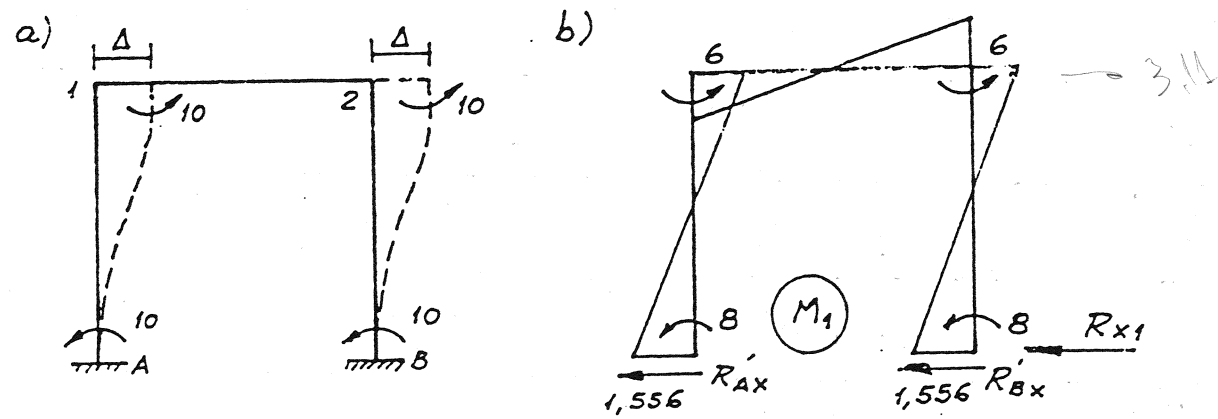


Figura 10

Observando que para este sistema la estructura será simétrica con carga antisimétrica, aplicando la tercera de las (17), se tiene

$$k_{12} = (3/2).1 = 1.5 \quad ; \quad k_{A1} = k_{B2} = 1$$

con lo que

$$\mu_{1A} = \mu_{2B} = \frac{1}{2.5} = 0.4 \quad ; \quad \mu_{21} = \mu_{12} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$$

En consecuencia la resolución arroja

	A1	1A	12	21	2B	B2
k_{ik}	1		1.5			
μ_{ik}	0	0.4	0.6			
MEP	-10	-10				
MD		+ 4	+ 6			
MT	+ 2					
Σ	- 8	- 6	+ 6	+ 6	- 6	- 8

mostrando la figura 10b) el diagrama de momentos flectores (M_1) correspondiente a este estado de deformación.

Tampoco en este caso, por iguales razones que las anteriores, se verifica la condición de equilibrio de columnas, puesto que

$$R_{Ax}' = R_{Bx}' = \frac{-8-6}{9} = -1.556 \text{ tn}$$

con lo que: $R_{x1} = R_{Ax}' + R_{Bx}' = -1.556 - 1.556 = -3.111 \text{ tn} \neq 0$

Pero al ser el estado de M_1 producto de la aplicación de un sistema de acciones proporcionales a las reales, pero de valor arbitrariamente elegido, puede determinarse el único valor de las mismas que lleva ambos estados superpuestos a la condición de equilibrio, es decir que

$$R_{xo} + X.R_{x1} = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad X = -R_{xo} / R_{x1} \qquad (28)$$

y para el caso planteado

$$0.4 - X.3.111 = 0 \qquad ; \qquad X = 0.4 / 3.111 = 0.1286$$

valor por el que deberán afectarse todos los momentos de extremo del estado M_1 para llevarlos al único que garantiza el equilibrio de la estructura.

En definitiva, los momentos de extremo de barra resultarán de la expresión general

$$M_e = M_{eo} + X.M_{e1} \qquad (29)$$

Para la estructura propuesta

$M_{A1} = +3.6 - 8 \times 0.1286 = +2.571$ tnm
$M_{1A} = +7.2 - 6 \times 0.1286 = +6.428$ tnm
$M_{12} = -7.2 + 6 \times 0.1286 = -6.428$ tnm
$M_{21} = +4.8 + 6 \times 0.1286 = +5.572$ tnm
$M_{2B} = -4.8 - 6 \times 0.1286 = -5.572$ tnm
$M_{B2} = -2.4 - 8 \times 0.1286 = -3.429$ tnm

La figura 11 muestra el diagrama final resultante.

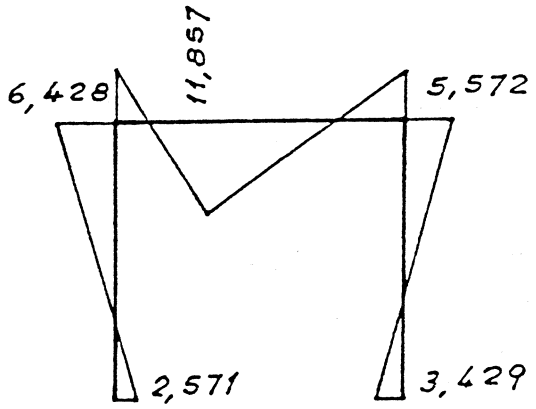


Figura 11

4.2.2. Con cargas horizontales.

Si sobre la estructura actúa una fuerza exterior horizontal P_2, que si corresponde a acción de viento o sismo se hallará aplicada a nivel de la viga 1-2 (figura 12a), deberá seguirse idéntico procedimiento al desarrollado en el apartado anterior para su resolución.

Merece observarse en este caso que la fuerza P_2, al hallarse aplicada sobre el nudo, no generará momentos de fijación: ni de nudos en el paso 1 ni de extremos de columna en el paso 2 por lo cual no se modifican los procedimientos de cálculo correspondientes a los estados M_o y M_1, como así tampoco los valores obtenidos en los mismos. En cambio, por razones obvias, la ecuación de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$) tomará ahora la forma

$$P_2 + R_{xo} + X.R_{x1} = 0 \qquad (30)$$

de la que puede despejarse el valor de X, que utilizado en la (29), permite obtener los valores definitivos de los momentos flectores en cada extremo de barra.

Aplicando al ejemplo empleado en el apartado anterior, suponiendo una fuerza horizontal $P_2 = 5$ tn, resultará

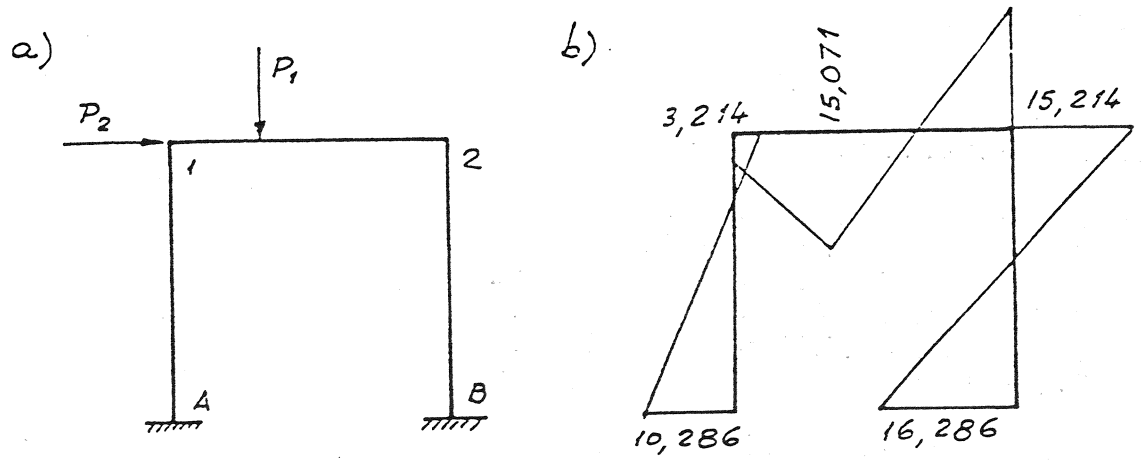


Figura 12

$$5 + 0.4 - X.3.111 = 0 \quad : \quad X = 1.7357$$

con lo que

$M_{A1} = + 3.6 - 8 \times 1.7357 = - 10.286$ tnm
$M_{1A} = + 7.2 - 6 \times 1.7357 = - 3.214$ tnm
$M_{12} = - 7.2 + 6 \times 1.7357 = + 3.214$ tnm
$M_{21} = + 4.8 + 6 \times 1.7357 = + 15.214$ tnm
$M_{2B} = - 4.8 - 6 \times 1.7357 = - 15.214$ tnm
$M_{B2} = - 2.4 - 8 \times 1.7357 = - 16.286$ tnm

indicándose en la figura 12b) el diagrama de momentos del pórtico.

Un procedimiento alternativo para plantear la ecuación que permite despejar el valor de X. surge de considerar que las reacciones R_{x1} referidas en la (30). constituyen una de las dos fuerzas que conforman la cupla reactiva de los momentos de cabeza y pie de columna. designadas por Q_{1k} y Q_{1k}' en las figuras 13a) y b) (con ik = A1 = B2). y que se calculan en la forma conocida

$$Q_{1k} = \frac{M_{inf} + M_{sup}}{h_{1k}}$$

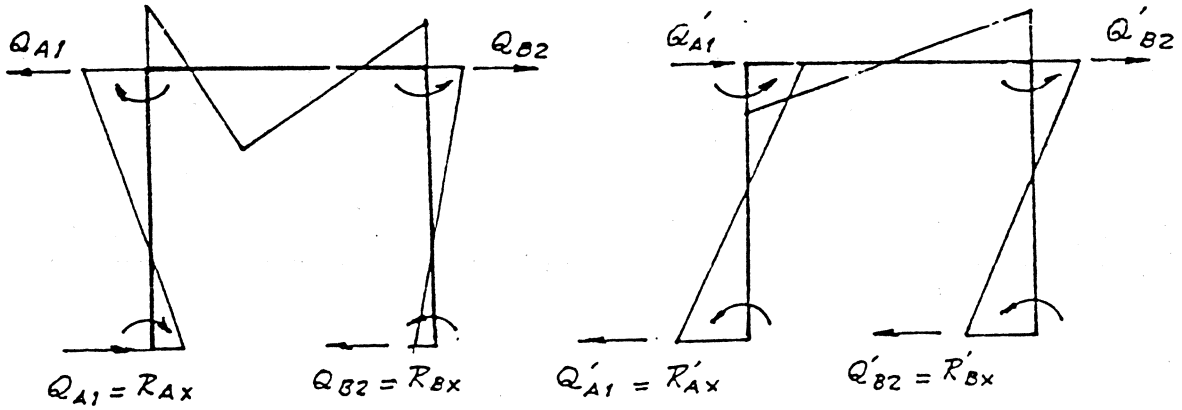


Figura 13

En consecuencia. la ecuación de *equilibrio* formulada según la (30). puede expresarse también mediante una ecuación de *equivalencia* entre las acciones consideradas a nivel de la viga. es decir que. introduciendo cada valor de Q_{1k} con los signos que se presentan para las mismas en el extremo superior de cada columna

$$P_2 = (Q_{A1} + Q_{B2}) + X.(Q_{A1}' + Q_{B2}') = F_{1o} + X.F_{11} \qquad (31)$$

llamando

$$F_{1o} = Q_{A1} + Q_{B2} \quad : \quad F_{11} = Q_{A1}' + Q_{B2}'$$

4.2.3. Casos particulares.

4.2.3.1. Columnas de distinta altura. sección o vinculación.

Elegido un valor arbitrario de M_{1k} para los momentos de cabeza y pie de una columna al producir el desplazamiento Δ . los valores a aplicar en las restantes columnas surgirán de la aplicación de las (23) y (27) según corresponda.

4.2.3.2. Pórticos sin cargas verticales.

Si como única acción actúa sobre el pórtico una fuerza horizontal P a nivel de la viga. no existe el paso 1, con lo que $M_o = 0$, y las (30) y (29) se reducen respectivamente a

$$P + X.R_{x1} = 0 \qquad y \qquad M_e = X.M_{e1}$$

4.2.3.3. Cargas horizontales sobre las columnas.

En el caso de existir cargas horizontales de tramo en las columnas (ya sea concentradas o distribuidas), se deberá: a) introducir los momentos de fijación correspondientes en los extremos de las columnas en las que tales acciones actúan, en el paso 1, y b) en la formulación de la (30) deberá incorporarse la componente de la acción horizontal total que corresponde al nivel de la viga.

4.3. Pórticos de dos niveles.

Sea el pórtico de dos pisos, con cargas horizontales a nivel de los dinteles 1-2 y 3-4, que se indica en la figura 14a).

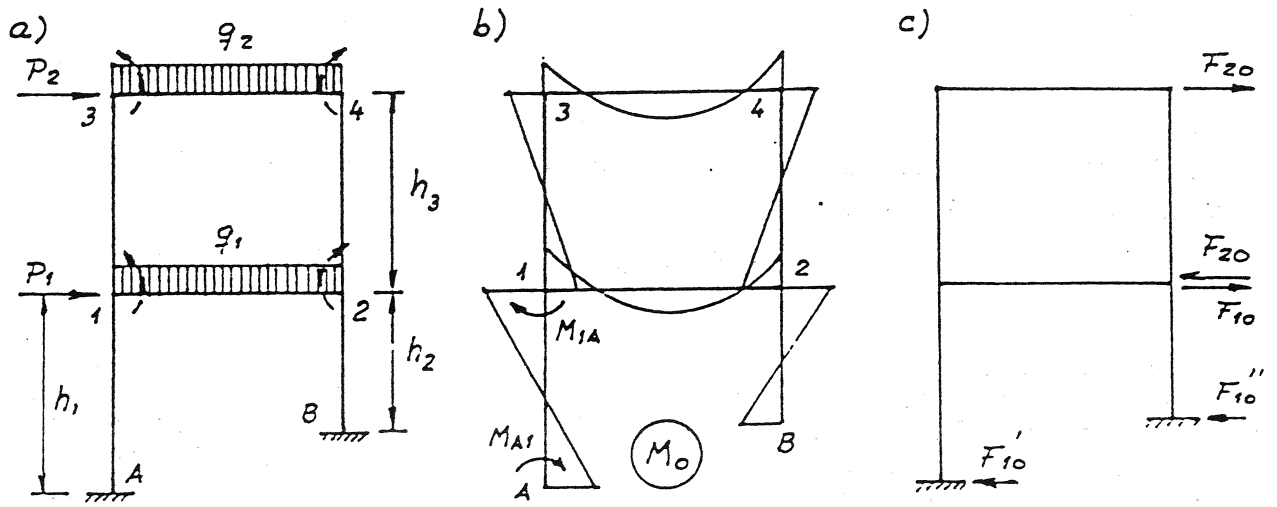


Figura 14

Para desarrollar el proceso de resolución, deben seguirse los dos pasos consignados precedentemente, con la diferencia que el segundo de ellos (al existir dos niveles) debe ser aplicado para cada uno de ellos en forma independiente.

En primer lugar se procede a la resolución de la estructura bajo la acción de las cargas verticales q_1 y q_2, con los momentos de fijación que en trazos se indican en la misma figura 14a). Las acciones P_1 y P_2 no intervienen en el cálculo, al no influir en los valores de los momentos de fijación de los giros de los nudos, y además, por no considerarse en este primer paso el desplazamiento lateral de la estructura.

Resolviendo por el método básico, se obtiene el diagrama de momentos respectivo (M_o), cuya configuración supuesta se muestra en la figura 14b). Los momentos de este diagrama, por la asimetría estructural, no verificarán las condiciones de equilibrio de columnas, permitiendo calcular los valores de las fuerzas no equilibradas (introduciendo cada momento con el signo que le corresponde)

$$|F_{1o}| = \frac{M_{A1} + M_{1A}}{h_1} + \frac{M_{B2} + M_{2B}}{h_2} \quad (= |F_{1o}'| + |F_{1o}''|)$$

$$|F_{2o}| = \frac{M_{13} + M_{31} + M_{24} + M_{42}}{h_3}$$

cuyos sentidos se han supuesto arbitrariamente en el esquema de la figura 14c), y que dependerán en cada caso de los valores y signos de los momentos M_{ik}.

A continuación (figura 15a), se supone aplicado al pórtico en el nivel 1-2, un corrimiento horizontal Δ_1, como única dirección de desplazamiento, que dará origen a los momentos de fijación que se consignan en la referida figura, cuyos valores relativos se obtienen de las (23) y (27), según el caso.

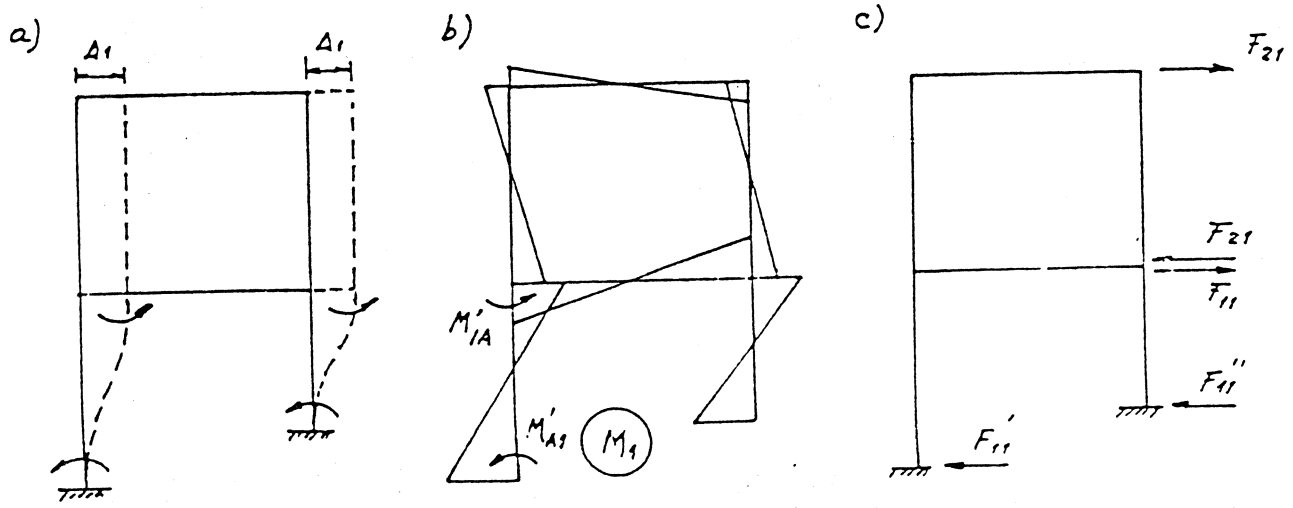


Figura 15

Aplicando el método de Cross en su formulación general, equilibrando y transmitiendo sucesivamente los referidos momentos, se puede trazar el diagrama de momentos resultante (M_1), que se consigna en la figura 15b), y que permite calcular

$$|F_{11}| = \frac{M_{A1}' + M_{1A}'}{h_1} + \frac{M_{B2}' + M_{2B}'}{h_2} \quad (= |F_{11}'| + |F_{11}''|)$$

$$|F_{21}| = \frac{M_{13}' + M_{31}' + M_{24}' + M_{42}'}{h_3}$$

los que, con sentidos supuestos, se indican en la figura 15c).

Finalmente se repite el procedimiento aplicando un corrimiento horizontal Δ_2 al dintel superior (figuras 16a), b) y c), lo que permite calcular

$$|F_{12}| = \frac{M_{A1}'' + M_{1A}''}{h_1} + \frac{M_{B2}'' + M_{2B}''}{h_2} \quad (= |F_{12}'| + |F_{12}''|)$$

$$|F_{22}| = \frac{M_{13}'' + M_{31}'' + M_{24}'' + M_{42}''}{h_3}$$

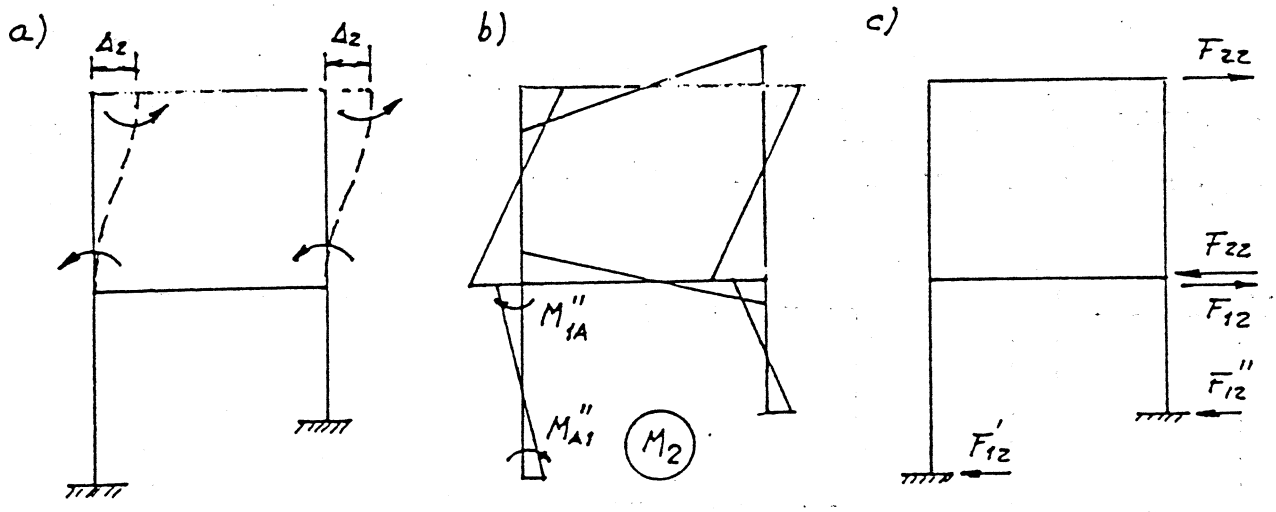


Figura 16

El sistema de ecuaciones a plantear surge de la condición de equivalencia que debe existir entre las fuerzas actuantes en cada nivel. De las figuras 14a), 14c), 15c) y 16c) (algebraicamente)

$$\begin{aligned} P_1 &= (F_{10} + F_{20}) + (F_{11} + F_{21}).X_1 + (F_{12} + F_{22}).X_2 \\ P_2 &= \quad F_{20} \quad + \quad F_{21} \quad .X_1 + \quad F_{22} \quad .X_2 \end{aligned} \qquad (32)$$

Despejando X_1 y X_2, los momentos definitivos en los extremos de cada barra del pórtico se calculan mediante

$$M_e = M_{e0} + X_1.M_{e1} + X_2.M_{e2} \qquad (33)$$

5. TRAZADO DE LINEAS DE INFLUENCIA POR EL PRINCIPIO DE MÜLLER - BRESLAU.

5.1. Enunciado.

La presentación efectuada por Maxwell de su teorema en 1864 fue tan escueta, que su valor no fue plenamente apreciado sino hasta 1886, cuando Heirich Müller - Breslau mostró en forma práctica su importancia, aplicándolo al trazado de líneas de influencia. Se originó así una técnica, conocida como Principio de

Müller - Breslau, la que puede enunciarse de la siguiente manera: *La línea de influencia para cualquier función respuesta coincide en su configuración con la elástica de deformación que resulta cuando se elimina la restricción que corresponde a esa función respuesta, y en su lugar se provoca un desplazamiento unitario.*

Este principio es de aplicación para el trazado de cualquier línea de influencia, ya sea de estructuras isostáticas como hiperestáticas.

5.2. Aplicación al trazado de líneas de influencia de vigas continuas.

Sea la viga continua genérica que muestra la figura 17a), de la que se desea trazar la línea de influencia del momento flector en la sección del apoyo *i*. Por definición, el sistema exterior de cargas estará constituido por una fuerza unitaria vertical, que puede ocupar cualquier posición entre A y B, designándose en forma genérica por *j* el punto sobre el cual actúa en una situación determinada.

Para aplicar el principio enunciado en el apartado anterior, deberá eliminarse la restricción del momento en la sección i, lo que se logra introduciendo en la misma una articulación, quedando puestos en evidencia los correspondientes momentos X_{ij}, que constituyen precisamente la función respuesta cuya línea de influencia se pretende trazar (figura 17b). La estructura inicialmente dada ha perdido así un grado de libertad, manteniéndose aún hiperestática.

Para calcular el valor de X_{ij}, o sea en este caso, para determinar su ley de variación, puede aplicarse el principio de compatibilidad de desplazamientos en que se fundamenta el método de las fuerzas. A tal fin, se supone primero $X_{ij} = 0$, produciendo en tal circunstancia la acción unitaria exterior actuante un desplazamiento angular relativo δ_{ij} (figura 17c). Luego se retira la fuerza exterior y se aplica un sistema de pares $X_{ij} = 1$, que producen un desplazamiento relativo δ_{ii} (figura 17d).

Por la condición de compatibilidad de desplazamiento

$$\delta_{ij} + X_{ij}.\delta_{ii} = 0$$

de donde

$$X_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{\delta_{ii}} = \beta_{ii}.\delta_{ij} \qquad (34)$$

llamando

$$\beta_{ii} = -\frac{1}{\delta_{ii}} \qquad (35)$$

La (34) indica la ley de variación de X_{ij}, cuya representación gráfica corresponderá a la línea de influencia buscada.

