MECANICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS HIDRAULICAS

SEGUNDA EDICION

MECANICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS HIDRAULICAS

SEGUNDA EDICIÓN

(Ampliada y puesta al día, revisada y redactada en el SI)

CLAUDIO MATAIX

Doctor en Ciencias Físicas, Ingeniero Master
Profesor de Mecánica de Fluidos y Turbomáquinas
en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros
Industriales del I.C.A.I.

EDICIONES DEL CASTILLO, S. A.
Madrid

MECANICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS HIDRAULICAS.
Segunda Edición

Primera impresión: marzo de 1982
Segunda impresión: abril de 1986

A los alumnos de las Escuelas Técnicas de Ingenieros del I.C.A.I., que escucharon de viva voz estas lecciones.

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otro método, sin el permiso previo y por escrito, de los titulares del copyright.

© by Claudio Mataix y Plana
Ediciones del Castillo, S. A.
Apartado de Correos, 9088. Madrid
ISBN: 84-219-0175-3
Depósito legal: M. 34.041-1993
Impreso en Milofe, S. L.
C/ Río Tormes, 12
Pol. Ind. «El Nogal». 28100 Algete (Madrid)
Printed in Spain

Presa de la *central mareomotriz de la Rance:* longitud 800 metros. Hay instalados 24 *grupos bulbos* con una potencia total de 240 MW. Instalación única en el mundo en el momento actual. ¿Centrales mareomotrices en el futuro de 5.000 MW (golfo de Mezenak) o incluso de 35.000 MW (golfo de Penzhinok)?

Prólogo

La *primera edición* de esta obra, publicada en 1970 y reimpresa repetidas veces en España y Latinoamérica, nació en mis clases a los Ingenieros Superiores e Ingenieros Técnicos del I.C.A.I. La *segunda edición*, totalmente ampliada, revisada y puesta al día, se ha reelaborado también en contacto vivo con mis alumnos del I.C.A.I. La obra es una Mecánica básica del fluido incompresible (1).

La *segunda edición* retiene la sucesión de los veintinueve capítulos, doce de los cuales están consagrados a las máquinas hidráulicas y a las transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos: de ahí que el título completo de la obra MECANICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS HIDRAULICAS se haya mantenido también.

En nuestra obra se tratan los puntos siguientes:

- Análisis de las propiedades del fluido, en particular de la PRESION y VISCOSIDAD (paradoja de D'Alembert, capa límite y desprendimiento de la capa límite).
- Deducción matemática de las ECUACIONES FUNDAMENTALES: ecuación de la hidrostática, ecuaciones diferenciales de Euler, ecuación de Bernoulli, ecuación de la cantidad de movimiento, ecuación fundamental de las turbomáquinas, etc.
- HIDROSTATICA y sus problemas prácticos, a partir de la ecuación fundamental en sus múltiples formas.
- HIDRODINAMICA y sus problemas prácticos, a partir de la ecuación de Bernoulli en sus múltiples formas.
- TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS y sus problemas prácticos de instalación, funcionamiento y diseño a partir de la ecuación fundamental de Euler.
- MAQUINAS HIDRAULICAS ALTERNATIVAS Y ROTOESTATICAS,
- TRANSMISIONES Y CONTROLES HIDRAULICOS Y NEUMATICOS, a partir del principio de Pascal.

(1) La compresibilidad del fluido sólo se tiene en cuenta en esta obra en el estudio del *golpe de ariete*. La estática y dinámica del fluido compresible se trata en mi obra *Termodinámica Técnica y Máquinas Térmicas*, Madrid, Ediciones I.C.A.I., 1978, 734 págs.

- Resumen teórico práctico de la TEORIA DE MODELOS, con deducción y aplicación de los cinco parámetros adimensionales de semejanza.
- Deducción de las LEYES DE SEMEJANZA de bombas, ventiladores y turbinas hidráulicas y del número específico de revoluciones y experimentación con modelos de máquinas hidráulicas.
- Redes de tuberías, instrumentación de medida, golpe de ariete, cavitación, empuje ascensional, regulación de grupos hidroeléctricos, etc.

La obra en esta *segunda edición* se ha ampliado, puesto al día, revisado y redactado de nuevo en el sistema internacional de unidades SI.

Ampliación en los puntos siguientes:

- Instrumentación de medida de presiones (Cap. 4).
- Instrumentación de medida de velocidad y de caudal en flujo cerrado (Cap. 6).
- Instrumentación de medida de caudal en flujo libre y de medida de nivel (Cap. 14).
- Catorce apéndices en lugar de tres (siete nuevos con tablas de propiedades y cuatro nuevos con tablas de conversión de unidades).
- Bibliografía de obras recientes en lenguas española, francesa e inglesa.
- Selección de normas DIN.

etc , etc.

Puesta al día en los puntos siguientes:

- Normas internacionales para la determinación de la altura neta en las turbinas hidráulicas.
- Recomendaciones ISO para equipo hidráulico y neumático.
- Revisión de nomenclatura según últimas normas DIN vigentes.
- Panorama actual de las centrales hidroeléctricas.
- Fuentes especiales de energía hidráulica: energía mareomotriz, energía eólica y energía de las olas.

etc., etc.

Revisión en los puntos siguientes:

- Problemas (revisión total).
- Nueva redacción del tema de la cavitación.
- Sustitución de la expresión inapropiada de «altura manométrica» por la de altura útil o efectiva.
- Correcciones y mejoras múltiples en el texto.

etc., etc.

Redacción del libro en el SI:

- La novedad máxima de la segunda edición es el abandono del sistema técnico ST y la conversión de tablas y problemas al sistema internacional de unidades SI.

- El SI es legal en España por ley de 1967 y decreto complementario de 1974.
- El SI es legalmente obligatorio en los principales países del área métrica: Alemanias Federal y Democrática, Francia, URSS, etc.
- El SI se adopta en todos los países del área anglosajona.
- En USA, por ejemplo, a fines de 1978 el gran gigante industrial la General Motors poseía ya el 70% de su producción técnica en el SI; en multitud de Universidades se impartían todos los cursos de estática, dinámica, mecánica de fluidos y termodinámica exclusivamente en el SI; el ACI (American Concrete Institute) se ponía como meta el año 1983 para el tránsito completo al SI, etc., etc.

En el libro se ofrece una colección de más de 300 problemas corregidos, revisados y redactados en el SI, unos 75 de los cuales figuran en el texto resueltos. En el Apéndice 13 figura además la solución a todos los problemas con numeración impar.

En conclusión, en esta segunda edición no hemos ahorrado esfuerzo alguno para poder ofrecer a los alumnos de ingeniería de habla hispana, así como a los ingenieros que trabajan en las oficinas de proyectos e instalaciones hidráulicas, un texto fundamental no avanzado de mecánica de fluidos incomprensibles para la especialidad de construcción de máquinas, riguroso, claro y práctico. El lector juzgará hasta qué punto este objetivo se ha llevado a la práctica.

Finalmente quiero expresar mi agradecimiento a las empresas constructoras por el material suministrado, a los alumnos que han colaborado sobre todo en la revisión de los problemas y a Ediciones del Castillo, que ha acogido con gran entusiasmo las dos ediciones de esta obra.

El Autor

Tabla de materias

NOMENCLATURA EMPLEADA *xx*

INTRODUCCION

1. INTRODUCCION A LA MECANICA DE FLUIDOS 1
   1.1. Objeto de la mecánica de fluidos 1
   1.2. Aplicaciones de la mecánica de fluidos 1
      1.2.1. Máquinas de fluido 1
      1.2.2. Redes de distribución 2
      1.2.3. Regulación de las máquinas 2
      1.2.4. Transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos 2
      1.2.5. Acoplamiento y cambio de marchas continuo 2
   1.3. Resumen histórico de la mecánica de fluidos 3
   1.4. Sistemas de unidades. Dimensiones 5
   1.5. El sistema internacional de unidades SI 5
   1.6. Ecuación de dimensiones 7
   1.7. Cambio de unidades 10

2. PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS 13
   2.1. Introducción 13
   2.2. Densidad específica o absoluta, peso pespecífico, densidad relativa y volumen específico 14
      2.2.2. Peso específico 15
      2.2.3. Densidad relativa 16
      2.2.4. Volumen específico 19
   2.3. Compresibilidad 20
   2.4. Viscosidad 20
      2.4.1. Viscosidad dinámica 20
      2.4.2. Viscosidad cinemática 24
      2.4.3. Unidades no coherentes de la viscosidad 26
   2.5. Tensión superficial 28
   2.6. Tensión de vapor 30
   2.7. Fluido ideal 30

3. PRESION 32
   3.1. Definición y propiedades 32
   3.2. Unidades de presión 36
   3.3. Presión atmosférica 39
   3.4. Presión absoluta y presión excedente o relativa 39

HIDROSTATICA

4. HIDROSTATICA 45
   4.1. Ecuación fundamental de la hidrostática del fluido incompresible 45
   4.2. Gráfico de presiones 47
   4.3. Instrumentación de medida de presiones 48
      4.3.1. Tubos piezométricos 49
      4.3.2. Manómetros de líquido 51
         4.3.2.1. Barómetro de cubeta 51
         4.3.2.2. Barómetro en U 51
         4.3.2.3. Manómetro en U de líquido para presiones relativas 52
         4.3.2.4. Vacuómetro en U de líquido para presiones absolutas 53
         4.3.2.5. Manómetro y vacuómetro de cubeta 55
         4.3.2.6. Manómetro diferencial 55
         4.3.2.7. Piezómetro diferencial 56
         4.3.2.8. Micromanómetro de tubo inclinado 57
         4.3.2.9. Multimanómetros 58
         4.3.2.10. Manómetro diferencial tórico 58
      4.3.3. Manómetros elásticos 61
         4.3.3.1. Manómetro de tubo de Bourdon para presiones absolutas 61
         4.3.3.2. Manómetro de tubo de Bourdon para presiones relativas 61
         4.3.3 3. Manómetro de membrana 62
         4.3.3.4. Manómetro diferencial combinado de diafragma y resorte 62
         4.3.3.5 Manómetro de fuelle metálico 62
      4.3.4. Manómetro de émbolo 63
         4.3.4.1. Manómetro de émbolo como tarador de manómetros 63
         4 3.4.2. Manómetro de émbolo y resorte 64
      4.3.5. Transductores de presión eléctricos 65
         4.3.5.1. Transductores de resistencia 65
         4.3.5.2. Transductores de capacidad 65
         4.3 5.3. Transductores de inducción 65
         4.3.5.4. Transductores piezoeléctricos 66
         4.3.5.5. Transductores potenciométricos 66
         4.3.5.6. Transductores de bandas extensométricas 66
   4.4. Presión hidrostática sobre una superficie plana sumergida 69
   4.5. Presión hidrostática sobre una superficie curva cilíndrica sumergida 71
   4.6. Principio de Arquímedes. Flotación. 72
      4.6.1. Equilibrio de los cuerpos totalmente sumergidos (submarino, dirigible) 73
      4.6.2. Equilibrio de los cuerpos parcialmente sumergidos (barco) 74
   4.7. Equilibrio relativo de los líquidos 75
      4.7.1. Recipiente con aceleración lineal constante 75
      4.7.2. Recipiente girando a $\omega = C$ 76

HIDRODINAMICA

5. ECUACION FUNDAMENTAL DE LA HIDRODINAMICA O ECUACION DE BERNOULLI 89
   5.1. Regímenes de corriente. Línea, hilo y tubo de corriente 89
   5.2. Definición de caudal 92

5.3. Ecuación de continuidad 93
5.3.1. Ecuación de continuidad para un hilo de corriente 93
5.3.2. Ecuación de continuidad del fluido incompresible para un tubo de corriente 95
5.4. Fuerzas que actúan sobre un fluido 95
5.5. Ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido ideal, o ecuaciones diferenciales de Euler 96
5.5.1. Componentes de la aceleración en un punto 96
5.5.2. Ecuaciones de Euler 98
5.6. Ecuación de Bernoulli para el fluido ideal: primera deducción por integración de las ecuaciones de Euler según una línea de corriente 101
5.7. Clasificación de las energías de un fluido incompresible 102
5.7.1. Energía potencial geodésica 104
5.7.2. Energía de presión 104
5.7.3. Energía cinética 106
5.8. Ecuación de Bernoulli para el fluido ideal: segunda deducción, energética 106
5.8.1. Deducción energética de la ecuación de Bernoulli para un hilo de corriente en régimen permanente 106
5.8.2. La ecuación de Bernoulli generalizada para un tubo de corriente 107
5.9. La ecuación de Bernoulli y el primer principio de la termodinámica 109
5.10. Las energías específicas y la ecuación de Bernoulli expresadas en alturas equivalentes 110
5.11. Ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido real, o ecuaciones de Navier-Stokes 111
5.12. Ecuación de Bernoulli para el fluido real 112
5.13. Ecuación de Bernoulli generalizada 113
5.14. Gráfico de alturas 114
5.15. Ecuación de Bernoulli para un gas incompresible 115

6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA ECUACION DE BERNOULLI. INSTRUMENTACION DE MEDIDA DE VELOCIDAD. INSTRUMENTACION DE MEDIDA DE CAUDAL EN FLUJO CERRADO 125
6.1. Introducción 125
6.2. Salida por un orificio: Ecuación de Torricelli 125
6.3. Tubo de Pitot 126
6.4. Instrumentación de medida de velocidades 127
6.4.1. Teoría del tubo de Prandtl 128
6.4.2. Tipos diversos de tubos de Prandtl 130
6.4.3. Anemómetros 132
6.4.3.1. Anemómetro de eje vertical 133
6.4.3.2. Anemómetro de eje horizontal 134
6.4.4. Molinete hidráulico 134
6.4.5. Anemómetro de hilo caliente 135
6.5. El sifón 136
6.6. El eyector 138
6.7. Instrumentación de medición de volúmenes 139
6.8. Instrumentación de medición de caudales 141
6.8.1. Caudalímetros de flujo cerrado 141
6.8.1.1. Caudalímetros de área de paso constante 142
6.8.1.1.1. Tubo de Venturi 142
6.8.1.1.2. Toberas 145
6.8.1.1.3. Diafragmas 146
6.8.1.1.4. Otros elementos deprimógenos 148
6.8.1.1.5. Manómetros diferenciales de raíz cuadrada 148

6.8.1.2. Caudalímetros de área de paso variable 151
6.8.1.3. Caudalímetros electromagnéticos 153
6.8.1.4. Caudalímetros de ultrasonido 154

7. LA EXPERIMENTACION EN MECANICA DE FLUIDOS 161
7.1. Introducción 161
7.2. Semejanza de modelos 164
7.3. Teoría de modelos 168
7.4. Semejanza dinámica y gradiente de presiones: número de Euler 168
7.5. Semejanza dinámica con predominio de la gravedad: número de Froude 172
7.6. Semejanza dinámica con predominio de la viscosidad: número de Reynolds 174
7.7. Semejanza dinámica con predominio de la elasticidad: número de Mach 176
7.8. Semejanza dinámica con predominio de la tensión superficial: número de Weber 177

8. RESISTENCIA DE LOS FLUIDOS EN GENERAL 183
8.1. Introducción 183
8.2. Paradoja de d'Alembert 184
8.3. Capa límite: resistencia de superficie 187
8.4. Régimen laminar y turbulento 190
8.5. Capa límite laminar y turbulenta 193
8.6. El número de Reynolds parámetro adimensional de resistencia 194
8.7. Número crítico de Reynolds 194
8.8. Desprendimiento de la capa límite: resistencia de forma 196
8.9. Resistencia de forma: contornos romos y contornos bien fuselados 198
8.10. La energía perdida por la resistencia se transforma en energía térmica 201

9. RESISTENCIA DE SUPERFICIE: PERDIDAS PRIMARIAS EN CONDUCTOS CERRADOS O TUBERIAS 203
9.1. Introducción 203
9.2. Pérdidas primarias y secundarias en las tuberías 203
9.3. Ecuación general de las pérdidas primarias: ecuación de Darcy-Weisbach 206
9.4. Cálculo del coeficiente de pérdidas primarias λ 209
9.4.1. Cálculo de λ en régimen laminar (tuberías lisas y rugosas): fórmula de Poiseuille 209
9.4.2. Cálculo de λ en régimen turbulento y tuberías lisas: para $2.000 < R < 100.000$: fórmula de Blasius 213
9.4.3. Cálculo de λ en régimen turbulento y tuberías lisas: para $R > 100.000$: fórmula primera de Kármán-Prandtl 213
9.4.4. Cálculo de λ en régimen turbulento y tuberías rugosas 214
9.4.4.1. Tuberías de rugosidad artificial: trabajos de Nikuradse 214
9.4.4.2. Tuberías comerciales o de rugosidad natural: fórmula de Colebroock-White y fórmula segunda de Kármán-Prandtl 215
9.5. Diagrama de Moody 218
9.6. Diámetro de tubería más económico 220

10. RESISTENCIA DE SUPERFICIE: PERDIDAS PRIMARIAS EN CONDUCTOS ABIERTOS O CANALES 227
10.1. Introducción 227
10.2. Radio hidráulico 229
10.3. Velocidad en un canal con movimiento uniforme. Primera fórmula: fórmula de Chézy 230
10.4. Coeficiente C de la fórmula de Chézy. Primera fórmula: fórmula de Bazin 231
10.5. Coeficiente C de la fórmula de Chézy. Segunda fórmula: fórmula de Kutter 232
10.6 Velocidad en un canal con movimiento uniforme. Segunda fórmula: fórmula de Manning 232
10.7. Problemas de canales con movimiento uniforme 233

11. RESISTENCIA DE FORMA: PERDIDAS SECUNDARIAS EN CONDUCTOS CERRADOS O TUBERIAS 236
11.1. Introducción 236
11.2. Primer método: Ecuación fundamental de las pérdidas secundarias 236
11.3. El coeficiente ζ de la ecuación fundamental de pérdidas secundarias 237
11.3.1. Salida brusca y suave de un depósito 237
11.3.2. Ensanchamientos bruscos y suaves 238
11.3.3. Contracciones bruscas y suaves 239
11.3.4. Tes 240
11.3.5. Codos 241
11.3.6. Válvulas 242
11.3.6.1. Válvulas de compuerta 242
11.3.6.2. Válvula de mariposa 242
11.3.6.3. Válvula de macho 243
11.3.6.4. Válvula de retención de charnela 244
11.3.6.5. Válvula de pie con alcachofa 244
11.3.6.6. Otras válvulas 245
11.4. Coeficiente total de pérdidas, ζ_t 245
11.5. Segundo método: longitud de tubería equivalente 247
11.6. Gráfico de la ecuación de Bernoulli con pérdidas 247

12. REDES DE DISTRIBUCION 254
12.1. Introducción 254
12.2. Tuberías en serie 255
12.3. Tuberías en paralelo 256
12.4. Tuberías ramificadas 257
12.5. Redes de tuberías 259

13. RESISTENCIA DE SUPERFICIE Y DE FORMA EN UN CUERPO QUE SE MUEVE EN UN FLUIDO: NAVEGACION AEREA Y MARITIMA 276
13.1. Introducción 276
13.2. Ideas generales sobre la resistencia de un cuerpo que se mueve en un fluido 276
13.3. Fórmula general de resistencia y coeficiente adimensional de arrastre 278
13.4. Resistencia de los barcos 281

14. ORIFICIOS, TUBOS, TOBERAS Y VERTEDEROS. INSTRUMENTACION DE MEDIDA DE CAUDALES EN FLUJO LIBRE Y DE NIVEL 283
14.1. Introducción 283
14.2. Orificios, tubos y toberas 284
14.2.1. Fórmulas 284
14.2.2. Aplicaciones 286
14.2.2.1. Control de flujo 286
14.2.2.2. Medición de caudales 288
14.3. Desagüe por una compuerta de fondo 289
14.4. Régimen variable: tiempo de desagüe de un depósito 290
14.5. Vertederos 291
14.5.1. Tipos de vertederos 292
14.5.1.1. Vertederos de pared delgada 293
14.5.1.2. Vertederos de pared gruesa 295
14.5.2. Fórmulas de los vertederos de pared delgada 295
14.5.2.1. Vertedero rectangular 295
14.5.2.2. Vertedero triangular 297
14.5.2.3. Otros vertederos 299
14.6. Canal de Venturi 300
14.7. Otros procedimientos para medir el caudal en flujo libre 302
14.8. Instrumentación de medida de nivel 304
14.8.1. Medición directa 304
14.8.2. Medición hidráulica y neumática 305
14.8.3. Medición eléctrica 306
14.8.4. Medición por ultrasonido 307
14.8.5. Medición por radiaciones gamma 308

15. SOBREPRESIONES Y DEPRESIONES PELIGROSAS EN ESTRUCTURAS Y MAQUINAS HIDRAULICAS: GOLPE DE ARIETE Y CAVITACION 312
15.1. Golpe de ariete 312
15.1.1. Introducción 312
15.1.2. Explicación del fenómeno 313
15.1.3. Fórmulas de la presión máxima o sobrepresión 315
15.1.3.1. Presión máxima en cierre total o parcial instantáneo de la válvula en una tubería elástica 315
15.1.3.2. Presión máxima en cierre lento uniforme de una válvula en una tubería rígida 317
15.2. Cavitación 318
15.2.1. La depresión, causa de la cavitación 318
15.2.2. Descripción de la cavitación 323
15.2.3. Control de la cavitación 324

16. TEOREMA DEL IMPULSO EN MECANICA DE FLUIDOS 329
16.1. Introducción 329
16.2. Deducción del teorema del impulso o de la cantidad de movimiento 330
16.3. Aplicaciones 333
16.3.1. Fuerza sobre un codo 333
16.3.2. Fuerza sobre un álabe y potencia de una turbina de acción 334
16.3.3. Propulsión a chorro 337

17. EMPUJE ASCENSIONAL 344
17.1. Introducción 344
17.2. Empuje ascensional en un cilindro circular 344
17.2.1. Cilindro circular en corriente ideal, irrotacional y uniforme 345
17.2.2. Cilindro circular en corriente irrotacional y uniforme de un fluido ideal con circulación: fórmula del empuje ascensional 345
17.2.3. Cilindro circular en corriente real uniforme 347
17.3. Empuje ascensional en un perfil de ala de avión: fórmula de Kutta-Joukowski 348
17.4. Empuje ascensional y propulsión por hélice: rendimiento de la propulsión 350

MAQUINAS HIDRAULICAS

18. TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS: GENERALIDADES 355
18.1. Definición de máquina hidráulica 355
18 2. Clasificación de las máquinas hidráulicas 357
18.3. Ecuación fundamental de las turbomáquinas o ecuación de Euler: primera forma 359
18.3.1. Planos de representación de una turbomáquina 359
18.3.2. Deducción de la ecuación de Euler 360
18.4. Triángulos de velocidades: notación internacional 364
18.5. Segunda forma de la ecuación de Euler 365
18.6. Grado de reacción 367
18.7. Clasificación de las turbomáquinas según la dirección del flujo en el rodete 367

19. TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS: BOMBAS ROTODINAMICAS 369
19.1. Definición y clasificación de las bombas 369
19.2. Clasificación de las bombas rotodinámicas 369
19.3. Elementos constitutivos 370
19.4 ¿Dónde empieza y dónde termina la máquina?: Secciones de entrada *E* y de salida *S* 371
19.5. Tipos constructivos 371
19.6. El rodete: clasificación de las bombas por el número específico de revoluciones 379
19.7. El sistema difusor 382
19.8. Cebado de la bomba 383
19.9. Instalación de una bomba. 384
19.10 Altura útil o efectiva de una bomba 386
19.10.1. Primera expresión de la altura útil y de la energía útil 386
19.10.2. Segunda expresión de la altura útil y de la energía útil 388
19.11. Pérdidas, potencias y rendimientos 390
19.11.1. Pérdidas 390
19.11.1.1. Pérdidas hidráulicas 390
19.11 1.2. Pérdidas volumétricas 390
19.11.1.3. Pérdidas mecánicas 393
19.11.2. Potencias y rendimientos 394
19.12. Cavitación y golpe de ariete de una bomba 397
19.12.1. Cavitación 397
19.12.2. Golpe de ariete 403
19.13. Algunas tendencias actuales en la construcción de las bombas rotodinámicas 404

20. TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS: VENTILADORES 423
20.1. Definición de los ventiladores 423
20.2. Clasificación de los ventiladores 424
20.2.1. Clasificación según la presión total desarrollada 424
20.2.2. Clasificación según la dirección del flujo 425
20.3. Influjo de la variación de la densidad del gas en el comportamiento de los ventiladores 425
20.4. Fórmulas de los ventiladores 429

21. CENTRALES HIDROELECTRICAS 440
21.1. Saltos naturales: potencial hidroeléctrico 440
21.2. Explotación de los saltos naturales: caudal instalado 447
21.3. Centrales hidroeléctricas 448
21.4. Clasificación de las centrales 449
21.4.1. Según el tipo de embalse 449
21.4.2. Según la potencia 453
21.4.3. Según la altura del salto 456
21.4.4. Según la economía de la explotación 458
21.4.5. Según el lugar de instalación 458

22. TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS: TURBINAS 460
22.1. Definición 460
22.2. Elementos constitutivos 460
22.3. Clasificación de las turbinas hidráulicas 461
22.3.1. Clasificación según el grado de reacción 461
22.3.2. Tipos actuales 463
22.3.3. Clasificación según el número específico de revoluciones 463
22.4 Turbinas de acción: turbinas Pelton 465
22.4.1. Descripción 465
22.4.2. Triángulos de velocidad 467
22.4.3. Clasificación de las turbinas Pelton según el número específico de revoluciones 470
22.5. Turbinas de reacción: turbinas Francis y Hélice 471
22.5.1. Descripción 472
22.5.2 Clasificación de las turbinas de reacción según el número específico de revoluciones 476
22.6. Turbinas de reacción: turbinas Kaplan y Dériaz 478
22 6.1. Orientación de los álabes 478
22.6.2. Descripción de una central con turbinas Kaplan 481
22.7. Algunas tendencias actuales en la construcción de las turbinas hidráulicas 484
22.8. Altura neta 486
22.8.1. Normas internacionales para la determinación de la altura neta 487
22.8.2. Primera expresión de la altura neta y de la energía neta 490
22.8.3 Segunda expresión de la altura neta y de la energía neta 491
22.9. Pérdidas, potencias y rendimientos 492
22.10. Ecuación del tubo de aspiración 495
22.11. Cavitación y golpe de ariete de una turbina 496
22.11.1. Cavitación 496
22.11.2. Golpe de ariete de una turbina: pantalla deflectora, orificio compensador y chimenea de equilibrio 500

23. OTRAS FUENTES DE ENERGIA: ENERGIA EOLICA, ENERGIA MAREOMOTRIZ Y ENERGIA DE LAS OLAS 519
23.1. Energía eólica 519
23.2. Centrales mareomotrices y grupos bulbo 520
23.3. Energía de las olas 523

24. TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS: TRANSMISIONES HIDRODINAMICAS 524
24.1. Introducción 524
24.2. Acoplamiento hidrodinámico 525
24.3. Convertidor de par hidrodinámico 526

25. TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS: LEYES DE SEMEJANZA Y CURVAS CARACTERISTICAS 530
25.1. Introducción 530
25.2. Las seis leyes de semejanza de las bombas hidráulicas 532
25.3. Las seis leyes de semejanza de las turbinas hidráulicas 536
25.4. Las once leyes de semejanza de los ventiladores 539
25.5. Curvas características de las turbomáquinas hidráulicas 540
25.5.1. Curvas características de las bombas rotodinámicas y ventiladores 540
25.5.1.1. Ensayo elemental de una bomba 540
25.5.1.2. Ensayo completo de una bomba 541
25.5.2. Curvas características de las turbinas hidráulicas 543
25.6. Bancos de ensayo 545

26. MAQUINAS HIDRAULICAS DE DESPLAZAMIENTO POSITIVO: BOMBAS DE EMBOLO 553
26.1. Introducción 553
26.2. Principio del desplazamiento positivo 553
26.3. Clasificación de las máquinas de desplazamiento positivo 555
26.4. Bombas de émbolo 557
26.4.1. Comparación de las bombas rotodinámicas y las bombas de émbolo 557
26.4.2. Caudal teórico, caudal real y caudal instantáneo 559
26.4.3. Potencia indicada y potencia útil: diagrama del indicador 563
26.4.4. Tipos diversos de bombas de émbolo 565

27. MAQUINAS HIDRAULICAS DE DESPLAZAMIENTO POSITIVO: MAQUINAS ROTOESTATICAS 572
27.1. Clasificación 572
27.2. Descripción 574
27.3. Teoría 576
27.3.1. Teoría de la bomba o motor de paletas deslizantes 576
27.3.2. Teoría de la bomba o motor de engranajes 577

28. TRANSMISIONES Y CONTROLES HIDRAULICOS Y NEUMATICOS 579
28.1. Introducción 579
28.2. Principio de Pascal 579
28.3. Breve historia desde el principio de Pascal a las transmisiones y controles hidráulicos modernos 580

28.4. Evolución del esquema básico de Pascal al esquema de una transmisión hidráulica moderna 580
28.5. Comparación entre las transmisiones hidráulicas y mecánicas 586
28.6. Comparación entre las transmisiones hidráulicas y eléctricas 587
28.7. Aplicaciones 588
28.8. Válvulas hidráulicas 588
28.8.1. Válvulas de control de presión 589
28.8.1.1. Válvulas de seguridad 589
28.8.1.2. Válvulas reductoras de presión 589
28.8.1.3. Válvulas de secuencia 591
28.8.2. Válvulas de control de flujo 591
28.8.3. Válvulas de control de dirección 591
28.9. Símbolos 593
28.10. Circuitos 595
28.11. Automatismo 598
28.12. Servomecanismos hidráulicos 599

29. REGULACION DE LAS TURBINAS HIDRAULICAS 603
29.1. Introducción 603
29.2. Regulación taquimétrica 605
29.3. Regulación directa 605
29.4. Regulación indirecta con amplificación sin retroalimentación 606
29 5. Regulación indirecta con amplificación y retroalimentación: servomecanismo de regulación 608
29.6. Regulación de una turbina de acción 609
29.7. Regulación de una turbina de reacción 611

APENDICES 613
1. Tablas de conversión de unidades del sistema ST al SI y viceversa 615
2. Prefijos en el sistema internacional SI 618
3. Tablas de conversión de los sistemas métricos (SI y ST) al sistema anglosajón y viceversa 618
4. Densidad de algunos líquidos en función de la temperatura 621
5. Viscosidad dinámica de algunas sustancias en función de la temperatura 622
6. Viscosidad cinemática del vapor de agua en función de la temperatura 623
7. Viscosidad cinemática de algunos aceites en función de la temperatura 624
8. Viscosidad dinámica y cinemática de algunos gases a 1,01325 bar y 0 °C 625
9. Viscosidad cinemática de algunos gases en función de la temperatura 626
10. Tablas de conversión de °E y segundos Redwood y Saybolt al SI 627
11. Curvas de saturación de algunas sustancias 628
12. Medida de caudales con diafragmas, toberas y tubos de Venturi normalizados 629
13. Solución de los problemas impares 633
14. Diagrama de Moody para hallar el coeficiente de pérdidas de carga λ en tuberías 639