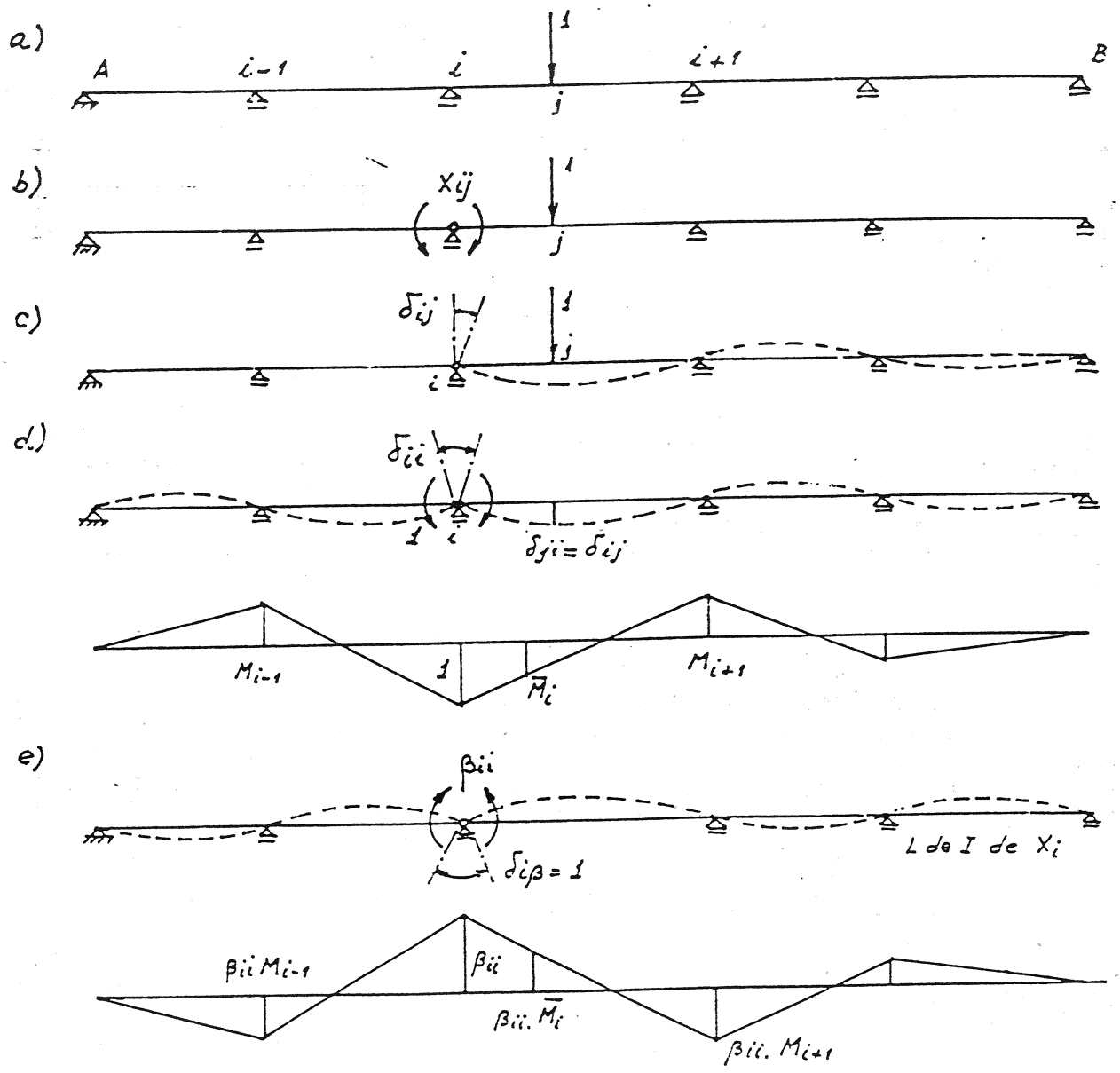


Figura 17

El valor de δ_{11} puede calcularse por intermedio del TTV. resolviendo el estado de solicitación consignado en la figura 17d). y en base al diagrama de momentos obtenido. de ordenada genérica $\bar{M}_1$. se aplica

$$\delta_{11} = \Sigma \int \bar{M}_1 . \frac{\bar{M}_1}{E.J_1} . dx = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1^2}{E.J_1} . dx \qquad (36)$$

Cabe observar que en general. el cálculo del diagrama de momentos $\bar{M}_1$ requerirá la resolución de uno o dos hiperestáticos (según sea la cantidad de tramos que tenga la viga continua y el número de orden que ocupe el apoyo i). la que puede efectuarse ya sea a través del método de Cross. o de cualquiera de los demás métodos estudiados al efecto.

Resta ahora determinar la ley de variación del desplazamiento relativo δ_{ij}. Resultando imposible su representación gráfica directa, se acude a la aplicación del teorema de Maxwell, estudiado en el apartado 4.3. del Capítulo II. Para ello debe hacerse actuar en la sección i un sistema de pares unitarios, repitiendo el paso ya efectuado precedentemente y representado en la figura 17d), permitiendo obtener cada ordenada de la elástica de deformación así obtenida el valor de

$$\delta_{j1} = \delta_{ij}$$

en correspondencia con cada posición de la carga unitaria.

Teniendo en cuenta que de acuerdo a la (34) la ley de variación de X_{ij} a graficar es β_{11} veces el valor de δ_{ij}, se concluye que la aplicación en la articulación introducida de un sistema de pares β_{11}, originará sobre la estructura una elástica de deformación cuya configuración coincidirá exactamente con la línea de influencia buscada (figura 17e). De la (36) se desprende que el valor de δ_{11} será siempre positivo, por lo que, según la (35), β_{11} será en todos los casos negativo.

Cabe observar que el diagrama de momentos correspondiente al estado β_{11} puede determinarse en forma inmediata multiplicando las ordenadas características del diagrama obtenido en el paso de la figura 17d) por el valor de β_{11} calculado según las (35) y (36) (figura 17e).

Si se calculase ahora el valor del giro relativo δ_{ik} en la sección i para el estado β_{11} (figura 17e), resultará teniendo en cuenta las (35) y (36) y que además, el sistema de dicha figura es el deformante y el de la figura 17d) el no deformante para el giro que se desea calcular

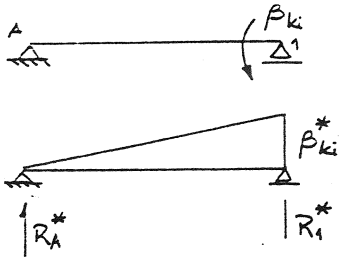
$$\delta_{ik} = \Sigma \int \bar{M}_1 . \frac{\beta_{11} . \bar{M}_1}{E . J_1} . dx = \beta_{11} . \Sigma \int \frac{\bar{M}_1^2}{E . J_1} . dx = \beta_{11} . \delta_{11} = - \frac{\delta_{11}}{\delta_{11}} = - 1$$

lo que comprueba el principio de Müller - Breslau. El signo negativo surge porque el ángulo δ_{ik} abre hacia abajo para el sentido que siempre presenta β_{11}, de acuerdo a la convención adoptada al efecto en el Capítulo III.

5.2.1. Forma de obtención práctica.

El razonamiento a seguir es similar al desarrollado en el apartado 4.3.3. del Capítulo III, a cuyo contenido total se remite. Se adaptará al presente caso la secuencia que permite la obtención de las expresiones finales de cálculo para el primer tramo de una viga continua (confrontar con el apartado 4.3.3.1. y la figura 37 del referido Capítulo).

En primer lugar debe tenerse presente que en este caso los momentos β_{k1} se obtienen de la figura 17e). Además, la (36) puede expresarse en general como



$$\delta_{k1} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1^2}{E.J_1}.dx = \Sigma \int \frac{J_o}{J_o}.\frac{\bar{M}_1^2}{E.J_1}.dx = \frac{1}{E.J_o}.\Sigma \int \bar{M}_1^2.r_1.dx$$

con lo que la (35) queda

$$\beta_{k1} = \frac{1}{\delta_{k1}} = \frac{E.J_o}{\Sigma \int \bar{M}_1^2.r_1.dx} = E.J_o.B_{k1} \qquad (+/-)$$

donde se ha llamado

$$B_{k1} = \frac{1}{\Sigma \int \bar{M}_1^2.r_1.dx}$$

En consecuencia, la (65) del apartado 4.3.3.1. del Capítulo III se transforma en

$$\beta^*_{k1} = \frac{\beta_{k1}}{E.J_1} = \frac{E.J_o.B_{k1}}{E.J_1} = r_1.B_{k1} \qquad (+/-)$$

desapareciendo en este caso los términos 6 y Δ respecto a la (65) del Capítulo III. Reemplazando en la (69) del mencionado Capítulo

$$X_{kj}{}^I = \frac{\beta^*_{k1}.l_1^2}{6}.\omega_1 = \frac{r_1.l_1^2}{6}.B_{k1}.\omega_1 = \frac{\rho_1.l_1}{6}.B_{k1}.\omega_1 \qquad (37)$$

Para un tramo genérico cualquiera, la (75) del Capítulo III se transformará en

$$X_{kj}{}^1 = \frac{\rho_1.l_1}{6}.(B_{k(i-1)}.\omega_d + B_{ki}.\omega_1) \qquad (+/-) \qquad (38)$$

o sea que, en conclusión, las diferencias con el método que reduce a la viga continua en un isostático equivalente, radican en la forma de obtención de los B_{k1}, que ahora se determinan a través de un diagrama de momentos flectores (figura 17e), en lugar de ser los términos interiores que resultan de la inversión de una matriz, y, ya en la expresión específica de aplicación, que se sustituye por 6 el término Δ.

5.3. Líneas de influencia cualitativas.

El principio de Müller - Breslau tiene una importancia tal, que es necesario dedicarle suficiente atención para destacar su gran valor. La configuración de las líneas de influencia para estructuras continuas, es tan fácil de determinar a partir de este principio, que el cálculo específico de los valores numéricos de las ordenadas no siempre es necesario. El diagrama correspondiente se puede trazar con la suficiente aproximación para permitir localizar las secciones o tramos críticos provocados por las

acciones exteriores para diversas funciones estructurales. Esta posibilidad es importante en el diseño de estructuras para edificios, según se ilustra en el presente apartado.

Si se requiere conocer la línea de influencia correspondiente a la reacción en el apoyo A de la viga continua de la figura 18a), su configuración general puede determinarse haciendo que la reacción actúe hacia arriba produciendo un corrimiento de valor unitario (figura 18b). Si el extremo izquierdo A de la viga se empuja hacia arriba, ésta adoptará la deformada que se muestra, pudiendo trazarse fácilmente un esquema de esta configuración deformada, recordando que en los restantes apoyos no pueden producirse desplazamientos lineales.

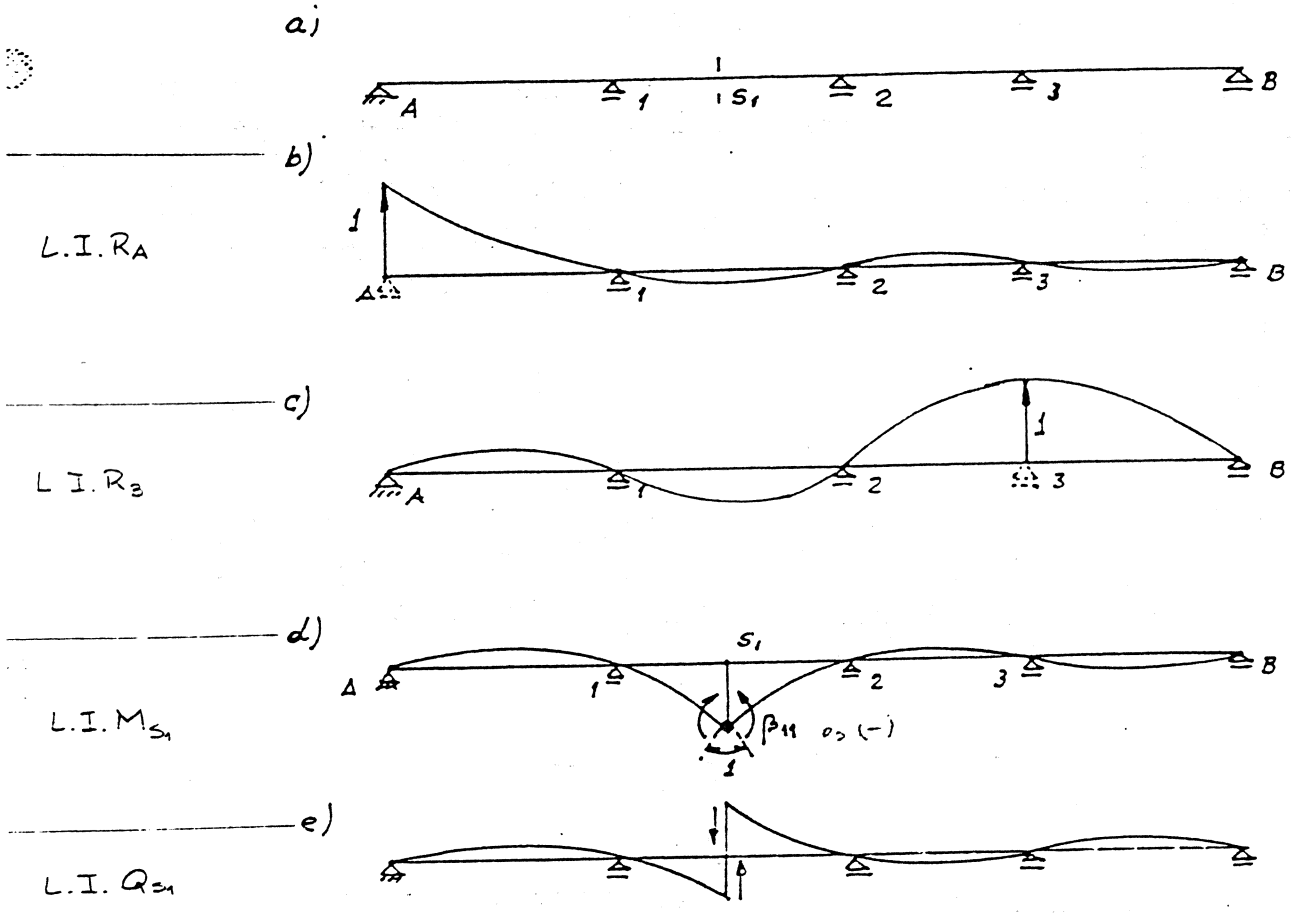


Figura 18

Las líneas de influencia determinadas sólo mediante un esquema se denominan *líneas de influencia cualitativas*, en tanto que las especificadas por medio del cálculo numérico de sus ordenadas se conocen como *líneas de influencia cuantitativas*. La línea de influencia para RB (figura 18c) constituye otro ejemplo de un esquema cualitativo para componentes de reacción.

La figura 18d) consigna la línea de influencia para el momento flector en la sección S1, próxima al centro del segundo tramo de

la estructura. Se supone para su trazado que a la viga se le introduce una articulación en dicha sección y que se aplica un par a cada lado de la misma, de valor β_{11} (negativo). En tal caso las secciones que limitan la articulación rotan en el mismo sentido que los pares aplicados, como se muestra en la referida figura, pero como la viga no puede tener corrimientos en los puntos de los apoyos, el sistema de pares aplicados obligará a la articulación a un desplazamiento lineal, hacia abajo en este caso, hasta que el ángulo girado por las secciones sea unitario.

Análogamente pueden trazarse las líneas de influencia cualitativas para esfuerzos de corte. Se supone al efecto que se efectúa un corte en la viga en la sección considerada, junto con dos fuerzas verticales aplicadas una a cada lado de la sección cortada y que proporcionan la fuerza cortante positiva. La viga se deformará como se muestra en la figura 18e).

Con estos diagramas se dispone de suficiente información respecto de las posiciones críticas de las cargas accidentales. Si se deseara conocer por ejemplo el valor máximo positivo de R_A por sobrecarga uniformemente distribuida, la carga debe colocarse en los tramos primero y tercero, donde los diagramas presentan ordenadas positivas; en cambio si se quisiera el máximo momento positivo en la sección S_1, se cargarán los tramos segundo y cuarto, etc.

Las líneas de influencia cualitativas resultan muy valiosas en la determinación de los tramos con carga crítica en edificios, como lo muestra la línea de influencia de momentos para el pórtico múltiple de la figura 19. Para su trazado debe tenerse presente que los nudos tienen libertad de girar, pero las barras concurrentes en cada nudo se consideran rígidamente unidas entre sí, de manera que los ángulos entre ellas no cambian durante el giro. El diagrama en la figura indicada se ha trazado para el momento flector en el centro de la viga 1-2.

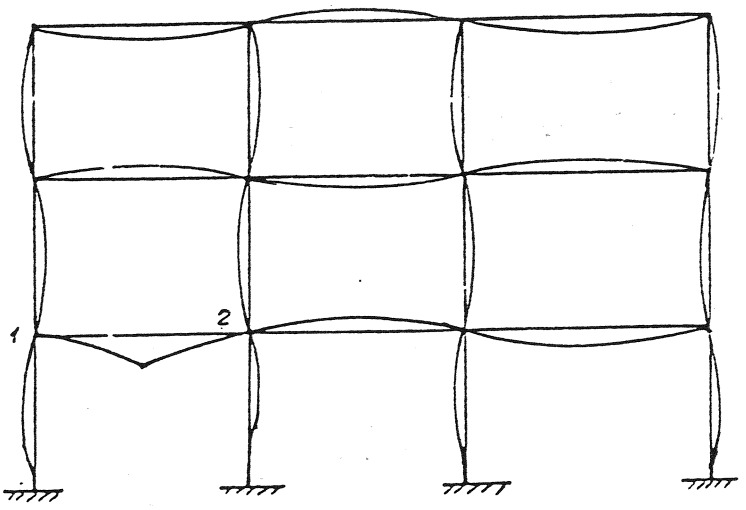


Figura 19

A partir de la configuración de la línea de influencia, resultan evidentes los tramos que deben ser cargados con el fin de producir los momentos flectores máximos y mínimos en la sección considerada. Debe observarse que cargas sobre una viga que ubica a más de 3 vanos de distancia, aproximativamente, tienen ya poco efecto en la función estructural considerada.

Sin embargo, resulta pertinente advertir con respecto a las líneas de influencia cualitativas, que éstas deben ser trazadas para secciones ubicadas en la parte central de los vanos o en los apoyos o nudos, ya que en el caso de secciones próximas a los cuartos de los vanos, no podrá efectuarse el trazado tentativo si antes no se las analiza cuidadosamente. Ello es debido a que cerca de los cuartos de los vanos se ubican los denominados *puntos fijos* (puntos de momento flector nulo), en los que la línea de influencia cambia de configuración.

6. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Métodos clásico y matricial" - Jack McCormac y Rudolf E. Elling - Alfaomega Grupo Editor S.A. - México - 1996.

2. "ANALISIS ESTRUCTURAL" - Russell C. Hibbeler - Prentice Hall Hispanoamericana S.A. - México - 1997.

3. "ANALISIS DE ESTRUCTURAS - Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos" - Harry H. West - Compañía Editorial Continental S.A. - México - 1984.

4. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

5. "TEORIA ELEMENTAL DE ESTRUCTURAS" - Yuan-Yu Hsieh - Editorial Prentice/Hall Internacional - Madrid - 1973.

6. "CIENCIA DE LA CONSTRUCCION" - Odone Belluzzi - Editorial Aguilar - Madrid - 1967.

7. "ESTATICA DE LAS ESTRUCTURAS" - Schreyer/Ramm/Wagner - Editorial Blume - Madrid - 1969.

8. "INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL CON METODOS MATRICIALES" - Chu-Kia Wang - Compañía Editora Continental S.A. - México - 1979.

9. "ESTATICA EN LA CONSTRUCCION" - Kurt Hirschfeld - Editorial Reverté S.A. - Barcelona - 1975.

10. "APUNTES DE CLASE" - Ing. Carlos D. Segerer - Cátedra de Estabilidad III (Análisis Estructural I) - Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

INDICE

CAPITULO VIII: METODOS ITERATIVOS

Página

1. El Método de Cross. Generalidades. 1

2. Conceptos básicos 2
   2.1. Momentos de empotramiento perfecto. 2
   2.2. Coeficiente de distribución 3
   2.3. Coeficiente de transmisión y momento transmitido. . . 5
   2.4. Resumen de conceptos. 5

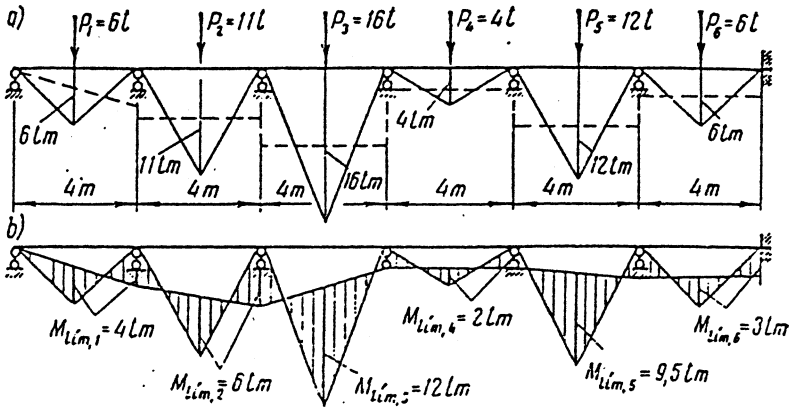
3. Distribución de momentos sin traslación de nudos 6
   3.1. Proceso de fijación y liberación. 6
   3.2. Ejemplos complementarios de aplicación. 13
   3.3. Rigideces modificadas 16

4. Distribución de momentos con traslación de nudos 22
   4.1. Planteo general 22
   4.2. Pórticos de un nivel. 25
   4.3. Pórticos de dos niveles 31

5. Trazado de líneas de influencia por el principio de Müller - Breslau 33
   5.1. Enunciado 33
   5.2. Aplicación al trazado de líneas de influencia de vigas continuas 34
   5.3. Líneas de influencia cualitativas 37

6. Bibliografía consultada 40

ANALISIS ESTRUCTURAL I



CAPITULO IX

RESOLUCION DE ESTRUCTURAS

EN FASE PLASTICA

Ing. Carlos D. Segerer

Mendoza - 2001

CAPITULO IX

RESOLUCION DE ESTRUCTURAS EN FASE PLASTICA

1. SOLICITACIONES INTERNAS LIMITES EN LA SECCION DE UNA BARRA.

1.1. Conceptos básicos y definiciones.

Se denomina *estado límite* o *extremo* de la sección de una barra, a aquel en el cual un aumento cualquiera de las solicitaciones interiores es físicamente imposible o está limitado por las suposiciones aceptadas. El primer caso depende sólo de las propiedades físicas del material, mientras que el segundo es función además del anterior, de los criterios adoptados en cada caso concreto sobre la fijación del propio estado límite.

La determinación teórica del estado límite de una sección se basa en los diagramas experimentales de deformación de los materiales para un estado de tensión uniaxial, los cuales se sustituyen por diagramas simplificados que reflejan a los reales en lo fundamental, con una aproximación aceptable y que facilite la aplicación de los métodos de análisis. Las formas aproximadas de estos diagramas $\sigma - \varepsilon$ se muestran: para los materiales plásticos en las figuras 1a) y b) y para los frágiles en las 1c) y d).

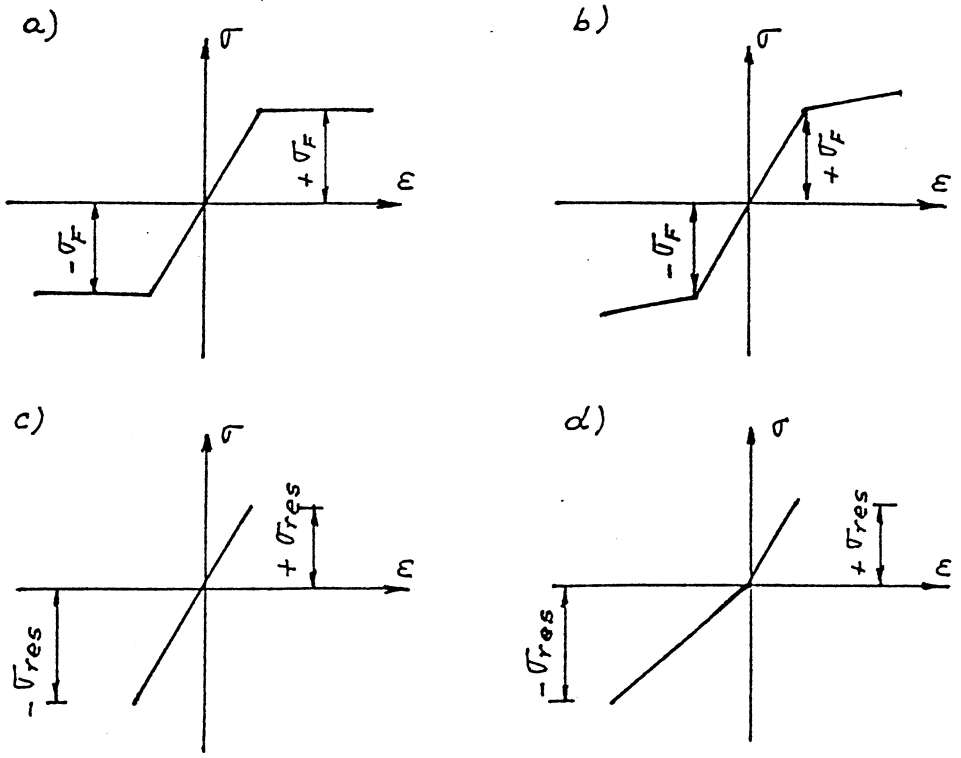


Figura 1

Las expresiones de cálculo de las solicitaciones interiores límites en una sección dependen de la configuración del diagrama de deformaciones simplificado que se adopte. En los análisis que se efectúan en el presente capítulo se tomarán en consideración sólo los diagramas más simples (figuras 1a) y c), y en especial el ideal de materiales de comportamiento plástico representado en la primera de estas figuras, conocido como diagrama de Prandtl. Sin perjuicio de ello, los métodos de análisis que se desarrollarán, pueden ser empleados también si resultare necesario o conveniente recurrir a diagramas más complicados.

En el caso específico de materiales frágiles, el diagrama de deformación lineal sirve por lo general sólo como una primera aproximación grosera; no obstante, con procedimientos simples permite determinar el estado límite de cada sección.

En cuanto al diagrama plástico ideal, si se lo compara con el real para el caso del acero por ejemplo, figura 2, se observa que no toma en consideración el endurecimiento (aumento de resistencia una vez transpuesto el escalón de fluencia) del material. Sin embargo, la confrontación de los ensayos experimentales con los resultados del análisis estructural en fase plástica, demuestran que si el material posee una extendida zona de fluencia, no se producen errores significativos adoptando el diagrama simplificado de Prandtl, dado que en tales materiales el endurecimiento comienza cuando la resistencia de la sección ya está llegando a su fin. Los ensayos efectuados muestran que para elementos estructurales metálicos cuyo material posee una amplia zona de fluencia, las cargas de rotura son cercanas a las teóricas determinadas en base a tal diagrama.

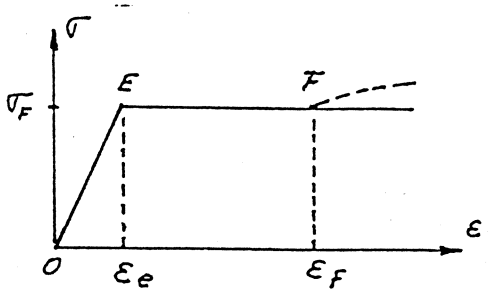


Figura 2

En el caso de un acero liso común (figura 2), el tramo O-E corresponde al campo elástico, de E a F al período plástico propiamente dicho y de F hasta la rotura, a la zona de grandes deformaciones.

El punto E corresponde al límite elástico aparente o límite de fluencia, con un alargamiento unitario $\varepsilon_e \approx 0{,}001$. Al final del período plástico, el alargamiento unitario ε_f alcanza valores comprendidos entre 0,01 y 0,025, es decir de 10 a 25 veces superiores a ε_e. Como valor medio de ε_f se elige 0,015.

En el período plástico la deformación aumenta bajo tensión casi constante. En el mismo, el módulo de elasticidad disminuye progresivamente desde una valor inicial de $E_e \approx 2.100.000$ kg/cm² a $E_f \approx 56.000$ kg/cm².

A partir del punto F, bajo comportamiento real del material (línea en trazos), es necesario aumentar la carga que actúa sobre la probeta para provocar nuevos alargamientos de la misma, los que corresponden ya a la zona de grandes deformaciones. Este aumento de capacidad resistente es despreciado en el diagrama simplificado adoptado, que permanece rectilíneo horizontal hasta la rotura, con lo que éste se coloca del lado de la seguridad.

El diagrama de la figura 2 es válido también para solicitaciones de compresión, siempre que la probeta no haya sido previamente estirada hasta alcanzar el campo plástico.

1.2. Secciones solicitadas a esfuerzo axil.

1.2.1. Caso de una barra.

Para determinar los estados límites de una sección de una barra solicitada a tracción o compresión, se tendrá:

a) Para los materiales frágiles, independientemente de la forma del diagrama de deformaciones, y recordando que $\sigma = S/F$:

$$S_{lim} = + \sigma^{rot}.F \qquad \text{a la tracción}$$
$$S_{lim} = - \sigma^{rot}.F \qquad \text{a la compresión}$$

b) Para los materiales de comportamiento plástico:

$$S_{lim} = \sigma_F.F \qquad \text{a la tracción y compresión} \qquad (1)$$

1.2.2. Caso de tres barras concurrentes.

Se trata de un ejemplo sencillo que permite clarificar los conceptos básicos ligados al cálculo de estructuras en fase plástica y al comportamiento de los materiales solicitados a esfuerzos axiles en los campos elástico y plástico.

Considérese el sistema constituido por tres barras articuladas representado en la figura 3a), el que para mayor sencillez de los razonamientos se considera simétrico, con barras de igual sección transversal F y de un material que responde al diagrama ideal tensión - deformación mostrado en la figura 3b), formado por una recta de Hooke O-E seguida de un tramo horizontal E-R, ubicado a tensión σ_F.

Sean X_1 el esfuerzo en la barra vertical y X_2 el de las barras inclinadas. La estática brinda sólo la ecuación de equilibrio de fuerzas según la dirección vertical del nudo D

$$P = X_1 + 2\, X_2.\text{sen}\,\alpha \qquad (2)$$

por lo que el problema presenta una incógnita hiperestática.

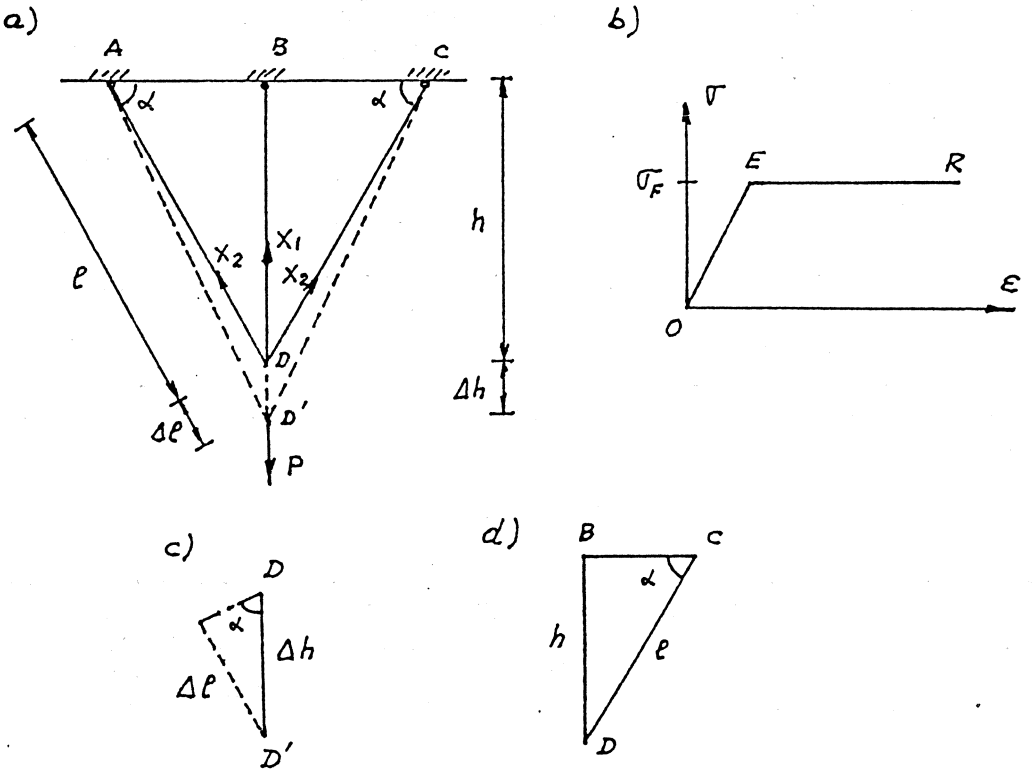


Figura 3

1.2.2.1. Solución clásica elástica del problema.

Supóngase que en un estado inicial las tensiones en las tres barras se mantienen inferiores al límite elástico σ_F del material. Por efecto de la carga P se producirá el alargamiento de las barras, pasando el sistema a una posición deformada tal como la indicada en trazos en la figura 3a), manteniéndose el punto D como el de concurrencia de las barras (trasladado a D´). Designando al alargamiento de la barra B-D por Δh, el de las barras oblicuas A-D y D-C estará dado por (figura 3c)

$$\Delta l = \Delta h . \operatorname{sen} \alpha \qquad (3)$$

suponiendo la constancia del valor de α al pasar al estado deformado, al admitir la hipótesis de deformaciones pequeñas.

Por la ley de Hooke, y siendo además $h = l . \operatorname{sen} \alpha$ (figura 3d)

$$\Delta h = \frac{X_1 . h}{E . F} = \frac{X_1 . l . \operatorname{sen} \alpha}{E . F} \quad ; \quad \Delta l = \frac{X_2 . l}{E . F} \qquad (4)$$

Reemplazando en la (3)

$$\frac{X_2 . l}{E . F} = \frac{X_1 . l . \operatorname{sen} \alpha}{E . F} . \operatorname{sen} \alpha \quad \text{de donde:} \quad X_2 = X_1 . \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad (5)$$

que es la ecuación que expresa, en este caso, las condiciones de compatibilidad elástica, y que pone en evidencia que siempre, en este campo, se verifica que $X_2 < X_1$.

De las relaciones (2) y (5) se deduce directamente

$$P = X_1 + 2\,X_2.\text{sen}\,\alpha = X_1 + 2\,X_1.\text{sen}^3\,\alpha = X_1.(1 + 2\,\text{sen}^3\,\alpha) \qquad (6)$$

Siendo la barra más solicitada la vertical, en la concepción clásica de la resistencia de materiales, la ruina o rotura del sistema se produce cuando el material de esta barra alcanza el límite elástico σ_F ; en este instante el valor del esfuerzo en la barra es $X_1 = \sigma_F.F$, de modo que la carga que corresponde al límite elástico es, reemplazando en la (6)

$$P_{1e} = \sigma_F.F.(1 + 2\,\text{sen}^3\,\alpha) \qquad (7)$$

Durante el comportamiento del material en fase elástica, las (5) y (6) ponen de manifiesto que los esfuerzos X_1 y X_2 aumentan proporcionalmente con la carga P. El desplazamiento vertical Δh del punto D, a su vez, también aumenta en igual razón a medida que lo hace P. Cuando éste alcanza el valor de P_{1e}, se tendrá que la primera de las (4) se transforma en

$$\Delta h_{1e} = \frac{X_1.h}{E.F} = \frac{\sigma_F.F.h}{E.F} = \frac{\sigma_F.h}{E} \qquad (8)$$

1.2.2.2. Solución plástica del problema.

En la realidad, la rotura no sobreviene cuando la carga P alcanza el valor dado por la (7). Lo que ocurre en ese momento es que la barra vertical entra en régimen plástico y comienza a alargarse bajo carga constante. En tales condiciones, el esfuerzo en esta barra permanece constantemente igual a $X_1 = \sigma_F.F$, y el sistema se transforma en el que muestra la figura 4, resultando que al quedar ya fijo y conocido el valor de X_1, el sistema pasa a comportarse como isostático, perdiendo el único grado de hiperestaticidad que poseía.

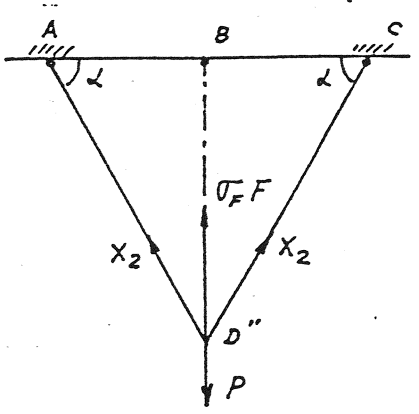


Figura 4

En este estado los esfuerzos X_2 en las barras oblicuas, que se mantienen en régimen elástico, varían con P de acuerdo a la relación que surge de plantear la condición de equilibrio de las acciones verticales, es decir

$$P = \sigma_F.F + 2\ X_2.\text{sen}\ \alpha \qquad (9)$$

Se dice que en tales condiciones el sistema se halla en estado de *deformación plástica limitada*. Este período termina en el instante en que la tensión en las barras oblicuas alcanza igualmente el límite elástico, es decir cuando $X_2 = \sigma_F.F$. Llevando este valor a la (9), se obtiene la *carga de rotura plástica* o *carga límite* del sistema

$$P_{1p} = \sigma_F.F + 2\ \sigma_F.F.\text{sen}\ \alpha = \sigma_F.F.(1 + 2\ \text{sen}\ \alpha) \qquad (10)$$

Para calcular el corrimiento vertical del punto D al momento del estado límite en fase plástica del sistema, debe partirse de la (3), por la que

$$\Delta h = \frac{\Delta l}{\text{sen}\ \alpha}$$

Teniendo en cuenta el valor de Δl dado por la segunda de las (4), y recordando que $h = l.\text{sen}\ \alpha$, y que además $X_2 = \sigma_F.F$, resulta

$$\Delta h = \frac{\Delta l}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{X_2.l}{E.F.\text{sen}\ \alpha} = \frac{X_2.h}{E.F.\text{sen}^2\ \alpha} = \frac{\sigma_F.F.h}{E.F.\text{sen}^2\ \alpha}$$

por lo que en definitiva

$$\Delta h_{1p} = \frac{\sigma_F.h}{E.\text{sen}^2\ \alpha} \qquad (11)$$

Si a nivel de ejemplo numérico sencillo se supone $\alpha = 45°$, se tendrá sen $\alpha \approx 0,7$; $\text{sen}^2\ \alpha \approx 0,5$ y $\text{sen}^3\ \alpha \approx 0,35$. Bajo tales condiciones, las (7), (10), (8) y (11) resultarán respectivamente

$$P_{1e} = 1,7\ \sigma_F.F \quad ; \quad P_{1p} = 2,4\ \sigma_F.F \qquad (12)$$

$$\Delta h_{1e} = \sigma_F.h/E \quad ; \quad \Delta h_{1p} = 2\ \sigma_F.h/E \qquad (13)$$

es decir que para un incremento de la carga que puede soportar la estructura algo mayor de un 41%, el desplazamiento vertical del punto D es el doble que el correspondiente al límite elástico. Esto demuestra que durante este período de deformación plástica limitada, el desplazamiento crece según la recta AB del diagrama de la figura 5, no guardando la misma relación de proporcionalidad respecto a la fuerza actuante P que en el campo elástico (representado por el tramo O-A), por lo que no es aplicable en fase plástica el principio de independencia de las acciones y de superposición de los efectos.

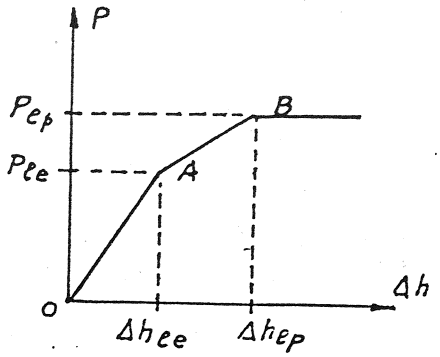


Figura 5

Cuando la carga alcanza el valor P_{1e}, el sistema entra en estado de *deformación plástica libre.* En efecto, como todas las barras se alargan plásticamente bajo fuerza constante $\sigma_F.F$, cualquier eventual incremento de la carga P sólo puede sobrevenir por un incremento de los ángulos α, de modo que aumenten las proyecciones de las fuerzas $\sigma_F.F$ de las barras inclinadas sobre la dirección vertical. Para que este efecto sea sensible, es preciso que la estructura experimente deformaciones plásticas de un valor totalmente inadmisible. Si se desprecia por una parte tal cambio geométrico, y por otra el endurecimiento del material, el sistema se deformará continuamente bajo la carga constante P_{1e}, hasta la rotura.

El sistema no está en peligro de colapso hasta el instante en que comienza a adquirir grandes deformaciones plásticas; por esta razón se tiende a considerar la carga P_{1e} como carga de rotura y a adoptar en servicio una cierta fracción de la misma. Aunque en el fondo tal fracción sea un coeficiente de seguridad, se trata de diferenciarlo del coeficiente de seguridad clásico dándole el nombre de *coeficiente de carga.*

De las (12) surge que la economía obtenida aplicando la teoría plástica en lugar de la teoría elástica clásica viene medida por la siguiente relación, que para el caso particular supuesto vale

$$\left(\frac{P_{1p}}{P_{1e}} - 1\right).100 = \left(\frac{2,4}{1,7} - 1\right).100 = 41,2\ \%$$

Cabe observar que se ha obtenido la carga límite dada por la (10) expresando que las tensiones en todas las barras habían alcanzado el límite elástico y utilizando la ecuación de equilibrio estático (9). Dicho de otro modo, la carga límite del sistema está estáticamente determinada. Se la calcula directamente conociendo las secciones de las barras y el límite elástico σ_F del material, sin necesidad de analizar previamente el comportamiento elastoplástico del sistema.

El carácter estáticamente determinado de la carga de rotura plástica y su insensibilidad ante defectos menores del sistema

(error de longitudes de una barra, efectos térmicos, asentamientos de vínculos, etc.), hacen que sea mucho más cómoda de calcular que la carga límite elástica.

Si se descargase completamente el sistema tras haberlo llevado a una carga infinitésimamente inferior a P_{LP}, las barras oblicuas, que han permanecido elásticas, tenderán a recuperar su longitud inicial. En cambio, la barra vertical, que ha estado sometida a un alargamiento permanente, será demasiado larga para las barras inclinadas. Es obvio pues, que después de la descarga, la barra vertical quedará comprimida y las otras dos traccionadas.

1.3. Secciones solicitadas a flexión simple.

Se despreciará, en el presente análisis, la influencia de aquellas solicitaciones internas que en la mayoría de los casos afectan poco a las deformaciones de los elementos estructurales, tales como el esfuerzo de corte y el esfuerzo normal. En caso de resultar necesaria su consideración, se remite a la bibliografía consignada al final del presente capítulo.

La hipótesis de partida para el análisis de secciones sometidas a deformaciones elastoplásticas es la misma que para la teoría elástica, es decir, la hipótesis de Bernoulli, según la cual las secciones, después de la deformación, permanecen planas y normales al eje de la viga.

Sea el caso de una sección rectangular, por ende doblemente simétrica, solicitada por un momento flector M actuante en el plano de simetría vertical (figura 6). Mientras que el valor de este momento M sea tal que toda la sección permanezca en régimen de deformación elástica, la distribución de tensiones a lo largo de la sección será lineal, con un diagrama doble triangular. Este régimen persistirá mientras que las deformaciones unitarias de las fibras extremas sean inferiores a ε_e, caso a de la figura 6.

En tales condiciones, por Resistencia de Materiales

$$\sigma < \sigma_F = \frac{M.(d/2)}{J} = \frac{M}{W_e} \qquad \text{de donde:} \qquad M = \sigma.W_e \qquad (14)$$

siendo W el módulo resistente de la sección, el que dentro del campo elástico valdrá

$$W_e = \frac{J}{d/2} = \frac{b.d^3}{12\ (d/2)} = \frac{b.d^2}{6} \qquad (15)$$

o también, dado que el momento M debe ser equilibrado por el par resistente interno T.z = C.z, con z = (2/3).d:

$$M = \frac{\sigma}{2}.\left(\frac{d}{2}\right).b.\frac{2}{3}\,d = \sigma.\frac{b.d^2}{6} = \sigma.W_e$$

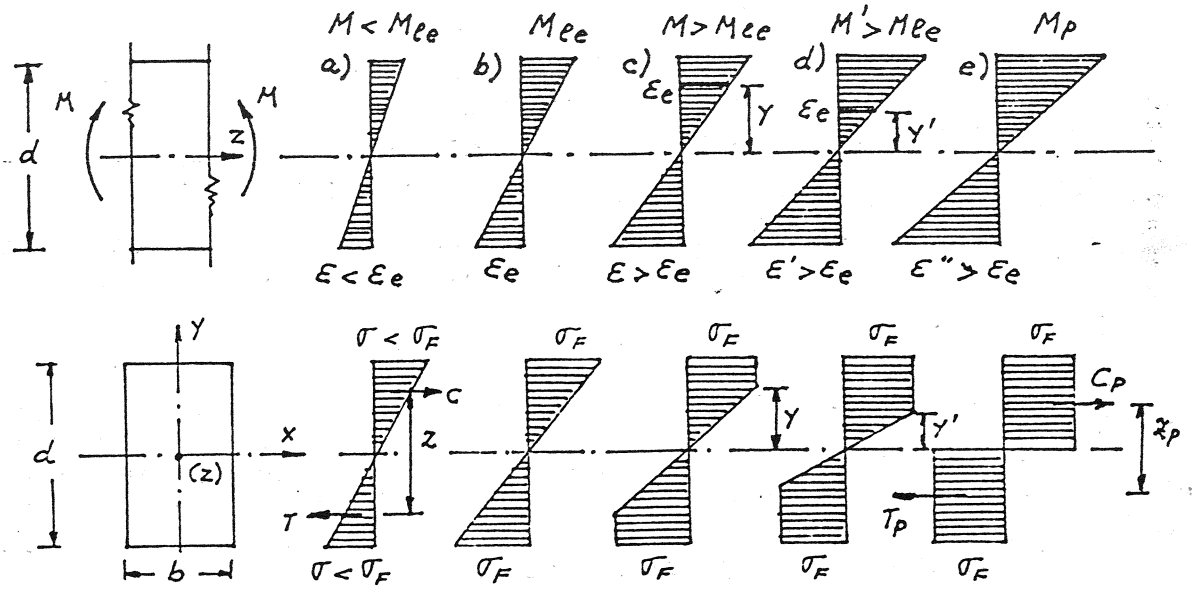


Figura 6

Al aumentar el valor del momento flector aplicado M, se incrementarán en forma proporcional los valores de ε y de σ, hasta llegar respectivamente a ε_e y σ_F (caso **b** de la figura 6).

Esta solicitación será el mayor momento a resistir por la sección considerada, si la misma se dimensiona por el método clásico, o sea en régimen elástico. En tal situación

$$M_{1e} = \sigma_F . W_e \qquad (16)$$

No obstante, todavía se puede incrementar el momento sin que se produzca la ruina de la sección. En efecto. Rebasado el momento aplicado el valor de M_{1e}, las fibras extremas (superior e inferior), que ya habían alcanzado su límite de fluencia, se seguirán deformando, pero bajo tensión constante (σ_F), propagándose las zonas deformadas plásticamente hacia el eje de la barra, según se indica en los casos **c** y **d** de la figura 6, hasta que en un estado límite teórico, cada sector (tanto el de las tracciones como el de las compresiones), queda solicitado por tensiones constantes: $+\sigma_F$ el inferior y $-\sigma_F$ el superior (caso e).

Se considera en tales condiciones como *momento plástico* al que es capaz de producir esa distribución birrectangular de las tensiones, y se lo designa por M_p. En este caso $M_p = T_p . z_p = C_p . z_p$ con $z_p = d/2$, y

$$M_p = \sigma_F . \left(\frac{d}{2}\right) . b . \frac{d}{2} = \sigma_F . \frac{b . d^2}{4} = \sigma_F . W_p \qquad (17)$$

con

$$W_p = \frac{b.d^2}{6} \qquad (18)$$

para sección rectangular.

Merece destacarse que este estado límite es físicamente imposible de alcanzar por la viga, ya que se exigiría una curvatura infinita de la misma, lo que obliga a la existencia de una reducida zona elástica en el interior de la sección. Debe quedar claro en consecuencia, que lo que se entiende por momento plástico último es una aproximación casi exacta del momento plástico real, que corresponde a la deformación representada en el caso e de la figura 6). Esto se pone de manifiesto si se tiene en cuenta que la relación entre ε_f y ε_e (para el acero) oscila alrededor de 15, lo que obliga a que, únicamente quede sin deformarse plásticamente un quinceavo de la altura de la sección.

La forma real a que se aproxima el diagrama de tensiones al producirse en la sección el valor de M_p es el que muestra la figura 7, en donde por una parte aparece puesto en evidencia el aspecto señalado en el párrafo anterior en proximidades de la fibra neutra, compensado en cierta manera con un aumento de los valores de las tensiones en las fibras próximas a los bordes respecto a σ_F como consecuencia del endurecimiento del material.

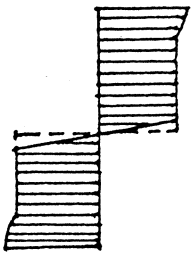


Figura 7

De la comparación de las (16) y (17) resulta

$$\frac{M_p}{M_{1e}} = \frac{\sigma_F.W_p}{\sigma_F.W_e} = \frac{b.d^2}{4}.\frac{6}{b.d^2} = 1,5 \qquad (19)$$

lo que indica que el aumento de resistencia que se obtiene a flexión en secciones rectangulares al aplicar la teoría elastoplástica es del 50%.

2. ANALISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS EN FASE PLASTICA.

2.1. Estructuras de reticulado.

En este tipo de estructuras, cada elemento que las constituye se halla solicitado únicamente por esfuerzos axiles, ya sean de tracción o de compresión.

En tal caso, si se supone válido para el comportamiento elastoplástico del material el indicado en el diagrama de deformaciones de la figura 1a), cuando la tensión en la barra más solicitada (la que generalmente corresponde a barras traccionadas del cordón inferior) llegue a fluencia, se alcanzará en la misma el valor de la carga límite dado por la (1), momento a partir del cual, la barra se seguirá deformando a carga constante hasta su rotura, arrastrando al colapso a la estructura toda.

De esta manera, al resultar ya imposible cualquier aumento de las solicitaciones internas respecto al valor de S_{1m}, porque la sección del material no lo puede resistir, los estados límites de la sección por los métodos elásticos (de tensiones admisibles) y plástico (de cargas de rotura) son iguales. En otras palabras, no existe reserva funcional resistente más allá del campo elástico, en estructuras isostáticas compuestas por barras que trabajan sólo a esfuerzos axiles.

2.2. Vigas. La rótula plástica.

Supóngase, para fijar ideas, una viga simplemente apoyada, solicitada por una carga concentrada P actuando en el centro de la luz. El momento flector en tal sección será M = P.l/4 (figura 8a).

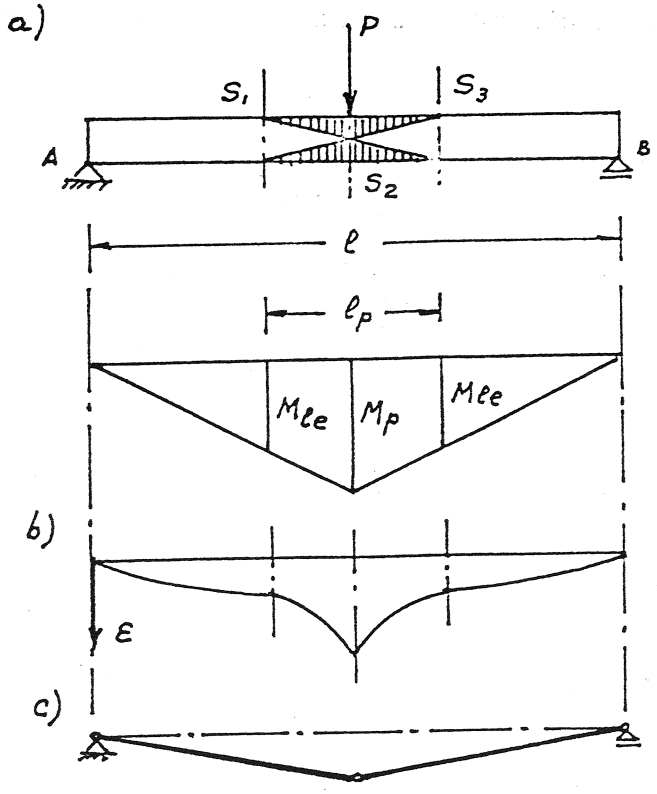


Figura 8

Desde el valor P = 0 hasta P = P_{1e} = 4 M_{1e}/l, la deformación de la viga se mantiene en régimen elástico. Si se aumenta P por

encima de P_{1e}, existe una zona central que comienza a deformarse plásticamente hasta el instante en que la carga alcanza el valor

$$P = P_{1p} = 4\ M_p/l$$

Las deformaciones plásticas se extienden a toda la zona en la que el momento excede del momento máximo elástico M_{1e} (tramo S_1 - S_3 en la figura 8a). La zona plastificada entre estas secciones se indica en rayado en dicha figura y su longitud para el tipo de carga supuesta, al momento de producirse M_p, resulta de

$$l_p = l.\left(1 - \frac{P_{1e}}{P_{1p}}\right)$$

que se obtiene por semejanza de triángulos a partir del diagrama de momentos. Si la sección es rectangular será $l_p = l/3$.

La curvatura de las secciones S_1 y S_3 es muy pequeña, mientras que en las proximidades del centro del vano alcanza valores notables, y con ello también los adquiere ε (figura 8b), comportándose la viga como si estuviese constituida por dos tramos rígidos articulados entre sí en la sección S_2 (figura 8c).