BIBLIOGRAFIA 641

SELECCION DE REVISTAS 649

NORMAS DIN 650

INDICE ALFABETICO 651

Nomenclatura empleada

A	empuje ascensional, área
a	aceleración lineal
B, b	ancho de un canal, etc.
C	centro de presiones, constante de Chézy, constante general
C_c, C_q, C_v	coeficientes de contracción, de caudal y de velocidad
c	celeridad de la onda acústica o velocidad del sonido, velocidad absoluta
c_a	coeficiente de empuje ascensional
c_w	coeficiente de arrastre
D	desplazamiento
D, d	diámetro
E	empuje, energía, escala prototipo-modelo, módulo de elasticidad volumétrico
$°E$	grados Engler
E_p, E_v, E_z	energía de presión, cinética y de posición
Eu	número de Euler
e	excentricidad
e_p, e_v, e_z	energías específicas de presión, cinética y de posición
F	fuerza, superficie
F_i	fuerza de inercia
F_A	empuje hacia arriba
F_p	fuerza debida a la presión
Fr	número de Froude
f	frecuencia de la corriente
G	caudal másico, centro de gravedad, módulo de cizalladura
g	aceleración de la gravedad
g_n	aceleración de la gravedad normal o standard
H	altura total (constante de Bernoulli), altura efectiva (bomba), altura neta (turbina)
H_b	altura bruta, altura suministrada por una bomba a un fluido
H_d	altura dinámica
H_p	altura de presión
H_r	energía perdida por rozamiento
$H_{r\text{-ext}}$	pérdidas exteriores a una máquina
$H_{r\text{-int}}$	pérdidas interiores de una máquina
H_{rp}	pérdidas primarias
H_{rs}	pérdidas secundarias
$H_{r1\text{-}2}$	pérdidas por rozamiento entre las secciones 1 y 2
H_s	altura de suspensión o de succión

H_u	altura intercambiada en el rodete, altura teórica (bomba), altura útil (turbina)
h	altitud, altura piezométrica
I	momento de inercia
k	coeficiente geométrico de un perfil, rugosidad absoluta de una tubería
k_u	coeficiente de velocidad periférica de una turbina
L_e	longitud de tubería equivalente
L, l	longitud
l	cuerda en un perfil de ala, lectura de un manómetro
M	masa, metacentro, momento
Ma	número de Mach
M_m	momento motor
M_r	momento resistente
m	coeficiente de rugosidad, fórmula de Bazin
n	número de revoluciones, coeficiente de rugosidad (fórmulas de Kutter y Manning)
n_m	número de revoluciones en carga máxima
n_q	número específico de revoluciones en función del caudal
n_s	número específico de revoluciones en función de la potencia
n_v	número de revoluciones en marcha en vacío
n_{11}	número de revoluciones unitario
O	centro de gravedad del líquido desalojado
P	potencia útil (bomba), potencia teórica (turbina)
P_a	potencia en el eje
P_i	potencia interna
P_u	potencia intercambiada en rodete
P_h^r	potencia hidráulica perdida
P_m^r	potencia perdida en rozamientos mecánicos
P_v^r	potencia perdida por caudal intersticial
p	presión
p_a	presión absoluta
p_{amb}	presión ambiente o barométrica o atmosférica
p_e	presión excedente o relativa
p_i	presión indicada
p_m	presión media
p_s	presión de saturación del vapor
Δp_u	presión teórica ventilador
Δp_{tot}	presión total ventilador
Q	caudal volumétrico, calor
Q_i	caudal instantáneo
Q_t	caudal teórico
Q_{11}	caudal unitario
q_e, q_i	pérdidas exteriores e interiores de caudal
R	reacción
R, r	radio
R_a, R_i	constante del aire, de un gas cualquiera
Re	número de Reynolds
R_h	radio hidráulico
R_t	componente tangencial de la reacción
SI	sistema internacional de unidades
ST	sistema técnico de unidades

S_c	esfuerzo cortante
S.A.E.	Society of Automotive Engineers
s	carrera del émbolo
T	fuerza tangencial, periodo de un ciclo, temperatura absoluta
t	temperatura
T, t	tiempo
t_s	temperatura de saturación del vapor
u	energía interna específica, velocidad periférica
V	volumen
v	velocidad
v'	velocidad teórica
$\bar{v}$	valor medio temporal de la velocidad en un punto
v_∞	velocidad de la corriente imperturbada o velocidad en el infinito
$\bar{W}$	peso, arrastre, trabajo
We	número de Weber
w	velocidad relativa
x	abscisa de un punto
y	coordenada de un punto
z	altura geodésica, coordenada de un punto, número de dientes, número de pares de polos

Subíndices

b	bomba
m	modelo, motor
n	normal, standard
N	nominal
p	prototipo
t	turbina
	Además, subíndices E y S, entrada y salida de la máquina, respectivamente; subíndices 1 y 2, entrada y salida del rodete, respectivamente.

Letras griegas

α	aceleración angular, ángulo, coeficiente, constante
β	coeficiente, constante, ángulo
Γ	circulación
γ	peso específico
δ	densidad relativa, espesor de la capa límite, espesor de una tubería
ε	coeficiente de irregularidad, estatismo.
ε_c	deformación unitaria por esfuerzo cortante
ζ	coeficiente de pérdidas secundarias
ζ_t	coeficiente total de pérdidas
η	viscosidad dinámica
$\bar{\eta}$	viscosidad de remolino
η_h	rendimiento hidráulico
η_m	rendimiento mecánico
η_p	rendimiento propulsivo
η_{tot}	rendimiento total

η_v	rendimiento volumétrico
θ	ángulo
λ	coeficiente de pérdidas primarias, escala del prototipo con relación al modelo
ν	viscosidad cinemática
π	número π, plano
ρ	densidad absoluta
σ	coeficiente de cavitación de Thoma, tensión superficial, grado de reacción
τ	esfuerzo cortante, volumen
$\bar{\tau}$	esfuerzo cortante medio
υ	volumen específico
ϕ	ángulo, latitud
ω	área transversal, velocidad angular

INTRODUCCION

1. *Introducción a la Mecánica de los Fluidos*

1.1. OBJETO DE LA MECANICA DE FLUIDOS

En la formación del ingeniero mecánico, además de las *Matemáticas*, instrumento imprescindible de trabajo y de la *Física*, base de la ingeniería, han de intervenir las siguientes disciplinas fundamentales: *mecánica de los cuerpos rígidos, mecánica de los cuerpos deformables o resistencia de materiales, termodinámica, transmisión de calor y mecánica de fluidos.*

La *Mecánica de Fluidos* es la parte de la mecánica que estudia las leyes del comportamiento de los fluidos en equilibrio, *hidrostática*, y en movimiento, *hidrodinámica*.

En este libro se estudia sólo la mecánica de los fluidos *incompresibles*, aunque abreviadamente, como es costumbre, se la llama simplemente *Mecánica de Fluidos*. Se investigan las leyes fundamentales del equilibrio y movimiento de los fluidos, y se hace la síntesis de la teoría con la práctica, con acento en esta última por tratarse de una *Mecánica práctica de Fluidos*.

1.2. APLICACIONES DE LA MECANICA DE FLUIDOS

Los fluidos desempeñan un interés excepcional en la técnica y en primer lugar el *agua* y el *aire:* sin el estudio del primero no se puede dar un paso en la oceanografía, ingeniería naval, canalizaciones y conducciones hidráulicas, estrúcturas hidráulicas, aprovechamiento de la energía hidráulica, estaciones de bombeo, etc ; sin el estudio del segundo es imposible la aeronáutica, meteorología, refrigeración y aire acondicionado, control y transmisión neumática, aire comprimido, etc. Otros fluidos importantes son los combustibles (motores térmicos), los lubricantes (rendimiento mecánico de las máquinas), los refrigerantes fluidos, etc. En particular, he aquí algunas aplicaciones específicas de la *Mecánica de Fluidos:*

1.2.1. Máquinas de fluido

(Véanse Caps. 18 al 29.)

En las máquinas llamadas *motoras* se transforma la energía de un fluido en energía mecánica en el eje, para producir, por ejemplo, mediante un generador

acoplado, energía eléctrica. Así, *en una central hidroeléctrica*, una turbina hidráulica transforma la energía de posición del agua en energía eléctrica, y en *una central térmica una turbina de vapor, transforma también* la energía del vapor producido en una caldera por la combustión de otro fluido (gas-oil, fuel-oil, gas natural) en energía eléctrica. Análogamente, el motor Diesel en una *central Diesel-eléctrica*, etc.

Las máquinas *generadoras*, por el contrario, absorben energía mecánica e incrementan la energía del fluido. A este grupo pertenecen las bombas, ventiladores y compresores.

1.2.2. Redes de distribución

(Véanse Caps. 9 a 12.)

La llegada de los fluidos a los puntos de consumo (agua y gas natural, a las viviendas; gasolina y gas-oil, a las estaciones de servicio; aire comprimido en talleres y fábricas, etc.) se hace por complicadas redes de distribución (redes de agua, oleoductos, gasoductos, etc.), que presentan múltiples problemas, en cuanto a la selección de diámetros de tuberías y distribución de presiones y caudales, que tiene que resolver la *Mecánica de Fluidos*.

1.2.3. Regulación de las máquinas

(Véase Cap. 29.)

La regulación hidráulica o electrohidráulica de las turbinas hidráulicas y de vapor en las centrales hidroeléctricas y térmicas, la regulación de múltiples procesos industriales, etc., es otro campo muy relacionado con la *Mecánica de Fluidos*.

1.2.4. Transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos

(Véase Cap. 28)

La *Hidráulica* y *Neumática Industriales*, ramas de la *Mecánica de Fluidos* se ocupan del diseño y funcionamiento de los sistemas hidráulicos, servomotores, etc., que el automatismo utiliza junto con los controles electrónicos, etc.

La automatización de las máquinas herramientas, de cadenas de máquinas (máquinas «transfer») y de fábricas enteras emplea multitud de válvulas de variadísimas clases, de cilindros y motores rotativos, filtros, etc., de aceite y aire, así como sistemas completos, cuyo diseño, estabilidad y control constituyen hoy día una aplicación muy importante de la *Mecánica de Fluidos*.

1.2.5. Acoplamiento y cambio de marchas continuo

(Véase Cap. 24.)

El acoplamiento sin tirones en los autobuses urbanos, la transmisión automática de instalación frecuente en los coches, el accionamiento a velocidad regulable de ventiladores, bombas y compresores, en una palabra, la *solución fluida* de los problemas de embrague y cambio de marchas, constituye una aplicación interesante de la hidrodinámica.

Modernamente se abren nuevos campos de aplicaciones. Citemos sólo algún ejemplo:

- La *Fluídica* ha desarrollado nuevas técnicas de cálculo analógico y digital, sustituyendo en algunas aplicaciones las componentes electrónicas por componentes neumáticas y desarrollado nuevos elementos sensitivos de presión, temperatura, etc., amplificadores y elementos lógicos, de múltiples aplicaciones, por ejemplo, en las máquinas herramientas.
- La *Astronáutica*, con sus motores para la navegación espacial (cohetes de combustible sólido y líquido, etc.) y mecanismos de control y dirección (cohetes de dirección, etc.).

Las mismas leyes de la *Mecánica de Fluidos* rigen en un microcircuito amplificador fluídico que en una conducción forzada de una central hidroeléctrica de 6 m de diámetro; las mismas leyes rigen la transmisión de energía en la diminuta fresa de un dentista que gira a 500.000 rpm de una fracción de kW que en las gigantescas turbinas hidráulicas de más de 800.000 kW que actualmente se proyectan para la central Sayansk en la URSS.

1.3. RESUMEN HISTORICO DE LA MECANICA DE FLUIDOS

La *Mecánica de Fluidos* moderna nace con Prandtl, que en las primeras décadas del siglo actual elaboró la síntesis entre la *hidráulica* práctica y la *hidrodinámica* teórica.

Cinco matemáticos geniales del siglo XVIII, Bernoulli, Clairaut, D'Alembert, Lagrange y Euler habían elaborado con el naciente cálculo diferencial e integral una síntesis *hidrodinámica* perfecta; pero no habían obtenido grandes resultados prácticos. Por otra parte el *técnico hidráulico* fue desarrollando multitud de fórmulas empíricas y experiencias en la resolución de los problemas que sus construcciones *hidráulicas* le presentaban, sin preocuparse de buscarles base teórica alguna. Excepcionalmente un científico, Reynolds, buscó y halló apoyo experimental a sus teorías, y un técnico, Froude, buscó base física a sus experimentos; pero Prandtl hizo la síntesis de las investigaciones teóricas de los unos y de las experiencias de los otros.

Sin intentar hacer una historia de la *Mecánica de Fluidos*, como la escrita, por ejemplo, por Rouse (1), será interesante la lista que incluimos en la siguiente página, por orden cronológico (según fecha de muerte), de algunos hombres célebres con sus aportaciones más importantes a la hidráulica.

(1) H. Rouse y S. Ince, *History of Hydraulics*, 1963, Dover Publications, Inc., New York, 269 páginas.

	Nombre	*Fecha*	*Aportación a la hidráulica*
1.	Arquímedes	287-212 a. C.	Leyes de la *flotación* (Sec. 4.6).
2.	Leonardo da Vinci	1452-1519	*Ecuación de continuidad* (Sec. 5.3). Estudios sobre configuraciones de flujos. Sugerencias de diseños de máquinas hidráulicas.
3.	Torricelli	1608-1647	Salida por un orificio. Relación entre la altura y la presión atmosférica. (Sec. 6.2).
4.	Pascal	1623-1662	*Ley de Pascal*, fundamental en las transmisiones y controles hidráulicos (Cap. 28).
5.	Newton	1642-1726	Ley de la viscosidad dinámica (Sec. 2.4.1). *Semejanza de modelos* (Cap. 7).
6.	Bernoulli	1700-1782	*Teorema de Bernoulli* (Caps. 5 y 6).
7.	Euler	1707-1783	El mayor genio matemático de la hidrodinámica. Ecuaciones diferenciales del movimiento del fluido perfecto (Ecs. 5-15). Formulación del teorema de Bernoulli. Teorema fundamental de las turbomáquinas (Secs. 18.3 a 18.5).
8.	D'Alembert	1717-1783	Ecuación diferencial de continuidad. Paradoja de D'Alembert (Sec. 8.2).
9.	Chézy	1718-1798	Fórmula de Chézy de la velocidad media de la corriente en un canal (Sec. 10.3). Semejanza de modelos en canales.
10.	Lagrange	1736-1813	Función potencial y función de corriente.
11.	Venturi	1746-1822	Flujo en embocaduras y contracciones. Medidor de Venturi (Sec. 6.8.1.1.1).
12.	Fourneyron	1802-1867	Diseño primera turbina hidráulica práctica.
13.	Poiseuille	1799-1869	Resistencia en tubos capilares: ecuación de Poiseuille (Sec. 9.4.1).
14.	Weisbach	1806-1871	Fórmula de resistencia en tuberías (Sec. 9.3). Ecuaciones de vertederos.
15.	Froude	1810-1879	Ley de semejanza de Froude (Sec. 7.5).
16.	Navier y	1785-1836	
17.	Stokes	1819-1903	Ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes del movimiento de los fluidos viscosos (Sec. 5.11).
18.	Reynolds	1842-1912	Distinción entre flujo laminar y turbulento. Número de Reynolds (Secs. 8.6 y 8.7).
19.	Bazin	1829-1917	Estudios de vertederos.
20.	Joukowski	1847-1921	Estudio del golpe de ariete (Sec. 15.1). Perfiles aerodinámicos de Joukowski.
21.	Lanchester	1868-1945	Circulación causa de la sustentación. Torbellinos de herradura, causa del arrastre inducido.
22.	Prandtl	1875-1953	Teoría de la capa límite (Sec. 8.3). Fundador de la moderna mecánica de fluidos.

1.4. SISTEMAS DE UNIDADES. DIMENSIONES

Las leyes que rigen los fenómenos de la Física se expresan mediante ecuaciones entre magnitudes físicas, como la presión, viscosidad, etc., que es preciso medir. La medida es un número expresado en un *sistema de unidades*.

Si se escogen tres *magnitudes básicas o fundamentales* y se asigna una *unidad* a cada una de estas tres magnitudes, las restantes magnitudes se denominan *magnitudes derivadas* y se pueden expresar en función de las tres magnitudes fundamentales; así como sus unidades, se denominan *unidades derivadas* y pueden expresarse en función de las tres unidades fundamentales. Sólo tres magnitudes y unidades fundamentales son necesarias en *Mecánica de Fluidos*. A estas tres, como veremos, hay que añadir otras tres cuyo uso es exclusivo de la Electricidad, Optica, etc. La elección de las tres magnitudes fundamentales es arbitraria, y, escogidas éstas, la elección de las tres unidades fundamentales sigue siendo arbitraria.

Los dos *sistemas de unidades* más utilizados hasta el presente (2) en España, lo mismo que en los restantes países *métricos* (Rusia, República Federal Alemana, Francia, etc.) son:

1. *Sistema Giorgi* o *sistema MKS*. Magnitudes fundamentales: masa, *M*; longitud, *L*, y tiempo, *T*. Unidades fundamentales: *kilogramo*, *kg*; *metro*, *m*; y *segundo*, *s*.
2. *Sistema Técnico (ST)*. Magnitudes fundamentales: fuerza, *F*; longitud, *L*, y tiempo, *T*. Unidades fundamentales: *kilopondio*, *kp*; *metro*, *m*, y *segundo*, *s*.

Como se ve:

— La unidad de longitud es el metro en los dos sistemas.
— La unidad de tiempo es el segundo en los dos sistemas.

Los dos sistemas se diferencian esencialmente: el sistema Giorgi es un *sistema másico*, porque la masa en él es *magnitud fundamental* (mientras que la fuerza es *magnitud derivada)*; el sistema técnico es un *sistema gravitatorio*, porque la fuerza en él es *magnitud fundamental* (mientras que la masa *es magnitud derivada* (3).

1.5. EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES, SI

El *sistema internacional de unidades*, denominado actualmente en el mundo entero con las siglas SI, no es más que una extensión y perfeccionamiento del sistema Giorgi o MKS (4).

(2) El sistema cegesimal (C.G.S.) usado desde antiguo en la Física hasta el momento actual no es un sistema de unidades distinto del sistema Giorgi, porque sus unidades son submúltiplos de las de este último sistema.

(3) También los sistemas ingleses de unidades que se han empleado más frecuentemente son dos: un sistema másico (unidades fundamentales: libra masa, pie, segundo) y otro gravitatorio (unidades fundamentales: libra fuerza, pie, segundo).

(4) El nuevo sistema se empezó llamando MKS, luego MKSAKC (metro-kilogramo-segundo-Amperio-Kelvin-candela) para terminar llamándose universalmente *SI*.

El SI consta de siete magnitudes y siete unidades fundamentales, que se contienen en la siguiente tabla:

TABLA 1-1

MAGNITUDES Y UNIDADES FUNDAMENTALES EN EL SI

Magnitud fundamental	*Unidad fundamental*	
	Nombre	*Símbolo*
Masa	kilogramo	kg
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K (5)
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

En el estudio de la *Mecánica de Fluidos* sólo intervienen, como ya hemos dicho, las tres primeras magnitudes fundamentales, cuyas unidades respectivas pasamos a definir. Las restantes unidades, que intervienen en la *Mecánica de Fluidos*, son derivadas de estas tres fundamentales.

El *kilogramo* es la masa del prototipo internacional de platino iridiado, que se conserva en la Oficina Internacional en las condiciones fijadas en la I Conferencia General de Pesas y Medidas (1889).

El *metro* es la longitud igual a 1.650.763,73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de cripton 86 [XI C. G. P. M. (1960), Resolución 6].

El *segundo* es la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133 [XIII C. G. P. M. (1967), Resolución 1].

Las unidades derivadas se expresan convenientemente como producto de las unidades fundamentales elevadas a ciertos exponentes. A veces las unidades derivadas se expresan con nombres especiales.

La técnica para obtener estos productos de unidades fundamentales que integran una unidad derivada cualquiera consiste en despejar la unidad derivada en una ecuación física cualquiera, procediendo como se indica en los siguientes ejemplos:

Expresar la unidad de fuerza en el *SI*:

$$F = m\,a \qquad \text{(ecuación física: tercera ley de Newton)}$$

$$1\,F = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad SI$$

Esta ecuación simbólica se leerá así: *la unidad de fuerza en el SI es el* $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$. A esta unidad se la denomina con más frecuencia Newton *(N)* aunque la expresión en función de las unidades básicas es el $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$.

(5) En el *SI* no se dice grado Kelvin, sino simplemente Kelvin (símbolo K, no °K).

Expresar la unidad de presión en el *SI:*

$$p = \frac{F}{A} \qquad \text{(ecuación física: definición de la presión)}$$

$$1\,p = 1\,\frac{F}{\text{m}^2} = 1\,\frac{N}{\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

A esta unidad se la ha dado el nombre de Pascal *(Pa)*. La unidad coherente de presión se puede expresar de 3 maneras distintas:

$$1\ \text{Pascal}\ (Pa)$$

$$1\,\frac{\text{Newton}}{\text{metro}^2}\left(\frac{N}{\text{m}^2}\right)$$

$$1\,\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

La última expresión tiene la ventaja indudable de estar expresada en función de las tres unidades fundamentales.

1.6. ECUACION DE DIMENSIONES

En este libro se utilizará exclusivamente el *SI*, el cual es ya obligatorio en los principales países del área métrica y cuya adopción definitiva se prevé universal en el mundo entero. Sin embargo, hasta que este sistema se implante exclusivamente el paso de cualquier sistema de unidades al *SI* seguirá siendo tarea frecuente del Ingeniero.

Este paso es inmediato mediante la utilización de la *ecuación de dimensiones*, que es una ecuación simbólica, mediante la cual se expresan todas las magnitudes de la Física en función de tres magnitudes fundamentales cualesquiera elevadas a los respectivos exponentes. Nosotros utilizaremos como magnitudes fundamentales la masa M, longitud L y tiempo T, cuyas dimensiones son $[M]$, $[L]$ y $[T]$, respectivamente. La ecuación de dimensiones se obtiene a partir de cualquier ecuación física (dimensionalmente homogénea), en que figure la magnitud respectiva, como indica el siguiente ejemplo:

Escribir la ecuación de dimensiones del peso específico:

$$\gamma = \frac{W}{V} \qquad \text{(ecuación física: definición de peso específico: peso de un cuerpo } W \text{ dividido por el volumen que ocupa } V)$$

$$[\gamma] = \frac{[W]}{[V]} = \frac{[M][a]}{[L]^3} =$$

$$= \frac{[M][L]}{[T]^2[L]^3} = [M][L]^{-2}[T]^{-2} \qquad (1\text{-}1)$$

Explicación: el peso es una fuerza que, según la tercera ley de Newton, es igual a la masa por la aceleración. La masa es magnitud fundamental $[M]$

y la aceleración es igual a una longitud $[L]$ dividida por $[T]^2$. Asimismo el volumen es una magnitud derivada que es $[L]^3$.

Como se ve en este ejemplo, es preciso llegar paso a paso a expresar la dimensión derivada de que se trate, en este caso γ, en función de $[M]$, $[L]$ y $[T]$. Hay magnitudes, tales como la densidad relativa, que se definen como relación entre dos magnitudes que tienen las mismas dimensiones. Estas magnitudes carecen de dimensiones, es decir, son *magnitudes adimensionales.*

De esta manera se ha obtenido la ecuación de dimensiones de las restantes magnitudes que intervienen en la *Mecánica de Fluidos* y que pueden verse en la tabla 1-2.

TABLA 1-2

ECUACION DE DIMENSIONES EN FUNCION DE [M], [L] Y [T] Y UNIDADES EN EL SI QUE INTERVIENEN EN LA MECANICA DE FLUIDOS

Magnitud	*Símbolo*	*Ecuación de dimensiones en función de M, L y T*	*Unidad en el SI*
	Magnitudes fundamentales		
Masa	M, m	$[M]$	kg
Longitud	L	$[L]$	m
Tiempo	T	$[T]$	s
	Magnitudes geométricas		
Angulo	—	Adimensional	rad
Area	A	$[L]^2$	m^2
Momento 1.º de superficie	—	$[L]^3$	m^3
Momento 2.º de superficie	—	$[L]^4$	m^4
Volumen	V	$[L]^3$	m^3
	Magnitudes cinemáticas		
Aceleración angular	α	$[T]^{-2}$	rad/s^2
Aceleración lineal	a	$[L][T]^{-2}$	m/s^2
Caudal volumétrico	Q	$[L]^3[T]^{-1}$	m^3/s
Caudal másico	G	$[M][T]^{-1}$	$\frac{kg}{s}$
Velocidad angular	ω	$[T]^{-1}$	rad/s
Velocidad lineal	v	$[L][T]^{-1}$	m/s
Viscosidad cinemática	ν	$[L]^2[T]^{-1}$	m^2/s
	Magnitudes dinámicas		
Densidad	ρ	$[M][L]^{-3}$	$\frac{kg}{m^3}$
Densidad relativa	δ	Adimensional	—
Esfuerzo cortante	τ	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$	$P_a = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$
Fuerza	F	$[M][L][T]^{-2}$	$N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$
Impulso, cantidad de movimiento	I	$[M][L][T]^{-1}$	$N \cdot s = \frac{kg \cdot m}{s}$
Módulo de elasticidad	E	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$	$P_a = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$
Momento cinético	—	$[M][L]^2[T]^{-1}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s}$
Momento de inercia	I_x, I_y, I_o	$[M][L]^2$	$kg \cdot m^2$
Par	—	$[M][L]^2[T]^{-2}$	$m \cdot N = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Peso específico	γ	$[M][L]^{-2}[T]^{-2}$	$\frac{kg}{m^2 \cdot s^2} = \frac{N}{m^3}$
Potencia	P	$[M][L]^2[T]^{-3}$	$W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
Presión	p	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$	$Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$
Trabajo, energía	W, E	$[M][L]^2[T]^{-2}$	$N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Tensión superficial	σ	$[M][T]^{-2}$	$\frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$
Viscosidad dinámica	η	$[M][L]^{-1}[T]^{-1}$	$Pa \cdot s = \frac{kg}{m \cdot s}$

Nota. La ecuación de dimensiones puede expresarse también en función de F, L y T, sea cualquiera el sistema de unidades que se emplee (6).

El paso de una ecuación de dimensiones en función de M, L y T a otra en función de F, L y T es inmediato, si se tiene en cuenta que:

$$[M] = [F][L]^{-1}[T]^2$$

Así, por ejemplo, siendo

$$[\gamma] = [M][L]^{-2}[T]^{-2} \tag{1-1}$$

se tiene:

$$[\gamma] = [M][L]^{-2}[T]^{-2} = [F][L]^{-1}[T]^2[L]^{-2}[T]^{-2}$$

y finalmente

$$[\gamma] = [F][L]^{-3} \tag{1-2}$$

De la Ec. (1-1) se desprende que son unidades posibles de γ las siguientes: $1\ \frac{kg}{m^2 \cdot s^2}$ *(SI)*, $1\ \frac{U.T.M.}{m^2 \cdot s^2}$ *(ST)*, $1\ \frac{slug}{ft^2 \cdot s^2}$ (sistema inglés gravitatorio), $1\ \frac{gr}{cm^2 \cdot s^2}$, $1\ \frac{dgr}{m^2 \cdot h^2}$, $1\ \frac{ton}{Dgr^2 \cdot min^2}$, $1\ \frac{slug}{cm^2 \cdot h^2}$, etc. (cualquier unidad de masa partido por cualquier unidad de longitud al cuadrado y cualquier unidad de tiempo al cuadrado). Como se ve, cabe utilizar también un sistema de unidades híbrido,

(6) Sin embargo, en el *SI* no es recomendable elegir como dimensiones básicas para la ecuación de dimensiones F, L y T.

mezclando unidades inglesas y unidades métricas, aunque esto último no es en absoluto recomendable.

Asimismo de la Ec. (1-2) se desprende que son unidades posibles de γ las siguientes:

$$1\ \frac{N}{m^3}\left(=1\ \frac{kg}{m^2\cdot s^2}\ SI\right),\ 1\ \frac{kp}{m^3}\left(=1\ \frac{U.T.M.}{m^2\cdot s^2}\ ST\right),\ 1\ \frac{lb}{ft^3}\left(=1\ \frac{slug}{ft^2\cdot s^2}\right),\ \text{etc.}$$

1.7. CAMBIO DE UNIDADES

El paso de un sistema de unidades a otro cualquiera es inmediato utilizando la ecuación de dimensiones. Basta conocer la equivalencia de las unidades fundamentales del nuevo sistema con relación al antiguo.

Apliquemos este método, que tiene por lo demás validez general, al caso muy frecuente en este periodo de transición de un sistema a otro en que nos encontramos de pasar del *ST* o del sistema inglés gravitatorio al *SI*.

En el *ST* la unidad de masa es la U.T.M. Factor de conversión:

$$9{,}81\ \frac{kg}{U.T.M.} = 1$$

mientras que las unidades de longitud y tiempo, el m y el s, respectivamente, son las mismas que en el *SI*.

El factor de conversión de las unidades de fuerza en los dos sistemas es:

$$9{,}81\ \frac{N}{kp} = 1$$

En el sistema inglés las unidades de masa y longitud son el slug y el pie. Factores de conversión:

$$14{,}59\ \frac{kg}{slug} = 1$$

$$0{,}3048\ \frac{m}{ft} = 1$$

al *SI*; y al *ST*:

$$0{,}454\ \frac{kp}{lb} = 1$$

mientras que la unidad de tiempo es el s, en todos los sistemas mencionados.

Escribiendo ahora las unidades al lado de los números se hacen con ellas las mismas simplificaciones que con los números.

Ejemplo. La viscosidad dinámica del agua a 60° F (= 15,6° C) es

$$3{,}75\cdot 10^{-5}\ \frac{lb\ .\ s}{ft^2}$$

¿Cuál es la viscosidad del agua a la misma temperatura en el *ST* y en el *SI*?

En el ST

$$3{,}75\cdot 10^{-5}\ \frac{lb\cdot s}{ft^2} = 3{,}75\cdot 10^{-5}\ \frac{lb\cdot s}{ft^2}\cdot 0{,}454\ \frac{kp}{lb}\cdot\frac{1}{0{,}3048^2}\ \frac{ft^2}{m^2} =$$

$$= 1{,}833\cdot 10^{-4}\ \frac{kp\cdot s}{m^2}$$

En el SI

$$1{,}833\cdot 10^{-4}\ \frac{kp\cdot s}{m^2} = 1{,}833\cdot 10^{-4}\ \frac{kp\cdot s}{m^2}\cdot 9{,}81\ \frac{N}{kp} =$$

$$= 1{,}798\cdot 10^{-3}\ \frac{N\cdot s}{m^2} = 1{,}798\cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{m\cdot s}$$

Aunque la masa y la fuerza son cosas entre sí tan distintas como un automóvil y un frigorífico, la confusión de ambos conceptos al momento de resolver un problema numérico es muy frecuente en los principiantes

La raíz de esta confusión es que se ha utilizado un mismo standard para definir la unidad de masa en el sistema Giorgi, hoy *SI* y la unidad de fuerza en el *ST*: la unidad de masa en el *SI* es la masa del patrón parisino y la unidad de fuerza en el *ST* es el peso de este mismo patrón. La elección del patrón de fuerza fue desafortunada, porque la fuerza de la gravedad es variable de un punto a otro de la tierra y del espacio. Aunque esta ambigüedad se salvó especificando el peso del patrón de París en un lugar en que la aceleración de la gravedad es la gravedad standard (7), todo sistema gravitatorio sigue presentando esta incongruencia y los acuerdos últimos internacionales han dicho el no definitivo a los mismos. A aumentar la confusión contribuyó el hecho de haber utilizado el mismo nombre kg a las unidades de dos magnitudes totalmente distintas, aunque a una unidad se la llamase kg-masa y a la otra kg-fuerza. Por eso es preferible utilizar en vez del nombre kg-fuerza el de kilopondio, kp, reservando la palabra kilogramo para el kilogramo masa.

Para evitar confusiones, recomendamos vivamente la práctica que seguiremos en este libro en los problemas resueltos de introducir en toda ecuación los datos en unidades coherentes de un sistema, con lo cual la incógnita vendrá expresada en la unidad coherente del mismo sistema.

(7) Gravedad standard: *a*) aproximadamente la gravedad al nivel del mar y a una latitud de 45°; *b*) según norma DIN 1305: $g_n = 9{,}80665$ m/s². Si se quiere tener en cuenta su variación con la latitud (φ) y con la altitud sobre el nivel del mar (h) puede utilizarse la fórmula

$$g = 9{,}8060606 - 0{,}025027\cos 2\varphi - 0{,}000003\ h$$

Sustituyendo en esta ecuación las condiciones indicadas $h = 0$, $\varphi = 45°$ se obtiene $g = 9{,}781034$, valor un poco más bajo que g_n.

En particular, en el *ST* la unidad coherente de masa es la unidad derivada U.T.M. (Unidad Técnica de Masa) que es 9,81 veces mayor que la masa del kg patrón. Por tanto, si se opera en el *ST* y se da como dato la masa en kg, hay que dividir su valor con 9,81 al introducirlo en la ecuación, o bien si la incógnita es la masa y se han introducido previamente los datos en unidades coherentes del *ST* la incógnita vendrá expresada en U.T.M., que habrá que multiplicar por 9,81 si se desea su valor en kg.

Recomendamos vivamente el empleo exclusivo del *SI* para contribuir al abandono definitivo de las viejas unidades.

Para facilitar el paso de unidades del *ST* al *SI* y viceversa, así como el paso de unidades del sistema anglosajón, a los sistemas métricos *(ST* y *SI)* y viceversa, se han incluido las tablas de conversión de los Apéndices 1 y 3. En el Apéndice 2 se aducen los prefijos de los múltiplos y submúltiplos autorizados en el *SI*.

2. *Propiedades de los fluidos*

2.1. INTRODUCCION

Fluido es aquella sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene.

Una definición más rigurosa de fluido se da en la Sec. 2.4, en que se estudia la viscosidad.

Los fluidos se clasifican en líquidos y gases.

Los *líquidos* a una presión y temperatura determinadas ocupan un volumen determinado. Introducido el líquido en un recipiente adopta la forma del mismo, pero llenando solo el volumen que le corresponde. Si sobre el líquido reina una presión uniforme, por ejemplo, la atmosférica, el líquido adopta, como veremos, una superficie libre plana, como la superficie de un lago o la de un cubo de agua.

Los *gases* a una presión y temperatura determinada tienen también un volumen determinado, pero puestos en libertad se expansionan hasta ocupar el volumen completo del recipiente que lo contiene, y no presentan superficie libre.

En resumen: los *sólidos* ofrecen gran resistencia al cambio de forma y volumen; los *líquidos* ofrecen gran resistencia al cambio de volumen, pero no de forma; y los *gases* ofrecen poca resistencia al cambio de forma y de volumen.

Por tanto, el comportamiento de líquidos y gases es análogo en conductos cerrados (tuberías); pero no en conductos abiertos (canales), porque solo los líquidos son capaces de crear una superficie libre.

En general los sólidos y los líquidos son poco compresibles y los gases muy compresibles; pero ningún cuerpo (sólido, líquido o gaseoso) es estrictamente incompresible

Sin embargo, aunque el fluido incompresible no existe en la realidad

> *Hay innumerables problemas que se resuelven aceptablemente en ingeniería, suponiendo que el fluido es incompresible. Estos problemas se estudian en la mecánica de fluidos incompresibles.*
>
> *Los restantes problemas forman la mecánica de fluidos compresibles y se estudian en la termodinámica.*

Todos los líquidos pertenecen a la primera clase. Los gases generalmente a la segunda; pero en los gases también, si las variaciones de presión que entran en juego son pequeñas, por ejemplo inferiores a 100 m bar (1), el gas puede consi-

(1) Las unidades de presión se definirán en el capítulo siguiente.

derarse también como incompresible: así un *ventilador*, que comprime aire a 10 m bar sobre la presión atmosférica, es una máquina que se estudia en la mecánica de fluidos incompresibles. Por el contrario un *compresor*, que comprime aire a 7 bar por encima de la presión atmosférica, es una máquina en que los efectos de la compresibilidad no pueden despreciarse: es una máquina térmica. Este libro es una mecánica de fluidos incompresibles, en que los líquidos y gases se suponen incompresibles, excepto en algún caso (véase Sec. 15.1) en que expresamente se advertirá lo contrario.

En este capítulo se estudian las propiedades del fluido, excepto la presión, a la que por su importancia se consagrará íntegro el capítulo siguiente.

2.2. DENSIDAD ESPECIFICA O ABSOLUTA, PESO ESPECIFICO Y DENSIDAD RELATIVA

Estos cuatro parámetros no constituyen propiedades distintas, sino cuatro expresiones distintas de la misma propiedad.

2.2.1. Densidad específica o absoluta

La densidad es la masa por unidad de volumen,

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2-1}$$

donde m — masa en kg, *SI*.
V — volumen en m^3, *SI*.

La densidad absoluta es función de la temperatura y de la presión. La densidad de algunos líquidos en función de la temperatura puede verse en el Apéndice 4. La variación de la densidad absoluta de los líquidos es muy pequeña, salvo a muy altas presiones y para todos los cálculos prácticos de este libro esta pequeña variación puede despreciarse.

Ecuación de dimensiones: $[\rho] = [M][L]^{-3}$

Unidad en *SI*:

$$1\ \rho = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Factor de conversión del *ST* al *SI* y viceversa:

$$9{,}81\ \frac{\text{kg/m}^3}{\text{kp} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4} = 1$$

La densidad del agua destilada a la presión atmosférica de 4° C es máxima e igual aproximadamente (2) a:

$$\rho = 1.000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

2.2.2. Peso específico

Peso específico es el peso por unidad de volumen,

$$\gamma = \frac{W}{V} \tag{2-2}$$

donde W — peso en N, *SI*.
V — volumen en m^3, *SI*.

El peso específico es función de la temperatura y de la presión aunque en los líquidos no varía prácticamente con esta última.

Ecuación de dimensiones:

$$[\gamma] = \frac{[W]}{[V]} = [F][L]^{-3} = [M][L]^{-2}[T]^{-2}$$

Unidad en el *SI*:

$$1\gamma = \frac{1\ \text{N}}{\text{m}^3} = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}$$

Factor de conversión del *ST* al *SI* y viceversa:

$$9{,}81\ \frac{\text{N/m}^3}{\text{kp/m}^3} = 1$$

Como $W = m \cdot g$, de las Ecs. (2-2) y (2-1) se deduce que

$$\gamma = \rho g \tag{2-3}$$

(2) Exactamente la densidad del agua es máxima a 3,98° C. Primitivamente el kg patrón se construyó igual a la masa de agua de 1 dm^3 a p = 760 Torr y t = 4° C. Posteriormente se fijó el kg como la masa del kg patrón. Teniendo esto en cuenta y realizadas mediciones más exactas la densidad de referencia es

$$\rho_{H_2O(760\ \text{Torr},\ 3.98^\circ\ \text{C})} = 999{,}972\ \text{kg/m}^3$$

2.2.3. Densidad relativa

Densidad relativa es la relación entre la masa del cuerpo a la masa de un mismo volumen de agua destilada a la presión atmosférica y 4° C. En virtud de la Ec. (2-3), esta relación es igual a la de los pesos específicos del cuerpo en cuestión y del agua en las mismas condiciones. Es evidente que la densidad relativa es una magnitud *adimensional.*

La densidad relativa es función de la temperatura y de la presión.

He aquí la densidad relativa de algunos *líquidos* más interesantes para la técnica.

TABLA 2-1

DENSIDAD RELATIVA δ DE ALGUNOS LIQUIDOS

Líquido	*Densidad relativa*	*t °C*
Agua dulce	1,00	4
Agua de mar	1,02-1,03	4
Petróleo bruto ligero	0,86-0,88	15
Petróleo bruto medio	0,88-0,90	15
Petróleo bruto pesado	0,92-0,93	15
Keroseno	0,79-0,82	15
Gasolina ordinaria	0,70-0,75	15
Aceite lubricante	0,89-0,92	15
Fuel-oil	0,89-0,94	15
Alcohol sin agua	0,79-0,80	15
Glicerina	1,26	0
Mercurio	13,6	0

En la lectura de precisión de manómetros y barómetros de mercurio es útil la tabla siguiente:

TABLA 2-2

DENSIDAD DEL MERCURIO A DIVERSAS TEMPERATURAS

Temperatura (°C)	ρ (kg/m³)	*Temperatura* (°C)	ρ (kg/m³)
−10	13620,2	90	13376
0	13595,5	100	13351,8
10	13570,8	120	13304,4
20	13546,2	150	13233,0
30	13521,7	200	13114,8
40	13497,3	250	12997,5
50	13472,9	300	12880,6
60	13448,6	350	12763,8
70	13424,3	360	12740,5
80	13400,1		

La *densidad relativa del agua* a una temperatura determinada es la densidad absoluta del agua a esa misma temperatura dividida por la densidad del agua a 4° C (densidad máxima). Como el agua caliente interviene a veces en los problemas (bombeo del agua de alimentación de una central térmica; véase además Sec. 19.12.1) será útil la tabla 2-3, en la que figura la densidad absoluta del agua a diversas temperaturas.

TABLA 2-3

DENSIDAD, VISCOSIDAD DINAMICA Y CINEMATICA DEL AGUA EN FUNCION DE LA TEMPERATURA

Temperatura (°C)	*Densidad* (kg/m³)	*Viscosidad dinámica* η (10^5 kg/m · s)	*Viscosidad cinemática* ν $10^6 \frac{m^2}{s}$ = cSt
0	999,8	178,7	1,787
2	999,9	167,1	1,671
4	1.000	156,2	1,562
6	999,9	146,4	1.464
8	999,8	137,6	1,375
10	999,7	130,5	1,307
12	999,4	122,6	1,227
14	999,2	116,1	1.163
16	998,9	110,4	1,106
18	998,5	105,2	1,053
20	998,2	100,2	1,0038
22	997,7	95,5	0,957
24	997,2	91,1	0,914
26	996,6	87,2	0,875
28	996,1	83,4	0,837
30	995,7	79,7	0,801
32	994,9	76,4	0,768
34	994,2	74,1	0,745
36	993,4	70	0,705
38	992,8	68	0,685
40	992,2	65,3	0,658
45	990,2	59,8	0,604
50	988	54,8	0,554
55	985,7	50,5	0,512
60	983,2	46,7	0,475
65	980,6	43,4	0,443
70	977,8	40,4	0,413
75	974,8	37,8	0,388
80	971,8	35,5	0,365
85	968,6	33,4	0,345
90	965,3	31,5	0,326
95	961,8	29,8	0,310
100	958,4	28,2	0,295
150	916,9	18,6	0,205
200	864,6	13,6	0,161
250	799,2	10,9	0,14
300	712,4	8,91	0,132

Los datos anteriores corresponden a la presión atmosférica. La densidad relativa del agua, como la de los demás líquidos varía también con la presión (aunque en comparación con los gases los líquidos son prácticamente incompresibles): así la densidad relativa del agua a 0° C y 500 bar es 1,0239 y a 0° C también y 1.000 bar es 1,0455.

(Véase el problema 2-1 al final del capítulo.)

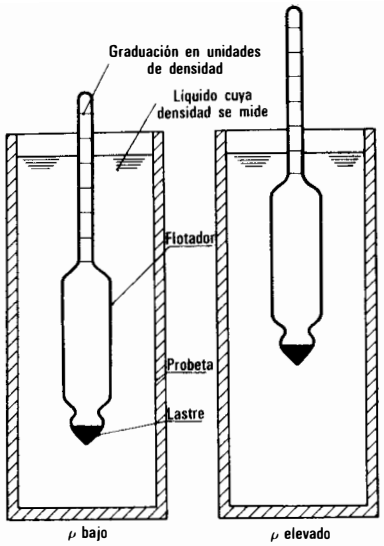


FIG. 2-1. *Densímetro.*

La densidad de un líquido se mide muy fácilmente con el densímetro. Este consiste en un flotador lastrado de peso W (Fig. 2-1), que se sumerge en una probeta llena del líquido, cuya densidad se quiere medir. Se basa en el principio de Arquímedes (Sec. 4.6). El flotador se hundirá más en el líquido de menor densidad y desalojará más líquido. Según la primera ley de Newton, el peso P del líquido desalojado por el flotador (igual al empuje hacia arriba, según el principio de Arquímedes) deberá ser igual al peso del flotador, W.

Se tiene, pues:

$$P = \rho g V$$

donde P — peso del líquido desalojado por el flotador
ρ — densidad del líquido
V — volumen del líquido desalojado

$$P = W \qquad \text{(condición de equilibrio)}$$

$$W = \rho g V$$

$$\rho = \frac{W}{gV} = \frac{m}{V}$$

m es la masa del flotador, una constante del aparato, y V el volumen desalojado correspondiente a la división de la varilla del flotador, que enrasa con el líquido. Como m es constante, estas divisiones pueden estar ya graduadas directamente en densidades. Para crear una gran variación de inmersión para pequeñas variaciones de densidad y hacer así el instrumento más *sensible*, se procura que los cambios de inmersión en el flotador tengan lugar en la varilla delgada graduada.

2.2.4. Volumen específico

El *volumen específico* se define de distinta manera en el *SI* y en el *ST*. En nuestro *SI* volumen específico es el recíproco de la densidad absoluta:

$$\boxed{v = \frac{1}{\rho}} \qquad (2\text{-}4)$$

o sea, el volumen que ocupa 1 kg de masa de la sustancia.
Ecuación de dimensiones en el *SI:*

$$[v] = [L]^3[M]^{-1}$$

Unidad en *SI:*

$$1\,v = 1\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Así el volumen específico del agua destilada a la presión atmosférica y 4° C es aproximadamente igual a $10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$. Es interesante observar que la densidad del aire a la presión atmosférica y 4° C es aproximadamente 1,3 kg/m^3 y su volumen específico es 1/1,3 m^3/kg; es decir, 1 kg de aire a la presión atmosféri a ocupa aproximadamente 800 veces más espacio que 1 kg de agua.

(Véase el problema 2-1 al final del capítulo.)

En el *ST* volumen específico es el recíproco del peso específico:

$$v = \frac{1}{\gamma}$$

$$1v = 1\,\frac{\text{m}^3}{\text{kp}} \qquad ST$$

El volumen específico, como todas las magnitudes específicas (energía interna, entalpía, etc., en termodinámica), se han de referir en el *SI*, que es un sistema másico, a la unidad de masa, el kg; mientras que en el *ST*, que es un sistema gravitatorio, las mismas magnitudes específicas se han de referir a la unidad de peso, el kp.

Nótese, sin embargo, que siendo 1 kp el peso de 1 kg, los *valores numéricos* de v coinciden en ambos sistemas de unidades, pero expresados en unidades diferentes (m^3/kg en *SI* y m^3/kp en *ST*). Asimismo, el valor numérico de γ en el *ST* es igual al valor numérico de ρ en el *SI*; pero el valor numérico de ρ en el *ST* no es igual al valor numérico de γ en el *SI*, como es fácil de comprobar.

2.3. COMPRESIBILIDAD

En los fluidos lo mismo que en los sólidos se verifica la ley fundamental de la elasticidad:

El esfuerzo unitario es proporcional a la deformación unitaria.

En nuestro caso, el esfuerzo unitario considerado es el de compresión, Δp; la deformación unitaria es la deformación unitaria de volumen $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta v}{v}$. Por tanto, la ley anterior se traduce en la fórmula siguiente:

$$\Delta p = -E \frac{\Delta v}{v} \tag{2-5}$$

donde Δp — esfuerzo unitario de compresión, $\frac{N}{m^2}$, *SI* (véanse unidades de presión en Cap. 3).

v — volumen específico, m^3/kg, *SI*.

Δv — incremento de volumen específico, m^3/kg, *SI*.

E — módulo de elasticidad volumétrica, $\frac{N}{m^2}$, *SI*.

El signo − expresa que a un incremento de presión corresponde un decremento (o menos incremento) de volumen.

Para el agua $E \simeq 20.000$ bar $= 20.000 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$.

Al aumentar la temperatura y la presión aumenta también E.

2.4. VISCOSIDAD

2.4.1. Viscosidad dinámica

Un sólido puede soportar *esfuerzos normales* (llamados así porque la fuerza es normal al área que resiste a la deformación) de dos clases: de compresión y de tracción. Un líquido puede soportar esfuerzos de compresión (Sec. 2.3); pero no de tracción (véase Sec. 3.1). Los sólidos y fluidos pueden estar sometidos también a *esfuerzos cortantes* o *esfuerzos tangenciales*. En ellos la fuerza es paralela al área sobre la que actúa. Todos los cuerpos se deforman bajo la acción de las fuerzas tangenciales a que están sometidos. En los cuerpos *elásticos* la deformación desaparece cuando deja de actuar la fuerza. En la deformación plástica subsiste la deformación aunque desaparezca la fuerza deformadora.

En los fluidos la deformación aumenta constantemente bajo la acción del esfuerzo cortante, por pequeño que éste sea.

En efecto: supongamos (Fig. 2-2) un elemento *ABCD* de forma rectangular en un cuerpo *sólido* sujeto a un esfuerzo cortante. Si el elemento estuviera sujeto

a tracción experimentaría un aumento de longitud, pero el elemento de la figura, sujeto a un esfuerzo cortante, sufre un cambio de forma del rectángulo *ABCD*

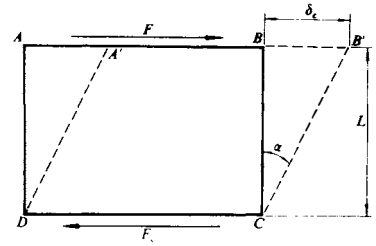


FIG. 2-2. Un cuerpo sólido *ABCD* sometido a un esfuerzo cortante se deforma pasando a ser *A'B'CD*. La tangente del ángulo α es la *deformación unitaria*.

al paralelogramo *A'B'CD*. Se llama deformación unitaria por esfuerzo cortante a la expresión:

$$\varepsilon_c = \frac{\delta_c}{L} = \text{tg } \alpha$$

A la Ec. (2-5) corresponde en el esfuerzo cortante la ecuación:

$$S_c = G \varepsilon_c \tag{2-6}$$

donde $S_c = \frac{F_c}{A}$ (Fig. 2-2) — esfuerzo cortante o esfuerzo de cizalladura, Pa, *SI*.

G — módulo de cizalladura, Pa, *SI*.

ε_c — deformación unitaria por cizalladura, adimensional.

Si suponemos que G es constante, la Ec. (2-6) nos dice que dada una fuerza F, por ejemplo, de 5 N aplicada a un cuerpo sólido el cuerpo sufre una deformación ε_c dada por la Ec. (2-6). Esta deformación crea una fuerza F_c igual y de sentido contrario y el cuerpo queda en equilibrio: *la deformación no sigue aumentando*. Por el contrario, *un fluido sometido a un esfuerzo cortante se deforma continuamente*.

Entre las moléculas de un fluido existen fuerzas moleculares que se denominan fuerzas de *cohesión*. Al desplazarse unas moléculas con relación a las otras se produce a causa de ellas una fricción. Por otra parte, entre las moléculas de un fluido en contacto con un sólido y las moléculas del sólido existen fuerzas moleculares que se denominan fuerzas de *adherencia*. El coeficiente de fricción interna del fluido se denomina *viscosidad* y se designa con la letra η.

El estudio de la viscosidad y de sus unidades se hace convenientemente mediante la ley de Newton, que cumplen los fluidos llamados newtonianos (entre los cuales se encuentran muchos de los fluidos técnicamente más importantes como el agua, aire, etc.).

Supongamos una capa de fluido newtoniano de espesor y_0 comprendido entre dos placas planas paralelas, la inferior fija y la superior libre. Sobre la placa superior actúa una fuerza tangencial constante F. La experiencia enseña que la placa se desplaza paralelamente a sí misma con una velocidad v_0 (Fig. 2-3).

Dividamos mentalmente el film de fluido en capas infinitesimales paralelas a las placas de espesor dy. La experiencia confirma que en virtud de la adherencia la capa de fluido contigua a la placa inferior fija se mantiene en reposo, y la capa de fluido en contacto con la placa superior móvil se pone en movimiento con la misma velocidad v_0 que la placa.

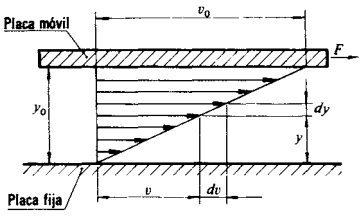


FIG. 2-3. Fluido comprendido entre dos placas paralelas, de las cuales la inferior es fija. La placa superior se mueve al estar sometida a una fuerza F paralela a las placas, por pequeña que sea la fuerza. El fluido, en contraposición con el sólido, no puede soportar esfuerzo tangencial alguno.

Las capas intermedias deslizan unas sobre otras como deslizan las hojas de un libro colocado horizontalmente sobre la mesa al aplicar sobre la hoja superior una fuerza también horizontal. Para mantener fija la placa inferior es menester aplicar una fuerza $-F$.

La ley experimental descubierta por Newton que rige este fenómeno afirma que la fuerza F es proporcional a la superficie A de la placa en movimiento, al gradiente de velocidad y a un coeficiente η, que se denomina *viscosidad absoluta* o *viscosidad dinámica:*

$$F = A\eta \frac{dv}{dy} \tag{2-7}$$

o bien siendo, por definición, $\frac{F}{A}$ el esfuerzo unitario cortante, que llamaremos τ:

$$\boxed{\tau = \eta \frac{dv}{dy}} \tag{2-8}$$

La Ec (2-8) se cumple en todos los fluidos newtonianos. En algunos fluidos, como en el de la Fig. 2-3, $\frac{dv}{dy}$ es constante a lo largo de y, o lo que es lo mismo se da una distribución lineal de velocidades (los extremos de los vectores velocidad se encuentran en una línea recta).

En el caso particular de la Fig. 2-3 $v_0/y_0 = dv/dy$, con lo que de la Ec. (2-7) se obtiene:

$$\eta = \frac{Fy_0}{Av_0} \tag{2-9}$$

En esta ecuación y en la Ec. (2-8) se advierte que:

a) En un mismo fluido (η = cte.) si la fuerza aumenta, aumenta la velocidad con que se mueve la placa.

b) Una fuerza por pequeña que sea produce siempre un gradiente de velocidad, determinado por la Ec. (2-7), o lo que es lo mismo:

Un fluido no ofrece resistencia a la deformación por esfuerzo cortante. Esta es la característica que distingue esencialmente un fluido de un sólido.

— En un *sólido rígido*, $\eta = \infty$, porque el cuerpo sólido rígido es capaz de resistir al esfuerzo cortante sin que se origine un gradiente de velocidades en su interior (deslizamiento de unas capas del cuerpo con relación a las otras), es decir, $\frac{dv}{dy} = 0$.

— En un *fluido ideal*, $\eta = 0$.

— En un *fluido real* la viscosidad dinámica tiene un valor finito distinto de cero.

— Cuanto mayor sea η, mayor será la fuerza necesaria para mover la placa de la Fig. 2-3 a una cierta velocidad v_0 y el líquido será más viscoso.

— La viscosidad produce una resistencia, que se llama *resistencia a la deformación*, o resistencia a que unas capas de fluido resbalen sobre las otras y, por tanto, una pérdida de energía en la corriente, cuyo estudio constituye una parte muy importante de la mecánica de fluidos (Caps. 8 a 13).

— En el *fluido ideal* no existe resistencia alguna. Como veremos en los fluidos muy poco viscosos (entre los cuales se encuentran los dos fluidos técnicamente más importantes: el aire y el agua), la *resistencia a la deformación* en el interior del fluido es muy pequeña, pero la viscosidad se hace sentir intensamente en la capa contigua al fluido, donde $\frac{dv}{dy}$ es muy grande. La resistencia en esa capa límite (véase la Sec. 8.3) se denomina *resistencia de superficie*. El lector deberá distinguir atentamente entre estos dos tipos de resistencia y recordar sus nombres: *resistencia a la deformación* y *resistencia de superficie* (3).

— En los fluidos en reposo $v = 0$, $\frac{dv}{dy} = 0$ y $\tau = 0$. El esfuerzo cortante es nulo y el único esfuerzo existente es el normal o presión. Esto simplifica enormemente el estudio de la hidrostática. *El fluido real en reposo se comporta exactamente como un fluido ideal* ($\eta = 0$). Las únicas fuerzas que actúan sobre un fluido en reposo son la gravedad en dirección vertical y la presión en dirección normal a la superficie considerada.

(3) Al moverse un contorno (perfil de ala de avión, por ejemplo) en un fluido viscoso o al moverse un fluido viscoso en el interior de un contorno fijo (una tubería, por ejemplo) se produce una *deformación* por esfuerzo cortante en toda la distribución de velocidades del fluido. De ahí el nombre de *resistencia a la deformación*. Si el fluido es muy poco viscoso esta *deformación* y, por tanto, este tipo de resistencia, solo se hace sentir en un «film» delgado, como si dijéramos en un pellejo fino adherido al cuerpo. De ahí el nombre de «skin friction» con que se conoce este tipo de rozamiento en la literatura inglesa.

La viscosidad, como cualquiera otra propiedad del fluido, depende del estado del fluido caracterizado por la presión y la temperatura.

Fluidos newtonianos y no newtonianos

Fluido newtoniano es aquel fluido, cuya viscosidad dinámica η depende de la presión y de la temperatura, pero no del gradiente de velocidad $\frac{dv}{dy}$. Fluidos newtonianos son el agua, el aire, la mayor parte de los gases y en general los fluidos de pequeña viscosidad.

La ciencia de los fluidos no newtonianos, a los cuales pertenecen las grasas, materiales plásticos, metales líquidos, suspensiones, la sangre, etc., se llama *reología*

Ecuación de dimensiones: $[\eta] = [F][T][L]^{-2} = [M][L]^{-1}[T]^{-1}$.

Unidades: Es muy corriente expresar la viscosidad dinámica en el *sistema cegesimal* (C.G.S.)

$$1\ \eta = 1\ \frac{\text{dina} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}} = 1\ \text{P} \qquad \text{(C.G.S.)}$$

(léase Poise, nombre derivado del físico Poiseuille).

También se emplea el submúltiplo 1 cP (léase centipoise) = 10^{-2} P.

Tanto el P como el cP son submúltiplos de la unidad de η en el *SI* y pueden seguir empleándose; aunque los nombres mismos hayan sido desterrados del *SI* y no se deben seguir utilizando. Se tiene

$$1\ \eta = 1\ \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1\ \text{Pa} \cdot \text{s} =$$

$$= 1\ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \qquad \text{(expresión en las unidades fundamentales) } SI$$

$$1\ \text{cP} = 10^{-2}\ \text{P} = 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Factor de conversión del *ST* al *SI* y viceversa

$$9{,}81\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{kp} \cdot \text{s/m}^2} = 1$$

2.4.2. Viscosidad cinemática

En hidrodinámica intervienen junto con las fuerzas debidas a la viscosidad las fuerzas de inercia, que dependen de la densidad. Por eso tiene un significado importante la viscosidad dinámica referida a la densidad, o sea la relación de la viscosidad dinámica η a la densidad ρ, que se denomina *viscosidad cinemática*.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad (2\text{-}10)$$

TABLA 2-4

PROPIEDADES DEL AIRE SECO A 1,01325 BAR

Temperatura t (°C)	*Viscosidad dinámica* $\eta \cdot 10^{-6}$ (Ns/m²)	*Viscosidad cinemática* $\nu \cdot 10^{-6}$ (m²/s)
0	17,16	13,28
10	17,68	14,18
20	18,19	15,10
30	18,67	16,03
40	19,15	16,98
50	19,62	17,94
60	20,08	18,92
80	20,98	20,92
100	21,85	23,04
200	25,87	34,65
300	29,60	48,00
400	33,00	62,90
500	36,20	79,20

Ecuación de dimensiones $[\nu] = [L]^2[T]^{-1}$.

Unidad: $1\ \nu = 1\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ *SI.*

En la práctica se ha utilizado mucho más el Stoke (St) = 1 cm²/s, en honor de Stokes (pág. 4, núm. 17)

$$1\ \text{St} = 10^{-4}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

También se ha utilizado mucho el centistoke (cSt), 1 cSt = 10^{-2} St. El St y cSt son submúltiplos de la unidad coherente del *SI* y pueden seguir empleándose, aunque no se utilicen los mismos nombres:

$$1\ \text{cSt} = 10^{-2}\ \text{St} = 10^{-6}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

La *viscosidad dinámica* de los fluidos varía mucho con la temperatura, aumentando con la temperatura en los gases y disminuyendo en los líquidos; pero en unos y otros prácticamente es independiente de la presión. Por el contrario, la *viscosidad cinemática* de los gases varía mucho con la presión y la temperatura, mientras que la de los líquidos prácticamente solo varía con la temperatura.

En la tabla 2-3 pueden verse los valores de η y ν para el agua a distintas temperaturas y asimismo para el aire a la presión normal en la tabla 2-4 y los de ν para algunos líquidos industriales más frecuentes en la tabla 2-5; mientras que en los Apéndices 5 a 9 pueden verse los valores de η y ν de diversos líquidos y gases en función de la temperatura.

Comparando la viscosidad dinámica del agua y del aire en el mismo estado, por ejemplo, a 20° C y 1,0 bar se observan los valores siguientes:

aire seco: $\eta = 18{,}19 \cdot 10^{-6}$ (Pa · s)
agua: $\eta = 1.002 \cdot 10^{-6}$ (Pa · s)

UNIVERSITARIA BIBLIOTECA

TABLA 2-5

VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS LIQUIDOS INDUSTRIALES

Líquido	t (°C)	$\nu \cdot 10^{-4}$ (m^2/s)
Gasolina corriente	18	0,0065
Agua dulce	20	0,0101
Alcohol sin agua	18	0,0133
Mercurio	20	0,0157
Petróleo ligero	18	0,2500
Petróleo pesado	18	1,4000
Aceite lubricante	20	1,7200

Asimismo, comparando sus viscosidades cinemáticas en el estado anteriormente indicado, se tiene:

$$\text{aire seco:} \quad \nu = 15{,}1 \cdot 10^{-6} \ (m^2/s)$$
$$\text{agua:} \quad \nu = 1{,}01 \cdot 10^{-6} \ (m^2/s)$$

Es interesante observar que la viscosidad cinemática del aire en el mismo estado es aproximadamente 15 veces superior a la del agua; aunque la viscosidad dinámica del aire en el mismo estado es más de 55 veces inferior a la del agua (4).