Es decir, cuando en una sección intermedia de la viga isostáticamente sustentada se alcanza el momento plástico, esta sección gira libremente bajo carga constante, recibiendo el nombre de **rótula plástica**. Es entonces cuando se produce el colapso de la viga por su transformación en un mecanismo articulado con un grado de libertad, adquiriendo deformaciones indefinidas bajo carga constante. Este mecanismo se conoce como *mecanismo de colapso*.

El concepto de rótula sugiere la posibilidad de giro libre, giro que en la realidad se halla coaccionado en cierta medida. Por esta causa, algunos autores la denominan como *articulación imperfecta*, ya que se necesita de un momento constante para mantenerse en rotación.

No obstante, como la rotación que admite es muy superior a la de las restantes secciones de la viga (unas 15 veces), en los cálculos es suficientemente aproximado suponer que cuando el momento flector alcanza el valor correspondiente al del momento plástico M_p, dicha sección no puede tomar más flexión, ya que su capacidad de giro es muy superior a la del resto de la barra.

3. CAMPO DE VALIDEZ DE LA TEORIA DEL ANALISIS LIMITE.

La teoría del análisis límite se considera válida cuando se satisfacen las siguientes hipótesis:

1°) Existe para cada barra o elemento individual de una estructura un momento flector máximo ($M_p = \sigma_F.W_p$), correspondiente a una distribución birrectangular de las tensiones σ_F.

2°) En las zonas próximas a aquellas secciones en las que $M = M_p$, se originan, debido a la ductilidad del material, curvaturas importantes que, a los efectos del análisis, se suponen concentradas en una sección.

3°) El material permanece dúctil hasta la carga de rotura y no se fractura sin experimentar importantes deformaciones plásticas locales que acompañan a la formación de rótulas.

4°) El valor del momento plástico de una barra no se halla influenciado por las magnitudes del esfuerzo normal y cortante existente en la sección en la que se produce la rótula plástica, ni tampoco por las sobretensiones locales debidas a una carga concentrada eventualmente aplicada en esa sección.

5°) A pesar de las importantes deformaciones plásticas locales, la estructura no manifiesta ningún fenómeno de inestabilidad antes de que esté a punto de formarse la rótula que completa el mecanismo articulado de colapso.

6°) Cuando se forma la última rótula, las deformaciones son todavía admisibles desde el punto de vista del uso a que está destinada la estructura; siendo además aquéllas suficientemente pequeñas para no modificar el efecto combinado de las fuerzas.

7°) Las uniones de la estructura son capaces de transmitir íntegramente el momento plástico.

8°) Los valores de las cargas actuantes sobre la estructura no son independientes entre sí, de manera que cualquier aumento de las mismas tiene lugar de modo tal que los incrementos de todas ellas resultan proporcionales a sus respectivos valores iniciales.

4. ESTUDIO GENERAL DE SISTEMAS HIPERESTATICOS DE ALMA LLENA.

4.1. Aspectos generales.

En estructuras isostáticas en general, suele ser reducida la posibilidad de la consideración en el análisis, del comportamiento elastoplástico del material, en especial en estructuras de acero, ya que la economía que se lograría se encuentra relacionada con el factor de forma de la sección, constituida generalmente por perfiles laminados.

Por el contrario, en estructuras hiperestáticas se aprovecha perfectamente la teoría plástica desde el punto de vista de la economía del material, al originarse, cuando las cargas alcanzan cierta magnitud, una distribución de momentos flectores en las secciones de la barra, diferente de la que resulta de aplicar los métodos clásicos basados en la teoría elástica.

Ya se ha expresado en el apartado 2.2. que cuando una sección alcanza su momento plástico se comporta, desde ese momento, como una rótula y que, por lo tanto, no puede admitir, aunque aumenten las solicitaciones exteriores, un momento mayor. Esto da lugar a

que secciones que todavía no han llegado al límite de su resistencia acudan en ayuda de aquellas que ya lo están, tomando momentos superiores a los que les corresponderían de seguir el sistema en régimen elástico. Es decir, existe una redistribución de esfuerzos, fenómeno que se conoce como de *adaptación plástica de las secciones.*

En las estructuras hiperestáticas, el agotamiento de su capacidad resistente no se presenta porque falle una determinada sección, sino sucede porque el número de rótulas plásticas que se han formado es tal que el sistema se convierte en un mecanismo articulado con un grado de libertad, denominado, tal como ya se expresara, *mecanismo de colapso.* Se logra así en estructuras de este tipo, una economía muy superior a la que corresponde a los sistemas isostáticos, ya que la redistribución de esfuerzos da lugar a un aprovechamiento más racional de las características resistentes del sistema.

Al estado de cargas que origina el mecanismo de colapso se lo denomina *carga límite* o *carga última*, que es la carga que auténticamente provoca el agotamiento del sistema. Por lo tanto, la carga de servicio no debe sobrepasar el valor que resulta de dividir la carga límite por el coeficiente de seguridad.

En general, si la estructura es hiperestática de grado *n*, se necesitarán *n + 1* rótulas plásticas para llegar al mecanismo de colapso. Sin embargo, cabe observar algunos casos particulares. Así por ejemplo, para una viga biempotrada, solicitada por una sola carga puntual, se requerirán tres rótulas plásticas para que se agote el sistema (una en cada empotramiento y la tercera bajo la sección de momento máximo), a pesar de que en este caso es n = 3; ello es debido a que las tres rótulas plásticas producidas se hallan alineadas, con lo que la aparición de la tercera transforma ya al sistema en móvil. Por el contrario, puede presentarse también el colapso, para una viga de las mismas características de vinculación, con un mayor número de rótulas plásticas, si estuviese solicitada por dos cargas concentradas aplicadas simétricamente con relación a su luz. Al aumentar el valor de las cargas se formarán, inicial y simultáneamente dos rótulas en los empotramientos y luego, para nuevos incrementos de carga, aparecerán al mismo tiempo, otras dos rótulas (una debajo de cada fuerza concentrada), como consecuencia de la simetría del sistema. Es decir que, aún tratándose de una estructura para la que es suficiente para llevarla a colapso con la aparición de tres rótulas plásticas, el estado particular de cargas exige obligadamente un número mayor de rótulas.

4.2. Condiciones necesarias para la formación del mecanismo de colapso.

En función de las consideraciones precedentes, se considera que, vistas las características del proceso de agotamiento del sistema, las condiciones que han de cumplirse en toda la estructura en régimen de fluencia libre, son las siguientes:

a) Los momentos flectores de todas las secciones de la estructura deben estar comprendidos entre + M_p y - Mp.
b) Debe existir equilibrio estático entre las solicitaciones interiores y las cargas exteriores.
c) El número de rótulas plásticas ha de ser tal que el sistema o alguna de sus partes se transforme en un mecanismo articulado de un grado de libertad.

Las dos primeras condiciones no requieren aclaración. La tercera, por su parte, se refiere a que no es necesaria la aparición de n + 1 rótulas plásticas para que el sistema quede fuera de servicio, ya que basta con el agotamiento de una parte de él. Así por ejemplo, en un pórtico biempotrado (figura 9a) se precisan 4 rótulas plásticas para su abatimiento, pero es suficiente que aparezcan 3 rótulas en el dintel para que el sistema quede inservible.

Esquema de la estructura Mecanismo incompleto de colapso

Figura 9

4.3. Procedimiento de análisis.

En el análisis de estructuras hiperestáticas se supone que las cargas van aumentando proporcionalmente entre sí, lo que va dando lugar a la formación de sucesivas rótulas plásticas a medida que el momento flector alcanza en las secciones correspondientes el valor del momento plástico M_p. Al constituirse cada rótula plástica, el grado de hiperestaticidad de la estructura disminuye en una unidad. Cuando se forma la rótula n el sistema es isostático; la aparición de la rótula n + 1 lo transforma en un mecanismo articulado móvil, que es precisamente el mecanismo de colapso.

Si una vez que han aparecido rótulas plásticas, sin llegar a la rotura, se procede a la descarga de la viga o estructura, subsistirán deformaciones y momentos residuales.

4.4. Vigas hiperestáticas de un tramo de sección constante.

4.4.1. Vigas articuladas/empotradas.

4.4.1.1. Caso de una carga concentrada.

Sea la viga de la figura 10a), solicitada sólo por una carga puntual P ubicada a una distancia *a* del apoyo articulado A.

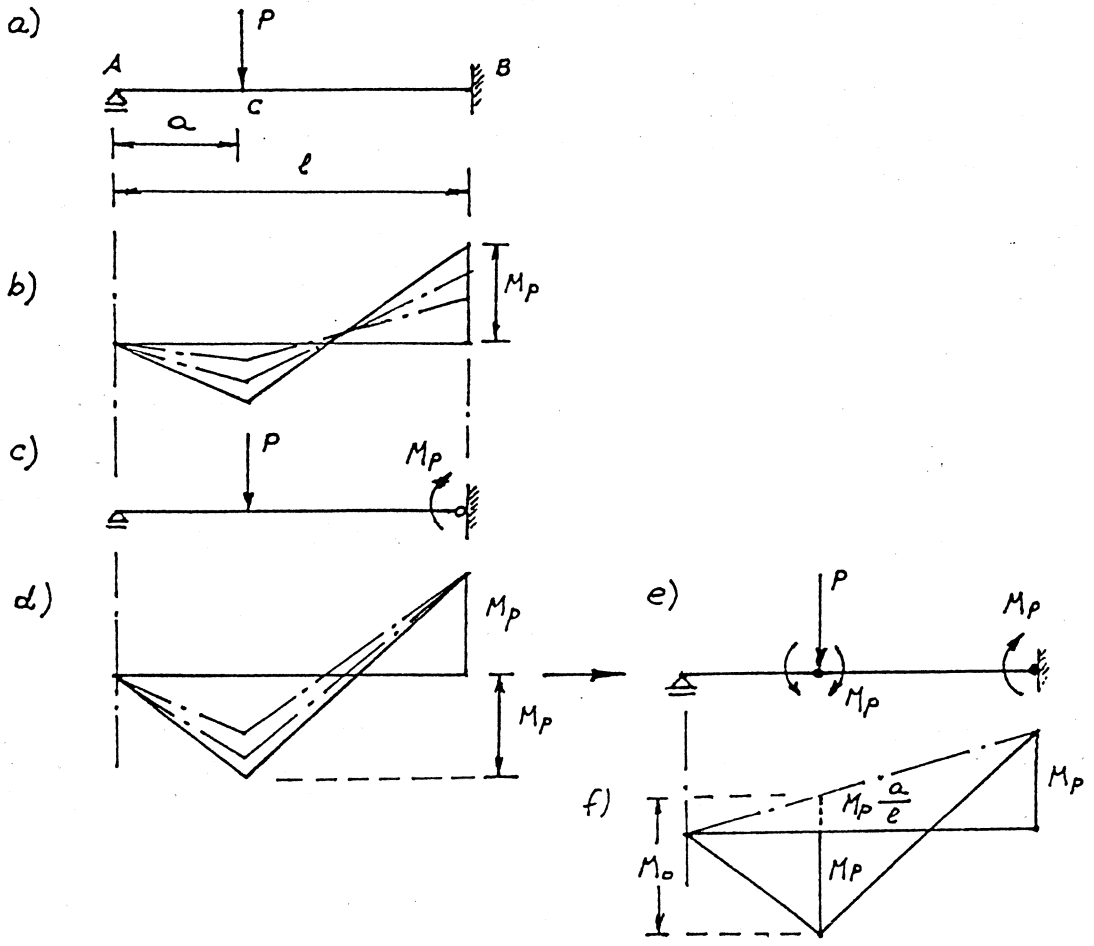


Figura 10

En el campo elástico, y para un valor determinado de P, el diagrama de momentos flectores adquiere la conformación conocida, de tipo poligonal con dos máximos relativos, uno negativo (de mayor valor absoluto) en el empotramiento B y otro positivo (de menor valor absoluto) en correspondencia con la sección cargada (figura 10b).

A medida que se incrementa el valor de P, aumentan proporcionalmente todas las ordenadas del diagrama, situación que puede extenderse hasta que, ya en el campo plástico, se llega a formar la primera rótula plástica, lo que ocurrirrá en la sección de mayor solicitación interna, por ende cuando $M_B = M_p$ (estado máximo de la figura 10b). En ese instante la estructura se ajustará al sistema de cargas P y M_p indicado en la figura 10c).

Si a partir de tal situación se sigue aumentando el valor de P, y no pudiendo ya incrementarse todas las ordenadas del diagrama en forma proporcional como consecuencia de la constancia de M_p, tal aumento de la acción exterior generará momentos flectores mayores únicamente en el resto del diagrama (figura 10d), lo que podrá ocurrir sólo hasta que $M_C = M_p$, que coincidirá con la

formación en C de una segunda rótula plástica, habiendo llegado así al estado límite por carecer la viga de estabilidad al poseer tres articulaciones colineales (figura 10e).

En definitiva, el diagrama de momentos flectores de la viga analizada, en fase plástica, queda determinado en forma inmediata, dado que se conocen las posiciones y los valores de los momentos plásticos M_p (figura 10f).

De las consideraciones geométricas que pueden efectuarse en la vertical de la sección C (de aplicación de la carga exterior concentrada), resulta

$$M_o = M_p + \frac{a}{l}.M_p \qquad \text{de donde:} \qquad M_p = \frac{M_o}{1 + (a/l)} \qquad (20)$$

en las que M_o es el momento flector máximo en la misma viga supuesta isostática biarticulada, debido a la carga P

$$M_o = \frac{P.a.b}{l} \qquad (21)$$

En consecuencia, si se desea verificar la viga, supuestas conocidas sus dimensiones, determinando la carga límite a la que puede hallarse solicitada, se reemplaza $M_o = f(P)$ dado por la (21) en la (20) y se despeja $P_{lp} = f(M_p)$.

En cambio, si para una carga conocida, se debe dimensionar la viga para un material constitutivo determinado y una forma de la sección transversal preestablecida, se aplican las (20) y (17), y se despeja W_p, que permite cuantificar las dimensiones requeridas para la sección necesaria.

4.4.1.2. Caso de una carga uniformemente distribuida.

a) Cálculo aproximado.

Si en forma aproximativa se supone que la rótula plástica de tramo se producirá al medio de la luz (figura 11), del diagrama de momentos se obtendrá

$$M_o = \frac{q_{lp}.l^2}{8} \approx Mp + \frac{Mp}{2} \approx \frac{3}{2}.Mp$$

con lo que

$$q_{lp} \approx 12\,\frac{M_p}{l^2} \qquad (22)$$

b) Cálculo exacto.

De la figura 11 se observa que la sección media de la viga, considerada en el cálculo aproximado, se corresponde con el punto

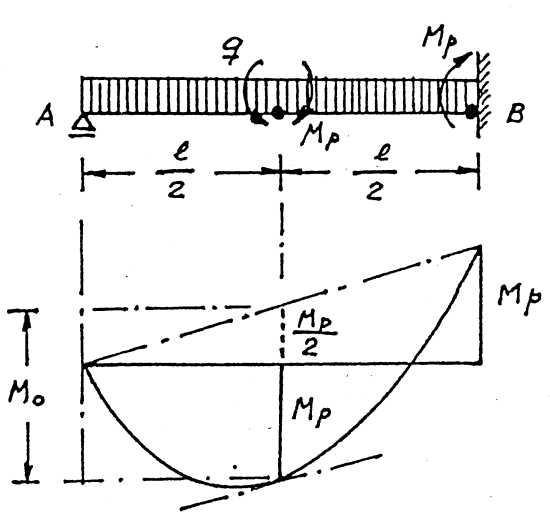


Figura 11

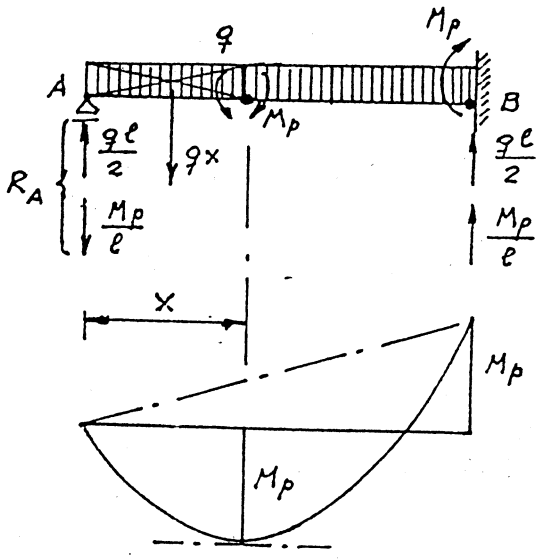


Figura 12

del diagrama en el que la tangente es paralela a la línea inclinada de cierre, que no es el punto de ordenada máxima del diagrama de momentos flectores, el que ubica coincidentemente con el punto de tangencia horizontal de dicho diagrama (figura 12), cuya distancia x al apoyo A es menor que l/2.

Por Estática se sabe que la sección de momento flector máximo se corresponde con la de esfuerzo de corte nulo, por lo que para el caso analizado

$$Q = R_A - q.x = 0 \quad ; \quad R_A = q.x \qquad (23)$$

De la figura 12 y teniendo presente la (23)

$$R_A = \frac{q.l}{2} - \frac{M_p}{l} = q.x \quad ; \quad x = \frac{l}{2} - \frac{M_p}{q.l} \qquad (24)$$

que verifica analíticamente lo precedentemente consignado en el sentido que $x < l/2$.

Por otra parte (figura 12), el momento M_p resulta

$$M_p = R_A x - \frac{q.x^2}{2} = q.x - \frac{q.x^2}{2} = \frac{q.x^2}{2}$$

Llevando a esta expresión el valor de x dado por la (24)

$$M_p = \frac{q}{2}.\left(\frac{l}{2} - \frac{M_p}{q.l}\right)^2 \quad ; \quad \frac{2\,M_p}{q} = \frac{l^2}{4} - \frac{M_p}{q} + \frac{M_p^2}{q^2.l^2}$$

Reordenando términos y reduciendo denominadores

$$\frac{M_p^2}{q^2.l^2} - \frac{3\,M_p}{q} + \frac{l^2}{4} = 0 \quad ; \quad M_p^2 - 3\,M_p.q.l^2 + \frac{q^2.l^4}{4} = 0$$

Ecuación de segundo grado que permite resolver el valor de M_p

$$M_p = \frac{3\,q.l^2 \pm \sqrt{9\,q^2.l^4 - q^2.l^4}}{2} = \frac{q.l^2}{2}.(3 \pm \sqrt{8})$$

De las dos raíces de la ecuación, es válido el menor valor de M_p, pues al ser matemáticamente posibles dos valores para M_p, el momento plástico se producirá para aquél al que se llegue primero, no pudiendo ser nunca alcanzado un valor mayor. Por lo tanto

$$M_p = \frac{q.l^2}{2}.(3 - \sqrt{8}) = 0,08579\ q.l^2 = \frac{q.l^2}{11,66}$$

con lo que en definitiva, el valor exacto de q que lleva la viga a su estado límite en fase plástica es

$$q_{lp} = 11,66\ \frac{M_p}{l^2} \qquad (25)$$

con lo que el valor aproximado dado por la (22) presenta un error por exceso (hacia el lado de la inseguridad) del orden del 2,9%.

4.4.1.3. Caso de varias cargas concentradas.

Si sobre la viga articulada/empotrada actúan simultáneamente varias cargas concentradas (figura 13), al igual que en los casos anteriores se llega al colapso con la formación de la segunda rótula plástica (de tramo), es decir que se tienen varias posiciones posibles (las de cada carga puntual) para una sola rótula. Al ser la línea de cierre del diagrama de momentos flectores inclinada, no necesariamente esta segunda rótula se formará bajo la mayor ordenada del diagrama de momentos flectores de la viga isostática biarticulada, tal como se muestra en la referida figura 13.

Para la resolución de este caso, es aconsejable el empleo de los teoremas estático o cinemático (o ambos para verificación del resultado), cuyo enunciado y procedimiento de aplicación se analizarán en los apartados 6. y 7.

4.4.2. Viga biempotrada.

Para una viga doblemente empotrada, al estado límite en fase plástica se llega con la aparición de tres articulaciones plásticas: dos en los empotramientos y una en el tramo. Así, la posición de la articulación plástica en el tramo es conocida, pues

coincide con la sección de mayor momento flector que la misma carga produce en la viga supuesta simplemente apoyada (figura 14). En consecuencia

$$2\,M_p = M_o \quad ; \quad M_p = \frac{M_o}{2} \qquad (26)$$

Es decir que (despreciando la influencia del esfuerzo de corte), la carga límite para una viga biempotrada es siempre el doble de la carga límite para la misma viga simplemente apoyada.

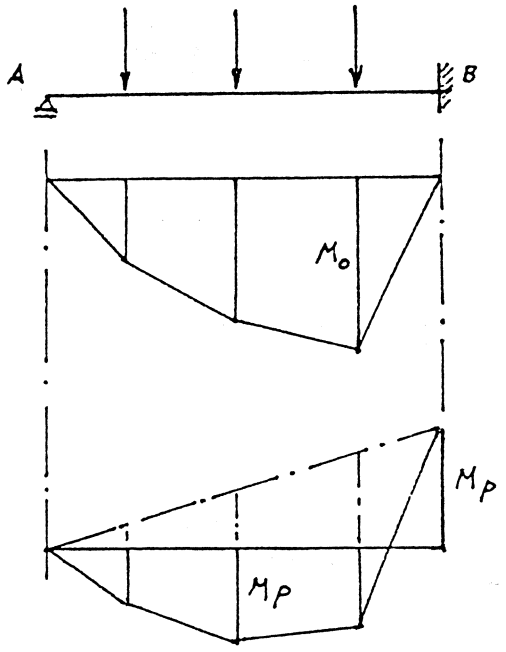


Figura 13

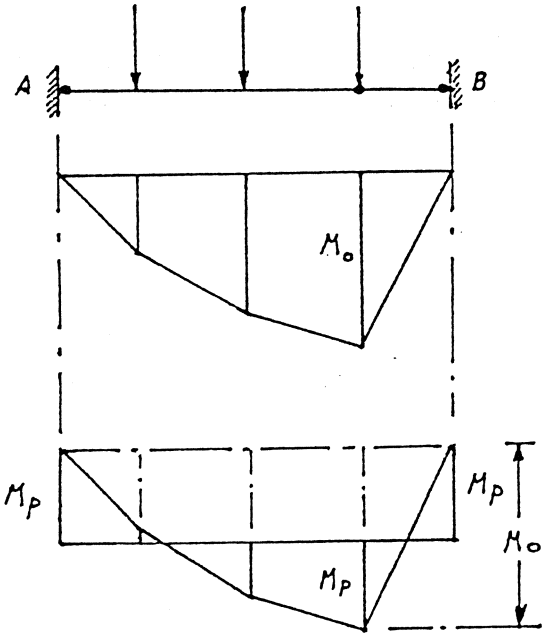


Figura 14

4.5. Análisis de vigas continuas.

Al estado límite de una viga continua se llega cuando dentro de un tramo cualquiera surgen tres articulaciones plásticas. Corrientemente dos de ellas se producen sobre los apoyos y la tercera en el tramo. La rotura completa de una viga continua sucederá cuando surjan tres articulaciones plásticas en cada uno de sus tramos.

Se sobreentiende que si los tramos concurrentes a un apoyo poseen secciones diferentes, la articulación plástica que corresponde a ese apoyo se desarrollará en la sección más débil, o sea con el menor de los dos valores de M_p.

El procedimiento de análisis, que se deduce del carácter de la rotura de las vigas hiperestáticas de un solo tramo, depende de si se debe determinar P_{1p} (verificación de una viga continua de material y dimensiones conocidas) o si se trata de efectuar su

dimensionado (cargas y material conocidos, secciones transversales a determinar), y dentro de este caso, si toda la viga será de sección constante, o la tendrá sólo dentro de cada tramo.

4.5.1. Determinación de la carga límite (Verificación).

Sea la viga continua que se consigna en la figura 15a). Para resolver el caso propuesto se deben conocer, además de la longitud de cada tramo de la viga continua (que siempre es dato), el material constitutivo y las secciones transversales, las que se suponen constantes en toda la longitud de cada tramo. Estos dos últimos datos permiten calcular el valor de M_p de cada tramo, al ser $M_p = \sigma_F . W_p$. Finalmente es también conocida, vista la naturaleza del problema planteado, la distribución de las cargas sobre la viga, la que de acuerdo a la hipótesis 8° del apartado 3., deberá ser expresada en función de un único parámetro para toda la viga (P en el caso de la figura 15a), el cual constituye, precisamente, la incógnita del problema.

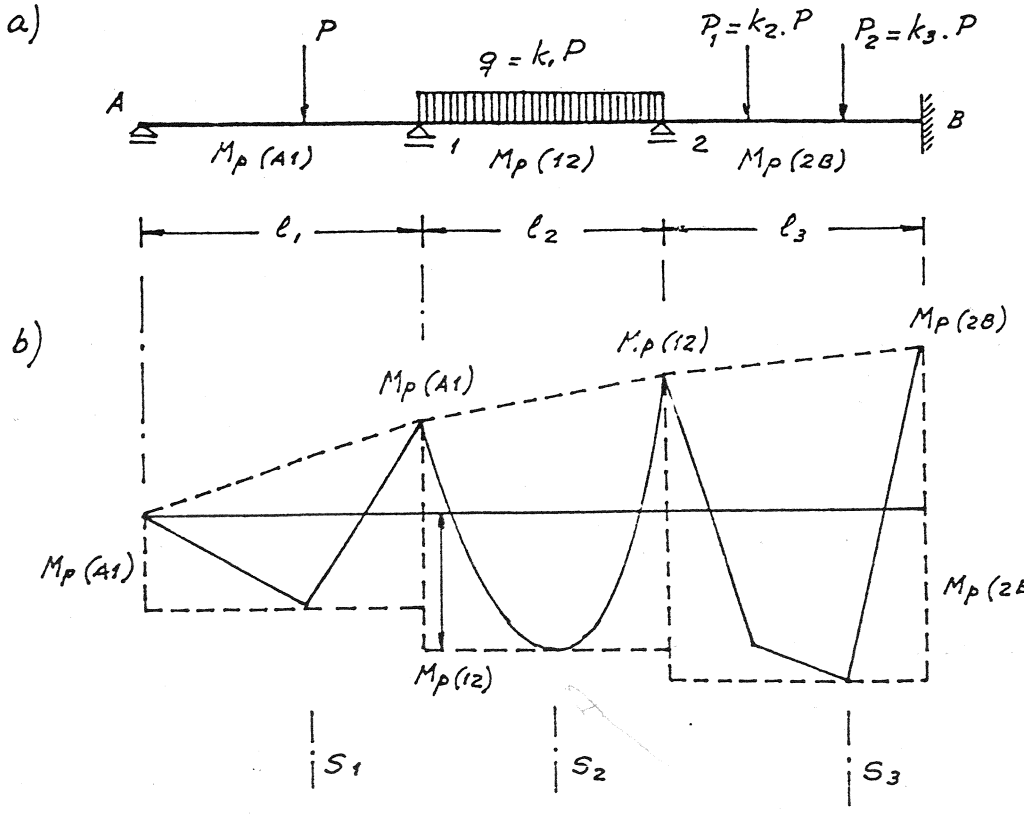


Figura 15

Los momentos plásticos en las secciones de los apoyos intermedios se determinan en función de las secciones mínimas de las barras lindantes en el apoyo. Por ejemplo, para el caso de la figura 15) se ha supuesto $M_{p(A1)} < M_{p(12)} < M_{p(2B)}$, con lo que los valores de M_p a considerar serán: $M_{p(A1)}$ sobre el apoyo 1 y $M_{p(12)}$ sobre el apoyo 2. Para la sección del empotramiento B obviamente corresponde $M_{p(2B)}$.