2.4.3. Unidades no coherentes de la viscosidad

Desgraciadamente se utilizan mucho en la práctica otras *unidades empíricas* de la viscosidad, que no se expresan en función de las unidades fundamentales. Las principales son los *grados Engler*, muy utilizados en Alemania, Rusia, España y otros países; los *segundos Redwood*, utilizados en la Gran Bretaña, y los *segundos Saybolt*, de uso frecuente en Estados Unidos.

Solo explicaremos el significado de los *grados Engler (°E)*, cuya definición se basa en el *viscosímetro Engler*, por ser el más utilizado en nuestra patria. Los segundos Redwood y Saybolt y sus viscosímetros respectivos tienen análogo significado

$$°E = \frac{\text{Tiempo de vaciado de 200 cm}^3 \text{ del fluido en cuestión}}{\text{Tiempo de vaciado de 200 m}^3 \text{ de agua a 20° C}} \qquad (2\text{-}11)$$

El *viscosímetro Engler* (Fig. 2-4) consta de un recipiente cilíndrico de latón de 106 mm de diámetro interior y de fondo esférico, que desagua por un tubo de 2,9 mm de diámetro y 200 de longitud, que se cierra mediante un obturador. El recipiente se llena del líquido cuya viscosidad se quiere medir hasta una señal y se mantiene a temperatura constante en baño de María; a continuación se levanta el obturador y se cronometra el tiempo necesario para evacuar 200 cm^3 de líquido. Todas las dimensiones del viscosímetro anteriormente indicadas están

(4) Posteriormente se verá (Sec. 7.6) que el parámetro que determina el influjo de la viscosidad en un fenómeno no es η, ni siquiera $\eta/\rho = \nu$, sino el número de Reynolds, en que aparece ν como el factor más significativo.

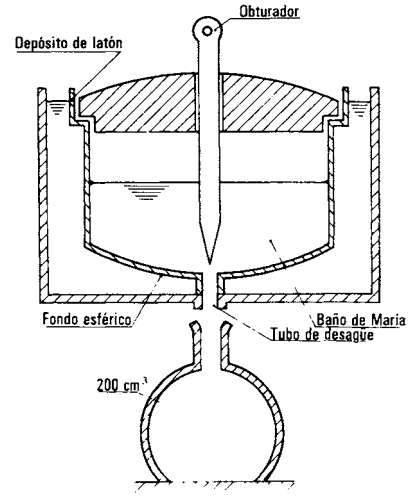


FIG. 2-4. El *viscosímetro Engler* mide la viscosidad de un líquido en grados Engler, cronometrando el tiempo que se tarda en vaciar un recipiente lleno de líquido.

normalizadas. El resultado de la medida se expresa en *grados Engler*, °*E*, que se define, según la Ec. (2-11), como la relación entre los tiempos necesarios para evacuar 200 cm^3 de líquido y el mismo volumen de agua a 20° C (48,51 s).

La viscosidad cinemática tiene las dimensiones $[L]^2[T]^{-1}$ y el °E es adimensional. Se trata, pues, de una unidad empírica, basada en un fenómeno (vaciado de un depósito) que es función de la viscosidad. Los °E no pueden utilizarse directamente en una fórmula física, sino que han de transformarse previamente en un sistema coherente de unidades, mediante una fórmula empírica como la propuesta por Ubbelohde:

$$\nu = \left(0{,}0731 \ °E - \frac{0{,}0631}{°E}\right) \ cm^2/seg \qquad (2\text{-}12)$$

El coche americano ha popularizado en el mundo la nomenclatura S. A. E. (Society of Automotive Engineers). La siguiente tabla de equivalencia se refiere a los aceites de engrase y es válida para 50° C. Como se verá hay una tolerancia en el uso de estos aceites:

TABLA 2-6

SAE:	10	20	30	40	50	60
°E:	3 a 5	5 a 7	7 a 9	9 a 12	12 a 19	19 a 17

En el Apéndice 10 se aduce una tabla para la conversión de grados Engler y segundos Redwood y Saybolt en m^2/s.

2.5. TENSION SUPERFICIAL

La *tensión superficial* es una fuerza que, como su nombre indica, produce efectos de tensión en la superficie de los líquidos, allí donde el fluido entra en contacto con otro fluido no miscible, particularmente un líquido con un gas o con un contorno sólido (vasija, tubo, etc.). El origen de esta fuerza es la *cohesión* intermolecular y la fuerza de *adhesión* del fluido al sólido.

En la superficie libre de un líquido, que es por tanto la superficie de contacto entre dos fluidos, líquido y aire, la tensión superficial se manifiesta como si el líquido creara allí una fina membrana. Así se explica, por ejemplo, que una aguja de acero colocada cuidadosamente sobre la superficie del agua no se hunda.

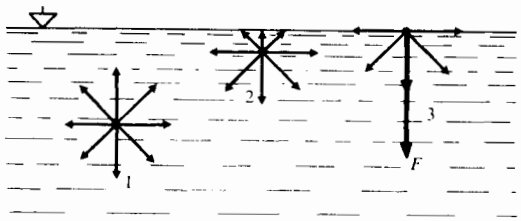


FIG. 2-5. *Fuerzas de cohesión* molecular en un líquido.

El origen de la tensión superficial puede explicarse de la siguiente manera. Una molécula situada en el interior del fluido, como la molécula 1 en la Fig. 2-5, es atraída por igual en todas direcciones por las moléculas circundantes y se encuentra en equilibrio: las fuerzas de cohesión molecular no producen efecto resultante alguno. Por el contrario, las moléculas 2 y 3 se encuentran cerca de (o sea a una distancia menor que el radio de la esfera de acción de la cohesión molecular, que es del orden de 10^{-6} mm) o en la misma superficie libre, respectivamente, en cuyo caso el equilibrio se rompe porque las moléculas del líquido ejercen una atracción mucho mayor que las del gas (aire) de la superficie libre. En este caso hay una resultante F de las fuerzas de cohesión dirigida hacia el interior del líquido. Esta fuerza origina una tensión tangencial en la superficie libre, que la convierte en algo semejante a una membrana elástica.

Si sobre la superficie libre del líquido se traza una línea cualquiera, la tensión superficial σ es la fuerza superficial normal a dicha línea por unidad de longitud. Sus dimensiones son, por tanto, $[\sigma] = [F][L]^{-1}$. La fuerza debida a la tensión superficial es igual a σL.

Esta fuerza suele ser muy pequeña, disminuyendo además al aumentar la temperatura. Así, por ejemplo, en la superficie libre del agua en contacto con el aire a lo largo de una línea de 60 m, la fuerza total debida a la tensión superficial es del orden de 5 N.

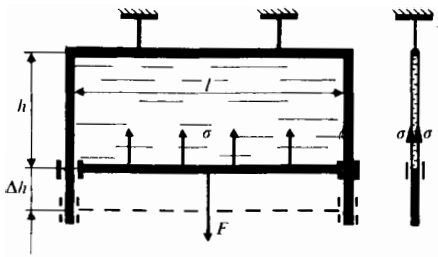


FIG. 2-6. Medición de la *tensión superficial*.

En la Fig. 2-6 puede verse el método clásico para investigar la tensión superficial. A fin de aumentar la superficie de la membrana líquida encuadrada en el marco de la figura desplazando la barra móvil inferior un Δh es preciso aplicar una fuerza F tal que

$$\sigma = \frac{F}{2\,l}$$

La tensión superficial explica la formación de las *gotas* en un líquido. En un líquido que se pulveriza las fuerzas de cohesión predominantes dirigidas siempre hacia el interior tienden a la formación de superficies de área mínima, originando las gotas esféricas, ya que para un volumen determinado la esfera es el cuerpo que posee área mínima.

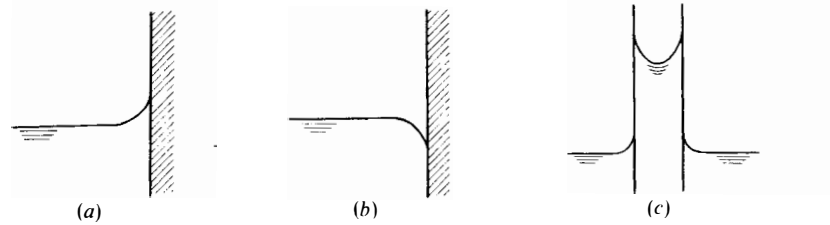


FIG. 2-7. Fenómenos debidos a la *tensión superficial:* (*a*) contacto entre agua y vidrio; (*b*) contacto entre mercurio y vidrio; (*c*) elevación capilar.

La tensión superficial explica también los fenómenos de formación de *menisco* y el de la elevación del líquido en *tubos capilares*. En la Fig. 2-7 *a* se muestra la forma de la superficie libre que adopta el agua en contacto con vidrio y en la Fig. 2-7 *b* la que adopta el mercurio en contacto con el vidrio también. En el mercurio la fuerza de *cohesión* entre sus moléculas es mayor que la de *adhesión* del mercurio al vidrio y lo contrario ocurre en el agua. La Fig. 2-7 *c* ilustra el fenómeno de la elevación capilar, que encuentra su explicación también en la tensión superficial.

TABLA 2-7

VALORES DE LA TENSION SUPERCICIAL

Líquido	*Coeficiente de tensión superficial a 20° C* (N/m)
Agua con aire húmedo	0,0741
Agua con aceite	0,0275
Mercurio con agua	0,3750
Mercurio con aire	0,5000
Alcohol con agua	0,0020
Solución de jabón con aire	0,0300

La formación del menisco cóncavo hacia abajo, en el caso del mercurio y de los líquidos que *no mojen* al vidrio, o cóncavo hacia arriba en el caso del agua y de los líquidos que *mojen* al vidrio, y el fenómeno de capilaridad puede producir un error en la lectura de los manómetros de líquido (véase Sec. 4.3.2), que se evita leyendo el manómetro como se in-

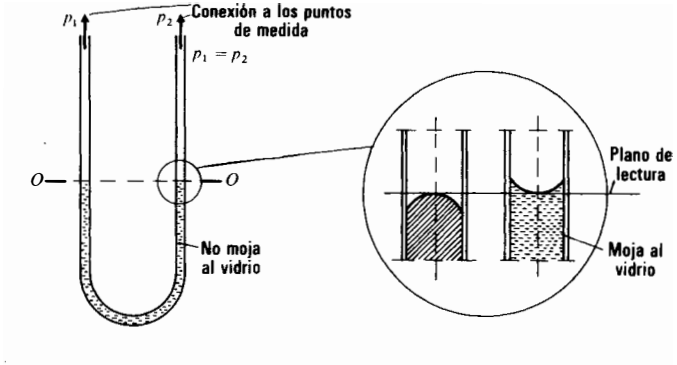


FIG. 2-8. Lectura de manómetros con *menisco*.

dica en la Fig. 2-8. En efecto, si las dos ramas del manómetro en U tienen la misma sección transversal, el ascenso capilar en una rama es igual al descenso capilar en la otra. De esta manera, utilizando una lente y un Nonius, se pueden leer los manómetros líquidos con un error menor de 0,1 mm.

2.6. TENSION DE VAPOR

En la superficie libre de un líquido a cualquier temperatura hay un constante movimiento de moléculas que escapan de dicha superficie, es decir, el líquido se *evapora*. Si el líquido se encuentra en un recipiente cerrado, y sobre su superficie queda un espacio libre, este espacio se llega a saturar de vapor y ya no se evapora más líquido. Si aumenta la temperatura aumenta la presión de saturación y se evapora más líquido. Es decir, todo fluido tiene para cada temperatura una presión p_s llamada *presión de saturación del vapor* a esa temperatura; o lo que es lo mismo, a cada presión corresponde una temperatura t_s llamada *temperatura de saturación* del vapor a esa presión. Esta propiedad es fundamental en el estudio de la cavitación que se hace en las Secs. 15.2, 19.12.1 y 22.11.1. En la pág. 321 se encuentra una tabla de p_s para las diferentes temperaturas t_s del agua.

2.7. FLUIDO IDEAL

En Mecánica de Fluidos se define un fluido ideal que no existe en la naturaleza: a ningún precio puede comprarse en el comercio un litro de fluido ideal. Es una hipótesis análoga a la hipótesis del gas perfecto en Termodinámica que simplifica las ecuaciones matemáticas. Para demostrar la utilidad de esta hipótesis en la técnica bastará aducir el ejemplo del diseño de las máquinas hidráulicas que se hace en gran parte con ecuaciones deducidas a partir de esta hipótesis (5).

Fluido ideal es aquel fluido cuya viscosidad es nula. La fórmula $\eta = 0$ define matemáticamente al fluido ideal.

(5) En el estudio de las máquinas hidráulicas se supone además que el fluido ideal circula en régimen irrotacional (el fluido ideal puede circular en régimen rotacional o irrotacional), hipótesis aún más restrictiva que la del fluido ideal.

En ningún fluido real la viscosidad es nula. Los dos fluidos más importantes para el ingeniero, el aire y el agua, son muy poco viscosos, pero ninguno de los dos es un fluido ideal. Por tanto, aunque la viscosidad sea muy pequeña, el esfuerzo cortante, expresado por la ecuación de Newton, Ec. (2-8), se hará sentir allí donde el gradiente de velocidad $\frac{dv}{dy}$ es grande, es decir, en la película de contacto del líquido con el sólido. Un fluido ideal circulando por una tubería no experimentaría pérdida de energía alguna. Un avión volando en un aire *ideal* y un submarino navegando en un agua *ideal* no experimentarían resistencia o arrastre alguno. La experiencia contradice, pues, la hipótesis de que el aire o el agua sea un fluido ideal (véase en la Sec. 8.2 la paradoja de D'Alembert). Sin embargo, Prandlt con su teoría de la capa límite transformó la hidrodinámica del fluido ideal en una mecánica de fluidos muy aprovechable en los fluidos reales de pequeña viscosidad, como el aire y el agua (véase Sec. 8.3).

El fluido incompresible puede ser real o ideal. Un fluido *ideal e incompresible* sería, si vale la frase, más ideal. En este libro se estudia el fluido incompresible siempre (6), e ideal o real, según los casos.

PROBLEMAS

2-1. *¿Cuál es la densidad relativa, la densidad absoluta, el peso específico y el volumen del mercurio a 0° C?*

En la tabla 2-1 se lee directamente la *densidad relativa* del mercurio, 13,6 (el mercurio es 13,6 veces más pesado que el agua).

La *densidad* del mercurio es:

$$13{,}6 \cdot 1.000 \text{ (densidad absoluta del agua)} = 13.600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

El *peso específico* del mercurio [Ec. (2-3)] es:

$$\gamma = 13.600 \cdot 9{,}81 = 133.416 \frac{N}{\text{m}^3}$$

El *volumen específico* es [Ec. (2-4)]:

$$v = \frac{1}{13.600} = 7{,}3529 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

(6) Véase, sin embargo, Sec. 15.1.

3. *Presión*

3.1. DEFINICION Y PROPIEDADES

Un cuerpo sólido de peso W, Fig. 3.1 *a*, se encuentra en equilibrio sobre una superficie horizontal, siendo A el área de contacto. Se llama presión del cuerpo sobre la superficie horizontal de apoyo, debida a la fuerza vertical W, a la relación

$$p = W/A \tag{3-1}$$

El cuerpo está en equilibrio gracias a otra fuerza igual a W y de sentido contrario que ejerce el suelo sobre el cuerpo, que se llama reacción R, la cual en este caso deberá ser también normal al suelo.

Si imaginamos que el cuerpo de la Fig. 3-1 *a* es ahora una vasija que contiene un fluido, el fluido ejerce también sobre el fondo de la vasija una *presión* $p = W/A$ en que W es ahora el peso del fluido.

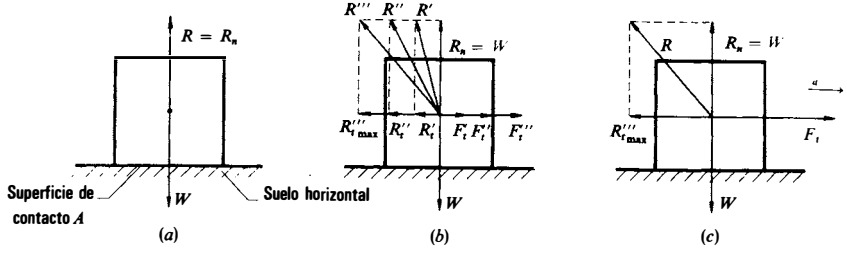


FIG. 3-1. Un cuerpo sólido apoyado sobre una superficie sólida y sometido a una fuerza exterior creciente F_t sigue en equilibrio hasta que F_t es mayor que el rozamiento máximo. Un fluido, por el contrario, sometido a una fuerza F_t, se pondrá en movimiento por pequeña que sea la fuerza

Si cortamos imaginariamente el fluido de la Fig. 3-1 *a* por un plano π, como se representa en la Fig. 3-2 y aislamos la parte superior, sustituyendo la parte inferior por las fuerzas que ésta ejerce sobre la parte superior, el cuerpo seguirá en reposo. Estas fuerzas elementales, dibujadas en la Fig. 3-2 son las fuerzas debidas a la presión p' que la parte inferior ejerce sobre la superior iguales y de sentido contrario al peso W' de la parte superior. El fluido aislado está, pues, sometido a una fuerza *proporcional a su masa*, que es la fuerza de la gravedad

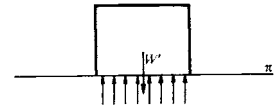


FIG. 3-2. Explicación de la presión en el interior de un fluido.

y a una *fuerza proporcional a su superficie* y normal a ella, que es la fuerza de presión. Si llamamos a esta fuerza superficial ΔF_p, y a la superficie de contacto ΔA, se define la presión media sobre la superficie ΔA así:

$$\bar{p} = \frac{\Delta F_p}{\Delta A}$$

y la presión en un punto,

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} = \frac{dF_p}{dA}$$

En el ejemplo de las Figs. 3-1 *a* y 3-2 la fuerza exterior que origina la presión del líquido, variable por cierto según el plano π que se considere, es la gravedad; pero en general puede ser cualquier otra fuerza externa, por ejemplo, la debida al empuje de un émbolo en un cilindro hidráulico.

En general, pues, la presión media se definirá así:

$$\bar{p} = \frac{F_n}{A}$$

donde F_n — fuerza normal a la superficie A.

Nótese que la presión p no es una fuerza; sino el cociente de una fuerza por una superficie.

Consideremos las cinco propiedades siguientes:

Primera propiedad

La presión en un punto de un fluido en reposo es igual en todas direcciones (principio de Pascal). Es decir: una diminuta placa (infinitesimal) sumergida en un fluido experimentaría el mismo empuje de parte del fluido, *sea cual fuere la orientación de la placa.* La demostración en dos dimensiones es sencilla. La Fig. 3-3 representa un prisma triangular de fluido aislado mental-

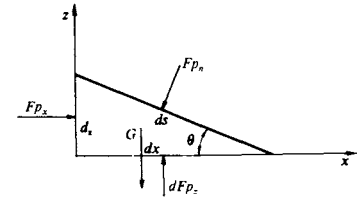


FIG. 3-3. La presión sobre una placa de área $ds \cdot 1$, que forma un ángulo θ con la horizontal, es la misma sea cual fuere la inclinación θ de la placa.

mente del resto del fluido que le rodea. El prisma considerado tiene según el eje y la unidad de longitud. Se tendrá:

$$dF_{px} = p_x\, dz \cdot 1 \quad \text{fuerza debida a la presión según el eje } x$$
$$dF_{pz} = p_z\, dx \cdot 1 \quad \text{fuerza debida a la presión según el eje } z$$
$$dF_{pn} = p_n\, ds \cdot 1 \quad \text{fuerza debida a la presión sobre la cara } ds \cdot 1$$

$$dW = \rho g \frac{dx\, dz}{2} \cdot 1 \quad \text{fuerza de la gravedad.}$$

Como el prisma está en equilibrio:

$$p_x\, dz - p_n\, ds \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$p_z\, dx - p_n\, ds \cos\theta = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

donde la fuerza de la gravedad se ha omitido por ser un diferencial de segundo orden; pero

$$sen\,\theta = dz/ds$$
$$cos\,\theta = dx/ds$$

luego

$$p_x\, dz - p_n\, dz = 0$$
$$p_z\, dx - p_n\, dx = 0.$$

Por tanto,

$$p_x = p_z = p_n.$$

Como el ángulo θ es arbitrario, siendo las diferenciales infinitamente pequeñas, queda demostrada la primera propiedad (1).

La *presión* no es un vector, es un *escalar*. La *fuerza de presión* ejercida, por ejemplo, sobre la superficie de un contorno y dirigida normalmente a la misma es la presión media multiplicada por la superficie y es un *vector* (2).

Segunda propiedad

La presión en todos los puntos situados en un mismo plano horizontal en el seno de un fluido en reposo es la misma.

En efecto, consideremos un cilindro de fluido horizontal de longitud l y de sección circular infinitesimal dA, Fig 3-4. De la ecuación de equilibrio según el eje del cilindro se deduce: $p_1\, dA_1 = p_2\, dA_2$; pero $dA_1 = dA_2$; luego $p_1 = p_2$. Ni la gravedad ni las presiones sobre la superficie lateral del cilindro tienen componente alguna en la dirección del eje del cilindro. Como la orientación del eje del cilindro es arbitraria queda demostrada la segunda propiedad.

(1) La demostración en tres dimensiones se haría aislando un tetraedro de fluido que tuviera tres caras coincidentes con los planos coordenados y la cuarta cara inclinada arbitrariamente.

(2) De aquí se sigue que la superficie (o la diferencial de superficie si la superficie no es plana) debe ser considerada como un vector normal a la superficie, dirigido hacia el interior de la misma y cuyo módulo es igual a la superficie misma.

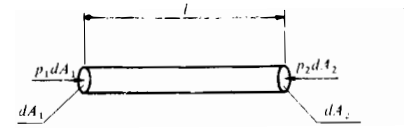


FIG. 3-4. El cilindro de fluido de eje horizontal de la figura demuestra que la presión en todo punto situado en un mismo plano horizontal en el seno de un fluido en reposo es la misma *(segunda propiedad)*.

Tercera propiedad

En un fluido en reposo la fuerza de contacto que ejerce en el interior de un fluido una parte del fluido sobre la otra contigua al mismo tiene la dirección normal a la superficie de contacto. Como esta fuerza normal es la presión, en el interior de un fluido en reposo no existe más fuerza que la debida a la presión (3). Consideremos un volumen cualquiera de fluido como en la Fig. 3-5. Dividamos el volumen en dos partes A y B por una superficie σ cualquiera. Si la fuerza que ejerce B sobre A tuviera la dirección 1, se descompondría en dos fuerzas 2 y 3. El fluido no puede soportar la fuerza tangencial 3 sin ponerse en movimiento (véase pág. 23); pero por hipótesis el fluido está en reposo, luego la fuerza no puede tener la dirección 1 y tiene que tener la dirección 2, o sea, la dirección de la normal.

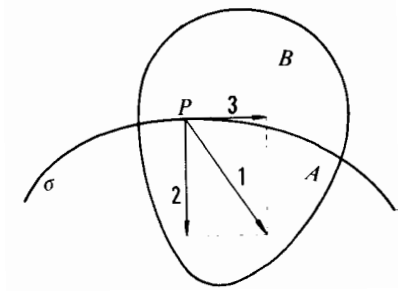


FIG. 3-5. La fuerza debida a la presión que B ejerce sobre A debe ser normal a σ porque no puede tener componente tangencial (3) si el fluido está en reposo *(tercera propiedad)*.

Este mismo argumento es valedero para la fuerza que el fluido en reposo ejerce sobre el contorno sólido en el cual está contenido.

Insistamos una vez más en que ésta es la característica que distingue esencialmente un fluido de un sólido. Consideremos de nuevo el bloque sólido de la Fig. 3.1 *b*, sobre el que actúa ahora, además de la fuerza de la gravedad W, una fuerza tangencial, que crece paulatinamente pasando por los valores F_t', F_t'' y F_t'''. La reacción del suelo en estos tres casos es R', R'' y R''' que no tiene la dirección normal, sino que tiene una componente constante en la dirección normal $R_n = W$ y una componente tangencial variable R_t', R_t'', R_t'''. R_t', R_t'', R_t''' es la fuerza de rozamiento. El suelo puede oponer al deslizamiento del bloque hasta una fuerza máxima $R_t''' = F_t'''$. Si F_t aumenta (Fig. 3-1 *c*), o sea, si $F_t > R_t''' = R_{t\,máx}$, el cuerpo sufrirá una aceleración, que según la ley de Newton valdrá: $a = g\frac{F}{W} = g\frac{F_t - R_t'''}{W}$. Estos estados de equilibrio con las fuerzas F_t', F_t'' y F_t''' posibles en un sólido, son imposibles en un fluido.

(3) En un *fluido real* en movimiento la fuerza de contacto no es normal y se descompone en una fuerza normal (la presión) y otra tangencial que provoca la resistencia.

El rozamiento en los fluidos es debido a la viscosidad, y es de naturaleza completamente distinta que el rozamiento en los sólidos. La viscosidad sólo interviene cuando el fluido se pone en movimiento (Sec. 2.4); no así el rozamiento en los sólidos. De lo dicho se desprende que la viscosidad no juega ningún papel en los fluidos en reposo.

La estática de los fluidos reales no se diferencia en nada de la estática del fluido ideal. Los resultados obtenidos de las deducciones matemáticas en estática se verifican exactamente en los fluidos reales. La hidrostática es una ciencia mucho más sencilla que la hidrodinámica.

Cuarta propiedad

La fuerza de la presión en un fluido en reposo se dirige siempre hacia el interior del fluido, es decir, es una *compresión*, jamás una *tracción*. Tomando como positivo el signo de compresión, la presión absoluta no puede ser jamás negativa.

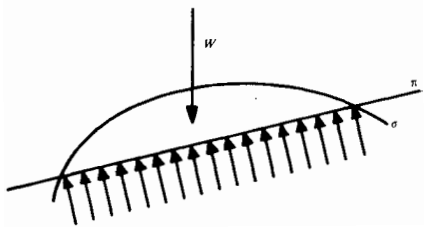


FIG. 3-6. Esta figura demuestra intuitivamente (véase texto) que la superficie libre de un líquido en reposo es horizontal *(quinta propiedad)*.

Quinta propiedad

La superficie libre de un líquido en reposo es siempre horizontal. Supongamos (Fig. 3-6) que σ es la superficie libre de un líquido, no horizontal. Cortando por un plano π no horizontal y aislando la parte superior del líquido se ve que, siendo las fuerzas elementales de presión que el líquido inferior ejerce sobre el líquido aislado normales al plano π, su resultante también lo será y no podrá estár en equilibrio con la fuerza de la gravedad, W.

3.2. UNIDADES DE PRESION

Ecuación de dimensiones:

$$[p] = [F][L]^{-2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$$

Unidad en el *SI*:

$$1\ p = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

o bien expresada en las unidades básicas:

$$1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}$$

Esta unidad ha recibido el nombre de Pascal (Pa):

$$1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{Pa}$$

Factor de conversión del *ST* al *SI* y viceversa:

$$9{,}81\ \frac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{kp/m^2}} = 1$$

En la práctica se expresa con frecuencia la presión en altura equivalente de columna de un líquido determinado: por ejemplo, en m de columna de agua, en mm de columna de mercurio, etc. Dimensionalmente (véase tabla 1-2) la presión no es una longitud, sino una fuerza partido por una superficie. Por eso en el *SI* las alturas *como unidades de presión* han sido abolidas aunque no hay dificultad en seguir utilizándose *como alturas equivalentes*. Como excepción puede seguirse utilizando como unidad de presión el mm de columna de mercurio, que recibe el nombre de *Torr* (en atención a Torricelli), nombre que debe sustituir al de mm c. m.:

$$1 \text{ milímetro Hg} = 1 \text{ Torr}$$

A continuación se deduce una ecuación, que permite pasar fácilmente de una presión expresada en columna equivalente de un fluido a la expresada en unidades de presión de un sistema cualquiera.

Consideremos un recipiente cilíndrico de base horizontal A lleno de líquido de densidad ρ hasta una altura h. Según la definición de presión, Ec. (3-1):

$$p = W/A = V\rho g/A = Ah\rho g/A = \rho g h$$

o sea

$$\boxed{p = \rho g h} \qquad (3\text{-}2)$$

Ejemplo: Hallar la presión correspondiente a una columna de glicerina de $h = 300$ mm.

$$\delta_{\text{glicerina}} = 1{,}26$$

luego

$$\rho_{\text{glicerina}} = 1{,}26 \times 1.000 = 1.260\ \mathrm{kg/m^3},\ SI$$

y aplicando la Ec. (3.2),

$$p = \rho g h = 1.260 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3 = 3.708{,}2 \text{ Pa, } SI$$

En los manómetros líquidos y tubos piezométricos (véanse Secs. 4.3.1. y 4.3.2) se lee directamente una columna de líquido manométrico, que puede fácilmente traducirse a presión mediante la Ec. (3-2). He aquí algunos de los *líquidos manométricos* más utilizados:

a) *Agua.*
Siendo $\rho_{agua} = 1.000$ kg/m^3, se tendrá:

$$p(\text{N/m}^2) = 1.000 \cdot 9{,}81\ h \quad (h \text{ en m})$$

Es corriente expresar la presión en *milímetros de columna de agua* (mm c. a.) [medida de pequeñas presiones en ventiladores (véase Cap. 20)]. Se tendrá:

$$p(\text{N/m}^2) = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}001\ h \quad (h \text{ en mm c. a.})$$

b) *Alcohol*, 95 %. $\delta = 0{,}789$, a 20° C [el peso específico del alcohol varía mucho con la temperatura, así como con la humedad absorbida de la atmósfera, lo cual hace indispensable la comprobación de δ con un densímetro (Fig. 2-1), antes de la lectura de un manómetro cuyo líquido manométrico sea el alcohol].

c) *Tetracloruro de carbono.* $\delta = 1{,}6$, a 20° C.

d) *Bromoformo.* $\delta = 3$, a 20° C.

e) *Mercurio.* $\delta = 13{,}6$ (véase también tabla 2-2).

f) *Tolueno.* $\delta = 0{,}87$.

g) *Parafina.* $\delta = 0{,}81$.

h) *Tetrabromoetano.* $\delta = 3{,}43$, a 0° C.

i) *Bromuro de etileno.* $\delta = 2{,}18$, a 0° C.

j) *Bromuro de etilo.* $\delta = 1{,}43$, a 0° C.

Aplicando la Ec. (3-2) se tiene:

Con frecuencia se presenta el caso de pasar de una columna del líquido x a otra de un líquido distinto y.

Aplicando la Ec. (3-2), se tiene:

$$p = \rho_x g h_x = \rho_y g h_y$$

y

$$h_y = \frac{\rho_x}{\rho_y} h_x$$

Si el líquido y es agua, se tiene:

$$h_a = \frac{\rho_x}{\rho_a} h_x = \delta_x h_x \tag{3-3}$$

(Véanse los problemas 3-1 y 3-2.)