Todos los valores precedentemente consignados se llevan en escala y con su signo (negativo, hacia arriba) a partir de la horizontal de referencia (figura 15b). El diagrama de momentos flectores, debidos a estos momentos de apoyo, se representa con línea de trazos.

En cada tramo, a su vez, hacia abajo (sector de los momentos positivos), se trazan horizontales (también en líneas de trazos), con los valores de los momentos plásticos de cada tramo.

La poligonal completa así conformada constituye un diagrama de envolventes de momentos flectores límites, que indica para cada sección de la viga, el máximo valor del momento (tanto positivo como negativo) que en la misma se puede producir.

A partir de la poligonal correspondiente a los momentos plásticos negativos, se "descuelgan" los diagramas de momentos de cada tramo de viga supuesta simplemente apoyada (de los que se conoce su configuración, no así las magnitudes de sus ordenadas), de modo tal que, por abajo, tengan contacto con las líneas horizontales de momentos límites positivos.

Partiendo de la suposición sobre la rotura de cada tramo por separado, se determina, mediante consideraciones geométricas desarrolladas en las secciones más desfavorables de aquéllos (S_1, S_2 y S_3), su carga límite, correspondiendo como P_{1p} de toda la viga continua, el *mínimo* valor obtenido.

4.5.2. Dimensionado a sección constante.

En este caso se tienen como datos, además de las longitudes de los tramos de la viga continua, el material del que se desea construir la estructura y la forma a dar a la sección transversal, la ubicación y los valores particulares de cada una de las cargas que actuarán sobre la misma.

El dimensionado de la sección única que deberá tener la viga continua, exige la determinación de los momentos flectores de cálculo en las rótulas plásticas que pueden producirse, debidos a la carga de servicio dada. Esos momentos se determinan por medio de los diagramas de cálculo de los momentos flectores, los que se construyen en la forma que se indica a continuación (figura 16).

Para cada tramo de la viga continua se construye, en un mismo sentido a partir de la horizontal de referencia, el diagrama de momentos flectores debido a la carga efectiva que actúa sobre el mismo, como si se tratase de vigas isostáticas doblemente apoyadas independientes.

En cada tramo se trazan (punteado en la figura), las líneas de cierre de los momentos de apoyo, de modo tal que queden equilibrados los momentos máximos de tramo (positivos) con los máximos negativos de los apoyos, teniendo en cuenta que en un extremo articulado de la viga continua será $M = 0$ y en un apoyo interior o en un empotramiento (en donde pueden producirse rótulas plásticas) será M_p.

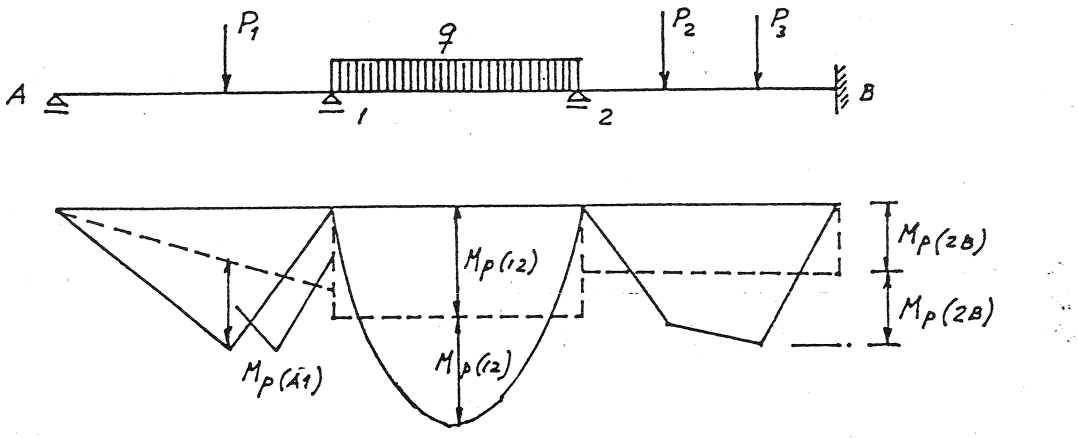


Figura 16

Por ejemplo, en el caso concreto de la figura 16, para el tramo A-1 la línea de cierre tendrá una inclinación tal que sean iguales los valores de $M_{p(A1)}$, tanto debajo de la carga P como en el apoyo 1 (sección izquierda). En los dos tramos restantes, la línea de cierre será horizontal, dividiendo la ordenada máxima del diagrama de momentos flectores en dos partes iguales. A esta operación se la denomina *equilibrado previo de momentos*.

Si se dimensiona una viga de sección constante, será indispensable adoptar como momento de cálculo al *mayor* de los momentos previamente equilibrados para los tramos individuales de la viga. Para definir la sección necesaria se debe determinar el valor de W requerido, en función de M_{pmax} y de σ_F.

En este caso, el estado límite se determina con la aparición de tres rótulas plásticas en el tramo donde los momentos previamente equilibrados resultaron mayores. Por ejemplo, para el caso de la figura 16 tal momento de cálculo será el $M_{p(12)}$. Los tramos restantes quedan indemnes, por hallarse sobredimensionados.

4.5.3. Dimensionado a sección variable (constante por tramos).

Si para lograr un mejor aprovechamiento del material, y por ende una solución más económica, se dimensiona la viga continua de modo tal que todos (o la mayoría) de los tramos lleguen conjuntamente al colapso, dando a cada tramo la sección necesaria para ello, debe suponerse que la aparición de las rótulas plásticas es simultánea en todos los tramos. En consecuencia, por cuanto sobre un mismo apoyo interior no puede haber dos rótulas plásticas, el diagrama de cálculo debe construirse según los valores de los momentos flectores previamente equilibrados que tengan en cuenta tal circunstancia (no considerada en el caso anterior, en que se estaba a cubierto de este problema por adoptarse para el cálculo de todos los tramos el momento mayor).

Si los momentos flectores M_p de cálculo, previamente equilibrados por tramos, varían a lo largo de toda la viga en forma uniforme (de menor a mayor, como en el caso de la figura

17a), o viceversa), entonces, el diagrama del tramo extremo, con el menor momento de cálculo (A-1 en este caso), debe conservarse sin modificaciones respecto al caso anterior.

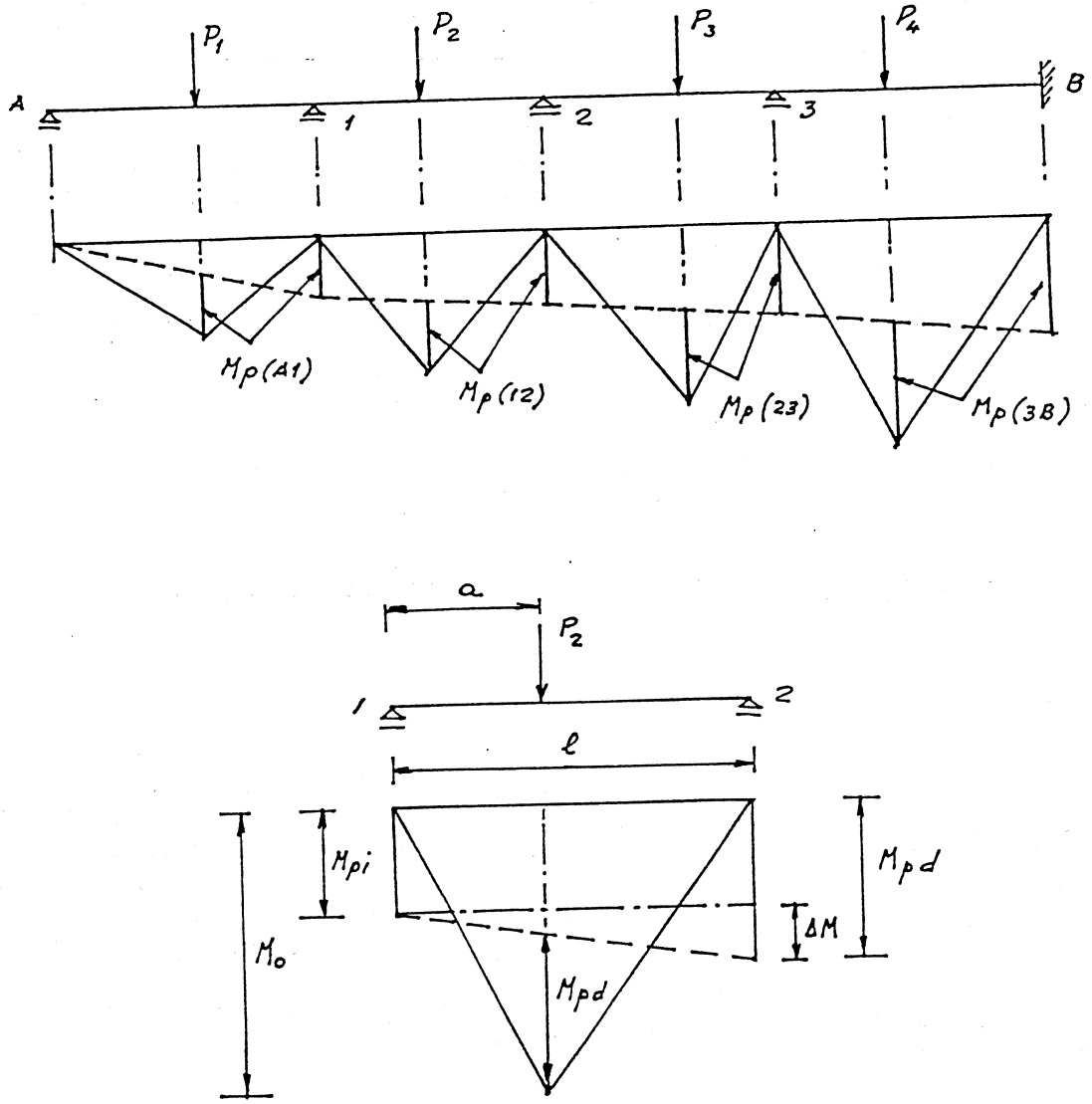


Figura 17

Luego, al pasar al tramo siguiente (1-2), se debe efectuar el equilibrado del momento positivo máximo del tramo y del negativo sobre el apoyo siguiente (el derecho, o sea 2), manteniendo el valor (ya obtenido) del momento en el apoyo anterior (el izquierdo, o sea 1). En otras palabras, partiendo del valor de $M_{P(A1)}$ conocido y del diagrama de momentos flectores del isostático, debe calcularse el valor de $M_{P(12)}$ que sea igual tanto en la parte positiva del diagrama en la sección del tramo donde el momento del isostático sea máximo, como en correspondencia con el momento negativo sobre el apoyo derecho.

Esta determinación puede efectuarse analíticamente, sobre la base de las siguientes consideraciones (figura 17b), en la que, para mayor sencillez y generalización de la demostración, se denominará $M_{p(A1)} = M_{p1}$ y $M_{p(12)} = M_{pd}$.

Supóngase conocida la posición de la rótula plástica en el tramo, la que se determina con la abscisa $x = a$. De la mencionada figura

$$M_{pd} = M_{p1} + \Delta M \qquad (27)$$

En la vertical de la sección de tramo de momento máximo puede escribirse, teniendo en cuenta además la expresión anterior

$$M_o = M_{p1} + \Delta M.(a/l) + M_{pd} = M_{p1} + \Delta M.(a/l) + M_{p1} + \Delta M$$

$$M_o = 2\ M_{p1} + \Delta M.(a/l) + \Delta M = 2\ M_{p1} + \Delta M.[1 + (a/l)]$$

de donde, despejando ΔM

$$\Delta M = \frac{M_o - 2\ M_{p1}}{1 + (a/l)}$$

que reemplazada en la (27) permite obtener el momento M_{pd} buscado

$$M_{pd} = M_{p1} + \frac{M_o - 2\ M_{p1}}{1 + (a/l)} \qquad (28)$$

Esta expresión se va aplicando en forma sucesiva. Para el último tramo (en el sentido creciente del cálculo), si el mismo posee el extremo empotrado, también es de aplicación la (28). En cambio, si el extremo inicial (o final) está articulado, la línea de cierre se obtiene directamente por medio de la recta que une el último M_p calculado y el valor de $M = 0$ que corresponde al apoyo.

La sección de cada tramo se dimensiona por medio del mayor valor de momento plástico que el mismo presente.

Si no se diese el supuesto anterior de un ordenamiento creciente o decreciente de los momentos flectores previamente equilibrados en los tramos, y los mismos varían a lo largo de la viga en forma no uniforme, alternándose valores mayores y menores, se comienza el cálculo conservando el diagrama de momentos flectores en el tramo con el menor M_p. Definido el mismo se examina cual es el tramo que le sigue en orden con un segundo menor momento flector M_p previamente equilibrado. Si linda con el tramo primeramente determinado, sobre él se construirá el diagrama de cálculo, equilibrando el momento del tramo con el siguiente momento de apoyo, empleando la expresión (28).

Por el contrario, si no fuese contiguo, es conveniente que sobre este segundo tramo también sea conservado el diagrama previamente equilibrado primitivo. Y así sucesivamente, hasta que, en algún paso, el tramo siguiente a considerar ubique entre dos

tramos ya definidos. Entonces, la línea de cierre para el mismo se trazará uniendo directamente los momentos de apoyo de los tramos contiguos ya determinados.

4.6. Caso de apoyos elásticos y movimiento de vínculos.

Examínese por ejemplo el caso de la viga continua de dos tramos de la figura 18a), el primero de los cuales se halla solicitado por la acción de las cargas puntuales P y kP. Se supondrá además que en el estado elástico, el momento flector bajo la carga P es mayor que bajo la kP (figura 18b).

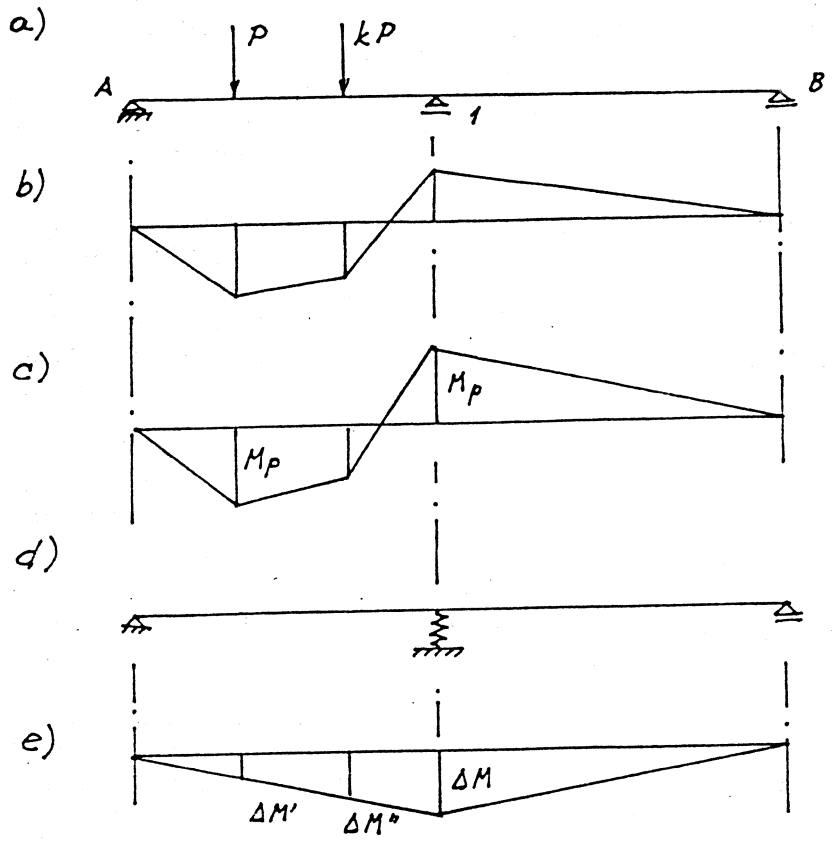


Figura 18

Al ir incrementando el valor de P, se irán formando sucesivamente las rótulas plásticas en el apoyo 1 y bajo la carga P, situación límite que permite el trazado del diagrama de momentos flectores en fase plástica (figura 18c).

Si se supone ahora que el apoyo 1 es elástico (figura 18d), al diagrama de momentos flectores de la viga sobre apoyos rígidos (figura 18c), se le debe sumar el debido al cedimiento del vínculo (figura 18e). Sin embargo, como en ninguna sección puede sobrepasarse el valor de M_P, el diagrama de la figura 18c) permanece inalterable. Por consiguiente, a pesar del diagrama de momentos complementario, debido a la elasticidad del apoyo, no varía, ni la posición de las rótulas plásticas, ni los valores de

los momentos límites M_p, con lo que resulta que la carga límite no depende de la eventual elasticidad de los apoyos ni de un posible descenso de los mismos.

Análogamente se puede demostrar que la carga límite no depende tampoco de los efectos originados por diversas causas externas independientes del sistema de cargas aplicado, como por ejemplo variaciones de temperatura, longitud inexacta de los elementos del sistema, etc.

5. ANALISIS DE RETICULADOS HIPERESTATICOS EN FASE PLASTICA.

El estado límite de las estructuras de reticulado se determina por la fluencia de las barras, que al producirse en una cualquiera de ellas, la excluye como elemento constitutivo del sistema a los fines de la determinación de los grados de libertad que éste posee. Así, cada barra en la cual la tensión de trabajo alcanza el valor de σ_F, hace perder a la estructura un grado de libertad.

La fluencia en estas barras puede producirse, ya sea simultáneamente, o bien, con mayor frecuencia, en forma sucesiva. En este último caso, el estado límite llega al aparecer aquélla en la primera barra *indispensable* de la armadura, obtenida a partir de la conformación original a la que se quitaron las barras *superabundantes* que ya habían llegado al estado de fluencia.

De esta manera, como todo reticulado hiperestático posee barras indispensables y superabundantes (o superfluas), su estado límite puede comenzar ante la llegada a fluencia de alguna de sus *n* barras superabundantes y obligadamente de una indispensable. Si en tales condiciones se designa por n_o al número de barras superabundantes que llegaron a fluencia, éste valor debe satisfacer la condición que $0 \leq n_o \leq n$.

Si $n_o = 0$, el estado límite comienza simultáneamente con el inicio de la fluencia en una barra indispensable de la armadura dada. Si $n_o = n$, el estado límite comienza con la llegada a fluencia de la totalidad de las barras superfluas más una indispensable. Finalmente, la tercera posibilidad corresponde a que $0 < n_o < n$, en cuyo caso el estado límite llega sin que todas las barras superabundantes hayan alcanzado la fluencia. En cualquiera de los tres casos, se llega al colapso del reticulado con la llegada al estado de fluencia de $n_o + 1$ barras, con un máximo posible de $n + 1$ barras y un mínimo de una única barra.

La carga límite (P_{1p}) puede ser determinada por medio de diferentes procedimientos; por ejemplo, calculando en un primer paso el valor de P_1 que hace alcanzar a la barra más solicitada la tensión de fluencia; luego, siempre que ésta sea superabundante, se reemplaza el valor del esfuerzo en la misma por la fuerza constante $\sigma_F.F_1$, reduciendo así a la estructura un grado de hiperestaticidad (figura 19b, referida al reticulado de la figura 19a), y repitiendo el procedimiento hasta alcanzar la fluencia en una barra indispensable (figuras 19c) y d). En este estado la armadura se convertirá en un sistema inestable, y el valor de la

carga que la conduce al mismo será la P_{1P} buscada. Resulta además necesario prestar particular atención a la posibilidad de pandeo en las barras comprimidas del reticulado.

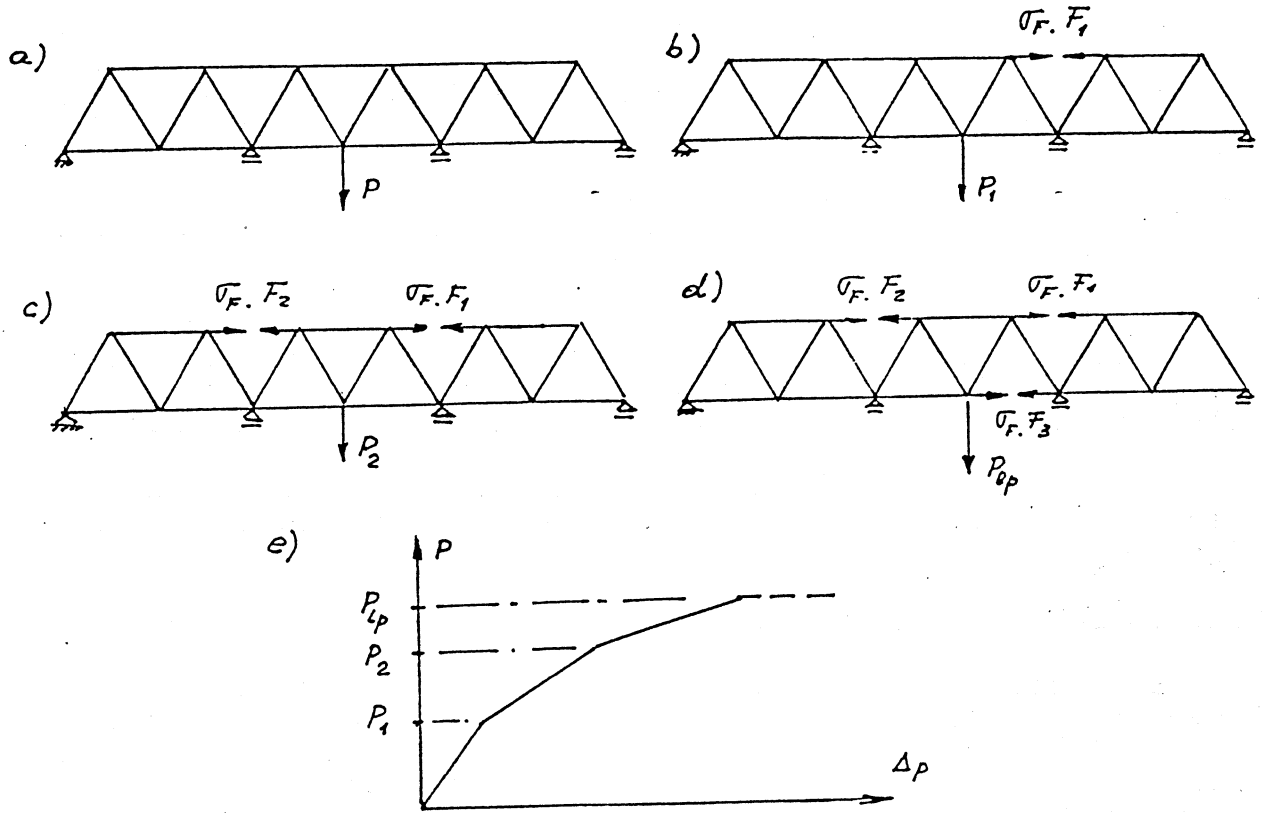


Figura 19

Cabe observar que a medida que se avanza en el proceso, a iguales incrementos de la carga P corresponderán cada vez deformaciones mayores de la estructura (figura 19e).

6. METODOLOGIAS PARTICULARES PARA EL ANALISIS EN FASE PLASTICA.

6.1. Método del "Paso a paso".

Aplicando los conceptos conocidos del análisis estructural y teniendo en cuenta las consideraciones efectuadas hasta el presente, se puede establecer la configuración del mecanismo de colapso de cualquier estructura, por complicado que éste sea.

La aplicación de este método del "paso a paso" se basa en suponer la estructura sometida a cargas exteriores (cuyos valores se hallan siempre interrelacionados entre sí en virtud de la hipótesis 8° referida en 3.) siempre crecientes. Inicialmente la estructura se comportará de acuerdo con la teoría elástica, hasta que el momento flector en una sección determinada (la más solicitada) alcanzará el valor del momento plástico M_P. A partir de este instante, esa sección se convierte en una rótula plástica

y el momento flector que la solicita permanecerá constante ante cualquier incremento de las acciones exteriores. De esta manera, un nuevo aumento de carga provocará en la estructura, cuyo grado de hiperestaticidad se ha disminuido en una unidad (por ser conocido el momento flector en una sección), la formación de una segunda rótula, cuya localización surge también del análisis estructural, mediante la determinación de la sección en la que se llega, en las condiciones impuestas, a M_p. Así sucesivamente se va determinando la ubicación de las nuevas rótulas, cuya aparición involucra conocer los momentos flectores en las secciones que aquéllas ocupan (M_p), hasta que, con la formación de la rótula n + 1 (o eventualmente un mecanismo incompleto), sobreviene el colapso.

Durante todas las fases por las que pasa la estructura, perdura el equilibrio (incluso en el instante de fluencia libre), entre las cargas exteriores y las solicitaciones interiores.

Este método fue el utilizado en el razonamiento seguido en el apartado 4.4.1.1. al analizar una viga articulada/empotrada (figura 10).

6.2. Teoremas fundamentales.

El método precedentemente referido es de aplicación demasiado laboriosa, resultando conveniente una racionalización de la mecánica de análisis. A tales fines cabe distinguir si se trata de sistemas hiperestáticos sencillos o complejos. En el primer caso se utilizan para la investigación del mecanismo de colapso y la determinación de la carga límite capaz de ser soportada por parte de una estructura, dos teoremas fundamentales, denominados respectivamente, *teorema estático o del límite superior*, y *teorema cinemático o del límite inferior*. La segunda designación surge del hecho que el primero proporciona la carga límite por defecto, mientras que el segundo lo hace por exceso.