3.3. PRESION ATMOSFERICA

Sobre la superficie libre de un líquido reina la presión del aire o gas que sobre ella existe. Esta presión puede adquirir un valor cualquiera en un recipiente cerrado; pero si el recipiente está abierto, sobre la superficie libre del líquido reina la presión atmosférica p_{amb} (4), debida al peso de la columna de aire que gravita sobre el fluido.

La presión atmosférica varía con la temperatura y la altitud. La presión media normal a 0° C y al nivel del mar es de 760 Torr = 1,01396 bar y se llama *atmósfera normal.* En la técnica se utiliza mucho la atmósfera técnica, que es igual a 1 bar. Por tanto, hay tres atmósferas:

Atmósfera normal	1,01396	bar
Atmósfera técnica	1	bar
Atmósfera local y temporal		presión atmosférica reinante en un lugar y tiempo determinados.

3.4. PRESION ABSOLUTA Y PRESION EXCEDENTE O RELATIVA

La presión en cualquier sistema de unidades se puede expresar como *presión absoluta*, p_{abs}, o como *presión excedente* o *relativa*, p_e (5). Esta denominación no afecta a la unidad, sino al cero de la escala. Sucede lo mismo con las temperaturas: los *grados centígrados* expresan *temperaturas relativas*, tomando como 0° C la temperatura de fusión del hielo; mientras que las temperaturas en *Kelvin* expresan temperaturas absolutas, medidas a partir del 0 absoluto. En el sistema inglés de unidades los grados Farenheit expresan temperaturas relativas (temperatura de fusión del hielo, 32° F); mientras que los grados *Rankine* expresan temperaturas absolutas. El 0 absoluto de temperaturas es el mismo en todos los sistemas de unidades. Lo mismo sucede con el 0 absoluto de presiones.

Las *presiones absolutas* se miden con relación al 0 absoluto (vacío total o 100 % de vacío) y las *presiones relativas* con relación a la atmósfera.

La mayoría de los manómetros (Sec. 4.3), están construidos de manera que miden presiones relativas con relación a la atmósfera local. Para hallar la presión absoluta con exactitud habrá que sumar a la presión leída en el manómetro la

(4) Seguimos la norma DIN 1314 (Feb. 1977), que denomina a la presión atmosférica p_{amb} (del latín «ambiens»).

(5) Seguimos la norma DIN 1314 (Feb. 1977), que denomina a la presión relativa p_e (del latín «excedens» positiva o negativamente).

presión atmosférica local medida exactamente con un barómetro. Muchas veces no se necesita gran precisión y entonces se suma a la lectura del manómetro (presión relativa) la atmósfera técnica, que es igual a 1 bar.

De aquí resulta la ecuación fundamental:

$$p_{abs} = p_e + p_{amb} \tag{3-4}$$

donde p_{abs} — presión absoluta, *Pa*, *SI*
p_e — presión relativa, *Pa*, *SI* (medida con manómetro)
p_{amb} — presión atmosférica, presión ambiente o presión barométrica, *Pa*, *SI* (medida con un barómetro).

O bien la siguiente ecuación aproximada:

$$p_{abs} = p_e + 1 \tag{3-5}$$
(unidades en esta ecuación: bar)

Las Ecs. (3-4) y (3-5) pueden estudiarse gráficamente en la Fig. 3-7 *a* y *b*.

Finalmente los vacíos se miden con mucha frecuencia en tanto por ciento de la presión atmosférica local. Es decir, el 0 absoluto es 100 por 100 de vacío y la presión atmosférica local, el 0 por 100, como se ve en la Fig. 3-7 *c*.

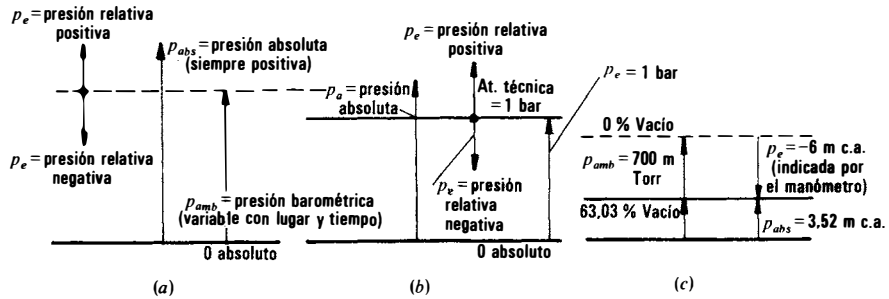


FIG. 3-7. Este gráfico explica la Ec. (3-4): $p_{abs} = p_e + p_{amb}$: (*a*) Presiones relativas referidas a la atmósfera local o presión barométrica variable (línea de trazos). (*b*) Presiones relativas referidas a la atmósfera técnica o 1 bar (línea continua). (*c*) Representación gráfica del Problema 3-3.

PROBLEMAS

3-1. *Convertir 750 Torr en unidades diversas.*
$\rho = 13.600$ kg/m^3

$\frac{p}{\rho g} = 0{,}750$ m

$$p = 0{,}750 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 = 100.062 \frac{N}{m^2} = 1{,}00062 \text{ bar}$$

3-2. *Una tubería de acero de 300 mm conduce aire a una presión relativa de 14 bar. ¿Cuál es el esfuerzo de tracción σ en la pared de la tubería si ésta es de 8 mm de espesor?*

$p = 14$ bar

La fuerza p_x debida a la presión y la fuerza de tracción $2T$ (véase figura) que ejerce el material de la tubería deberán ser iguales. Por tanto la fuerza en kg sobre un centímetro de longitud de la tubería será:

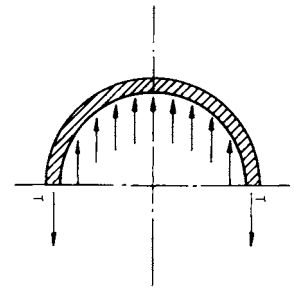
$$F_{px} = pA = 14 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 4.200N = 2T$$

y

$$T = 2.100 \ N$$

y el esfuerzo de tracción será

$$\sigma = \frac{2.100}{0{,}8 \cdot 1} = 2.625 \ N/cm^2$$



PROB. 3-2

3-3. (Véase Fig. 3-7 *c*.) *Calcular el vacío en tanto por ciento si:*

presión atmosférica local o presión barométrica 700 Torr;
el manómetro indica una presión equivalente a 6 m c.a.

700 mm Hg $= 0{,}7 \cdot 13{,}6 = 9{,}52$ m c. a.
Por tanto, a un vacío de 100 por 100 corresponde una presión relativa de $-9{,}52$ m c. a.

$$\% \text{ Vacío} = \frac{-6}{-9{,}52} \times 100 = 63{,}03\ \%$$

3-4. *Determinar la presión relativa y absoluta en el fondo de un recipiente abierto a la atmósfera: a) si está lleno de agua; b) si está lleno de gasolina de densidad $\rho = 700$ kg/m^3. La profundidad del líquido en el recipiente es $h = 4{,}0$ m. La presión atmosférica es igual a 750 Torr.*

Utilizando las Ecs. 3-2 y 3-4 y teniendo en cuenta que (véase Problema 3-1) 750 Torr = 1,00062 bar, tendremos:

a) *Recipiente lleno de agua:*

presión relativa:

$$\rho g h = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}0 = 39.240 \frac{N}{m^2} = 0{,}3924 \text{ bar}$$

presión absoluta:

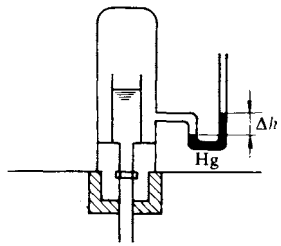
$$p_{abs} = p_e + p_{amb} = 0{,}3924 + 1{,}00062 = 1{,}3930 \text{ bar}$$

b) *Recipiente lleno de gasolina:*

$$p_e = \rho g h = 700 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}0 = 27.468 \frac{N}{m^2} = 0{,}27468 \text{ bar}$$
$$p_{abs} = p_e + p_{amb} = 0{,}27468 + 1{,}00062 = 1{,}2753 \text{ bar}$$

3-5. *Determinar la presión hidrostática relativa y absoluta en el acumulador hidroneumático de la figura. En el manómetro en U: Δh = 150 cm, y la presión barométrica es 740 Torr.*

Aplicando las mismas ecuaciones que en el problema anterior tendremos:



PROB. 3-5

Presión relativa:

$$p_e = \rho g \Delta h = 13.600 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5$$
$$= 200.124 \text{ Pa} = 2{,}00124 \text{ bar}$$

$$p_{amb} = 740 \text{ Torr} = 0{,}740 \cdot 9{,}81 \cdot 13.600$$
$$= 98.727{,}8 \text{ Pa}$$

Presión absoluta:

$$p_{abs} = p_e + p_{amb} = 200.124 + 98.727{,}8$$
$$= 298.851{,}8 \text{ Pa} = 2{,}98851 \text{ bar}$$

HIDROSTATICA

4. *Hidrostática*

4.1. ECUACION FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTATICA DEL FLUIDO INCOMPRESIBLE

En el líquido en reposo de la Fig. 4-1 *aislemos* un volumen infinitesimal formado por un prisma rectangular de base A y de altura dz. Escojamos a continuación un plano de referencia horizontal desde donde se miden las alturas en el eje z. La presión en la base inferior del prisma es p, la presión en la base superior será $p + dp$. La ecuación de equilibrio en la dirección del eje z será $pA - (p + dp)A - \rho g\, A\, dz = 0$; o sea,

$$\frac{dp}{\rho} = -g\, dz \tag{4-1}$$

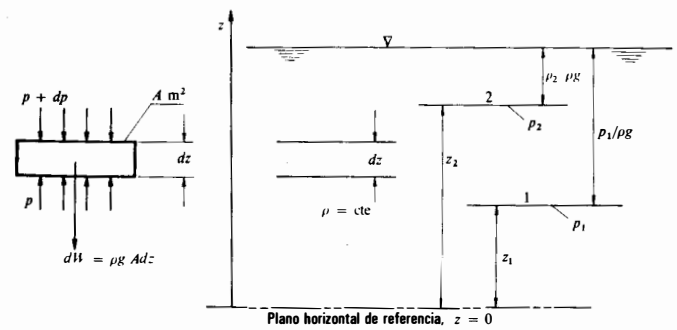


FIG. 4-1. Deducción de la *ecuación fundamental de la hidrostática*, Ec. (4-3). 1 y 2 son dos planos horizontales en el seno de un fluido en reposo, de densidad constante ρ.

Integrando la Ec. (4-1) entre 1 y 2, teniendo en cuenta que ρ = cte., se tiene:

$$g(z_2 - z_1) = \frac{p_1 - p_2}{\rho};$$

o sea

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g \qquad (4\text{-}2)$$

y finalmente, como 1 y 2 son dos puntos cualesquiera en el seno del fluido, tendremos la

ECUACION FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTATICA DEL FLUIDO INCOMPRESIBLE

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + zg = C} \qquad (4\text{-}3)$$

(Ecuación de la hidrostática: primera forma)

La Ec. (4-3) según lo dicho en la pág. 31, es válida para todo fluido ideal y real, con tal de que sea incompresible.

Dividiendo todos los términos de la Ec. (4-3) por g se obtiene:

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + z = C} \quad (1) \qquad (4\text{-}4)$$

(Ecuación de la hidrostática: segunda forma)

La constante de la Ec. (4-4) se llama *altura* piezométrica y se designa con la letra h.

En todo fluido en reposo la altura piezométrica es constante.

De (4-4), siendo $\rho = C$ se deduce

$$\boxed{p + \rho g z = C} \quad (2) \qquad (4\text{-}5)$$

(Ecuación de la hidrostática: tercera forma)

De la Ec. (4-2) se deduce que:

a) Si $z_1 = z_2$, $p_1 = p_2$, o sea
En un fluido en reposo todos los puntos a la misma cota del plano horizontal de referencia tienen la misma presión. (Segunda propiedad de la presión, pág.

(1) La ecuación de la hidrostática no se cumple solo en el fluido en reposo, sino también en todo plano transversal a la dirección del movimiento, si éste es uniforme (véase nota 2 en pág. 100). *En régimen uniforme la distribución de presiones en un plano normal a la corriente es hidrostática.*

(2) Es obvio que la constante C en las Ecs. (4-3), (4-4) y (4-5) no son iguales. En este libro C designa en general una constante.

b) Recíprocamente, si $p_1 = p_2$; $z_1 = z_2$: es decir, en un fluido en reposo todos los puntos que tienen la misma presión están en un mismo plano horizontal.

c) En particular la superficie libre de un líquido en equilibrio se halla toda a la misma presión, la presión atmosférica, y por tanto: *la superficie libre de un líquido es horizontal. (Quinta propiedad de la presión,* pág. 36). Esta superficie se llama *plano piezométrico* (lugar geométrico de las presiones relativas nulas).

d) En un *tubo piezométrico* (Sec. 4.3.1) conectado a un punto de un líquido éste se eleva hasta una altura igual a la altura equivalente a la presión del líquido en dicho punto (véase Fig. 4-2). De aquí el nombre de plano piezométrico que se da a la superficie libre.

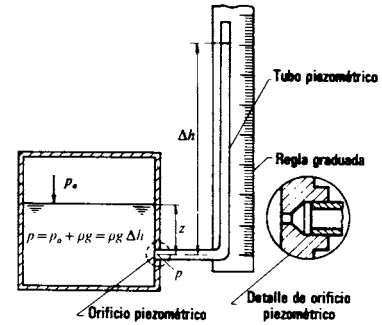


FIG. 4-2. Los *tubos piezométricos* (véase la Sec. 4.3.1) constituyen el procedimiento más económico y al mismo tiempo de gran precisión para medir presiones relativamente pequeñas. La precisión de la medida exige que el *orificio piezométrico* esté bien practicado.

Las Ecs. (4-2) a (4-5) son válidas tanto si se expresan las presiones en presiones absolutas como si se expresan en presiones relativas, porque ambas presiones [véase Ec. (3-4)] se diferencian sólo en una constante, p_{amb} $\left(\text{ó } \frac{p_{amb}}{\rho} \text{ ó } \frac{p_{amb}}{\rho g}\right)$ que figuraría en ambos miembros de cada ecuación.

Si hay varios líquidos no mezclados de diferente densidad la aplicación de la Ec. (4-3 a 4.5) se hace sección por sección empezando una nueva sección allí donde empieza un fluido de distinta densidad.

4.2. GRAFICO DE PRESIONES

La Ec. (4-5) aplicada entre un punto de la superficie libre y un punto cualquiera del líquido, y expresada en presiones absolutas, será

$$p_{abs} = p_{amb} + \rho g h \qquad (4\text{-}6)$$

donde p_{abs} — presión absoluta en un punto cualquiera del líquido
p_{amb} — presión atmosférica o barométrica
h — profundidad del punto con relación al plano piezométrico o superficie libre.

La Ec. (4-6) es la ecuación de una recta cuya ordenada en el origen es p_{amb} = presión atmosférica, y cuya pendiente es igual a ρg (Fig. 4-3).

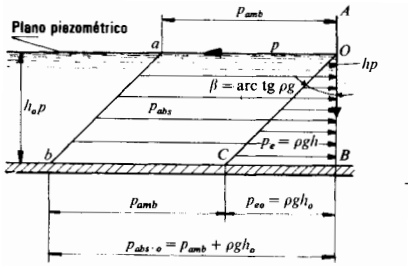


FIG. 4-3. *Gráfico de presiones:* p_{amb} = presión barométrica; p_e = presión relativa; p_{abs} = presión absoluta. El subíndice *o* indica valores en el fondo del recipiente.

Si se trata de representar gráficamente la presión relativa, en la Ec. (4-6) $p_{amb} = 0$ y

$$p = \rho g h \tag{4-7}$$

La Ec. (4-7) es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y cuya pendiente es ρg.

La Fig. 4-3 explica la construcción del *gráfico de presiones* que puede ser de utilidad en la resolución gráfica de algunos problemas prácticos. La presión absoluta en el fondo, llamando h_{op} a la profundidad de éste con relación al plano piezométrico, según la Ec. (4-6) será $p_{abs\,o} = p_{amb} + \rho g h_o$, y la presión relativa según la Ec. (4-7) será $p_{eo} = \rho g h_o$.

4.3. INSTRUMENTACION DE MEDIDA DE PRESIONES

La medida, la transmisión a distancia de la medida y el registro de presiones es muy frecuente tanto en los laboratorios como en la industria para verificación de procesos industriales, para determinar junto con la temperatura el estado de un gas, a la salida y entrada de las máquinas de fluido (véase, por ejemplo, Secs. 19.10 y 22.8.1), para seguridad de personas y de equipo (calderas, recipientes de presión), etc.

Los medidores de presión o manómetros necesariamente han de ser variadísimos, ya que en los laboratorios y la industria se han de medir presiones desde un vacío absoluto del 100 por 100 hasta 10.000 bar y aún mayores, con grado de precisión muy diverso y en medios (temperaturas elevadas, atmósferas explosivas, etc.) muy diversos.

Los aparatos que sirven para medir las presiones se denominan manómetros. Los manómetros pueden clasificarse según los siguientes criterios:

1.ª clasificación: según la naturaleza de la presión medida.

1.° Instrumentos que miden la presión atmosférica, p_{amb}: *barómetros.*

2.° Instrumentos que miden la presión relativa, p_e, o presión con relación a la atmósfera: *manómetros*, miden las *sobrepresiones* o presiones relativas positivas; *vacuómetros*, miden las *depresiones* o presiones relativas negativas.

3.° Instrumentos que miden la presión absoluta, p_{abs}: *manómetros de presión absoluta.* (Este tipo de manómetros suele emplearse para la medición de presiones absolutas pequeñas.) La presión absoluta se puede medir también con un manómetro de presión relativa y un barómetro (apartados 1.° y 2.°), mediante la aplicación de la Ec. (3-4).

4.° Instrumentos para medir diferencia de presiones: *manómetros diferenciales.*

5.° Instrumentos para medir presiones muy pequeñas: *micromanómetros.*

2.ª clasificación: según el principio de funcionamiento.

Los manómetros se clasifican en mecánicos y eléctricos. El principio de funcionamiento de los primeros consiste en equilibrar la fuerza originada por la presión que se quiere medir con otra fuerza, a saber, con el peso de una columna de líquido en los piezómetros de líquido y manómetros de líquido, con un resorte en los manómetros clásicos o con la fuerza ejercida sobre la otra cara de un émbolo en los manómetros de émbolo. Esta última fuerza se mide mecánicamente.

En los manómetros eléctricos la presión origina una deformación elástica, que se mide eléctricamente.

La diferencia entre los piezómetros de líquido y los manómetros de líquido consiste solamente en que en los piezómetros el líquido manométrico y el líquido en el cual se mide la presión son uno mismo, mientras que son distintos en los manómetros de líquido.

El grado de exactitud de cada manómetro depende del tipo, de la calidad de construcción, de su instalación y, por supuesto, de su adecuada lectura.

4.3.1. Tubos piezométricos

Tubo piezométrico es un tubo transparente de cristal o plástico, recto o con un codo, de diámetro que no debe ser inferior a 5 mm para evitar los efectos de capilaridad debidos a la tensión superficial (véase Sec. 2.5). Este tubo (Fig. 4-2) se conecta al punto en que se quiere medir la presión, practicando cuidadosamente en la pared del recipiente o tubería un orificio, que se llama *orificio piezométrico.*

Los tubos piezométricos sirven para medir la presión en un líquido midiendo la altura de ascensión del mismo líquido en el tubo y no requieren el empleo de otro líquido manométrico distinto. El nivel que alcanza el tubo en el líquido determina el *plano piezométrico.*

El orificio piezométrico en los líquidos en reposo (tanque, cisterna) no requiere cuidado especial (3).

En los fluidos en movimiento se han de tomar las precauciones siguientes para evitar que se produzcan perturbaciones que transformarían parte de la energía de presión en energía dinámica y falsearían la medida: el tubo ha de terminar perpendicular a la corriente; conviene, a fin de disminuir el efecto de la capilaridad y tensión superficial, que el diámetro del tubo sea al menos de 10 a 12 mm; *se ha de eliminar* cualquier rebaba remanente del metal en la perforación del tubo, etc. En la Fig. 4-2 se ve un detalle de un orificio piezométrico bien practicado. Idénticas precauciones se han de tomar al practicar una toma manométrica para conectar un manómetro líquido o metálico. Si la toma manométrica se ha de practicar en una tubería de diámetro grande es preferible la forma anular de la Fig. 4-4.

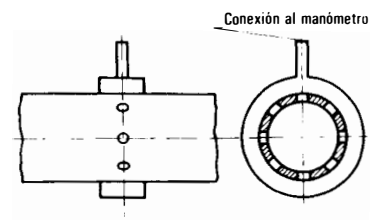


FIG. 4-4. Forma anular para las conexiones piezométricas y manométricas en tuberías, que permite la obtención de la altura piezométrica medida con mayor precisión.

(3) La razón de esto se halla en el siguiente párrafo transcrito de nuestra página 36: «La estática de los fluidos reales no se diferencia en nada de la estática del fluido ideal.»

Los tubos piezométricos provistos de escala graduada y nonius (véanse Figs. 4-5 y 4-6):

— son de gran precisión;
— son cómodos, no necesitan de líquido manométrico y dan la presión en mm de columna del líquido que se quiere medir (véase Fig. 4-6);
— solo sirven para medir presiones relativas que no excedan mucho la presión atmosférica. En efecto, una sobrepresión, por ejemplo, de 200 mbar en agua requeriría un tubo piezométrico de más de 2 m.

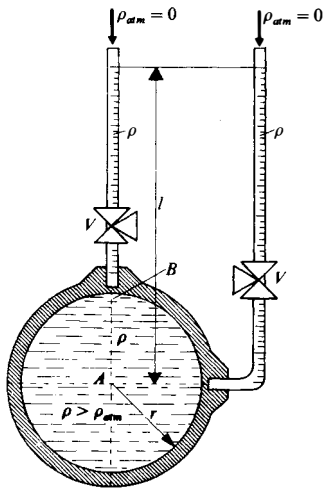


FIG. 4-5. *Orificio y tubo piezométrico.*

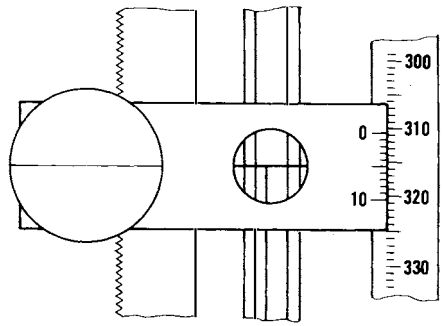


FIG. 4-6. Lectura de manómetros con *nonius.*

El tubo piezométrico conectado a cualquier punto de la sección transversal de la tubería de la Fig. 4-5 sube siempre hasta el mismo nivel. (La ecuación de la hidrostática se cumple también en la sección transversal de una corriente uniforme). En el eje de la tubería (punto *A)* la presión será:

$$p_A = \rho g l$$

En el punto *B* la presión será:

$$p_B = \rho g (l - r)$$

mientras que la altura piezométrica en ambos puntos será:

$$h = l$$

Para leer, pues, la presión en un punto, el 0 de la escala del piezómetro ha de coincidir con dicho punto.

La válvula *V* muchas veces es una válvula de tres pasos que pone en comunicación el interior del fluido con la atmósfera, a fin de purgar el aire, que falsificaría la medida y a continuación con el piezómetro para efectuar la medición; la tercera posición es de cierre e incomunica el fluido con la atmósfera y con el piezómetro.

4.3.2. Manómetros de líquido

En estos manómetros se emplean gran variedad de líquidos como los enumerados en la Sec. 3.2: agua, alcohol, mercurio, etc. El agua y alcohol se colorean a veces para facilitar la lectura y la fotografía de los ensayos.

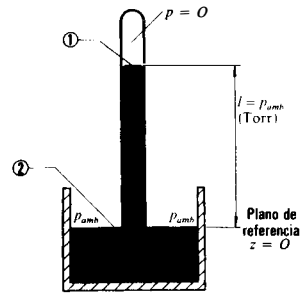


FIG. 4-7. *Barómetro de mercurio de cubeta* para medir la presión ambiente o atmosférica.

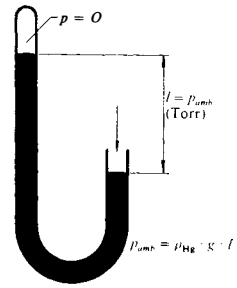


FIG. 4-8. *Barómetro de mercurio en U* para medir la presión ambiente o atmosférica.

4.3.2.1. Barómetro de cubeta

Se representa en la Fig. 4-7. Encima del mercurio reina el vacío, $p = 0$, si se ha tenido cuidado de eliminar el aire al sumergir el tubo. Una escala graduada móvil no dibujada en la figura, cuyo cero se hace coincidir antes de hacer la lectura con el nivel del mercurio en la cubeta, permite leer l, que es la presión atmosférica p_{amb} en Torr o mm c. m. En efecto, según la Ec. (4-4), escrita entre las secciones 1 y 2 de la figura

$$\frac{p_1}{\rho_{Hg} \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho_{Hg} \cdot g} + z_2$$

pero

$$p_1 = 0 \qquad z_1 = l \qquad p_2 = p_{amb} \qquad z_2 = 0$$

luego

$$p_{amb} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot l \tag{4-8}$$

en el *SI*: p_{amb}, Pa

$$\rho_{Hg} = 13.600 \text{ kg/m}^3$$

4.3.2.2 Barómetro en U

La Fig. 4-8 no requiere explicación. En este manómetro la cubeta queda eliminada.

Una lectura más precisa del barómetro de cubeta, lo mismo que del barómetro en U de mercurio, deberá tener en cuenta:

— la variación de ρ_{Hg} con la temperatura en la Ec. (4-8) (véase tabla 2-2).
— la variación de g con la altitud en la misma Ec. (4-8).
— la presión $p_1 \neq 0$. En efecto, sobre el mercurio existe una atmósfera de gas de mercurio, cuya presión es la presión de saturación del vapor de mercurio a la temperatura reinante. (Esta presión es muy pequeña, alrededor de 0,0015 Torr, a 20° C y puede obtenerse fácilmente en la tabla 4-1 de saturación de vapor del Hg.

TABLA 4-1

TABLA DE SATURACION DEL MERCURIO

Presión p (MPa)	*Temperatura de saturación* (°C)
0,00010	119,5
0,0002	134,6
0,0004	151,2
0,0006	161,5
0,0008	168,9
0,0010	175,0
0,002	195,0
0,004	216,9
0,006	230,9
0,008	241,0
0,010	249,6
0,020	277,3
0,030	294,4
0,040	308,0
0,05	318,8
0,06	328,0
0,07	335,9
0,08	342,7
0,09	349,2
0,10	355,0
0,12	365,0
0,14	374,5
0,16	381,9
0,18	389,3
0,20	395,8
0,30	422,4
0,40	442,4
0,45	451,0
0,50	458,9
0,6	472,8
0,7	485,1
0,8	496,3
0,9	506,3
1,0	515,5

4.3.2.3. Manómetro en U de líquido para presiones relativas

El líquido manométrico conviene que tenga viscosidad pequeña y bajo coeficiente de expansión térmica. En la página 38 pueden verse algunos de los

más utilizados. Mide presiones relativas positivas (sobrepresiones, Fig. 4-9 *a*) o negativas (depresiones, Fig. 4-9 *b*). Se escoge como líquido manométrico uno de ρ adecuada a las presiones a cuya medición se destina el manómetro.

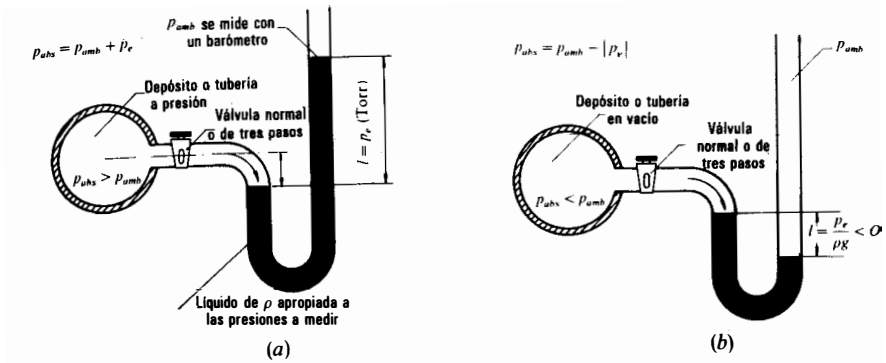


FIG. 4-9. *Manómetro en U de líquido para presiones relativas:* (*a*) sobrepresión (conectado a depósito o tubería a presión), (*b*) depresión (conectado a depósito o tubería en vacío). La presión absoluta se obtiene midiendo con un *barómetro* p_{amb} y aplicando la Ec. (3-4).

4.3.2.4. Vacuómetro en U de líquido para presiones absolutas

(Véase Fig. 4-10.)

Sirve para medir presiones de líquidos o gases empleando un líquido manométrico no miscible.

El desnivel creado en la columna del manómetro es l. La lectura de este vacuómetro como la de todos los manómetros de líquido se basa en la Ec. (4-5).

La explicación que sigue es, pues, universal.

La Ec. (4-5): $p + \rho g z = C$, entre dos puntos cualesquiera 1 y 2, puede escribirse así:

$$p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1$$

y

$$\boxed{p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2)} \qquad (4\text{-}9)$$

— Si el punto 2 está más bajo que el 1 su presión es la del punto 1 + (densidad × g × la profundidad a que se encuentra 2 con relación a 1). Por el contrario, si el punto 2 está más alto que el 1 su presión es la del punto 1 − (densidad × g × la altura a que se encuentra 2 con relación a 1). Este último caso se da en la Fig. 4-9 *b*.
— Si $z_1 = z_2$, de la Ec. (4-9) se deduce que $p_2 = p_1$ (segunda propiedad de la presión, pág. 34).

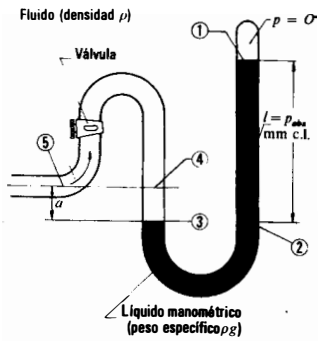


FIG. 4-10. *Vacuómetro de líquido* para presiones absolutas. Cuando el nivel en ambas ramas es igual, $p_a = 0$, o sea el vacío es el 100%.

En la Fig. 4-10, llamando ρ a la densidad del fluido en cuyo seno se quiere medir la presión y ρ_m a la densidad del líquido manométrico y teniendo en cuenta que sobre 1 reina el vacío, luego $p_1 = 0$, se tendrá:

$$p_2 = p_1 + \rho_m g l = \rho_m g l$$
$$p_3 = p_2 = \rho_m g l$$
$$p_4 = p_3 - \rho g a = \rho_m g l - \rho g a$$
$$p_5 = p_4 = \rho_m g l - \rho a$$

Como se ve, se ha dividido el fluido en secciones, correspondientes a los cambios de densidad. En la práctica se escribe inmediatamente una sola ecuación partiendo del punto 1 en nuestro caso y sumándole o restándole los términos correspondientes a las columnas de líquido hasta llegar al punto 5:

$$p_5 = 0 + \rho_m g l - \rho g a = \rho_m g l - \rho g a \qquad (4\text{-}10)$$

— Al aplicar (4-9) en la gran mayoría de los casos pueden despreciarse las columnas de fluido si éste es un gas:

$$p_{a5} = \rho_m g l$$

Si el fluido fuera un líquido p_{a5} vendría dado por (4-10).

En efecto, la ρ del agua, por ejemplo, es unas 800 veces mayor que la del aire. Es evidente que si en la Ec. (4-10) ρ_m es agua y ρ aire ρa podrá en general despreciarse en comparación con $\rho_m l$.

En las lecturas de manómetros de ordinario las columnas de gas se desprecian.

(Véanse problemas 4-1 a 4-3.)

En las lecturas de presiones en los líquidos con manómetros de otro líquido manométrico la introducción de aire en el tubo en U o en su conexión puede conducir a un error muy grande en la lectura al computar como columna líquida una columna de aire. Para evitar este error se debe purgar de aire el manómetro antes de proceder a su lectura. Para ello basta proveer al manómetro con una válvula de 3 pasos instalada en lugar adecuado.

4.3.2.5. Manómetro y vacuómetro de cubeta

El manómetro de la Fig. 4-9 *a* tiene el inconveniente de que el término correctivo $\rho g a$ en la Ec. (4-10) es variable. *El manómetro* o *vacuómetro* de cubeta de las Figs. 4-11 *a* y *b* evita este inconveniente, si el área de la cubeta es suficientemente grande. El *cero* se ajusta de una vez para siempre.

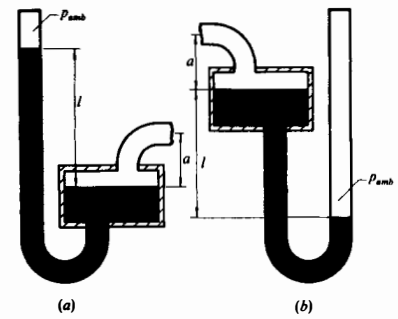


FIG. 4-11. (*a*) *Manómetro de cubeta;* (*b*) *vacuómetro de cubeta.* Estos manómetros lo mismo que el barómetro de cubeta de la Fig. 4-7 evitan el tener que mover constantemente la escala para leer presiones.

4.3.2.6. Manómetro diferencial

Mide la diferencia de presiones entre dos puntos. De ahí su nombre (Fig. 4-12). Observando la figura, se tiene

$$p_1 = p_2 - \rho g a - \rho g l + \rho_m g l - \rho g l + \rho g l + \rho g a$$

que se reduce a

$$p_1 - p_2 = l g (\rho_m - \rho) \qquad (4\text{-}11)$$

donde ρ_m — densidad del líquido manométrico, mercurio en el caso de la figura

ρ — densidad del fluido, agua en el caso de la figura. Si el fluido fuera un gas el término $\rho g l$ en la Ec. (4-11) podría despreciarse según lo dicho.

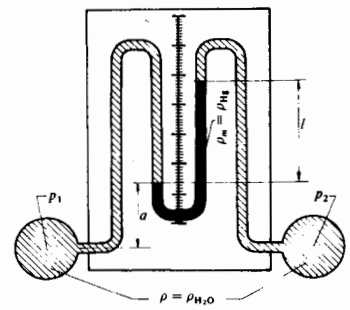


FIG. 4-12. *Manómetro diferencial.* La sensibilidad del manómetro es tanto mayor cuanto la diferencia $\rho_m - \rho$ sea menor En la figura

$\rho = 1.000$ kg/m³ ; $\rho_m = 13.600$ kg/m³

En el caso de la Fig. 4-12, expresando las presiones en alturas, es decir, dividiendo ambos miembros de la Ec. (4-11) por ρg, se tendrá:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = l\,(\delta_{Hg} - 1) \qquad (4\text{-}12)$$

La ecuación general (4-11) demuestra que un manómetro diferencial será tanto más sensible (mayor lectura l para una diferencia de presiones $p_1 - p_2$ dada) cuanto más próxima esté la densidad ρ_m del líquido manométrico de la densidad ρ del fluido, donde se mide la presión. *Esto se ha de tener en cuenta al diseñar un manómetro diferencial de líquido.*

(Véanse problemas 4-4 a 4-6.)

4.3.2.7. Piezómetro diferencial

El piezómetro diferencial, que se representa en la Fig. 4-13, sirve para medir diferencias de presiones en líquidos solamente y se distingue del manómetro diferencial ordinario en que no precisa de líquido manométrico especial. Consta de dos tubos de vidrio 1 y 2,

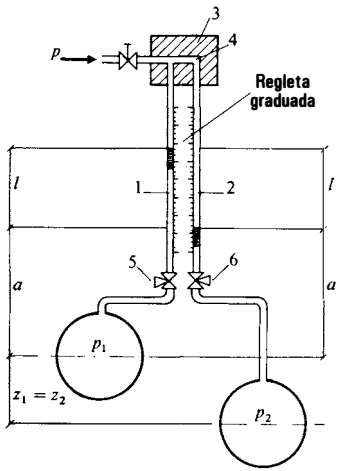


FIG. 4-13. *Piezómetro diferencial.*

que se conectan en sus extremos inferiores con los puntos, donde se desea hacer la medición. Los extremos superiores se fijan a una caja 3. Por el conducto 4 se suministra aire a una presión inferior a las presiones p_1 y p_2. Las válvulas de tres pasos 5 y 6 sirven para desconectar el manómetro y para purgar el aire. Procediendo como se ha explicado en la Sec. 4.3.2.4, tendremos:

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) - \rho g\, a + \rho g\, l + \rho g\, a$$

y

$$p_1 - p_2 = \rho g\, l - \rho g(z_1 - z_2)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = l - (z_1 - z_2)$$

y finalmente en el caso particular de que $z_1 = z_2 = 0$:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = l$$

donde l — lectura del manómetro.

4.3.2.8. Micromanómetro de tubo inclinado

Se representa en la Fig. 4-14. El líquido manométrico suele ser alcohol. (Véase lo dicho en la pág. 38.) Se utiliza para medir con precisión pequeñas presiones del orden de 250 a 1.500 Pa. La ventaja de este manómetro es la amplificación que se obtiene en la lectura, l, al dividir Δh por sen α.

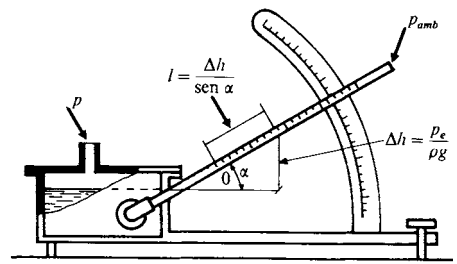


FIG. 4-14. *Micromanómetro de tubo inclinado* dotado de dispositivo que permite variar α para aumentar la sensibilidad en la medida de presiones pequeñas.

En efecto, llamando como siempre p_{amb}, p_{abs} y p_e a la presión atmosférica, a la presión absoluta y a la presión relativa, respectivamente, se tiene:

$$p_{abs} = p_{amb} + \rho g\, \Delta h$$

o bien

$$p_e = \rho g\, \Delta h = \rho g l \cdot \text{sen } \alpha$$

donde ρ — densidad absoluta del líquido manométrico.

Haciendo α muy pequeño se consigue un l grande para una presión p_e pequeña, es decir, se aumenta la precisión del instrumento. Algunos manómetros se construyen de manera que pueda fácilmente variarse α.

La Fig. 4-15 es una foto del banco de pruebas de un motor diesel Büssing del Laboratorio de Ensayo de Máquinas de Fluidos del I.C.A.I., donde puede verse un micromanómetro de tubo inclinado para medir la depresión producida en un medidor Meriam de flujo laminar, con el que se mide el caudal de aire absorbido por el motor.

La Fig. 4-16 representa un manómetro inclinado de precisión Meriam A-420 del Laboratorio de Ensayo de Máquinas del I.C.A I., con tambor giratorio de 16 escalas y unidad compensadora de presión y temperatura (4).

(4) Véase Claudio Mataix, *Nuevo laboratorio de ensayo de máquinas de fluido*, Madrid, 1969.

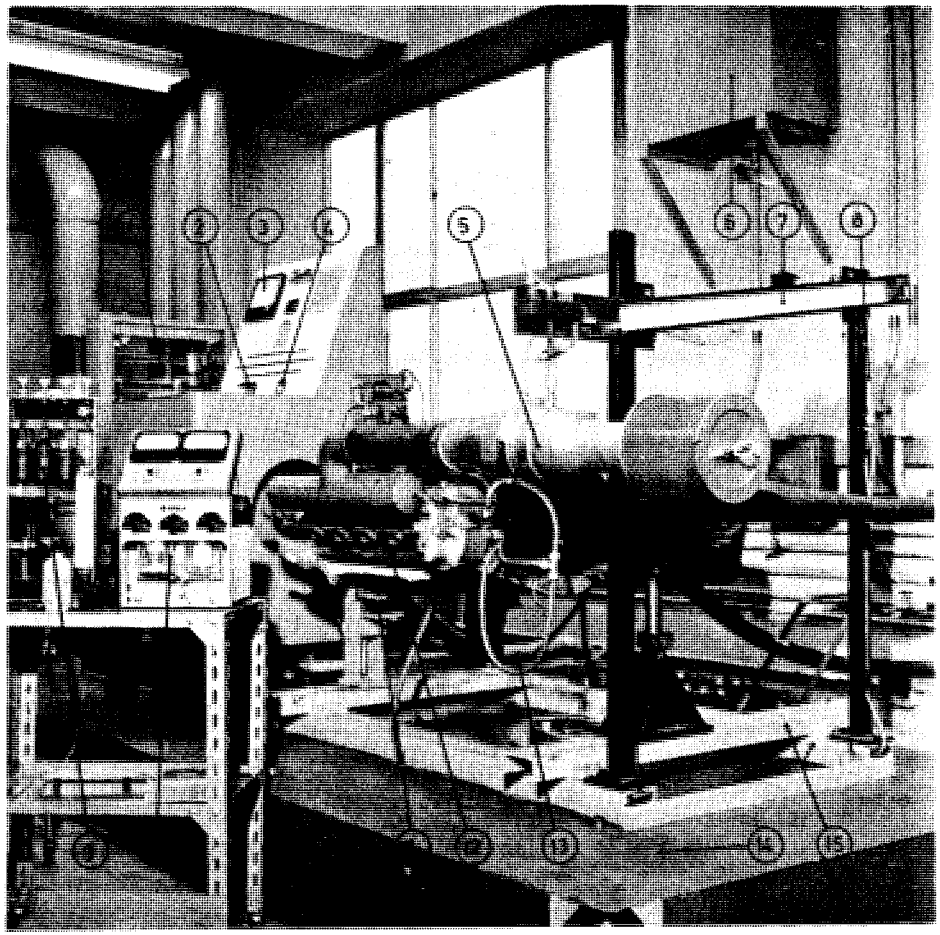


FIG. 4-15. Uno de los nueve *bancos universales de ensayo, de motores de combustión interna* (dos de ellos son dobles) del Laboratorio de Ensayo de Máquinas de Fluidos del I.C.A.I. En él la admisión del aire a los motores se mide con gran precisión con el medidor Meriam de flujo laminar (5) que produce una depresión que se mide con el manómetro inclinado Meriam (7) conectado como manómetro diferencial.

4.3.2.9. Multimanómetros

En los laboratorios se utilizan con mucha frecuencia baterías de manómetros para medir varias presiones simultáneamente. La foto de la Fig. 8-5 representa uno de estos multimanómetros instalado en un pequeño túnel aerodinámico subsónico del Laboratorio de Ensayo de Máquinas de fluido del I.C.A.I.

4.3.2.10. Manómetro diferencial tórico

Se utiliza frecuentemente como manómetro diferencial. Según el líquido manométrico utilizado se adapta fácilmente este instrumento a la medición de diferencias de presiones entre 1 bar y 250 mbar ($100 - 25 \cdot 10^3$ Pa). El líquido manométrico se encuentra en un

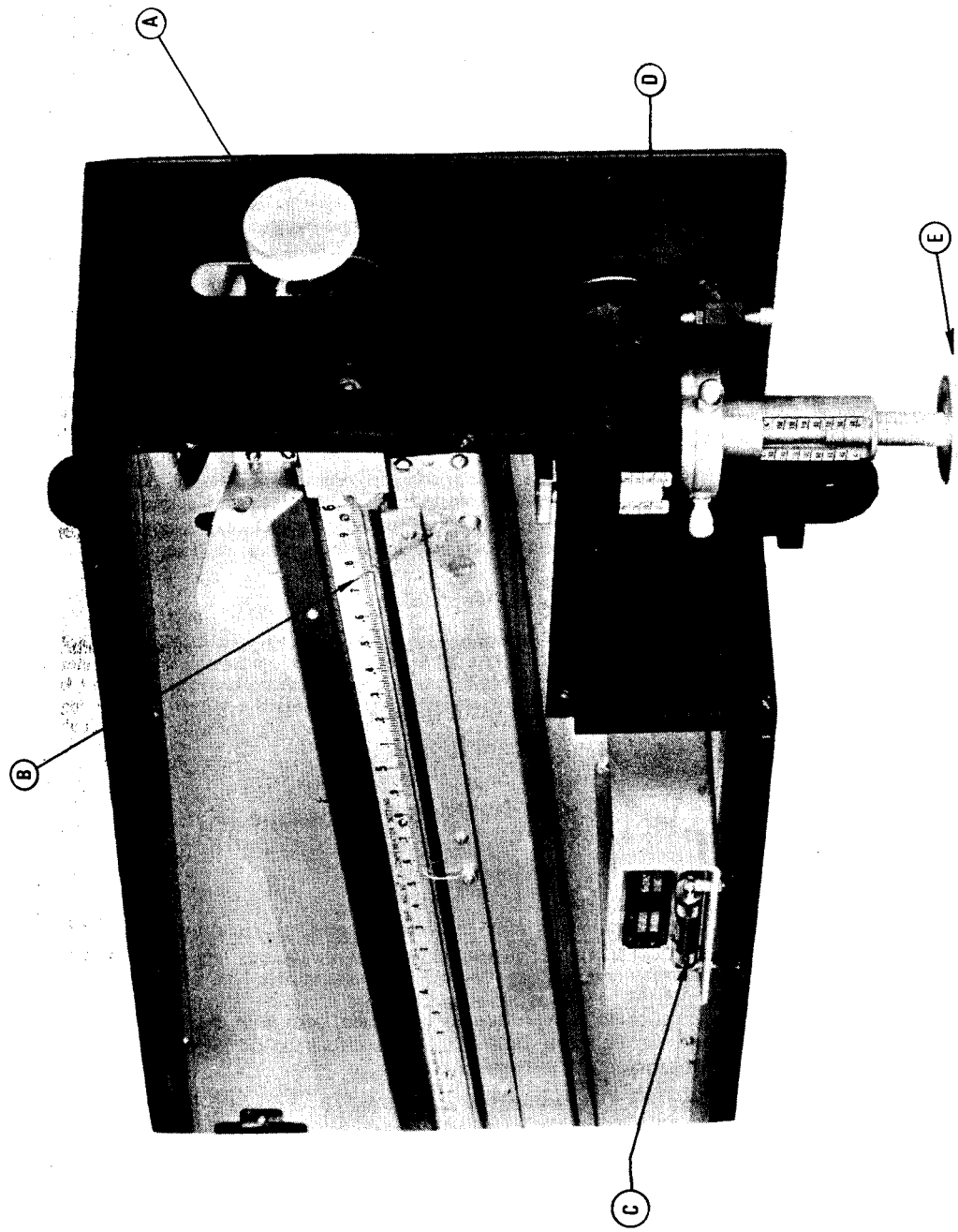


FIG. 4-16. *Manómetro inclinado* Meriam A 420 del L.E.M. del I.C.A.I. de gran precisión con tambor giratorio de 16 escalas: A. Botón para giro del tambor de 16 escalas. B. Tambor giratorio. C. Nivel. D. Unidad compensadora de presión. E. Unidad compensadora de temperatura.

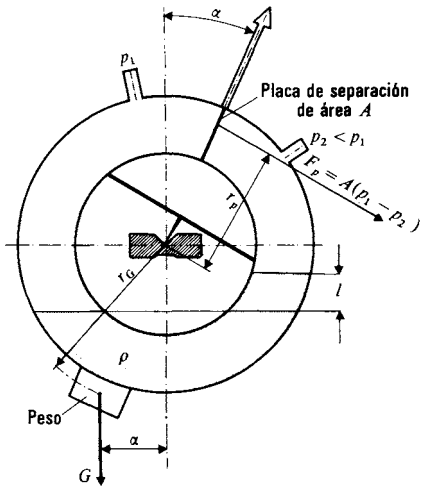


FIG. 4-17. *Manómetro diferencial tórico o* balanza anular.

anillo tórico (véase Fig. 4-17) dividido en dos mitades por una placa de separación sobre cuyas caras de sección A actúan las presiones p_1 y p_2 que se quieren medir. Llamando F_p a la resultante de las fuerzas de presión a uno y otro lado de la placa, se tiene

$$F_p = A(p_1 - p_2)$$

El equilibrio de los momentos de este manómetro, llamado también *balanza anular*, conduce a la siguiente ecuación:

$$F_p\, r_p = Ga = G\, r_G \operatorname{sen} \alpha$$

y

$$(p_1 - p_2)\, A\, r_p = G\, r_G \operatorname{sen} \alpha$$

y finalmente

$$p_1 - p_2 = K \operatorname{sen} \alpha$$

donde $K = \dfrac{G\, r_G}{A \cdot r_p}$ — es la constante del instrumento, cuya escala está graduada en unidades de presión.

La densidad ρ no ejerce, como se ve, influjo en la medida, pero sí en el tamaño del instrumento, porque cuanto menor sea ρ para una misma diferencia de presiones $p_1 - p_2$ mayor será l y mayor el tamaño del instrumento.

Ventajas e inconvenientes de los manómetros de líquido.

Las ventajas son:
- sencillez de construcción y bajo precio
- gran precisión. (Los errores de medición pueden provenir de errores de la escala misma, de errores en el valor de ρ y de errores en la lectura.)

Los inconvenientes son:
- gama relativamente pequeña de presiones medibles; para presiones grandes las dimensiones del instrumento son prohibitivas; con mercurio podría llegarse a medir una presión máxima de unos 4 bar.
- fragilidad del instrumento de vidrio.

Los manómetros de líquido son de uso frecuente en los laboratorios y menos frecuente en la industria.

4.3.3. Manómetros elásticos

Los manómetros elásticos y los manómetros de émbolo (véase la Sec. 4.3.4) a diferencia de los manómetros de líquido tienen una gama de presiones muy amplia, pudiéndose construir para medir desde un vacío del 100 por 100 hasta 10.000 bar y aún más. Esto, unido a su sencillez, su pequeño tamaño y su robustez de construcción, ha sido la causa de su extensa aplicación en la industria.

En los manómetros elásticos la presión del fluido actúa sobre un resorte, un tubo elástico, una membrana ondulada, un fuelle metálico, etc., o combinación de estos elementos, y se transmite a una aguja indicadora, que recorre una escala graduada, a través de un mecanismo sencillo de palanca, sector y piñón.

4.3.3.1. Manómetro de tubo de Bourdon para presiones absolutas

En el interior del tubo elástico de Bourdon (Fig. 4-18) se ha hecho el vacío. La presión a medir actúa sobre el exterior del tubo. La sección transversal del tubo es elíptica. Bajo el influjo de la presión exterior la sección elíptica del tubo se deforma. La deformación se transmite a la aguja indicadora por el mecanismo esquematizado en la figura.

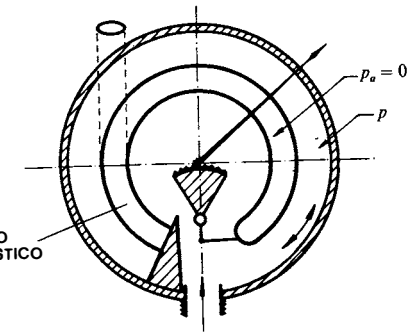


FIG. 4-18. *Manómetro de Bourdon para presiones absolutas.* En el interior del tubo elíptico se ha hecho el vacío: la deformación de dicho tubo, transmitida por el sector y piñón a la aguja indicadora, es función de la presión absoluta.

4.3.3.2. Manómetro de tubo de Bourdon para presiones relativas

El principio de funcionamiento (Fig. 4-19) es el mismo que el de la Fig. 4-18, con la diferencia de que la presión a medir actúa ahora en el interior del tubo de sección elíptica.

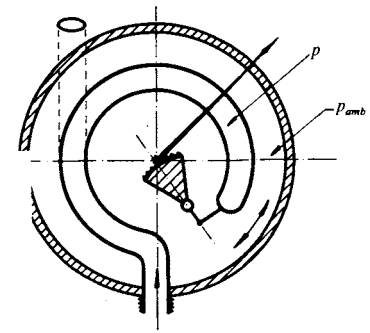


FIG. 4-19. *Manómetro de Bourdon para presiones relativas.* En este caso la deformación del tubo elíptico es función de la presión relativa, porque la presión a medir actúa en el interior del tubo y la presión atmosférica en el exterior.

En los manómetros de tubo, según construcción, se pueden medir presiones desde -1 bar en los vacuómetros hasta 10.000 bar en los manómetros. Los más exactos permiten medir con una precisión del 0,1 al 0,6% del valor de la escala; mientras que en los manómetros clásicos industriales la precisión puede ser del 1 al 1,6% del valor de la escala.

4.3.3.3. Manómetro de membrana

En este manómetro (Fig. 4-20) el órgano elástico es una membrana metálica ondulada que se fija entre la parte superior e inferior de la caja fija del manómetro. La deformación originada por la presión se transmite a la aguja por el mecanismo de palanca, cremallera y piñón que se representa en la figura.

Los manómetros de membrana son apropiados para medir depresiones y presiones, estas últimas hasta unos 25 bar.

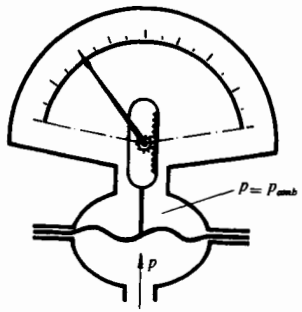


FIG. 4-20. *Manómetro de membrana.*

4.3.3.4. Manómetro diferencial combinado de diafragma y resorte

Es análogo al de la Fig. 4-20 y se representa en la Fig. 4-21. Sobre una cara del diafragma actúa una presión y sobre la cara opuesta actúa la otra presión. La deformación de la membrana y la lectura de la aguja es función de la diferencia de presiones.

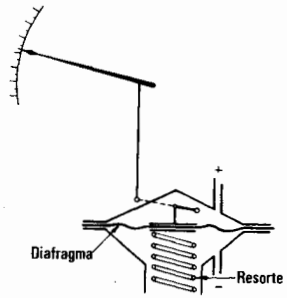


FIG. 4-21. *Manómetro diferencial combinado de diafragma y resorte.*

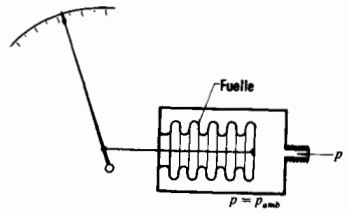


FIG 4-22. *Manómetro de fuelle.*

4.3.3.5. Manómetro de fuelle metálico

El esquema de este manómetro de la Fig. 4-22 indica suficientemente su principio de funcionamiento

Ventajas e inconvenientes de los manómetros elásticos

Las ventajas de los manómetros elásticos son las siguientes: son portátiles, universales (pueden ser construidos para presiones absolutas o para presiones relativas, estos últimos como vacuómetros, manómetros o vacuo-manómetros), sencillez de construcción e instalación y gama amplísima de presiones medibles, según materiales, tipo de construcción y tamaño.

Sin embargo, los manómetros elásticos están sujetos a deformaciones remanentes, desgasto del mecanismo de transmisión, que aconsejan una periódica revisión de estos instrumentos para corregir estos errores o determinar las correcciones en la lectura, que sirvan para compensarlos.

En su instalación es conveniente incluir una llave de paso para protección del instrumento cuando no se está utilizando. Recuérdese también lo dicho anteriormente sobre la utilización de una llave de 3 vías que permita purgar el aire de los tubos de conexión y evitar los errores que podrían surgir al computar una columna de aire como columna de líquido.

4.3.4. Manómetro de émbolo

Los manómetros de émbolo son instrumentos de gran precisión y por otra parte se prestan fácilmente a la medición de grandes presiones. Por la primera propiedad se emplean mucho como taradores los manómetros metálicos de todo tipo que requieren una verificación de tiempo en tiempo.

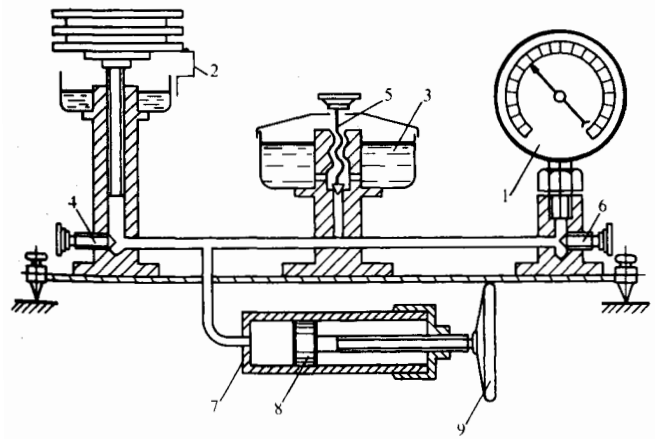


FIG. 4-23. *Tarador de manómetros.* El manómetro que se desea tarar 1 se compara con la presión originada por las pesas conocidas dispuestas en 2; 3 es un depósito de aceite; 4, 5 y 6 son válvulas; 7 es un cilindro en el que se varía la presión del aceite por medio del émbolo 8 y del volante 9.

4.3.4.1. Manómetro de émbolo como tarador de manómetros

Puede verse en la Fig. 4-23. El tarador de manómetros tiene una exactitud del $\frac{1}{1.000}$ hasta el $\frac{1}{10\,000}$ de la presión medida, según el tipo de construcción.

Consta de un pistón 1 que se mueve libremente con holgura mínima en el cilindro 2. El pistón está sometido por su cara inferior a la presión del aceite, cuya viscosidad se escoge de acuerdo con el juego existente entre el émbolo y el cilindro. Dicha presión puede variarse mediante la bomba manual 4. El pistón por la cara superior está sometido a su propio peso y a las pesas circulares 5 que se varían hasta equilibrar la presión del aceite.

A esta misma presión está sometido el manómetro metálico 6 que se quiere tarar. Evidentemente:

$$p = \frac{G_e + G_W}{A_e}$$

donde G_e — peso del émbolo
G_W — peso de los discos 5 añadidos
A_e — área del pistón.

Los constructores de estos aparatos de gran precisión suministran datos y fórmulas, que tienen en cuenta errores posibles provenientes de la compresibilidad, temperatura, etc., y sobre todo del rozamiento del émbolo sobre el cilindro. Para reducir este último al mínimo el émbolo se hace girar manualmente mediante un dispositivo de giro.

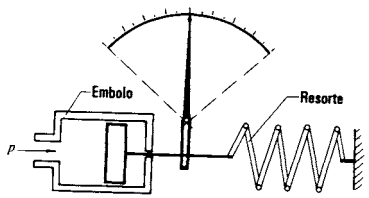


FIG. 4-24. *Manómetro de émbolo y resorte.*

4.3.4.2. Manómetro de émbolo y resorte

El principio de este manómetro puede verse en la Fig. 4-24.

Este principio se aplica a la construcción de manómetros industriales robustos (véase Fig. 4-25) apropiados a las presiones más elevadas o también a casos como, por ejemplo, el de las prensas hidráulicas, donde la presión fluctúa violentamente y hay que sacrificar la precisión a la robustez.

En el otro extremo los manómetros de émbolo son apropiados también para la medición de muy pequeñas presiones y vacíos y se construyen también como manómetros diferenciales.

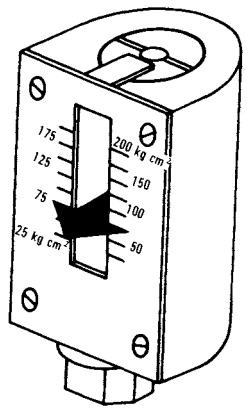


FIG. 4-25. *Manómetro industrial.* Instrumento robusto para grandes presiones. La presión actúa sobre un pequeño pistón contra la compresión de un resorte según un esquema análogo al de la Fig. 4-24.

4.3.5. Transductores de presión eléctricos

Transductor es un instrumento que transforma energía de una clase en energía de otra clase que guarda una relación conocida con la primera, a fin de poderla medir más fácilmente, o procesarla o transmitirla a distancia.

Los transductores de presión transforman la medida de presión en una medida eléctrica. La industria y la técnica, incluyendo la técnica espacial, ha desarrollado un gran número de transductores, algunos de ellos muy sofisticados, cuya teoría y estudio detallado dejamos a los libros especializados en instrumentación. Aquí solo expondremos en resumen el funcionamiento de los mismos.

Los transductores eléctricos de presión son muy apropiados para la medición de presiones muy pequeñas o presiones muy grandes, así como para la medición de presiones instantáneas, que varían rápidamente con el tiempo. Sin embargo, en general la precisión de la medida es menor que la de los otros tipos de manómetros hasta ahora estudiados. Muchos de los instrumentos que vamos a describir se adaptan muy bien a la transmisión a distancia por cable eléctrico o por radio (telemetría espacial) y constan de un captador de presión o transductor, que mide la presión y la convierte en una señal eléctrica (este es el manómetro propiamente tal), de una interconexión (por ejemplo, un amplificador) y un receptor, que puede ser bien un simple indicador bien un registrador.

4.3.5.1. Transductores de resistencia

La presión que se ejerce sobre la superficie de un conductor o semiconductor altera su resistencia. La medición eléctrica de esta variación es una medida de la presión que es función de la misma.

4.3.5.2. Transductores de capacidad

Una de las placas de un condensador es al mismo tiempo membrana sobre la que actúa la presión a medir, deformándola y variando la capacidad del condensador con la distancia entre las placas. Esta variación proporcional a la variación de la presión se mide eléctricamente.

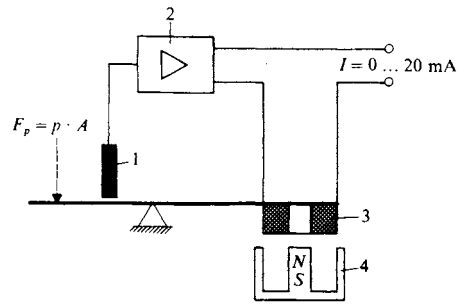


FIG. 4-26. *Transformador inductivo* (según la firma Hartmann und Braun AG de Alemania).