Para la justificación de estos teoremas debe aceptarse que la solución del mecanismo de colapso es única, lo cual surge en forma evidente si se analizan los diversos casos particulares expuestos a lo largo del presente capítulo, que siempre proporcionan una solución única a cada problema planteado, con lo que queda demostrada la unicidad.

6.2.1. Teorema estático.

Se enuncia de la siguiente forma: *Cualquier distribución de momentos flectores compatible con las ecuaciones de equilibrio, en la que en ninguna sección se supera el momento plástico M_p, está originada por una carga igual o inferior a la crítica.*

Su demostración se efectúa por reducción al absurdo. Supóngase que se determina la carga P para la que se produce el mecanismo de colapso y que naturalmente cumple con las condiciones de la estática. Si para un nuevo incremento de carga ΔP, fuese posible encontrar una distribución de momentos estáticamente equilibrados y que no produjera el colapso del sistema, se podría para un nuevo

aumento de esta carga $\Delta(P + \Delta P)$, determinar otro mecanismo de colapso, llegándose al absurdo de que la estructura se abate para dos cargas distintas, P y $\Delta(P + \Delta P)$, lo que va en contra del principio de la unicidad.

6.2.2. Teorema cinemático.

Se enuncia de la siguiente forma: *La carga límite real de una estructura es siempre menor que cualquier otra carga límite obtenida al disponer rótulas plásticas en secciones arbitrarias del sistema.*

Si bien la demostración de este teorema requeriría una mayor profundización en diversos conceptos que hacen al comportamiento de las estructuras a medida que se van generando las rótulas plásticas, en forma simplificativa puede justificarse el mismo en base al siguiente razonamiento: si se supone que una cierta carga P produce el mecanismo de colapso, y que éste es único, es lógico pensar que para cualquier otra distribución de rótulas plásticas en la estructura, será necesaria una fuerza $P' > P$ para llevar a aquélla a su colapso.

6.3. Estructuras hiperestáticas complejas.

La aplicación de los teoremas estudiados en el apartado anterior es apropiada para sistemas hiperestáticos sencillos, tales como las vigas continuas y los pórticos simples. En cambio, para estructuras estáticamente indeterminadas más complejas, los métodos más apropiados son el *método de la combinación de mecanismos* y el de *distribución de momentos plásticos*. Sin embargo, estos métodos de análisis no son directos, sino que requieren efectuar una serie de tanteos previos para localizar el mecanismo de colapso: dependiendo no sólo de la complejidad del sistema, sino también de la experiencia del analista, la obtención más o menos rápida de dicho mecanismo.

7. FORMAS DE APLICACION PRACTICA.

7.1. Ubicación de las rótulas plásticas.

En los distintos métodos de aplicación deben suponerse diversas distribuciones para la formación de las rótulas plásticas, en correspondencia con cada una de las cuales resulta conocido el momento flector, cuyo valor será igual al momento plástico M_p.

A fin de reducir el número de tanteos, debe tenerse en cuenta que las posibles secciones de aparición de rótulas plásticas pueden ser:

a) En las secciones empotradas.
b) En las secciones de los apoyos interiores.
c) En los nudos de concurrencia de dos barras, o en el extremo de una barra en su punto de concurrencia con otras dos o más (nunca articulando tres o más barras entre sí).

d) En los puntos de aplicación de las cargas concentradas.
e) En los puntos de aplicación de las cargas concentradas estáticamente equivalentes adoptadas para reemplazar cargas distribuidas. Naturalmente, cuanto mayor sea el número de cargas equivalentes elegido, mejores resultados se obtendrán. Si las cargas son uniformemente distribuidas se consiguen resultados satisfactorios sustituyéndolas por dos cargas equivalentes emplazadas a un cuarto y tres cuartos de la longitud abarcada por la carga uniformemente repartida.

7.2. Método estático.

Se basa en la aplicación del teorema estático o del límite superior enunciado en el apartado 6.2.1. Su utilización es apropiada a estructuras de pequeño grado de hiperestaticidad.

Tal cual ya se expresara, si una estructura tiene un grado de hiperestaticidad *n*, el mecanismo de ruina total se presenta generalmente con la aparición de *n + 1* rótulas plásticas, situadas en correspondencia con las secciones individualizadas en el apartado anterior, en cada una de las cuales se producirá el momento plástico M_p.

Fijadas en consecuencia n + 1 rótulas plásticas y conocido el valor de M_p correspondiente a cada una de ellas, es siempre posible construir un diagrama de momentos estáticamente admisible para la estructura, en el cual el momento plástico sea alcanzado en las secciones requeridas.

El procedimiento se reduce en consecuencia, a suponer primeramente un número suficiente de rótulas plásticas, las cuales, en combinación con las reales de la estructura, constituyen un mecanismo de colapso. Si las articulaciones no han sido adecuadamente seleccionadas, el diagrama de momentos excederá en ciertas secciones el valor absoluto de M_p, y por lo tanto no será estáticamente admisible. Por el contrario, si trazado el diagrama de momentos este valor no es sobrepasado en ninguna sección, el mecanismo elegido es correcto, y por ende válido a los fines de la comparación de valores de P_{cr}.

A los fines prácticos resulta muy útil la representación gráfica de los diagramas isostáticos para las cargas actuantes, pues de esta forma se pueden tantear mucho más rápidamente las posibles líneas de cierre para las que se producen los diferentes mecanismos de colapso; desechándose, mediante una medición gráfica, aquellas soluciones que no arrojen diagramas de momentos estáticamente admisibles.

En resumen, los pasos a seguir para determinar el valor de P_{cr} de una estructura hiperestática por este método, son los siguientes:

* *Paso 1:* Se plantea un isostático equivalente del hiperestático dado y se traza su diagrama de momentos flectores.

* *Paso 2:* Se individualizan todas las secciones en que pueden formarse rótulas plásticas, de acuerdo a los criterios expresados al respecto en el apartado 7.1.

* *Paso 3:* Localizadas las secciones potencialmente críticas, por combinación de ellas, se forman todos los mecanismos posibles de colapso, sin omitir aquellos que producen el colapso parcial de la estructura.

* *Paso 4:* Teniendo en cuenta que en cada sección donde se ubicó una rótula plástica el momento es conocido (M_p), se traza el diagrama de momentos obtenido en el paso 1, de manera tal que, manteniendo inalterada su conformación, pase por los puntos de momento conocido. Se desechan todas aquellas combinaciones de ubicación de rótulas plásticas que den origen a diagramas de momentos que en una o varias secciones sobrepasen el valor de M_p (tanto positivo como negativo).

* *Paso 5:* Mediante consideraciones simplemente geométricas, se calcula el valor de P_{cr} que corresponde para cada distribución válida de rótulas plásticas.

* *Paso 6:* En virtud del teorema estático, de las cargas límites así obtenidas para todos los mecanismos de colapso que hayan arrojado diagramas de momentos estáticamente admisibles, la mayor es la buscada.

El método estático está particularmente indicado para aquellas estructuras cuya ruina es completa, es decir, cuando se hace intervenir n + 1 rótulas plásticas. No sucede lo mismo cuando la ruina es parcial, en cuyo caso es de mucho más fácil aplicación el método cinemático.

Por otra parte, en caso de existencia de cargas uniformemente distribuidas este método es particularmente útil, si bien en algunos casos requiere de la ejecución de diversos tanteos para la obtención del mecanismo buscado.

7.3. Método cinemático.

Se fundamenta en el teorema cinemático o del límite inferior enunciado en el apartado 6.2.2.. Para su aplicación se supone en la estructura la introducción de la cantidad necesaria de rótulas plásticas para que el sistema adquiera un grado de libertad, transformándose así en móvil. Originando un desplazamiento virtual compatible con los vínculos, se aplica a las acciones exteriores e interiores el TTV, estudiado en el Capítulo II (aplicado en este caso a desplazamientos virtuales), y según el cual el trabajo de las acciones exteriores es igual al trabajo interno de deformación.

Sea un pórtico (figura 20a), sobre el que actúa un sistema de cargas exteriores P_1, P_2, q_1, ..., y considérese un mecanismo de abatimiento determinado, tal como el que se muestra en la figura 20b), que permite observar que tales mecanismos están conformados

por barras que se comportan como bielas rígidas (indeformables) y que en su conjunto constituyen un sistema móvil.

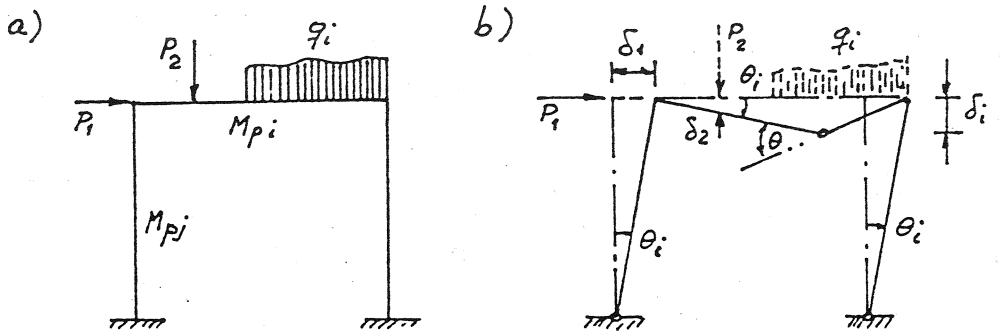


Figura 20

Como consecuencia de lo anterior, los momentos flectores, los esfuerzos normales y los de corte que solicitan a cada una de las barras en toda su longitud como fuerzas interiores, no dan lugar a ningún trabajo interior, quedando sólo en tal carácter el desarrollado por el giro de las rótulas plásticas. Es decir que

$$Ti = \Sigma\, M_{pi}.\theta_i$$

Las cargas exteriores, por su parte, al aplicar al sistema un desplazamiento virtual experimentan determinados desplazamientos δ, medidos en la dirección de la recta de acción de las fuerzas. con lo que el trabajo exterior que originan será

$$Te = \sum_{i=1}^{n} P_i.\delta_i + \int q_i.\delta_i \qquad (29)$$

Dado que Te = Ti, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} P_i.\delta_i + \int q_i.\delta_i = \Sigma\, M_{pi}.\theta_i$$

expresión en la cual M_{pi} es el momento plástico de la sección i en la que se supone situada la rótula (generalmente variable para cada barra) y θ_i es el ángulo que define el desplazamiento virtual provocado en el sistema, el que para cada rótula puede ser determinado en función de las características geométricas del sistema, en función del ángulo θ que corresponde a una rótula cualquiera. Los desplazamientos δ_i, a su vez, quedan definidos en función de los giros θ_i y de las características geométricas de la estructura.

Si en la expresión (29) se supone desconocido el momento plástico M_p en una de las barras, y conocido para los restantes momentos plásticos M_{pi} la relación que los liga con M_p, su resolución proporciona, al eliminarse en ambos miembros el giro θ

(ya que todos los giros θ_i y los corrimientos δ_i pueden, si está definido el mecanismo de colapso de la estructura, expresarse en función de un único ángulo θ), el valor de M_p necesario para que el mecanismo sea compatible con el teorema de los trabajos virtuales.

Para cada mecanismo de colapso que se plantee, existe por lo tanto, un valor diferente de M_p. Según el teorema cinemático, el mecanismo real es aquel que hace máximo el valor de M_p.

Si por el contrario, se conocen los momentos plásticos M_{pi}, para obtener la carga crítica que lleva la estructura al colapso, se plantea la ecuación (29) de manera similar a la explicada, despejándose en este caso para cada estado diferente de ubicación de rótulas plásticas supuesto, el valor de P que le corresponde, el menor de todos los cuales será el P_{ip} de la estructura. Cabe observar que M_p y P_{ip} son inversamente proporcionales entre sí.

En resumen, los pasos a seguir para determinar el valor de P_{ip} de una estructura hiperestática son los siguientes:

* *Paso 1:* Se individualizan todas las secciones en que pueden formarse rótulas plásticas, de acuerdo a los criterios expresados al respecto en el apartado 7.1.

* *Paso 2:* Localizadas las secciones potencialmente críticas, por combinación de ellas, se forman todos los mecanismos posibles de colapso, sin omitir aquellos que producen el colapso parcial de la estructura.

* *Paso 3:* A cada uno de los mecanismos establecidos en el paso anterior se le aplica un desplazamiento virtual y se formula la expresión del TTV, que permite obtener la carga crítica P_{cr} para cada uno de ellos en función del momento plástico M_p.

* *Paso 4:* En virtud del teorema cinemático, de todas las cargas límites así obtenidas, la menor es la buscada. Debe comprobarse que para esta carga el diagrama de momentos sea estáticamente admisible, siendo si así sucede, en virtud del teorema de la unicidad, la solución hallada la verdadera.

El método cinemático es de aplicación más rápida y sencilla que el estático.

8. ANALISIS DE PORTICOS HIPERESTATICOS.

El análisis en fase plástica de pórticos hiperestáticos puede efectuarse por cualquiera de los 5 métodos enunciados en el apartado 6., los que resultarán más o menos adecuados a la resolución de cada caso particular, según cual sea el grado de complejidad que presente, no sólo la estructura, sino también el sistema de cargas actuante sobre la misma.

Otro aspecto a considerar es el que se relaciona con las secciones de las barras, dado que si las mismas son diferentes de

un elemento a otro (caso usual en los pórticos, en donde las columnas y las vigas suelen tener secciones transversales que difieren entre sí), se tendrán valores también distintos de los M_p para cada barra. De este modo, al formarse una rótula plástica en el encuentro de dos barras, la misma desarrollará el M_p propio del elemento de menor resistencia. Cabe observar que puede también optarse por considerar en cada nudo (de encuentro de dos barras) dos subalternativas de formación de la rótula plástica que en el mismo se genere: una en el extremo concurrente de la viga, con el valor correspondiente de M_{pv} y otra en el extremo de la columna con M_{pc}, adoptando luego la P_{cr} más desfavorable.

8.1. Pórticos sencillos de un vano.

En el caso general de un pórtico biempotrado de un nivel y un vano, se está frente a una estructura hiperestática de grado 3, por lo que se requerirán 4 rótulas plásticas (ó 3 alineadas) para conformar un mecanismo de colapso. Las mismas podrán hallarse ubicadas, una en cada empotramiento (2 en total), una en cada nudo (también 2), más una adicional por cada carga (concentrada o equivalente de cargas distribuidas) que actúe en los tramos de las barras (no en sus nudos). Será pues la cantidad de cargas puntuales presentes en la estructura, la que defina la laboriosidad del análisis, y será en consecuencia la que oriente sobre la elección del método más aconsejable a emplear.

8.1.1. Casos particulares.

a) Carga horizontal a nivel de dintel (figura 21a).

En virtud de lo expuesto en el apartado anterior, las 4 rótulas plásticas que conforman el mecanismo de colapso se producirán en las secciones A, C, D y B, tomando el mismo la conformación indicada en la figura 21b). El trazado del diagrama de momentos resulta así inmediato.

Si a nivel de ejemplo se supone el pórtico geométricamente simétrico, ambas columnas tendrán igual valor de M_{pc}. En tal caso, si $M_{pv} \geq M_{pc}$, el diagrama de momentos será el indicado en la figura 21c), y el valor de P_{lp} puede obtenerse mediante la condición de equilibrio de sumatoria de fuerzas horizontales igual a cero, es decir

$$P_{lp} = 2.\frac{(M_{pc} + M_{pc})}{h} = \frac{4\ M_{pc}}{h} = \frac{4\ W_c.\sigma_F}{h}$$

Por el contrario, si $M_{pv} < M_{pc}$, el diagrama de momentos será el indicado en la figura 21d), y

$$P_{lp} = 2.\frac{(M_{pc} + M_{pv})}{h} = \frac{2.(W_c + W_v).\sigma_F}{h}$$

En todos los casos será $\sigma_F = m.R$ (resistencia mecánica de cálculo por el coeficiente de las condiciones de trabajo).

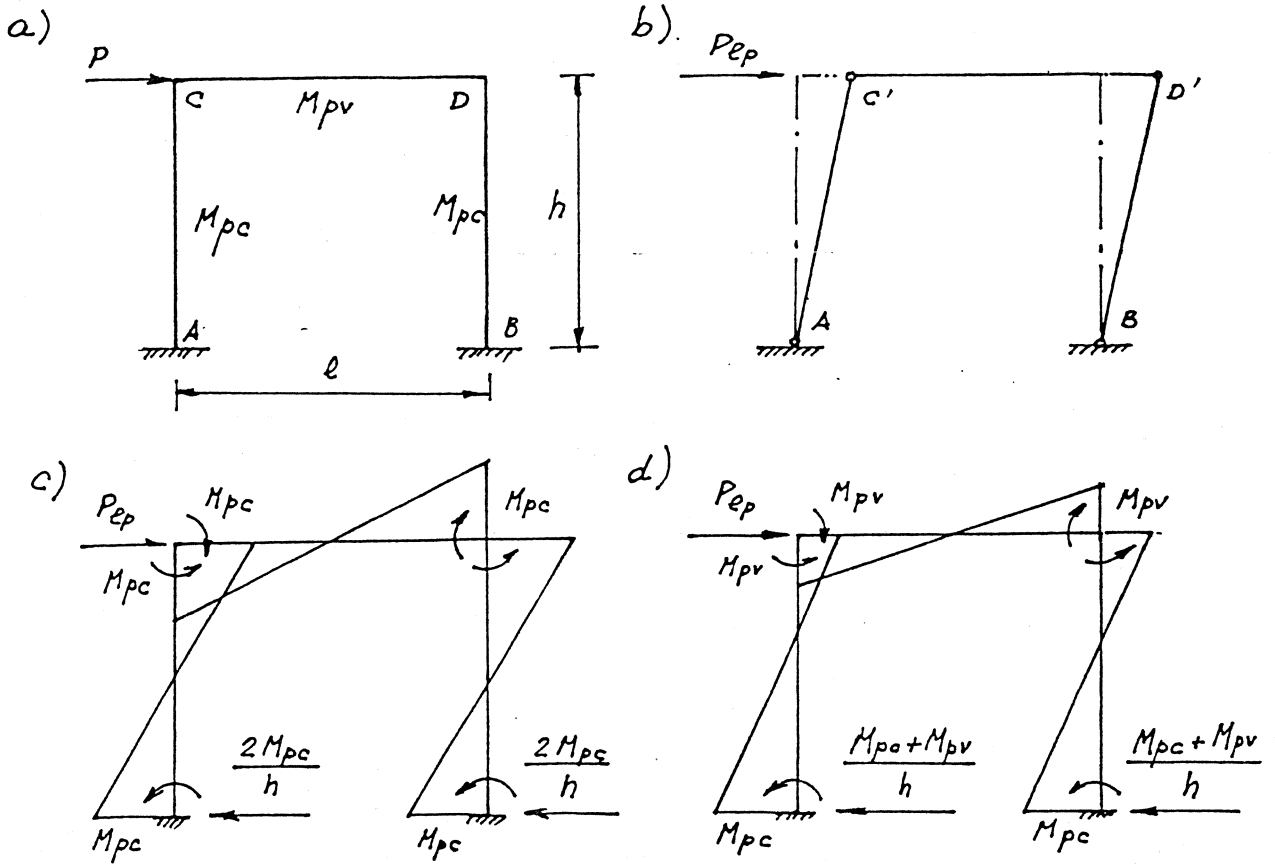


Figura 21

b) Carga horizontal a nivel de dintel y una carga concentrada sobre el mismo (figura 22a).

En este caso pueden ser secciones de formación de rótulas las A, B, C, D o E. Dado que con 4 rótulas se llega al mecanismo de colapso, se presentan 5 combinaciones posibles, con las 5 secciones potencialmente críticas tomadas de 4 en 4, las que se muestran en las figuras 22b) a 22f).

De las cinco posiciones representadas se desecha inicialmente la d), ya que el desplazamiento del pórtico no es compatible con la dirección de la fuerza horizontal (o bien, un desplazamiento de la viga hacia arriba no sería compatible con la carga vertical). Por otra parte, la solución e) si bien es posible como mecanismo, no verifica la condición de que las deformaciones, aún siendo plásticas, sean pequeñas, pues el tramo C-D, como consecuencia del giro de la columna A-C experimenta un acortamiento grande, que únicamente podría ser reducido si la columna E-B girase el mismo ángulo en el empotramiento B, lo que resultaría contrario a la forma del mecanismo que se discute. Análogo razonamiento es extensivo a la conformación f). Quedan pues así, sólo como posibles las combinaciones representadas en las figuras 22 b) y c), sobre las cuales pueden aplicarse los métodos expuestos en el apartado 7.

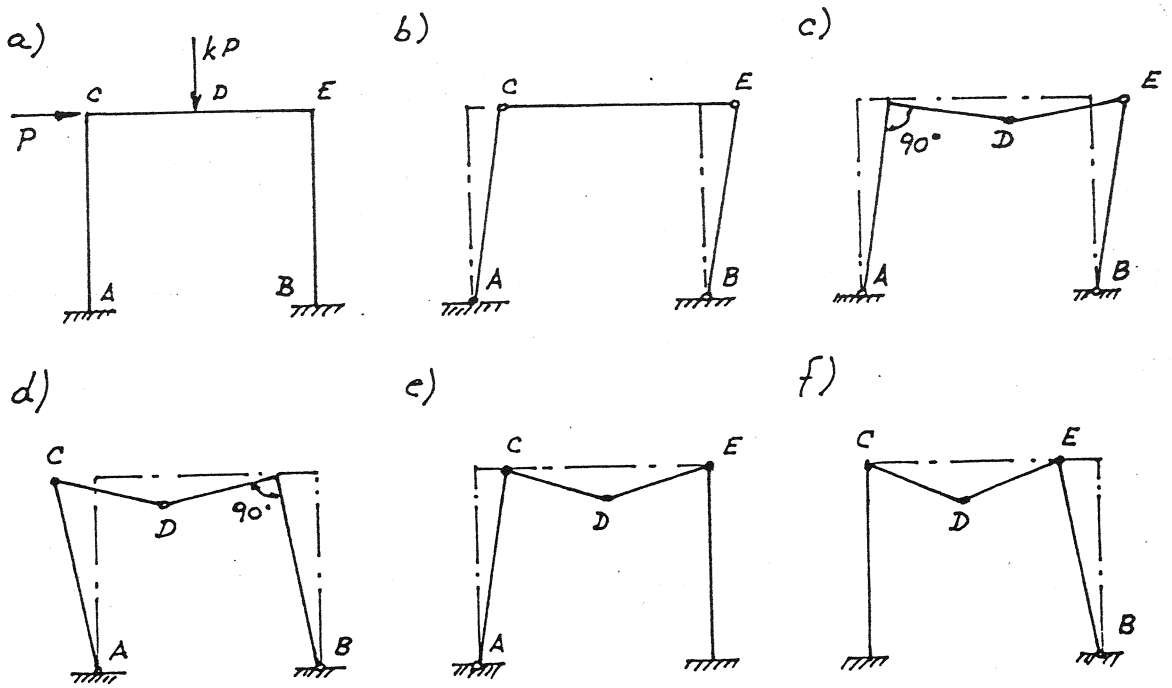


Figura 22

Si se aplica el método estático, la solución buscada será aquella para la cual se obtenga el mayor valor de P_{cr} y simultáneamente en ninguna sección de la estructura que trabaje manteniéndose en fase elástica se sobrepase el valor absoluto de M_p de la barra correspondiente. Por su parte, la aplicación del método cinemático es inmediata.

c) Cargas múltiples.

Se observa (figura 23), que a las 4 rótulas plásticas básicas por empotramientos y nudos, se agrega una por cada punto de aplicación de las cargas concentradas (directas o equivalentes), lo que aumenta sensiblemente el número de combinaciones a estudiar, haciendo aconsejable el empleo de los denominados métodos generales para la determinación de la carga límite, que fueran enunciados en el apartado 6.3..

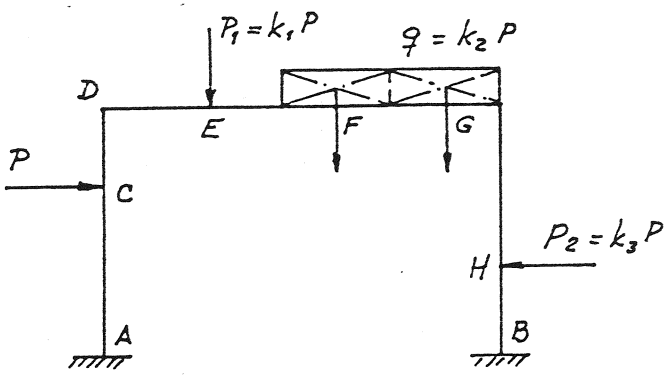


Figura 23

Dado que estos métodos son también de uso para pórticos con mayor cantidad de vanos y/o niveles, se hará una breve referencia conceptual a los mismos en el apartado siguiente. Para aplicaciones concretas y ejemplos prácticos se remite a la bibliografía específica sobre el tema.

8.2. Pórticos múltiples.

Con vistas a la aplicación en estructuras con mayor grado de complejidad por su configuración o por el número de cargas actuantes, se desarrollaron diversos métodos que lograron simplificar la obtención y la consideración de los mecanismos de colapso mediante procedimientos que conducen sistemáticamente a la solución, desechando "a priori" la comprobación de gran parte de los mecanismos posibles.

8.2.1. Método de la combinación de mecanismos.

Debido a Symonds y Neal (1952), se basa en la obtención del mecanismo de colapso por medio del análisis de los mecanismos elementales, o combinados que pueden obtenerse por superposición de estos últimos.

En términos muy generales, se entiende por *mecanismos elementales* a aquellos que corresponden al agotamiento de partes aisladas de la estructura, y que pueden ser matemáticamente expresados por un sistema de ecuaciones lineales independientes, deducidas a partir de las ecuaciones de equilibrio planteadas respecto a todas las rótulas posibles, una vez eliminadas de las mismas los valores de las incógnitas hiperestáticas. Los mecanismos elementales más usuales son los de: viga (o dintel), de columna, de nudo y de tablero.

Se puede demostrar que si la estructura es hiperestática de grado n, y m es el número de secciones potencialmente críticas, la cantidad de mecanismos independientes elementales (e) se calcula mediante: $e = m - n$.

Por ejemplo, para el pórtico de la figura 24a), se tendrá, al ser $n = 6$ y $m = 10$, que $e = 4$, que corresponden a los representados en las figuras 24b) a 24e). Los mecanismos de las figuras 24b) y c) son mecanismos de viga; el de la figura 24d), de nudo, mientras que el correspondiente a la figura 24e) es un mecanismo de tablero.

Estos mecanismos elementales pueden ser combinados a su vez, siempre que ambos mecanismos tengan rotaciones iguales y opuestas que se anulen por adición.

Para analizar la estructura, se aplica el método estático directamente sobre los mecanismos combinados, seleccionados de acuerdo al criterio anteriormente indicado, eligiendo luego, según el procedimiento ya conocido, el que corresponda al mayor P_{cr} y comprobando siempre que el diagrama de momentos correspondiente sea estáticamente admisible.

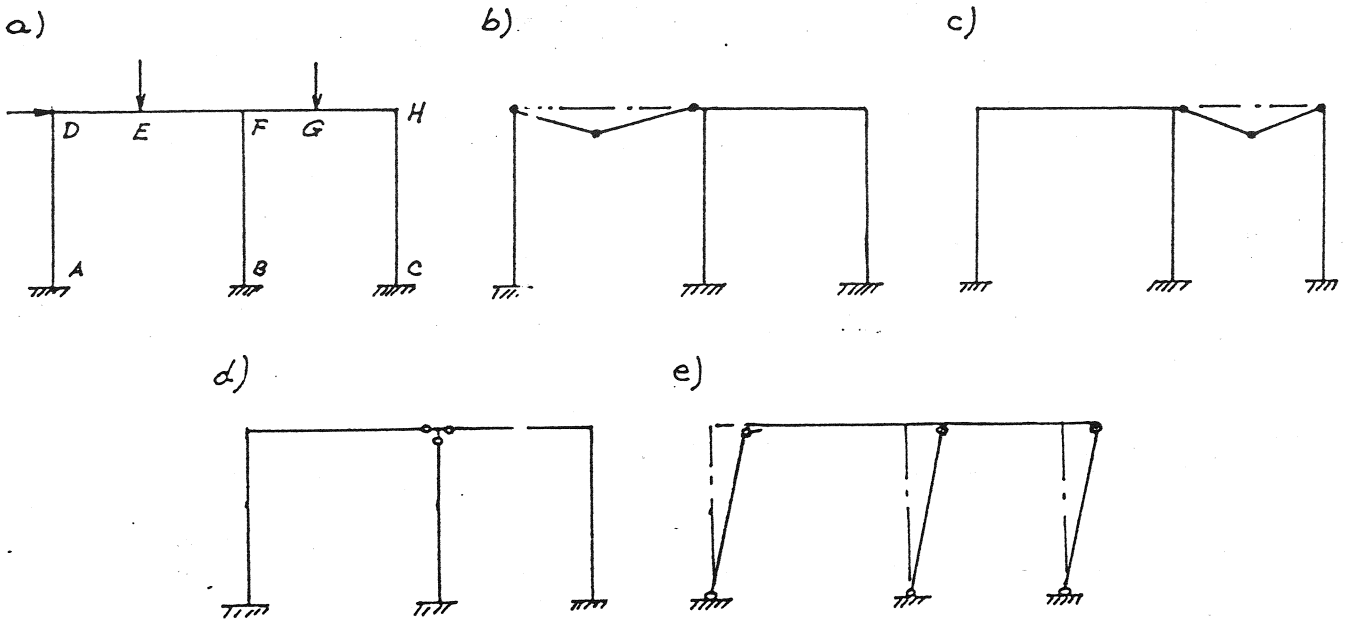


Figura 24

8.2.2. Método de distribución de momentos plásticos.

Este método, debido a English y Horne (1954), tiene bastante analogía con el de Cross, si bien su desarrollo es diferente. Se parte de los momentos de agotamiento suministrados por los mecanismos elementales de viga y tablero. En esta distribución inicial de momentos, no se cumplirán las condiciones de equilibrio estático para los nudos de la estructura, $\Sigma M = 0$, siendo en consecuencia necesario equilibrarlos, para lo cual se distribuyen entre los extremos de las barras que concurren al nudo momentos cuya suma debe ser de igual intensidad y sentido contrario al resultante inicial.

Los coeficientes de distribución de nudo no tienen ninguna relación con las rigideces de las barras, pudiendo distribuirse el momento descompensado "a sentimiento", siempre que se mantenga el equilibrio estático con las cargas aplicadas. Sin embargo, en general, este momento se suele distribuir proporcionalmente a los momentos plásticos de las secciones de las barras que concurren al nudo. El momento a introducir en el extremo de cada barra que llega al nudo compensado, se transmite a una de las articulaciones plásticas del mecanismo elemental de viga, mediante un coeficiente de transmisión.

Realizado el primer ciclo, quedan todos los nudos compensados y estáticamente equilibradas cada una de las barras. Así es posible concebir, mediante una evaluación criteriosa de los momentos, el mecanismo de colapso. Determinado el momento de agotamiento para el mecanismo supuesto, es necesario aumentar algunos momentos y reducir otros, de manera que se alcancen los momentos plásticos en las secciones previstas, sin olvidar que esta operación debe realizarse manteniendo el equilibrio estático

de las barras y nudos. Si fuesen varios los mecanismos posibles, será necesario el estudio del mecanismo de colapso de cada uno de ellos, eligiendo el que proporcione un M_p mayor compatible con el teorema estático.

Con este método no resulta necesario predecir, inicialmente, los momentos plásticos relativos de los diferentes miembros. Así, es factible iniciar el cálculo con secciones iguales para todas las barras y elegir, a medida que se van efectuando las compensaciones de nudos, sus respectivos momentos plásticos sin tener que rehacer los cálculos, por encontrarse satisfechas las condiciones de equilibrio.

9. ANALISIS DE LAS DEFORMACIONES.

Como las estructuras dimensionadas plásticamente están formadas por elementos de menor sección que las diseñadas por el método elástico, sus deformaciones serán mayores, resultando por lo tanto necesario comprobar que aquéllas se encuentran dentro de los límites admisibles, indicados en las normas vigentes.

Dado que, generalmente, el análisis plástico se aplica a estructuras hiperestáticas tales como vigas continuas y pórticos en las que las deformaciones rara vez son significativas, y que además, con las cargas normales de servicio no se forman rótulas plásticas, la magnitud de las deformaciones en este estado puede ser determinada por los métodos clásicos del análisis estructural.

No obstante, las normas suelen exigir que se calculen las deformaciones que presentaría la estructura bajo carga límite, en el instante en que se encuentran formadas todas las rótulas plásticas menos una; el método a seguir para ello, resulta bastante laborioso.

10. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

1. "LA ESTRUCTURA METALICA HOY: TEORIA Y PRACTICA" - Argüelles Alvarez - Editorial Limusa.

2. "CALCULO PLASTICO DE LAS CONSTRUCCIONES" - Ch. Massonet y M. Save - Tomos I y II - Montaner y Simón S.A. - Barcelona.

3. "ANALISIS ESTRUCTURAL - Un enfoque unificado clásico y por matrices" - A. Ghali y A. M. Neville - Editorial Diana S.A. - México - 1984.

4. "MECANICA DE CONSTRUCCION" - Tomos I y II - V. A. Kiseliov - Editorial Mir - Moscú - 1972.

5. "APUNTES DE CLASE" - Ing. Carlos D. Segerer - Cátedra de Estabilidad III (Análisis Estructural I) - Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

INDICE

CAPITULO IX: RESOLUCION DE ESTRUCTURAS EN FASE PLASTICA

Página

1. Solicitaciones internas límites en la sección de una barra 1
   1.1. Conceptos básicos y definiciones. 1
   1.2. Secciones solicitadas a esfuerzo axil 3
   1.3. Secciones solicitadas a flexión simple. 8

2. Análisis de estructuras isostáticas en fase plástica . . . 10
   2.1. Estructuras de reticulado 10
   2.2. Vigas. La rótula plástica 11

3. Campo de validez de la teoría del Análisis Límite. 12

4. Estudio general de sistemas hiperestáticos de alma llena . 13
   4.1. Aspectos generales. 13
   4.2. Condiciones necesarias para la formación del mecanismo de colapso. 14
   4.3. Procedimiento de análisis 15
   4.4. Vigas hiperestáticas de un tramo de sección constante 15
   4.5. Análisis de vigas continuas 20
   4.6. Caso de apoyos elásticos y movimiento de vínculos . . 26

5. Análisis de reticulados hiperestáticos en fase plástica. . 27

6. Metodologías particulares para el análisis en fase plástica 28
   6.1. Método del "Paso a paso". 28
   6.2. Teoremas fundamentales. 29
   6.3. Estructuras hiperestáticas complejas. 30

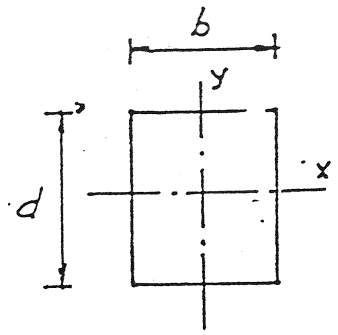
7. Formas de aplicación práctica. 30
   7.1. Ubicación de las rótulas plásticas. 30
   7.2. Método estático 31
   7.3. Método cinemático 32

8. Análisis de pórticos hiperestáticos. 34
   8.1. Pórticos sencillos de un vano 35
   8.2. Pórticos múltiples. 38
9. Análisis de las deformaciones. 40

10. Bibliografía consultada 40

ANEXO: TABLAS

TABLA N° 1. Valores de β para el cálculo de Jr.



d/b	β
1	0,141
1,25	0,171
1,5	0,196
2	0,229
2,5	0,249
3	0,263
4	0,281
5	0,291
6	0,299
8	0,307
10	0,313
∞	0,333

TABLA N° 2. Valores de las integrales $\int i.k.ds$.

		k (s)	k (s)	k_1 … k_2 (i_m) (s)	k_1 … k_2 (k_m) (s)
1	i (s)	iks	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{2}i(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}i(k_2-k_1)s$
2	i (s)	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{6}i(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}i(2k_2-k_1)s$
3	i (s)	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}iks$	$\frac{1}{6}i(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}i(k_2-2k_1)s$
4	i_1 … i_2 (s)	$\frac{1}{2}(i_1+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(i_1+2i_2)ks$	$\frac{1}{6}(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)s$	$\frac{1}{6}[(2i_2+i_1)k_2-(i_2+2i_1)k_1]s$
5	i_1 … i_2 (s)	$\frac{1}{2}(i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{6}(2i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{6}[i_2(2k_2+k_1)-(k_2+2k_1)i_1]s$	$\frac{1}{6}[(2i_1-i_2)k_1+(2i_2-i_1)k_2]s$
6	αs βs i_c (s)	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)iks$	$\frac{1}{6}i[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]s$	$\frac{1}{6}[k_2(1+\alpha)-k_1(1+\beta)]is$
7	2° i_m (s)	$\frac{2}{3}i_mks$	$\frac{1}{3}i_mks$	$\frac{1}{3}i_m(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{3}i_m(k_2-k_1)s$
8	2° i (s)	$\frac{2}{3}iks$	$\frac{5}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+5k_2)s$	$\frac{1}{12}i(5k_2-3k_1)s$
9	i 2° (s)	$\frac{2}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(5k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-5k_1)s$
10	i_1 … i_m 2° … i_2 (s)	$\frac{1}{6}(i_1+4i_m+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(2i_m+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(i_1k_1+4i_mk_m+i_2k_2)s$	$\frac{1}{6}(i_2k_2+4i_mk_m-i_1k_1)s$
11	2° i (s)	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-k_1)s$
12	i 2° (s)	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+k_2)s$	$\frac{1}{12}i(k_2-3k_1)s$
13	$\int k^2 ds$	k^2s	$\frac{1}{3}k_1^2s$	$\frac{1}{3}(k_1^2+k_1k_2+k_2^2)s$	$\frac{1}{3}(k_1^2-k_1k_2+k_2^2)s$

TABLA N° 2 (Continuación). Valores de las integrales $\int i.k.ds$.

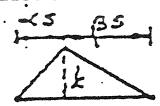
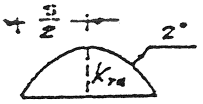
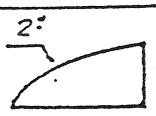
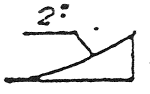
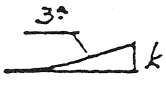
					
$\frac{1}{2} iks$	$\frac{2}{3} i k_m s$	$\frac{2}{3} iks$	$\frac{1}{3} iks$	$\frac{1}{4} iks$	1
$\frac{1}{6}(1+\alpha) iks$	$\frac{1}{3} i k_m s$	$\frac{5}{12} iks$	$\frac{1}{4} iks$	$\frac{1}{5} iks$	2
$\frac{1}{6}(1+\beta) iks$	$\frac{1}{3} i k_m s$	$\frac{1}{4} iks$	$\frac{1}{12} iks$	$\frac{1}{20} iks$	3
$\frac{1}{6}[(1+\beta) i_1 + (1+\alpha) i_2] ks$	$\frac{1}{3}(i_1+i_2) k_m s$	$\frac{1}{12}(3i_1+5i_2) ks$	$\frac{1}{12}(i_1+3i_2) ks$	$\frac{1}{20}(i_1+4i_2) ks$	4
$\frac{1}{6}[i_2(1+\alpha) - i_1(1+\beta)] ks$	$\frac{1}{3}(i_2-i_1) k_m s$	$\frac{1}{12}(5i_2-3i_1) ks$	$\frac{1}{12}(3i_2-i_1) ks$	$\frac{1}{20}(4i_2-i_1) ks$	5
$\frac{1}{3} iks$	$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta) i k_m s$	$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2) iks$	$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2) iks$	$\frac{1}{20}(1+\alpha)(1+\beta)^2 iks$	6
$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta) i_m ks$	$\frac{8}{15} i_m k_m s$	$\frac{7}{15} i_m ks$	$\frac{1}{5} i_m ks$	$\frac{2}{15} iks$	7
$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2) iks$	$\frac{7}{15} i k_m s$	$\frac{8}{15} iks$	$\frac{3}{10} iks$	$\frac{7}{30} iks$	8
$\frac{1}{12}(5-\alpha-\alpha^2) iks$	$\frac{7}{15} i k_m s$	$\frac{11}{30} iks$	$\frac{2}{15} iks$	$\frac{1}{12} iks$	9
$\frac{1}{6}[i_1\beta^2 + 3 i_m(1+\beta) + i_2\alpha^2] ks$	$\frac{1}{15}(i_1 + 8 i_m + i_2) k_m s$	$\frac{1}{60}(i_1 + 28 i_m + 11 i_2) ks$	$\frac{1}{60}(12 i_m + 9 i_2 - i_1) ks$	$\frac{1}{60}[8(i_m+i_2) - i_1] ks$	10
$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2) iks$	$\frac{1}{5} i k_m s$	$\frac{3}{10} iks$	$\frac{1}{5} iks$	$\frac{1}{6} iks$	11
$\frac{1}{12}(1+\beta+\beta^2) iks$	$\frac{1}{5} i k_m s$	$\frac{2}{15} iks$	$\frac{1}{30} iks$	$\frac{1}{60} iks$	12
$\frac{1}{3} k^2 s$	$\frac{2}{15} k_m^2 s$	$\frac{8}{15} k^2 s$	$\frac{1}{5} k^2 s$	$\frac{1}{7} k^2 s$	13

TABLA N° 3. Propiedades de áreas de uso frecuente.

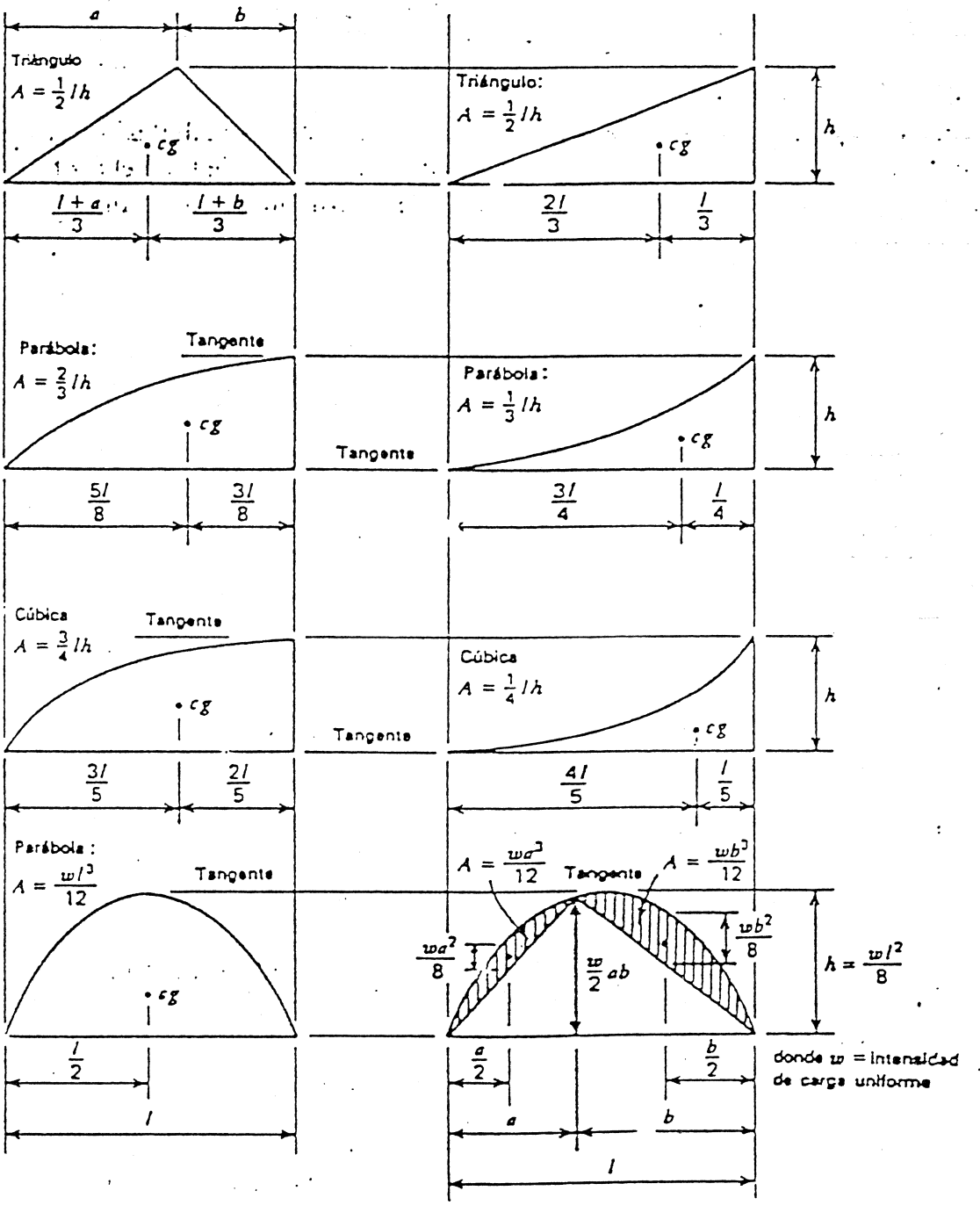


TABLA N° 4. Transformación de la viga real a la viga conjugada.

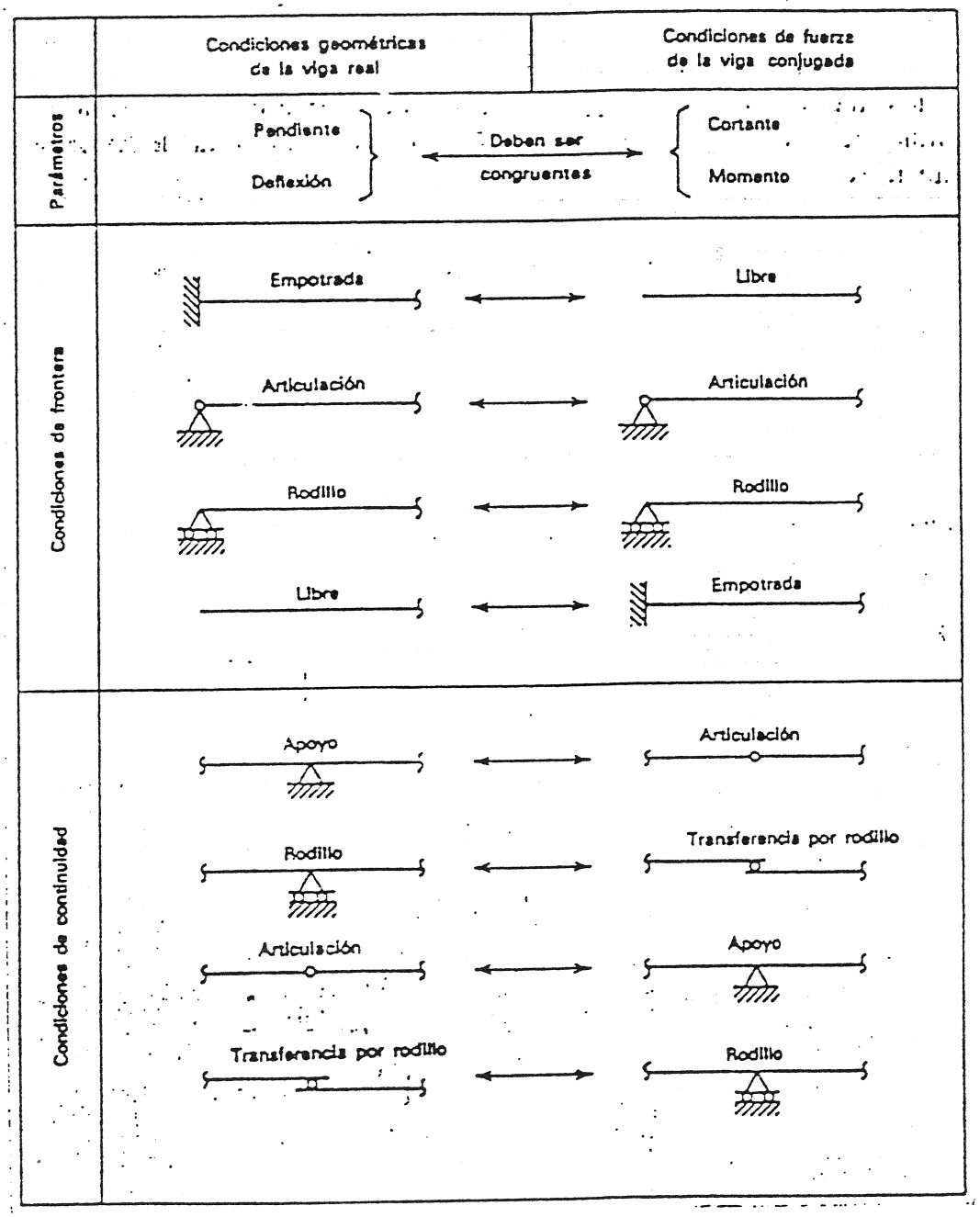


TABLA N° 5. Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

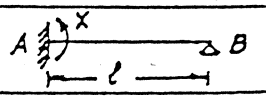
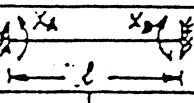
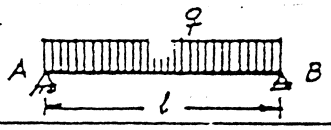
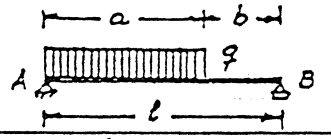
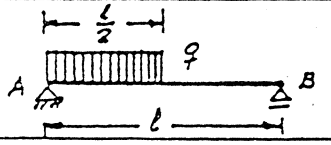
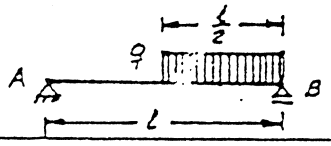
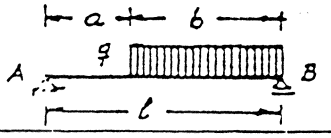
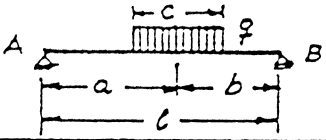
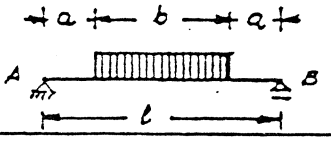
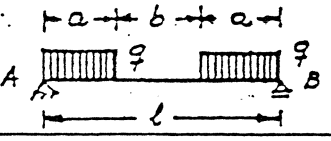
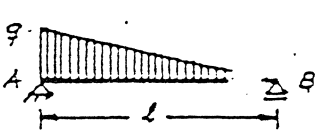
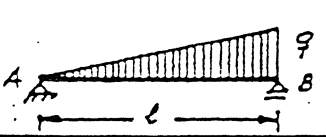
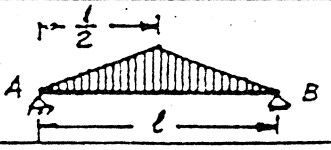
N°	Estado de carga			
		X	X_A	X_B
1		$\frac{q l^2}{8}$	$\frac{q l^2}{12}$	$\frac{q l^2}{12}$
2		$\frac{q a^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$	$\frac{q a^2}{4}\left[2-\frac{a}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q a^3}{12 l^2}(4l-3a)$
3		$\frac{9}{128} q l^2$	$\frac{11}{192} q l^2$	$\frac{5}{192} q l^2$
4		$\frac{7}{128} q l^2$	$\frac{5}{192} q l^2$	$\frac{11}{192} q l^2$
5		$\frac{q b^2}{8}\left(2-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q b^3}{12 l^2}(4l-3b)$	$\frac{q b^2}{4}\left[2-\frac{b}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{b}{l}\right)\right]$
6		$\frac{q a b c}{2 l^2}\left(l+b-\frac{c^2}{4a}\right)$	$\frac{qc}{l^2}\left[ab^2-\frac{1}{6}\left(b-\frac{a}{2}\right)\right]$	$\frac{qc}{l^2}\left[a^2b-\frac{c^2}{6}\left(a-\frac{b}{2}\right)\right]$
7		$\frac{q b l}{16}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q b l}{24}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q b l}{24}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$
8		$\frac{q a^2}{4}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$	$\frac{q a^2}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$	$\frac{q a^2}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$
9		$\frac{q l^2}{15}$	$\frac{q l^2}{20}$	$\frac{q l^2}{30}$
10		$\frac{7 q l^2}{120}$	$\frac{q l^2}{30}$	$\frac{q l^2}{20}$
11		$\frac{5 q l^2}{64}$	$\frac{5 q l^2}{96}$	$\frac{5 q l^2}{96}$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