4.3.5.3. Transductores de inducción

El principio de funcionamiento puede verse en la Fig. 4-26. La fuerza F_p originada por la presión actúa sobre el brazo izquierdo de la palanca, creando por inducción una corriente en 1, que es amplificada en 2 y fluye a la bobina móvil 3, que se introduce en el electroimán 4, creando una fuerza restauradora que restituye la palanca a su posición de equilibrio. La corriente I que fluye por la bobina es una función de la fuerza F_p y, por tanto, de la presión p.

4.3.5.4. Transductores piezoeléctricos

Entre dos cristales piezoeléctricos de cuarzo (o bien de turmalina, bromuro de titanio, etc.) se crea una diferencia de potencial (efecto piezoeléctrico) al actuar sobre la cara de uno de ellos la fuerza debida a la presión $F_p = p \cdot A$. Estos instrumentos son menos apropiados para medir presiones estáticas, pero son muy utilizados para la medición de presiones fluctuantes con el tiempo, por ejemplo, las que tienen lugar en la cámara de combustión de un motor de combustión externa. De esta manera la variación de la presión puede fácilmente visualizarse en un oscilógrafo.

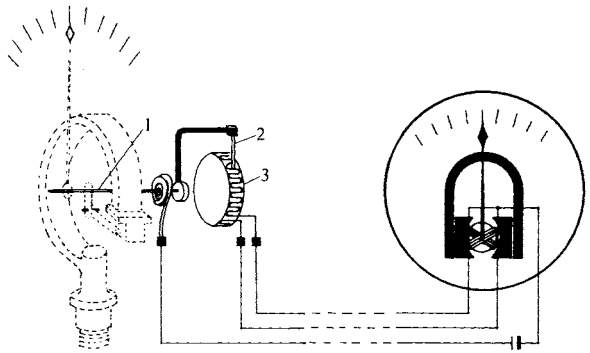


FIG. 4-27. *Transmisión potenciométrica* a distancia (según la firma Hartmann und Braun AG de Alemania).

4.3.5.5. Transductores potenciométricos

Se utilizan con frecuencia en conexión con los manómetros elásticos. Como se muestra en la Fig. 4-27, el eje mismo 1 de la aguja del manómetro está mecánicamente acoplado al cursor 2 del potenciómetro cilíndrico 3. En la transmisión a distancia (hasta unos 50 km) este tipo de «pick-up» de presión es más utilizado que el captador capacitativo o inductivo descrito en las Secs. 4.3 5.2 y 4.3.5.3.

Los manómetros elásticos se utilizan también como contactores de valores límites de presión para la parada y puesta en marcha automática de bombas y compresores.

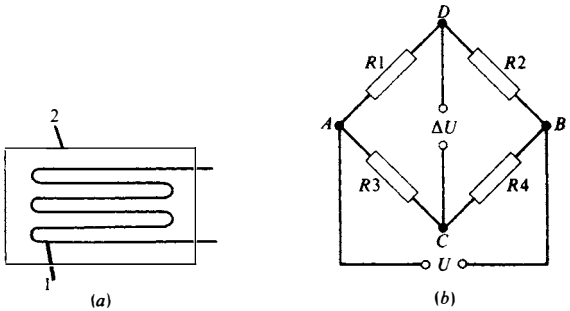


FIG. 4-28. *Banda extensométrica* y puente de medida.

4.3.5.6. Transductores de bandas extensométricas

En la Fig. 4-28 se representa una de estas bandas extensométricas, de las que la industria y los ensayos experimentales hacen uso frecuentísimo en múltiples campos de la técnica.

La banda extensométrica consiste en un conductor muy fino 1 (de 0,025 a 0,03 mm de diámetro) de una aleación de gran resistividad, que se dobla múltiplemente y se fija entre dos capas 2 de material sintético o plástico aislante. Estas bandas se fijan con pegamento

o se sueldan a un elemento elástico, que en nuestro caso se deforma con la presión. Los extremos del conductor se fijan a los de una rama de un puente de Wheatstone ($R1$ en la figura). El puente se alimenta con una tensión U alterna o continua. Las tres resistencias restantes se escogen de manera que con la banda sin carga el puente esté equilibrado. Se verifica:

$$\frac{R1}{R3} = \frac{R2}{R4}$$

lo cual se consigue variando la resistencia de una de las ramas del puente, que es potenciométrica.

Al aplicar la presión el conductor de la banda se dilata o se estrecha y su resistencia eléctrica varía, el puente se desequilibra y el desequilibrio proporcional a la presión se lleva a un aparato indicador o registrador, que da la medida directamente en unidades de presión.

Estos transductores se emplean mucho para la medición de presiones variables con el tiempo. El error de la medida viene a ser menor del 2%. Sus ventajas son: dimensiones y masa pequeñas, posibilidad de medir presiones pequeñas, pequeña inercia y posibilidad de transmisión de medida a distancia. Las bandas extensométricas tienen un sinnúmero de aplicaciones, además de la medida de la presión, como, por ejemplo, la medida de la fuerza, del par, de la elongación, de las vibraciones, etc. En las Figs. 4-29 a 4-32 pueden verse algunas realizaciones modernas de los aparatos hasta aquí descritos.

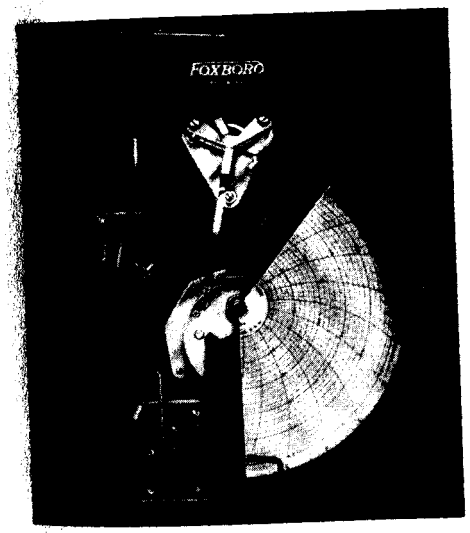


FIG. 4-29. Modelo B5137 seccionado de *registrador de presión* de la casa Foxboro de Estados Unidos, con medidor de presión elástico de espiral. En él pueden registrarse simultáneamente en un mismo diagrama hasta 4 presiones. Se construyen para gamas de sobrepresión distintas de 0 a 1.950 Pa y hasta 5.500 bar, así como para vacíos de 0 a 4.900 Pa. A este registrador pueden incorporarse diversos manómetros elásticos, así como fuelles, elementos espirales, elípticos, etc. El elemento elástico convierte la presión en un movimiento mecánico que acciona la plumilla, el indicador, el transmisor a distancia, la señal de entrada de un controlador de nivel, etc., o una combinación de éstos: transmisor-indicador, registrador-controlador, etc.

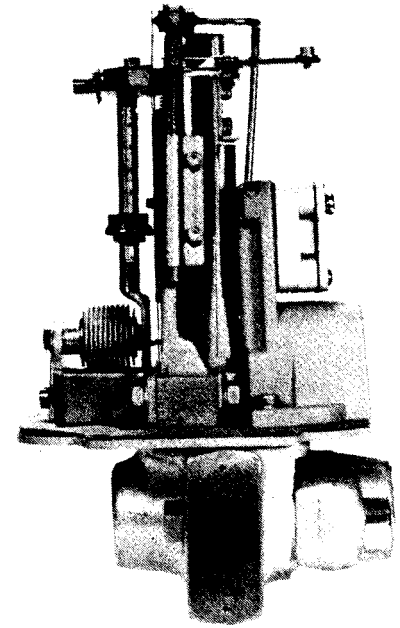


FIG. 4-30. *Transmisor neumático de presión* modelo 11 GM de la firma Foxboro de Estados Unidos. Este aparato mide y transmite presiones de −1 bar a 200 bar. El captador de presión es del tipo de caja o cápsula elástica de pared gruesa cuya deformación máxima no excede 0,025 mm. La fuerza de presión captada es transmitida neumáticamente incluso a algunos cientos de metros de distancia. La exactitud de este instrumento está dentro del 0,07 % de la presión máxima medible.

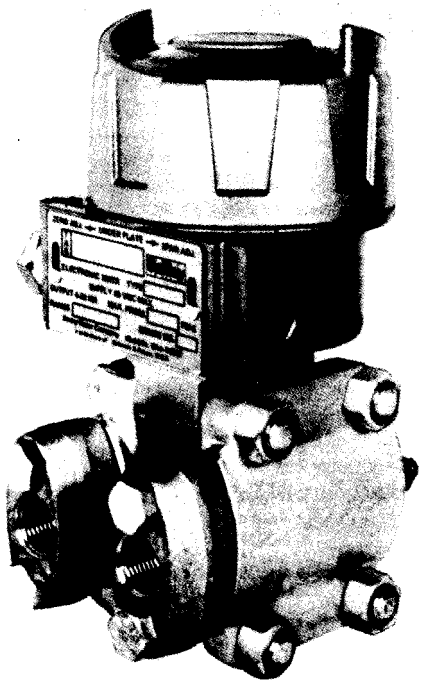


FIG. 4-31. *Transductor electrónico* tipo QQ de semiconductores de la firma Bayley de Estados Unidos. Mide presiones absolutas de 600 a 1.600 Pa o diferencias de presión desde 0 a 1,24 kPa hasta 0 a 6.900 kPa. La exactitud es del ±0,25 % del valor máximo de escala.

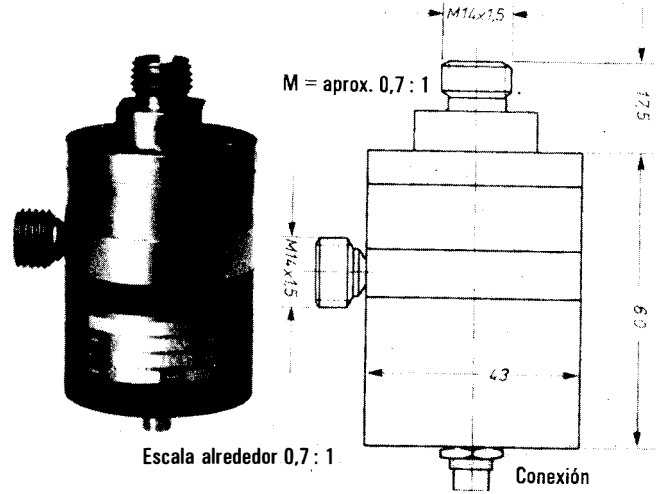


FIG. 4-32. *Captador inductivo de diferencia de presión* de la firma alemana Megatron KG. Mide la diferencia de presiones con membrana única en fluidos corrosivos. El captador incorpora un transformador lineal variable y el circuito electrónico correspondiente. Gama de medida de ±1 bar a ±500 bar.

4.4. PRESION HIDROSTATICA SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA SUMERGIDA

Consideremos el caso general en que el plano donde se encuentra la superficie plana sumergida A forme un ángulo α con el plano piezométrico (Fig. 4-33). La presión p en cada punto multiplicada por dA forma un sistema de fuerzas elementales paralelas dF_p, normales al plano A cuya resultante es una fuerza normal también a dicho plano. La intersección de la línea de aplicación de esta fuerza con la superficie A determina un punto C, que se llama centro de presión, que no coincide en general con el centro de gravedad G de A.

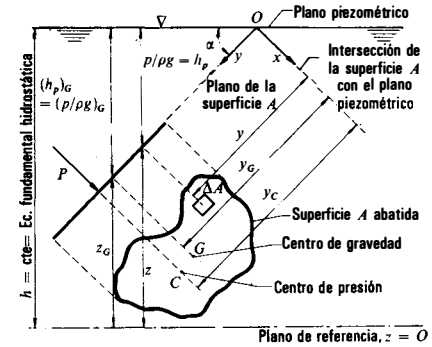


FIG. 4-33. Cálculo de la fuerza total debida a la *presión de un fluido sobre una superficie plana A* y de su punto de aplicación llamado centro de presión *C*.

a) Determinación de la fuerza.

En la Fig. 4-33 se han acotado para el centro de gravedad G de A y para un elemento dA cualquiera las siguientes magnitudes:

z — altura geodésica

$h_p = \dfrac{p}{\rho g}$ — altura de presión: profundidad del punto con respecto a la superficie libre o plano piezométrico

h — altura piezométrica.

Según la Ec.(4-4), o ecuación fundamental de la hidrostática, $h = \dfrac{p}{\rho g} + z = C$.

Observando la figura

$$\frac{p}{\rho g} = y \operatorname{sen} \alpha$$

luego

$$p = \rho g\, y \operatorname{sen} \alpha$$

y la fuerza elemental dF_p debida a la presión sobre el elemento dA (fuerza = presión × superficie) será:

$$dF_p = p\, dA = \rho g\, y \operatorname{sen} \alpha\, dA$$

Siendo paralelas todas las fuerzas dF_p, la fuerza resultante F_p debida a la presión será:

$$F_p = \int dF_p = \rho g \operatorname{sen} \alpha \int y \, dA \tag{4-13}$$

pero según la definición de centro de gravedad

$$\int y \, dA = y_G A$$

donde y_G — coordenada y de G (véase figura); luego

$$\boxed{F_p = \rho g \operatorname{sen} \alpha \, y_G A = \rho g \, (h_p)_G A} \tag{4-14}$$

es decir

La resultante de las fuerzas debidas a la presión sobre una superficie plana sumergida es igual al producto de la densidad del líquido, por la aceleración de la gravedad, por la profundidad del centro de gravedad con relación al plano piezométrico y por el área de la superficie.

b) Determinación del centro de presión, C.

Llamando y_C a la coordenada y del centro de presión, e igualando el momento con relación al eje O-x de la resultante de las fuerzas debidas a la presión a la suma de los momentos de las componentes, se tiene

$$F_p \, y_C = \int y \, dF_p = \rho g \operatorname{sen} \alpha \int y^2 \, dA$$

según la Ec. (4-13), y también

$$y_C = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha \int y^2 \, dA}{\rho g \operatorname{sen} \alpha \int y \, dA}$$

y finalmente

$$\boxed{y_C = \frac{\int y^2 \, dA}{\int y \, dA} = \frac{I_x}{A \, y_G}} \tag{4-15}$$

donde y_C — coordenada y del centro de presiones, C
I_x — momento segundo de la superficie A con relación al eje O-x (5)
y_G — coordenada y del centro de gravedad
A — área de la superficie

(5) El momento segundo de inercia de una superficie material es igual a I multiplicado por la densidad por unidad de superficie (si la densidad es constante).

es decir

La distancia (coordenada y_C) del centro de presiones de una superficie plana a la intersección de dicho plano con el plano piezométrico es igual al cociente de los momentos segundo y primero de la superficie con relación a dicha intersección.

La coordenada x_C se obtendría análogamente mediante la igualdad de momentos:

$$F_p \, x_C = \int x \, dF_p$$

(Véase el problema 4-7.)

4.5. PRESION HIDROSTATICA SOBRE UNA SUPERFICIE CURVA CILINDRICA SUMERGIDA

Consideremos la superficie curva cilíndrica CD de la Fig. 4-34 de generatrices normales al plano del dibujo. La resultante de las fuerzas debidas a la presión se determina por dos componentes F_{px} y F_{pz}.

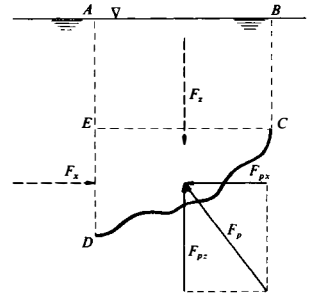


FIG. 4-34. *Presión hidrostática F_p sobre una superficie curva cilíndrica sumergida CD.*

a) Obtención de la componente horizontal, F_{px}. Aislemos como *cuerpo libre* el volumen a la izquierda de la superficie, representado en la figura por ECD, limitado por el plano horizontal EC y el vertical ED. El equilibrio horizontal nos dice que $F_{px} = F_x$, en que F_x es igual en magnitud y línea de acción a la presión que el fluido ejerce sobre el plano vertical ED. Su magnitud se calcula por la Ec. (4-14) y su línea de acción por la Ec. (4-15). Por tanto

La componente horizontal de la resultante de las presiones que un líquido ejerce sobre una superficie curva cilíndrica es igual en magnitud y de sentido contrario a la resultante de las presiones que el fluido ejerce sobre la proyección de la superficie sobre un plano vertical y tiene la misma línea de acción, es decir, pasa por el centro de presión de dicha proyección.

b) Obtención de la componente vertical, F_{pz}. Consideremos ahora como *cuerpo libre* el volumen del líquido *encima de la superficie*, representado en la figura por $ABCD$. El equilibrio vertical nos dice que

$$F_{pz} = F_z$$

que F_z es el peso del fluido del volumen aislado. Y por tanto

La componente vertical de la resultante de las presiones que un líquido ejerce sobre una superficie curva es de igual magnitud y sentido contrario al peso de la columna vertical del líquido contenido entre esta superficie y el plano piezométrico.

Las superficies cilíndricas con generatrices normales al plano del dibujo son de uso muy frecuente en válvulas, vertederos, compuertas, etc. (6).

(Véase el problema 4-8.)

4.6. PRINCIPIO DE ARQUIMEDES. FLOTACION

Es consecuencia inmediata de las Secs. 4.4 y 4.5. En el cuerpo sumergido *EHCD* de la Fig. 4-35 actúa sobre la cara superior la fuerza de presión F_{p1} igual

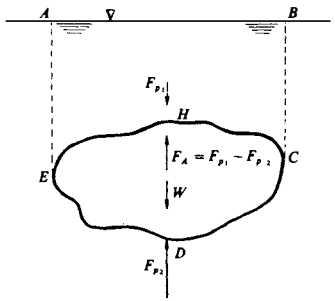


FIG. 4-35. *Principio de Arquímedes.* W es el peso del cuerpo *EHCD* sumergido en un fluido (líquido o gas). F_A es el empuje hidrostático, igual, mayor o menor que W, según los casos.

al peso del líquido representado en la figura por *ABCHE*, y sobre la cara inferior la fuerza de presión F_{p2} igual al peso del líquido representado en la figura por *ABCDE*. El cuerpo está sometido, pues, a un empuje ascensional, que es la resultante de estas dos fuerzas

$$F_A = F_{p2} - F_{p1}$$

pero $F_{p2} - F_{p1}$ es el peso de un volumen de líquido igual al volumen del cuerpo *EHCD*, o sea igual al volumen del líquido desalojado por el cuerpo al sumergirse. Luego, *principio de Arquímedes:*

Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje ascensional igual al peso del líquido que desaloja.

Sobre el cuerpo sumergido *EHCD* actúa también su peso W o sea la fuerza de la gravedad, y se tiene:

a) Si $W > F_A$ el cuerpo se hunde totalmente.
b) Si $W < F_A$ el cuerpo sale a la superficie hasta que el peso del fluido de un volumen igual al volumen sumergido iguale al peso W (fundamento del densímetro, pág. 18).

(6) El caso de la superficie curva no cilíndrica no se considera en este libro.

c) Si $W = F_A$ el cuerpo se mantiene sumergido en la posición en que se le deje.

4.6.1. Equilibrio de los cuerpos totalmente sumergidos (submarino, dirigible)

En este caso se cumple $W = F_A$.

Sin embargo, además de la gravedad y del empuje hidrostático los cuerpos sumergidos están sometidos a otras fuerzas que pueden apartarles de la posición de equilibrio, como el viento, o una corriente submarina. Al intervenir, aunque sea momentáneamente, una fuerza extraña las fuerzas F_A y W dejan de estar alineadas, y aunque el equilibrio de las fuerzas sigue existiendo, aparece un momento producido por el par de fuerzas F_A y W, y pueden ocurrir tres casos:

a) Si el centro de gravedad G, punto de aplicación de la fuerza W, Fig. 4-36 *a*, está situado por debajo del centro de gravedad del fluido desplazado, O, punto de aplicación de F_A, el par M (en la figura en el sentido contrario a las agujas del reloj) tenderá a restaurar el equilibrio

el equilibrio es estable

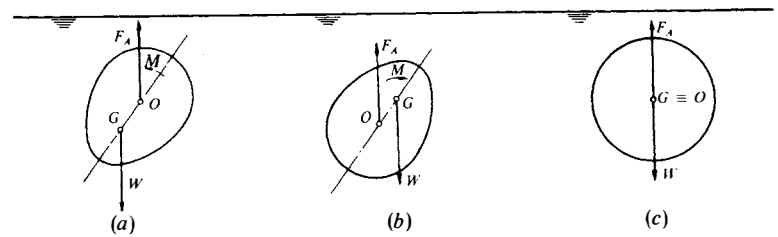


FIG. 4-36. *Equilibrio de un cuerpo sumergido en un fluido:* (*a*) equilibrio estable: el par que surge al separar el cuerpo de su posición de equilibrio tiende a restaurar el equilibrio; (*b*) equilibrio inestable; (*c*) equilibrio indiferente.

b) Si G, Fig. 4-36 *b*, está por encima de O, el par M (en la figura en el sentido de las agujas del reloj) tenderá a aumentar la desviación

el equilibrio es inestable

(es decir, antes de la perturbación el cuerpo estaba en equilibrio inestable).

c) Si G, Fig. 4-36 *c*, coincide con O, la perturbación por una fuerza extraña no produce par alguno

el equilibrio es indiferente

4.6.2. Equilibrio de los cuerpos parcialmente sumergidos (barco)

En este caso el peso W del barco es igual al del líquido desalojado por la porción sumergida, según el principio de Arquímedes.

Se llama:

— *Plano de flotación* al plano *N-N* en que la superficie libre del agua corta al barco totalmente cargado y en la posición normal del barco (sin desviación).

— *Eje de flotación* al eje vertical que pasa por el centro de gravedad del barco y es normal al plano de flotación, *E-E* en la Fig. 4-37 *a*.

Se consideran tres centros que se encuentran en el eje de flotación, cuando no hay desviación:

— *centro de gravedad del barco, G*
— *centro de gravedad del líquido desalojado, O*
— *metacentro*, o punto de intersección del eje de flotación, con la dirección del empuje F_A para un pequeño ángulo de desviación del barco. En la Fig. 4-37 *b* *M* es el metacentro.

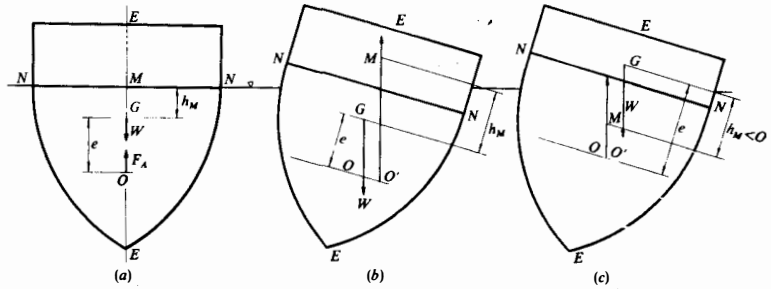


FIG. 4-37 *Equilibrio de un cuerpo parcialmente sumergido.* Las figuras (*b*) y (*c*) representan los casos de equilibrio estable e inestable, respectivamente.

G, si la carga está fija, no se mueve con la desviación del barco. *O* varía al variar con la desviación la forma del volumen sumergido. *M* varía también con la desviación; pero podemos suponer que esta variación es despreciable si el ángulo de desviación es menor de 15°. Puede suponerse que en este caso *O* varía describiendo un arco de círculo con centro en el metacentro.

Pueden ocurrir tres casos:

a) Si el metacentro está por encima del centro de gravedad del barco, al producirse una desviación las fuerzas W y F_A forman un par que tiende a restablecer el equilibrio (Fig. 4-37 *b*):

el equilibrio es estable

b) Si el metacentro se encuentra por debajo del centro de gravedad del barco (por ejemplo, si la bodega está vacía y la cubierta cargada), al producirse una desviación se crea un par W y F_A que tiende a aumentar más la desviación:

el equilibrio es inestable

c) Si el metacentro coincide con el centro de gravedad del barco:

el equilibrio es indiferente

4.7. EQUILIBRIO RELATIVO DE LOS LIQUIDOS

Supongamos un líquido en un recipiente que se mueve: el líquido se mueve por lo tanto también; sin embargo, puede suceder que las partículas del líquido no cambien de posición con relación al recipiente: el líquido se mueve como solidificado; el líquido está en equilibrio relativo (es decir, con respecto al recipiente). Según lo dicho en la página 36, la viscosidad del fluido real no interviene en este fenómeno, cuyo estudio pertenece por tanto a la hidrostática. (Si no hay velocidad relativa ni entre el fluido y el contorno ni entre las capas de fluido, el rozamiento no existe.) En un líquido en *equilibrio relativo la superficie libre del líquido ya no es horizontal*. Estudiaremos los dos casos siguientes:

4.7.1. Recipiente con aceleración lineal constante

El recipiente de la Fig. 4.38 se mueve con movimiento de traslación hacia la derecha con una aceleración constante a. La partícula A de peso W en la superficie libre está sometida a dos fuerzas exteriores: la fuerza F_p debida a la presión normal a esa superficie libre, y el peso W. La fuerza de inercia es el vector cuyo módulo es Wa/g (en la figura se ha dibujado de trazos, porque no es una fuerza que se ejerce sobre A, sino la reacción de A). El principio de D'Alembert dice

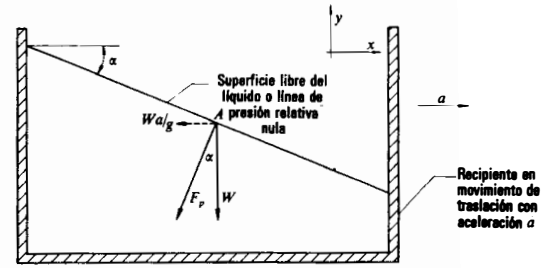


FIG. 4-38. En un recipiente en movimiento con aceleración traslacional constante a la *superficie libre* es un plano inclinado el ángulo α con la horizontal, siendo $\alpha = \text{arc tg}\frac{a}{g}$.

que la suma de todas las fuerzas, tanto en la dirección x como en la dirección y, incluyendo las fuerzas de inercia, es igual a cero. Por tanto:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{px} - Wa/g = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{py} - W = 0$$

de donde

$$F_{pz} = Wa/g \qquad P_y = W$$

y

$$F_{px}/F_{py} = \text{tg}\,\alpha = Wa/Wg = a/g$$

o sea

$$\text{tg}\,\alpha = a/g = C \qquad (4\text{-}16)$$

Para todas las partículas situadas en la superficie libre el ángulo α es el mismo; luego *la superficie libre no es horizontal, pero sí un plano cuya pendiente es la relación de la aceleración horizontal a la aceleración de la gravedad.*

Los planos de igual presión son paralelos a la superficie libre.

4.7.2. Recipiente girando a $\omega = C$

El recipiente de la Fig. 4-39 gira con velocidad angular ω constante alrededor de su eje. ¿Cuál es en este caso la superficie libre? Una partícula A situada en la superficie libre está sometida a las mismas fuerzas F_p debida a la presión y al peso W que en el caso anterior (la fuerza centrípeta está precisamente incluida en esta fuerza F_p) (7). La partícula A posee una aceleración $\omega^2 x$. La aceleración de cada partícula es por tanto variable y es directamente proporcional al radio x. La fuerza de inercia = masa × aceleración centrípeta es la fuerza centrífuga de sentido contrario a la fuerza centrípeta y se ha dibujado con puntos porque la fuerza centrípeta no se ejerce sobre A —sobre A la fuerza que se ejerce es la centrípeta—, sino que es la reacción de A. Aplicando, como antes, el principio de D'Alembert se tiene:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{px} - \frac{W}{g}\omega^2 x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{py} - W = 0$$

de donde

$$F_{px} = \frac{W}{g}\omega^2 x$$

$$F_{py} = W$$

y

$$F_{px}/F_{py} = \text{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2}{g}x$$

En el caso anterior el ángulo α era constante [Ec. (4-16)]. Aquí es variable. Ahora bien, como se ve en la Fig. 4-39

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}$$

(7) Es decir, la partícula está sometida a una fuerza hacia el eje (fuerza centrípeta), que la ejerce la presión de las partículas contiguas de fluido.

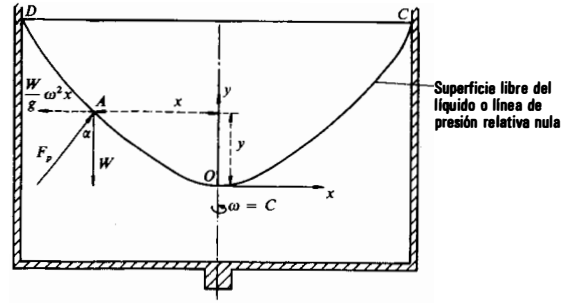
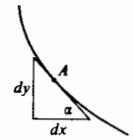


FIG. 4-39. En un recipiente que gira con velocidad angular $\omega = C$ la *superficie libre* es una parábola de ecuación $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$.



ecuación que integrada nos da

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C$$

La constante $C = O$, si $x = O$ para $y = O$, obteniéndose finalmente en el plano la ecuación

$$\boxed{y = \frac{\omega^2 x^2}{y}} \qquad (4\text{-}17)$$

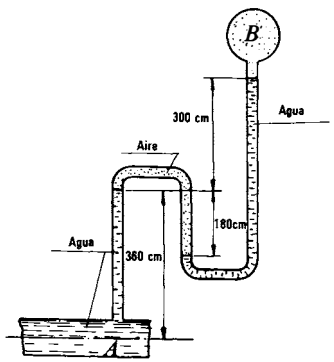
de la parábola DOC, que pasa por el origen de coordenadas. Esta parábola al girar engendra un paraboloide de revolución que es la superficie libre en el caso considerado.

PROBLEMAS

4-1. *Calcúlese la altura de presión absoluta en el punto A de la figura, en m de agua. En B hay aire a una presión absoluta de 500 mbar.*

Aplicando la Ec. (4-9), en que los puntos 2 y 1 son ahora respectivamente A y B en el interior del recipiente de gas y despreciando según lo dicho en esta sección las columnas de aire tendremos:

$$\left(\frac{p_A}{\rho g}\right)_{abs} = \frac{50.000}{1.000 \cdot 9{,}81} + 4{,}8 + 3{,}6 = 13{,}497 \text{ m}$$



4-2. *Un recipiente de gas, fabricado con chapa de acero ($\delta = 7{,}85$), de 9 mm de espesor, tiene la forma de un cilindro invertido de 15 m de diámetro y 9 m de alto. Los refuerzos, roblones, etc., añaden un 2 por 100 al peso del recipiente. $h' = 75$ mm. Densidad del gas, 0,58 kg/m³, y del aire, que se supondrá constante, 1,28 kg/m³. En la conducción del gas a $h = 120$ m se instala un manómetro con agua que marca Δh.*

Calcular:

a) Δh.

b) El contrapeso que mantiene en equilibrio el sistema.

a) Cálculo de Δh.

Calculemos la presión absoluta en el punto A, p_{Aa}, despreciando tan solo las columnas de aire, h', y de gas, Δh.