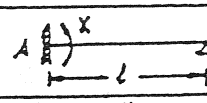
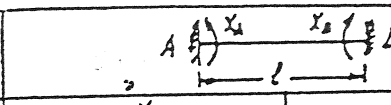
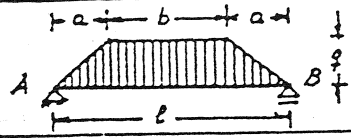
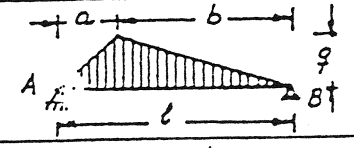
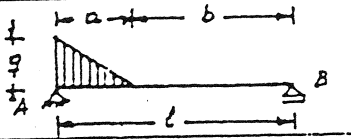
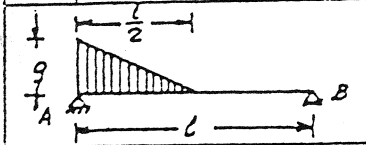
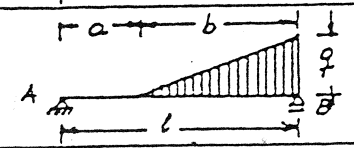
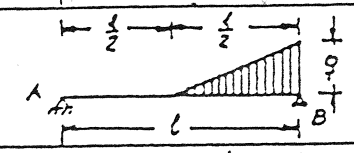
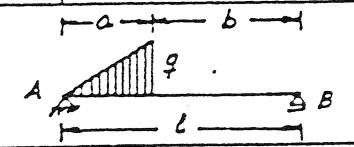
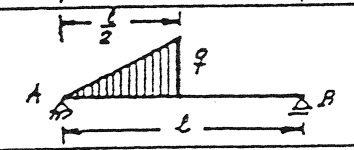
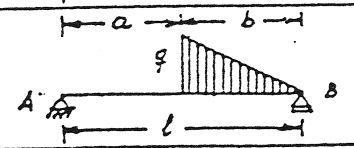
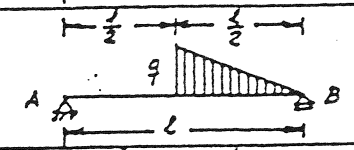
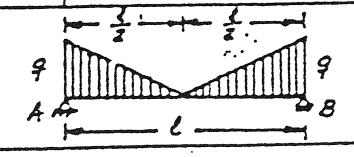
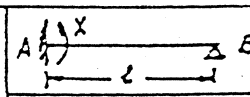
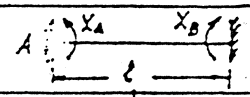
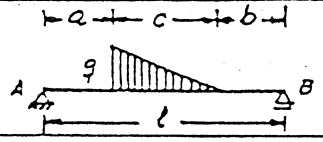
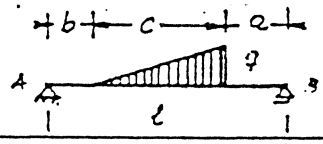
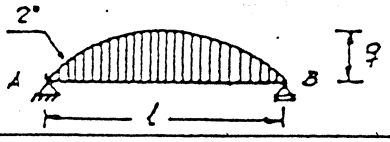
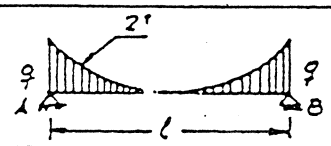
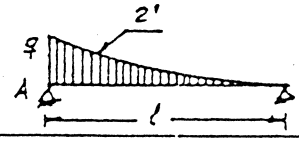
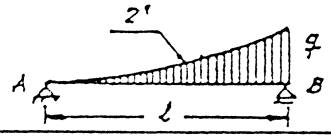
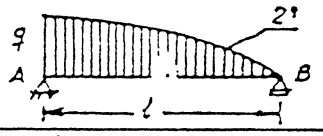
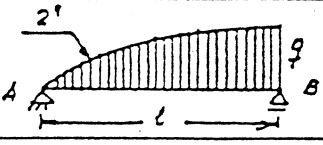
N°	Estado de carga			
		X	X_A	X_B
12		$\frac{q}{8}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$
13		$\frac{q(l+b)}{120\,l}\left(7l^2-3b^2\right)$	$\frac{ql^2}{30}\left(1+\frac{b}{l}+\frac{b^2}{l^2}-\frac{3b^2}{2l^3}\right)$	$\frac{ql^2}{30}\left(1+\frac{a}{l}+\frac{a^2}{l^2}-\frac{3a^3}{2l^3}\right)$
14		$\frac{qa^2}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{4l}+\frac{a^2}{20l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{6}\left(1-\frac{a}{l}+\frac{3a^2}{10l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{60}\frac{a}{l}\left(5-3\frac{a}{l}\right)$
15		$\frac{53}{1920}\,q\,l^2$	$\frac{23}{960}\,q\,l^2$	$\frac{7}{960}\,q\,l^2$
16		$\frac{qb^2}{120}\left[10-3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$\frac{qb^2}{60}\frac{b}{l}\left(5-3\frac{b}{l}\right)$	$\frac{qb^2}{6}\left(1-\frac{b}{l}+\frac{3b^2}{10l^2}\right)$
17		$\frac{37}{1920}\,q\,l^2$	$\frac{7}{960}\,q\,l^2$	$\frac{23}{960}\,q\,l^2$
18		$qa^2\left(\frac{1}{3}-\frac{3a}{8l}+\frac{a^2}{10l^2}\right)$	$qa^2\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2l}+\frac{a^2}{5l^2}\right)$	$\frac{qa^3}{l}\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{5l}\right)$
19		$\frac{41}{960}\,q\,l^2$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{3ql^2}{160}$
20		$\frac{qb^2}{30}\left[5-3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$\frac{qb^3}{l}\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{5l}\right)$	$qb^2\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{2l}+\frac{b^2}{5l^2}\right)$
21		$\frac{17}{480}\,q\,l^2$	$\frac{3ql^2}{160}$	$\frac{ql^2}{30}$
22		$\frac{3}{64}\,q\,l^2$	$\frac{ql^2}{32}$	$\frac{ql^2}{32}$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

N°	Estado de carga	 X	 X_A	X_B
23		(*)	(**)	(***)
24		(****)	(***)	(**)
25		$\frac{ql^2}{10}$	$\frac{ql^2}{15}$	$\frac{ql^2}{15}$
26		$\frac{ql^2}{40}$	$\frac{ql^2}{60}$	$\frac{ql^2}{60}$
27		$\frac{ql^2}{24}$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{60}$
28		$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{60}$	$\frac{ql^2}{30}$
29		$\frac{11ql^2}{120}$	$\frac{ql^2}{15}$	$\frac{ql^2}{20}$
30		$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{20}$	$\frac{ql^2}{15}$

23/24

(*) $\frac{qc}{108l^2}(3b-2c)\left[9(l^2-b^2)-12bc-c^2\left(4+\frac{45b-28c}{30a+20c}\right)\right]$

(**) $\frac{qc}{540l^2}\left[10(3a+c)(3b+2c)^2-15c^2(3b-l)-28c^3\right]$

(***) $\frac{qc}{540l^2}\left[10(3a+c)^2(3b+2c)-15c(3a-l)-17c^3\right]$

(****) $\frac{qc(3a+c)}{108l^2}\left[9(l^2-a^2)-6ac-c^2\left(1+9\frac{45a+17c}{270a+90c}\right)\right]$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

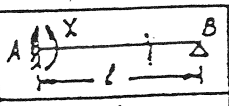
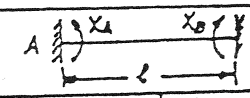
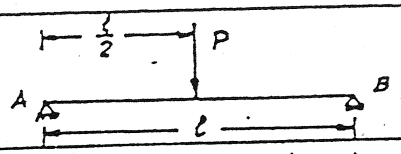
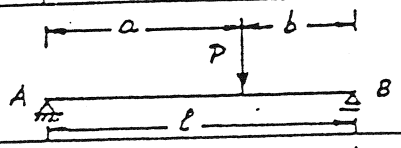
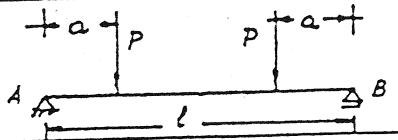
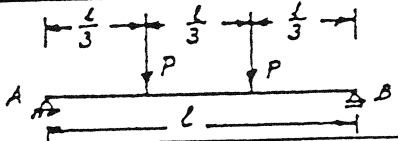
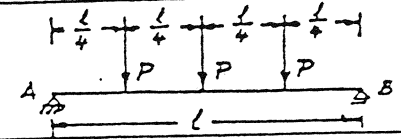
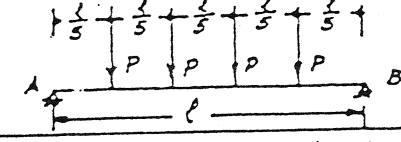
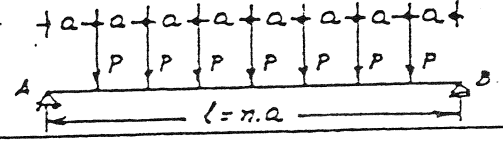
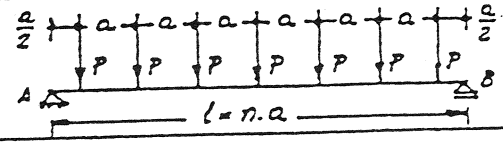
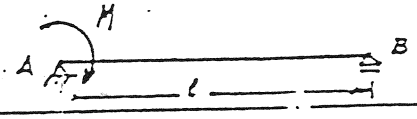
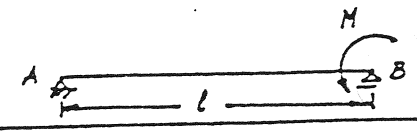
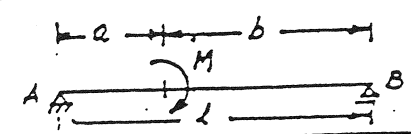
N°	Estado de carga	 X	 X_A	X_B
31		$\frac{3Pl}{16}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$
32		$\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$	$\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pba^2}{l^2}$
33		$\frac{3Pa}{2l}(l-a)$	$\frac{Pa}{l}(l-a)$	$\frac{Pa}{l}(l-a)$
34		$\frac{Pl}{3}$	$\frac{2}{9}Pl$	$\frac{2}{9}Pl$
35		$\frac{15}{32}Pl$	$\frac{5}{16}Pl$	$\frac{5}{16}Pl$
36		$\frac{3}{5}Pl$	$\frac{2}{5}Pl$	$\frac{2}{5}Pl$
37		$\frac{Pl}{8n}(n^2-1)$	$\frac{Pl}{12n}(n^2-1)$	$\frac{Pl}{12n}(n^2-1)$
38		$\frac{Pl}{16n}(2n^2+1)$	$\frac{Pl}{24n}(2n^2+1)$	$\frac{Pl}{24n}(2n^2+1)$
39		M	M	0
40		$\frac{M}{2}$	0	M
41		$\frac{M}{2}\left[1-3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$-M\frac{b}{l}\left(2-3\frac{b}{l}\right)$	$M\frac{a}{b}\left(2-3\frac{a}{l}\right)$

TABLA N° 5. (Continuación) Momentos de empotramiento para vigas solicitadas por diversos estados de carga.

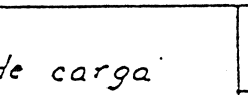
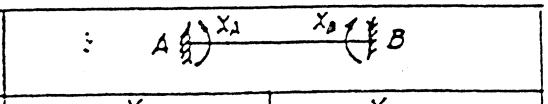
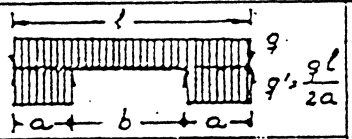
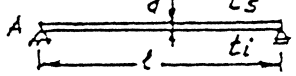
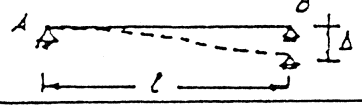
N°	Estado de carga			
		X	X_A	X_B
42		$\frac{q\ell^2}{8}\left(1-\frac{3a}{\ell}+\frac{2a^2}{\ell^2}\right)$	$\frac{q\ell^2}{12}\left(\frac{2a^2}{\ell^2}-3\frac{a}{\ell}+1\right)$	$\frac{q\ell^2}{12}\left(\frac{2a^2}{\ell^2}-3\frac{a}{\ell}+1\right)$
43	Variación de temperatura $\Delta t = t_i - t_s$ 	$\frac{3}{2} EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$	$EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$	$EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$
44	Descenso de apoyo 	$3EJ\frac{\Delta}{\ell^2}$	$6EJ\frac{\Delta}{\ell^2}$	$-6EJ\frac{\Delta}{\ell^2}$

TABLA N° 1. Valores de los términos de carga R y L.

1	$L = R = \frac{q\ell^2}{4}$
2	$L = \frac{qa^2}{4}\left(2 - \frac{a}{\ell}\right)^2$ $R = \frac{qa^2}{4}\left(2 - \frac{a^2}{\ell^2}\right)$
3	$L = \frac{9}{64} q\ell^2$; $R = \frac{7}{64} q\ell^2$
4	$L = \frac{7}{64} q\ell^2$; $R = \frac{9}{64} q\ell^2$
5	$L = \frac{qb^2}{4}\left(2 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)$ $R = \frac{qb^2}{4}\left(2 - \frac{b}{\ell}\right)^2$
6	$L = \frac{qabc}{\ell^2}\left(\ell + b - \frac{c^2}{4a}\right)$ $R = \frac{qabc}{\ell^2}\left(\ell + a - \frac{c^2}{4b}\right)$
7	$L = R = \frac{qb\ell}{8}\left(3 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)$
8	$L = R = \frac{qa^2}{2}\left(3 - \frac{2a}{\ell}\right)$
9	$L = \frac{8}{60} q\ell^2$; $R = \frac{7}{60} q\ell^2$
10	$L = \frac{7}{60} q\ell^2$; $R = \frac{8}{60} q\ell^2$
11	$L = R = \frac{5}{32} q\ell^2$
12	$L = R = \frac{q}{4}\left[\ell^2 - a^2\left(2 - \frac{a}{\ell}\right)\right]$
13	$L = \frac{q(\ell+b)}{60\ell}(7\ell^2 - 3b^2)$ $R = \frac{q(\ell+a)}{60\ell}(7\ell^2 - 3a^2)$
14	$L = qa^2\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{4\ell} + \frac{a^2}{20\ell^2}\right)$ $R = qa^2\left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{20\ell^2}\right)$
15	$L = \frac{53}{960} q\ell^2$; $R = \frac{37}{960} q\ell^2$
16	$L = qb^2\left(\frac{1}{6} - \frac{b^2}{20\ell^2}\right)$ $R = qb^2\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{4\ell} + \frac{b^2}{20\ell^2}\right)$
17	$L = \frac{37}{960} q\ell^2$; $R = \frac{53}{960} q\ell^2$
18	$L = qa^2\left(\frac{2}{3} - \frac{3a}{4\ell} + \frac{a^2}{5\ell^2}\right)$ $R = \frac{qa^2}{15}\left(5 - 3\frac{a^2}{\ell^2}\right)$
19	$L = \frac{41}{480} q\ell^2$; $R = \frac{17}{240} q\ell^2$
20	$L = \frac{qb^2}{15}\left(5 - 3\frac{b^2}{\ell^2}\right)$ $R = qb^2\left(\frac{2}{3} - \frac{3b}{4\ell} + \frac{b^2}{5\ell^2}\right)$
21	$L = \frac{17}{240} q\ell^2$; $R = \frac{41}{480} q\ell^2$
22	$L = R = \frac{3}{32} q\ell^2$

TABLA N° 1 (Conclusión). Valores de los términos de carga R y L.

25	$L = R = \frac{q\ell^2}{5}$
26	$L = R = \frac{q\ell^2}{20}$
27	$L = \frac{q\ell^2}{12}$; $R = \frac{q\ell^2}{15}$
28	$L = \frac{q\ell^2}{15}$; $R = \frac{q\ell^2}{12}$
29	$L = \frac{11}{60} q\ell^2$; $R = \frac{q\ell^2}{6}$
30	$L = \frac{q\ell^2}{6}$; $R = \frac{11}{60} q\ell^2$
31	$L = R = \frac{3}{8} P\ell$
32	$L = \frac{Pab(b+\ell)}{\ell^2}$ $R = \frac{Pab(a+\ell)}{\ell^2}$
33	$L = R = 3Pa\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)$
34	$L = R = \frac{2}{3} P\ell$
35	$L = R = \frac{15}{16} P\ell$
36	$L = R = \frac{6}{5} P\ell$
37	$L = R = \frac{P\ell}{4n}(n^2 - 1)$
38	$L = R = \frac{P\ell}{8n}(2n^2 + 1)$
39	$L = 2M$; $R = M$
40	$L = M$; $R = 2M$
41	$L = M\left(1 - 3\frac{b^2}{\ell^2}\right)$; $R = M\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 1\right)$
42	$L = R = q\frac{b}{4}(\ell - a)$
43	$L = R = 3EJ\alpha\frac{\Delta t}{d}$
44	$L = \frac{6EJ}{\ell^2}(\Delta_B - \Delta_A)$ $R = \frac{6EJ}{\ell^2}(\Delta_A - \Delta_B)$

NOTA: El número de orden de la primera columna se corresponde con el indicado en la Tabla N° 5 del Capítulo II para cada estado de carga.

TABLA N° 2. Valores de ω_1 y ω_d.

ξ_1	ω_1	ω_d
0	0	0
0,1	0,0990	0,1710
0,2	0,1920	0,2880
0,25	0,2344	0,3281
0,3	0,2730	0,3570
0,4	0,3360	0,3840
0,5	0,3750	0,3750
0,6	0,3840	0,3360
0,7	0,3570	0,2730
0,75	0,3281	0,2344
0.8	0,2880	0,1920
0,9	0,1710	0,0990
1,0	0	0

ANEXO 3: Inversión de Matrices

a) Matriz de 2 x 2.

$$\text{Si} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

y además $[B] = [A]^{-1}$, deberá ser $[A].[A]^{-1} = [A].[B] = [I]$.

En consecuencia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir que deberán verificarse los sistemas de ecuaciones

$$a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} = 1 \qquad a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} = 0$$
$$a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} = 0 \qquad a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} = 1$$

Considerando como incógnitas b_{11} y b_{21} para el primer sistema y b_{12} y b_{22} para el segundo, en ambos casos el determinante principal será

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

y los valores de los b_{ik} (incógnitas) serán

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{22}}{\Delta} \quad ; \quad b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{a_{21}}{\Delta}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{a_{12}}{\Delta} \quad ; \quad b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}}{\Delta}$$

En definitiva

$$[B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

es decir que la matriz inversa de una matriz de 2 x 2 tiene por coeficiente la inversa del determinante calculado con los términos de la matriz dada, mientras que los términos interiores serán: los de la diagonal principal primitiva invertidos en su orden, mientras que los dos restantes mantienen su ubicación, pero con signo cambiado.

b) Matriz de 3 x 3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} &= 1 \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} &= 0 \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} &= 0 \\ a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} &= 1 \\ a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} &= 0 \\ a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} &= 0 \\ a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}}{\Delta}$$

$$b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{31}.a_{23} - a_{33}.a_{21}}{\Delta}$$

o bien: $b_{21} = -(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31})/\Delta$

$$b_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}}{\Delta}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{32}.a_{13} - a_{33}.a_{12}}{\Delta}$$

o bien: $b_{12} = -(a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32})/\Delta$

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}}{\Delta}$$

$$b_{32} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{31}.a_{12} - a_{32}.a_{11}}{\Delta}$$

o bien: $b_{32} = -(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31})/\Delta$

$$b_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}}{\Delta}$$

$$b_{23} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{21}.a_{13} - a_{23}.a_{11}}{\Delta}$$

o bien: $b_{23} = -(a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{21})/\Delta$

$$b_{33} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}}{\Delta}$$

En definitiva $[A]^{-1} =$

$$\frac{1}{\Delta}.\begin{bmatrix} a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32} & -(a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32}) & a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22} \\ -(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) & a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31} & -(a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{21}) \\ a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31} & -(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}) & a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \end{bmatrix}$$

que también puede escribirse para mayor facilidad de interpretación

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

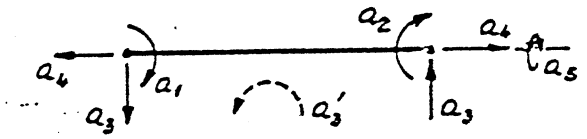
En conclusión, la matriz inversa de una matriz de 3 x 3 tiene por coeficiente la inversa del determinante calculado con los términos de la matriz dada, mientras que los términos interiores serán:

- para los de la diagonal principal, el término correspondiente es el cofactor del término de igual ubicación en la matriz dada;

- para los restantes, el término correspondiente es el cofactor del término simétrico de la matriz dada, con signo más o menos según que el término se ubique en fila y columna de igual o distinta paridad, respectivamente.

Cabe observar que para una matriz [A] simétrica, también será simétrica la matriz inversa, siendo en consecuencia $b_{12} = b_{21}$; $b_{13} = b_{31}$ y $b_{23} = b_{32}$.

TABLA N° 1. Valores de a_{ik}.



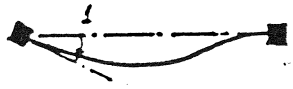
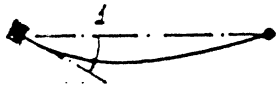
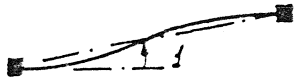
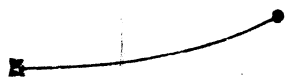
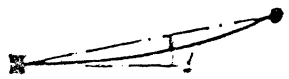
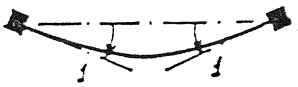
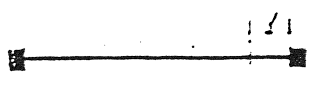
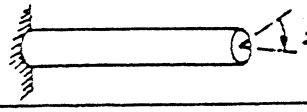
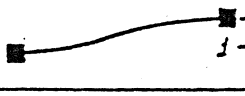
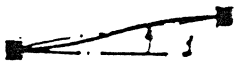
Caso	Tipo de desplazamiento	a_1	a_2	a_3	a_3'	a_4	a_5
1		$4Ek$	$2Ek$	$\frac{6Ek}{\ell}$	$6Ek$	0	0
2		$3Ek$	0	$\frac{3Ek}{\ell}$	$3Ek$	0	0
3		$\frac{6Ek}{\ell}$	$\frac{6Ek}{\ell}$	$\frac{12Ek}{\ell^2}$	$\frac{12Ek}{\ell}$	0	0
3'		$6Ek$	$6Ek$	$\frac{12Ek}{\ell}$	$12Ek$	0	0
4		$\frac{3Ek}{\ell}$	0	$\frac{3Ek}{\ell^2}$	$\frac{3Ek}{\ell}$	0	0
4'		$3Ek$	0	$\frac{3Ek}{\ell}$	$3Ek$	0	0
5		$2Ek$	$-2Ek$	0	0	0	0
6		$6Ek$	$6Ek$	$\frac{12Ek}{\ell}$	$12Ek$	0	0
7		0	0	0	0	$\frac{EF}{\ell}$	0
8		0	0	0	0	0	$\frac{Ek}{\ell}$

TABLA N° 1 (Conclusión). Valores de a_{ik}.

Caso	Tipo de desplazamiento	a_1	a_2	a_3	a'_3	a_4	a_5
9	Con influencia del esfuerzo de corte [$k' = \frac{k}{(1+4\lambda)}$]	$4Ek'(1+\lambda)$	$2Ek'(1-2\lambda)$	$\frac{6Ek'}{\ell}$	$6Ek'$	0	0
10		$\frac{6Ek'}{\ell}$	$\frac{6Ek'}{\ell}$	$\frac{12Ek'}{\ell^2}$	$\frac{12Ek'}{\ell}$	0	0
10'		$6Ek'$	$6Ek'$	$\frac{12Ek'}{\ell}$	$12Ek'$	0	0

NOTAS:

* Para desplazamientos contrarios a los indicados en los diagramas de la columna respectiva, debe invertirse el signo de todos los a_i.

* Excepto para los términos $-a_i$, son válidos los sentidos indicados en el esquema del encabezamiento.

TABLA N° 2.

$\lambda = 0,20$

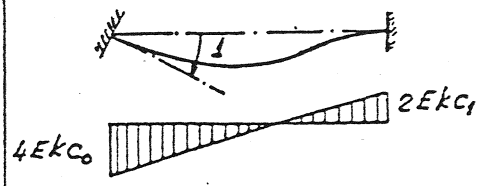
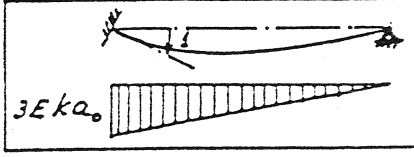
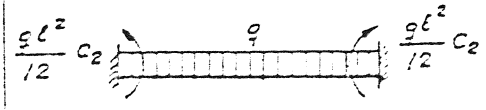
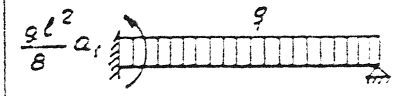
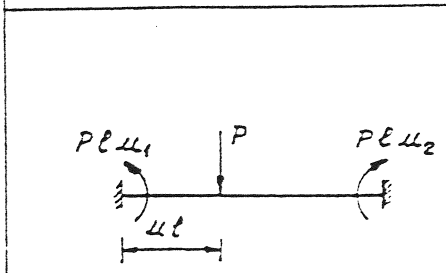
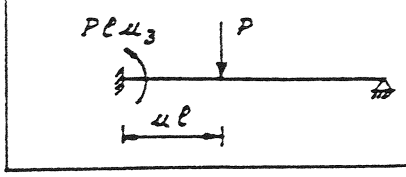
Tipo de desplazamiento	Coeficiente	$n = \frac{J}{J_a}$	
		0.30	0.25
	C_0	1,527	1,615
	C_1	1,840	1,989
	a_0	1,294	1,333

TABLA N° 3.

$\lambda = 0,20$

Tipo de cargas	Coeficiente		$n = \frac{J}{J_a}$	
			0.30	0.25
	C_2		1,128	1,143
	a_1		1,212	1,239
	μ_1	$\mu = 0.25$	0,170	0,173
		$\mu = 0.50$	0,144	0,146
		$\mu = 0.75$	0.041	0.041
	μ_2	$\mu = 0.25$	0.041	0.041
		$\mu = 0.50$	0.144	0.146
		$\mu = 0.75$	0.170	0.173
	μ_3	$\mu = 0.25$	0.195	0.199
		$\mu = 0.50$	0.231	0.237
		$\mu = 0.75$	0.144	0.149