Por el interior del gas

$$p_{Aa} = p_{amb\,o} + \rho_{ag} g h' - \rho g h$$

Por el aire exterior

$$p_{Aa} = p_{amb\,o} - \rho_{ai} g h + \rho_{ag} g \Delta h$$

Igualando los segundos miembros:

$$p_{amb\,o} + \rho_{ag} g h' - \rho g h = p_{amb\,o} - \rho_{ai} g h + \rho_{ag} g \Delta h$$

y finalmente

$$\Delta h = \frac{\rho_{ag} g h' - \rho g h + \rho_{ai} g h}{\rho_{ag} g}$$

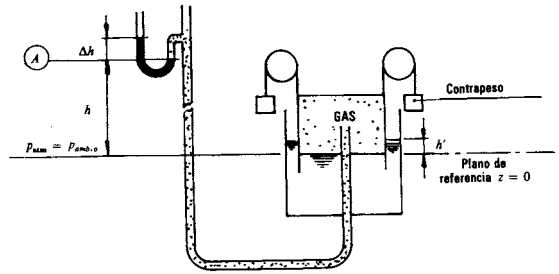
Sustituyendo

$$\Delta h = \frac{1.000 \cdot 0{,}075 - 0{,}58 \cdot 120 + 1{,}28 \cdot 120}{1.000} = 0{,}159 \text{ m}$$

b) Cálculo del contrapeso.

La campana está sometida a la presión (relativa) del gas y a su peso. La resultante de las dos fuerzas anteriores deberá ser equilibrada por el contrapeso *.

Fuerza F_p debida a la presión del gas:



PROB. 4-2

$$F_p = 0{,}075 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi \cdot 15^2}{4} = 130.018 \text{ N}$$

Peso de la campana W:

$$W = \left[\pi \cdot 0{,}009 \left(135 + \frac{225}{4}\right)\right] 1{,}02 \cdot 7.850 \cdot 9{,}81 = 424.749 \text{ N}$$

Valor del contrapeso total 2 C:

$$C = \frac{W - P}{2} =$$

$$C = 294.732 \text{ N}$$

4-3. *Determinar la presión relativa, presión absoluta y porcentaje de vacío creado en la aspiración de la bomba de émbolo de la figura, cuyo vacuómetro de mercurio indica una lectura $\Delta h = 550$ Torr. La presión barométrica del lugar es 730 Torr.*

Aplicando la Ec. (4-9), y según lo dicho en la pág. [65], tendremos:

a) Presión relativa:

$$-\rho_{Hg} g \Delta h = -13.600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}550 = -73.379 \frac{N}{m^2} = -0{,}73379 \text{ bar}$$

b) Presión absoluta:

La presión ambiente es

$$p_{amb} = 0{,}730 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-5} = 0{,}9739637 \text{ bar}$$

luego

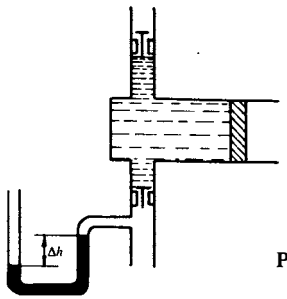
$$p_{abs} = p_e + p_{amb} = 0{,}24015 \text{ bar}$$

c) Porcentaje de vacío:

* Además existe la fuerza de empuje hacia arriba, que experimenta la campana (véase Sec. 4.6), que no se tendrá en cuenta, porque se desconoce el grado de sumergencia de la campana.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el Problema 3-3:

$$\text{Porcentaje vacío} = \frac{-p_e}{p_{amb}} \cdot 100 = 75{,}3\,\%$$



PROB. 4-3

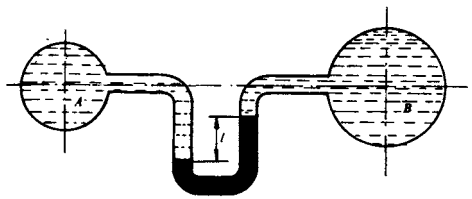
4-4. *Determinar la diferencia de presiones en las tuberías A y B de la figura, por las que circula agua. En el manómetro diferencial de mercurio l = 50 mm. Los tubos están llenos de mercurio y agua sin aire.*

Apliquemos la Ec. (4-12), sustituyendo *1* y *2* por *A* y *B* y siendo $\rho = 1.000$ kg/m³,

$$\frac{p_A - p_B}{\rho g} = l(\delta_{Hg} - 1)$$

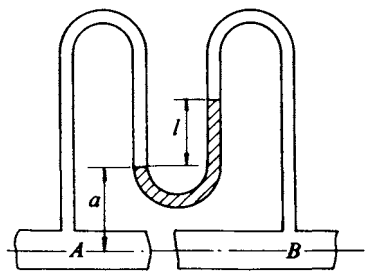
De donde

$$p_A - p_B = 0{,}05 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 12{,}6 = 6.180{,}3\ \frac{N}{m^2}$$



PROB. 4-4

4-5. *En la figura el líquido manométrico es agua y el líquido de las tuberías aceite. l = 90 cm. Densidad relativa del aceite, 0,85.*



PROB. 4-5

Calcular la diferencia de presiones entre los puntos A y B.

En este caso, siendo ρ — peso específico del agua y ρ_m — peso específico del aceite, se tendrá:

$$p_A = p_B - \rho g a - \rho g l + \rho_m g l + \rho g a$$

y

$$p_A - p_B = l(\rho_m - \rho)g = 0{,}90(1.000 - 850)9{,}81 = 1.324{,}4\ \frac{N}{m^2}$$

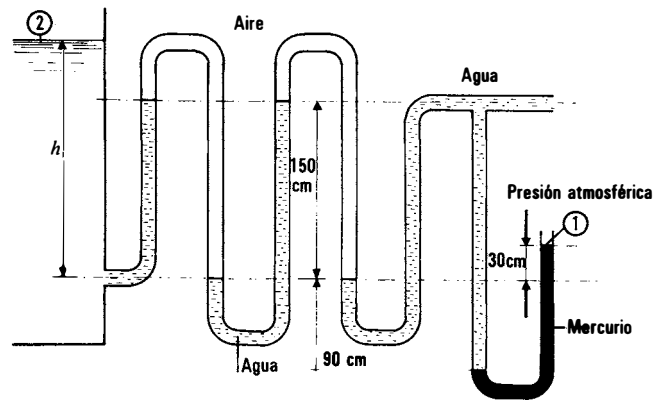
4-6. *Calcular h en la figura.*
¿Cuál sería el valor de h si los espacios llenos de aire en la figura estuvieran llenos de agua?

a) Con aire en los espacios indicados en la figura

$$p_2 = p_1 + [13.600 \cdot 0{,}3 + 13.600 \cdot 0{,}9 - 1.000 \cdot 0{,}9 + 1.000 \cdot 1{,}5 - (h - 1{,}5) \cdot 1.000]\ 9{,}81$$
$$p_2 = p_1 = 0 \qquad 0 = 0 + 18.420 - 1.000\ h$$
$$h = 18{,}42 \text{ m}$$

b) Sin aire

$$p_2 = p_1 + [13.600 \cdot 0{,}3 + 13.600 \cdot 0{,}9 - (h + 0{,}9)\ 1.000]\ 9{,}81$$
$$p_2 = p_1 = 0 \qquad 0 = 0 + 15.420 - 1.000\ h$$
$$h = 15{,}42 \text{ m}$$



PROB. 4-6

4-7. *La figura representa un aliviadero automático de presa AOB. El ángulo AOB es rígido; OA = 150 cm; OB = 180 cm. La hoja OA tiene una masa de 3.000 kg y la hoja OB tiene una masa de 3.600 kg. La dimensión normal al dibujo es 4 m. Despréciese el rozamiento en O y B. W es un contrapeso cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia de 165 cm de O. El aliviadero está en equilibrio cuando el nivel de agua se encuentra como en la figura.*

Calcular:

a) *Fuerza debida a la presión de agua sobre OA.*
b) *Centro de presión sobre OA (distancia desde O).*
c) *Fuerza de presión sobre la hoja OB.*
e) *Valor del contrapeso W.*
f) *Valor de la reacción en O; dirección y sentido.*

Según el enunciado del problema se tiene:

$m_{OA} = 3.000$ kg
$m_{OB} = 3.600$ kg
$\overline{OA} = 1{,}50$ m
$\overline{OB} = 1{,}80$ m
$b = 4$ m
$\overline{OG}_W = 1{,}65$ m

a) Aplicando la Ec. (4-14):

$$F_{pOA} = \rho g h_p A = \rho g \cdot \frac{\overline{OA}}{2} \cdot \cos 30° \cdot A_{OA} = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}866 \cdot 6$$
$$= 38.230 \ N$$

b) Llamando $\overline{AC}_{OA}$ a la distancia del centro de presiones sobre $\overline{OA}$, medida a partir de A, en virtud de la Ec. (4-15), se tendrá:

$$\overline{AC}_{OA} = \frac{\int y^2 \, dA}{\int y \, dA} = \frac{b \cdot \overline{OA}^3/3}{b \cdot \overline{OA}^2/2} = \frac{2}{3} OA = \frac{2}{3} \cdot 1{,}5$$
$$= 1 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia $\overline{OC}_{OA}$ pedida será:

$$\overline{OC}_{OA} = \overline{OA} - \overline{AC}_{OA} = 1{,}5 - 1$$
$$= 0{,}5 \text{ m}$$

c) Análogamente,

$$F_{pOB} = \rho g h_p A = 1.000 \cdot 9{,}81 \left(\frac{\overline{OB}}{2} \cdot \cos 60° + \overline{OA} \cdot \cos 30° \right) \cdot 7{,}2$$
$$= 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}9 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}866) \cdot 7{,}2 =$$
$$= 123.535 \ N$$

d) Como en la pregunta *b*, llamando $\overline{DC}_{OB}$ a la distancia del centro de presiones medida a partir de D (véase figura):

$$\overline{DC}_{OB} = \frac{\int y^2 \, dA}{\int y \, dA}$$

Aplicando el teorema de Steiner para el cálculo de estas integrales se tiene:

$$\int y^2 \, dA = \frac{4}{3} (4{,}398^3 - 2{,}598^3)$$

$$\int y \, dA = \frac{4}{2} (4{,}398^2 - 2{,}598^2)$$

$$\overline{DC}_{OB} = \frac{2(4{,}398^3 - 2{,}598^3)}{3(4{,}398^2 - 2.598^2)} = 3{,}575 \text{ m}$$

y

$$\overline{OC}_{OB} = \overline{DC}_{OB} - \overline{OD} = 3{,}575 - 2{,}598$$
$$= 0{,}977 \text{ m}$$

e) El equilibrio de la compuerta exige que la suma de los momentos de todas las fuerzas que sobre ella actúan con relación al punto O sea igual a 0 (véase figura); es decir, tomando como positivos los momentos en el sentido de las agujas del reloj,

$$W_{OA} \cdot 0{,}5 \, \overline{OA} \cdot \cos 60° + F_{pOA} \cdot \overline{OC}_{OA} + W_{OA} \cdot 0{,}5 \cdot \overline{OB} \cdot \cos 30° -$$
$$- F_{pOB} \overline{OC}_{OB} + W \cdot 1{,}65 \cdot \cos 30° = 0$$

De donde

$$W = \frac{123.535 \cdot 0{,}977 - 3.000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 - 38.230 \cdot 0{,}5 - 3.600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}80 \cdot 0{,}866}{1{,}65 \cdot 0{,}866}$$
$$= 44.101{,}8 \ N$$

f) El equilibrio de la compuerta exige también que la suma de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la compuerta, incluyendo la reacción R, según los ejes x e y, sea igual a 0 (véase figura); es decir:

$\Sigma F_x = 0$:

$$F_{pOA} \cos 30° + F_{pOB} \cos 60° + R_x = 0$$

$$R_x = -(F_{pOA} \cos 30° + F_{pOB} \cos 60°) = -(38.230 \cdot 0{,}866 + 123.535 \cdot 0{,}5)$$
$$= -94.875 \ N$$

$\Sigma F_y = 0$

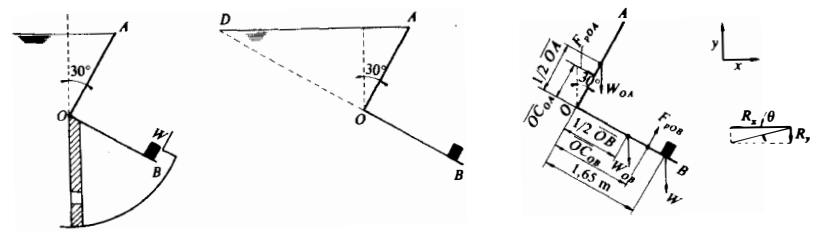
$$-W_{OA} - W_{OB} - W - F_{pOA} \cos 60° - F_{pOB} \cos 30° + R_y = 0$$
$$R_y = W_{OA} + W_{OB} + W + F_{pOA} \cos 60° - F_{pOB} \cos 30° = 3.000 \cdot 9{,}81 +$$
$$+ 3.600 \cdot 9{,}81 + 44.101{,}8 + 38.230 \cdot 0{,}5 - 123.535 \cdot 0{,}866$$
$$= -20.981{,}5 \ N$$

y

$$R = \sqrt{94.875^2 + 20.981{,}5^2} = 97.167 \ N$$

siendo (véase figura)

$$\theta = \text{arc tg} \frac{20.981.5}{94.875} = 12{,}47°$$



PROB. 4-7

4-8. *El tanque de fuel horizontal de la figura, de sección transversal circular, d = 2,6 m y longitud l = 9,6 m, se halla totalmente lleno de fuel de densidad ρ = 900 kg/m³. La presión en el exterior del tanque es la atmosférica.*

Calcular la fuerza total (módulo y dirección) que ejerce el fluido en la mitad ABC del tanque.

$$F_{px} = \rho g\, h_p\, A = \rho g \frac{d}{2} ld = \rho g \frac{d^2}{2} l = 900 \cdot 9{,}81 \frac{2{,}6^2}{2} \cdot 9{,}6 =$$

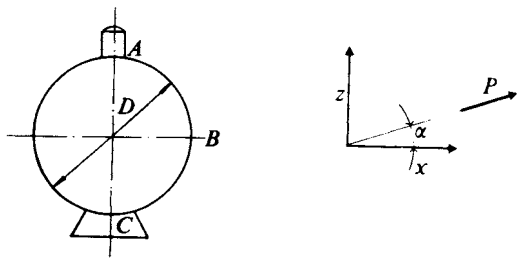
$$= 286.483 \ N$$

$$F_{p-} = \rho g\, W = \rho g\, l \frac{\pi d^2}{8} = 900 \cdot 9{,}81 \cdot 9{,}6 \frac{\pi \cdot 2{,}6^2}{8} =$$

$$= 225.004 \ N$$

$$F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2}$$

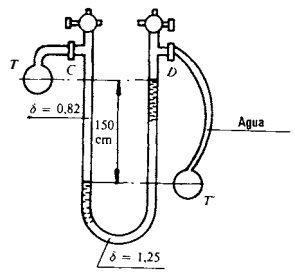
$$\alpha = \text{arc tg} \frac{F_{pz}}{F_{px}} = 38{,}15°$$



PROB. 4-8

4-9. *Las tuberías T y T' contienen, respectivamente, aceite (δ = 0,82) y agua, ambos a presión. En los tubos de conexión al manómetro no hay aire.*

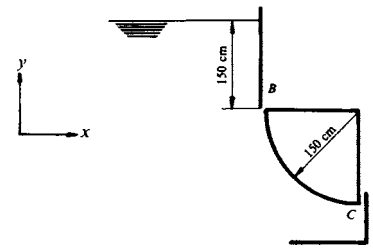
Calcular la diferencia de presiones en las tuberías T y T'.



PROB. 4-9

4-10. *Calcular en la compuerta de sector de la figura de 4 m de longitud, donde BC es un arco circular:*

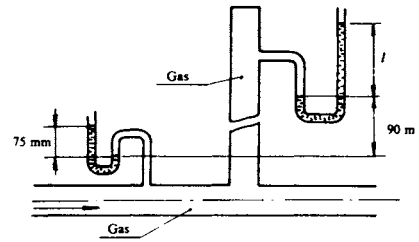
a) El momento de las fuerzas de presión con relación al eje de giro de la compuerta.
b) Las componentes vertical y horizontal de las fuerzas de presión sobre la compuerta, así como la resultante.



PROB. 4-10

4-11. *La lectura del manómetro de agua de la figura es de 75 mm. Una rama de cada manómetro está abierta a la atmósfera. La densidad del aire y la del gas pueden suponerse constantes. La densidad del aire en este lugar es de 1,3 kg/m³ y la del gas 0,58 kg/m³.*

Calcular la lectura, l, del segundo manómetro de agua.

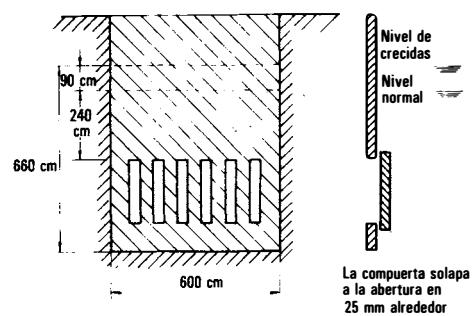


PROB. 4-11

4-12. *En el extremo de un canal, cuyo nivel ordinario y nivel de crecidas se indican en la figura, hay una pared transversal con 6 compuertas de 75 cm de anchura por 300 cm de altura cada una. Al otro lado de las compuertas no existe agua.*

Calcular:

a) La fuerza total de la presión del agua con nivel de crecidas sobre toda la pared que rodea las compuertas, incluyendo las compuertas, o sea sobre un rectángulo de 660 cm de alto por 600 de ancho.
b) La fuerza de presión sobre una compuerta, para el nivel ordinario. Nótese el solape que llevan las compuertas.
c) Para elevar una compuerta, con el nivel de agua ordinario, se requiere un esfuerzo mínimo de 3.600 N. Para que la compuerta suba 10 cm la fuerza ha de trasladarse 120 cm. Calcular el coeficiente de rozamiento (pletina de bronce sobre pletina de bronce).



PROB. 4-12

HIDRODINAMICA

5. *Ecuación fundamental de la hidrodinámica o ecuación de Bernoulli*

5.1. REGIMENES DE CORRIENTE. LINEA, HILO Y TUBO DE CORRIENTE

El estudio del movimiento de un fluido en el interior de un contorno (tubería, canal) o alrededor de un contorno (barco, ala de avión) es

— *interesantísimo en la técnica:* proyecto de oleoductos, redes de distribución de agua, canalizaciones de aire acondicionado, conductos de los sistemas de refrigeración y engrase de las máquinas, flujo del agua y del vapor en una central térmica, resistencia de los aviones y barcos, etc.
— *es el problema central de la mecánica de fluidos;*
— *es altamente complicado:* en efecto, el movimiento de un sólido rígido, por muy complicado que sea se descompone en el movimiento de traslación del centro de gravedad y en un movimiento de rotación del sólido alrededor del centro de gravedad: solo las tres coordenadas del centro de gravedad en función del tiempo más las tres componentes del vector velocidad angular en función del tiempo también definen exactamente el movimiento de un sólido. El movimiento general de un fluido, por ejemplo el agua en un río de lecho rocoso es infinitamente más complicado por el desplazamiento de unas partículas de agua con relación a las otras. Sin embargo,
— el movimiento de cada partícula de fluido obedece a la ley fundamental de la dinámica: *Fuerza = masa × aceleración.*

Conviene distinguir los siguientes regímenes de corriente:

a) *Corriente permanente y corriente variable.*

Permanente si en cualquier punto del espacio por donde circula el fluido no varían con el tiempo las características de éste (aunque varíen de un punto a otro). en particular su velocidad y su presión. *Ejemplo:* corriente de agua en un canal de hormigón de pendiente uniforme.

Variable si sucede lo contrario. *Ejemplo:* vaciado de un depósito por un orificio de fondo, Fig. 5-1: la velocidad V de salida por el orificio disminuye a medida que disminuye H al irse vaciando el depósito.

b) *Corriente uniforme y no uniforme.*

Uniforme si en cualquier sección transversal a la corriente la velocidad en puntos homólogos es igual en magnitud y dirección, aunque dentro de una mis-

ma sección transversal varíe de un punto a otro. *Ejemplo:* flujo de un fluido en un tubo de diámetro constante.

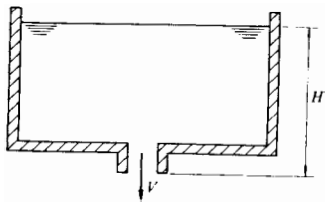


FIG. 5-1. El vaciado de un depósito por orificio de fondo es un fenómeno de *régimen variable.*

No uniforme en caso contrario. *Ejemplo:* en el cono divergente a la salida de una bomba (Fig. 19-1 *b.* n. 4) la velocidad disminuye a medida que la sección aumenta (como difusor). Es claro que tanto el régimen uniforme como el no uniforme puede ser permanente o variable; ejemplo: si el caudal en los ejemplos primero y segundo no varía, el régimen será permanente; pero si varía, el régimen será variable.

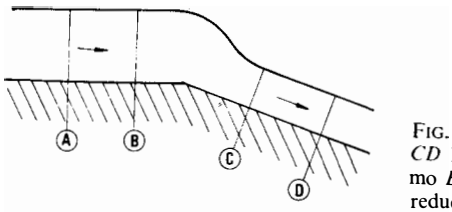


FIG. 5-2. *Corriente en un canal.* En los tramos *AB* y *CD* la corriente es uniforme y no uniforme en el tramo *BC*. (La longitud en el sentido de la corriente se ha reducido mucho en el dibujo.)

En la transición del canal de la Fig. 5-2 la corriente es *uniforme* en los tramos *AB* y *CD* y *no uniforme* en el tramo *BC* (transición). Si aguas arriba de *A* hay una compuerta que permite variar el caudal del canal; durante la maniobra de la compuerta, en los tramos *AB* y *CD* será *uniforme* y *variable*, y en el tramo *BC no uniforme* y *variable*, y terminada la maniobra de la compuerta, *uniforme* y *permanente* y *no uniforme* y *permanente*, respectivamente. Un caso particular de corriente uniforme es la de un fluido ideal e irrotacional entre contornos paralelos, en el cual la velocidad es la misma no solo en toda sección transversal, sino también en todos los puntos de una misma sección transversal (véanse Sec. 8.2, pág. 184 nota y Sec. 17.2).

c) Corriente laminar y turbulenta.

Laminar si es perfectamente ordenada de manera que el fluido se mueve en láminas paralelas (si la corriente tiene lugar entre dos planos paralelos) o en capas cilíndricas coaxiales como la glicerina en un tubo de sección circular, etc.

Turbulenta, en caso contrario, como el agua en un canal de gran pendiente. El que se dé uno u otro régimen depende del influjo de la viscosidad (o del número de Reynolds que se estudiará más adelante).

Esta definición de corriente laminar y turbulenta es solo provisional. La distinción precisa entre ambos regímenes de corriente de gran trascendencia en la técnica se hará más adelante en las Secs. 8.4 a 8.7.

En este libro se estudia en general sólo el régimen permanente (véase, sin embargo, por ejemplo, Sec. 14.4); pero se estudian según los casos tanto el régimen uniforme como el no uniforme, y el laminar como el turbulento.

El camino que recorre una partícula de fluido en su movimiento se llama *trayectoria de la partícula.* En régimen permanente la trayectoria coincide con la llamada *línea de corriente*, que es la curva tangente a los vectores de velocidad en cada punto (véase la Fig. 5-3). En régimen permanente las velocidades en los puntos 1, 2, 3, etc. serán siempre v_1, v_2, v_3, etc. y la partícula que pasa por 1 seguirá la trayectoria 1-2-3-4 que coincidirá con la línea de corriente. En régimen variable las líneas de corriente varían de un instante a otro.

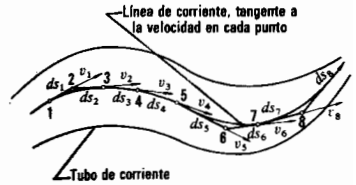


FIG. 5-3. El *tubo de corriente* de la figura puede ser sólido (tubería, canal) o formado por una superficie imaginaria que lo separa del fluido adyacente. La *línea de corriente* y la *trayectoria* de una partícula coinciden en régimen permanente.

Las líneas de corriente sirven para la representación gráfica de los flujos llamados bidimensionales, que pueden representarse fácilmente en un plano porque la velocidad no tiene componente normal al plano del dibujo, y la *configuración de corriente* en todos los planos paralelos al del dibujo es idéntica. Por cada punto de la corriente pasa una línea de corriente. Por tanto, si se trazaran todas las líneas de corriente no se distinguiría ninguna y si se trazaran demasiadas el dibujo sería confuso. Por eso se trazan solo unas cuantas; pero de manera que *entre cada dos líneas consecutivas circule el mismo caudal*, ΔQ.

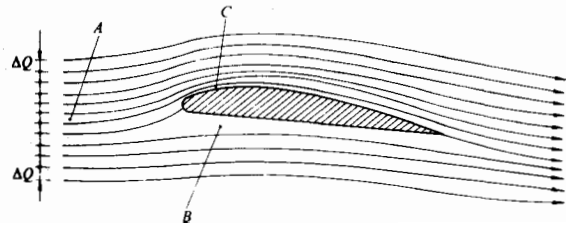


FIG. 5-4. *Líneas de corriente* en torno a un perfil de ala. Entre dos líneas de corriente consecutivas circula el mismo caudal ΔQ. La velocidad es mayor donde las líneas de corriente se estrechan.

Ejemplo: el ala de avión de la Fig. 5-4 tiene una luz (dimensión normal al plano del dibujo) suficientemente grande para que la corriente pueda considerarse bidimensional. Es decir, la configuración de la corriente en todo plano paralelo al dibujo es idéntica. El ala está fija, y sobre ella se hace circular una corriente de aire mediante un ventilador. De esta manera se ensayan los perfiles de ala de avión en los *túneles aerodinámicos.* En vuelo el aire está estacionario y el perfil se mueve. Si el movimiento en uno y otro caso es uniforme ambos sistemas dinámicamente son equivalentes (el movimiento relativo del aire y del perfil son idénticos en ambos casos). El flujo en este caso puede estudiarse por el procedimiento gráfico de las líneas de corriente. Como el caudal (Sec. 5-2) es igual a la sección multiplicada por la velocidad, y la sección es proporcional a la distancia transversal entre líneas de corriente, las cuales se han trazado de manera que entre dos consecutivas circule el mismo $\Delta Q = Q/11$ en nuestro caso porque hay 12 líneas de corriente, el dibujo contiene gran información gráfica: por ejemplo, en el punto *B*, donde las líneas de corriente se separan, la velocidad es mucho menor que en el punto *A*, y por el contrario en el punto *C* mucho mayor. Apli-

cando la ecuación de Bernoulli [Ec. (5-29)] que se deducirá en este capítulo, la configuración de las líneas de corriente demuestra también que el ala está sometida en B a una sobrepresión y en C a una succión. Hay multitud de procedimientos analíticos, gráficos y experimentales para el trazado de las líneas de corriente, que se utilizan con mucha frecuencia en el diseño de estructuras y máquinas hidráulicas.

Tubo de corriente, es un tubo imaginario o real cuya pared lateral está formada por líneas de corriente (Fig. 5-3 y 5-5). Así en una tubería de agua de 250 mm un tubo de corriente puede ser un cilindro circular imaginario de 100 mm y concéntrico con el eje de la tubería, o también la tubería misma de 250 mm, que por definición de línea de corriente está formada también por líneas de corriente (la velocidad del fluido en la tubería es tangente a la tubería; de lo contrario el líquido se despegaría de la tubería o se saldría de la misma).

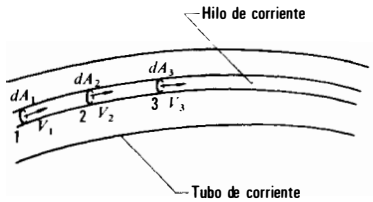


FIG. 5-5. *Tubo de corriente e hilo de corriente.* El hilo o filamento de corriente es un tubo de corriente infinitesimal.

Si el área transversal de un tubo de corriente es infinitesimal el tubo de corriente se llama *hilo o filamento de corriente* (Fig. 5-5).

5.2. DEFINICION DE CAUDAL

Caudal Q es el volumen de fluido por unidad de tiempo que pasa a través de una sección transversal a la corriente. Así, por ejemplo, en una tubería de agua los litros por hora que circulan a través de un plano transversal a la tubería.

Ecuación de dimensiones: $[Q] = [L]^3[T]^{-1}$
Unidad: $1Q = 1\ \text{m}^3/\text{seg},\ SI$

Si la velocidad de la corriente c es paralela a la superficie A (vertical como en la Fig. 5-6 *a* o también inclinada, pero paralela a la superficie) el caudal que la atraviesa es nulo. Si la velocidad c tiene cualquier otra dirección (Fig. 5-6 *b*), descomponiendo c según tres ejes, dos paralelos a la superficie y el tercero normal a la misma, solo la componente normal c_n produce caudal.

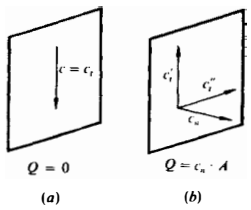


FIG. 5-6. El *caudal* a través de la superficie de la figura en (*a*) es nulo. En (*b*), las dos componentes de la velocidad paralelas a la superficie c_t' y c_t'' no contribuyen al caudal.

Si la superficie a través de la cual se calcula el caudal es finita es evidente que la dirección de la velocidad puede variar de un punto a otro de la misma, y, además la superficie puede no ser plana. Llamando dA al elemento infinitesimal de área, siendo c_n la componente de la velocidad normal a ese elemento se tendrá:

$$dQ = c_n\, dA$$

y

$$\boxed{Q = \int c_n\, dA} \qquad (5\text{-}1)$$

Si $\bar{c}$ es la velocidad media normal a la sección A, de la Ec. (5-1) se deduce:

$$Q = \bar{c}\, A$$

Siendo la velocidad media:

$$\boxed{\bar{c} = \frac{\int c_n\, dA}{A} = \frac{Q}{A}} \qquad (5\text{-}2)$$

Así, por ejemplo, en una tubería circular de diámetro D:

$$\boxed{\bar{c} = \frac{4\,Q}{\pi\, D^2}} \qquad 5\text{-}3)$$

(velocidad media en una tubería)

5.3. ECUACION DE CONTINUIDAD

Solo trataremos del régimen permanente, que es en nuestro estudio el más importante.

5.3.1. Ecuación de continuidad para un hilo de corriente

En un hilo de corriente (Fig. 5-5):

— no entra ni sale fluido lateralmente porque la velocidad es tangencial al hilo de corriente;
— en régimen permanente el hilo de corriente es estacionario;
— no se crea ni destruye masa, ni puede haber concentración o dilución de masa en ninguna sección del mismo, porque ello supondría aumento o disminución de densidad del fluido en dicha sección, lo que es imposi-

ble en régimen permanente; luego *la masa que entra en el tubo infinitesimal es igual a la masa que sale.* Por tanto

$$\rho_1 c_1\, dA_1 = \rho_2 c_2\, dA_2 = \rho_3 c_3\, dA_3 = C$$

donde c_1, c_2 y c_3 componentes normales de las velocidades en las secciones 1, 2 y 3.

O también, siendo $v = \frac{1}{\rho}$. [Ec. (2-4), donde v — volumen específico]:

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA FLUIDO COMPRESIBLE E INCOMPRESIBLE Y UN HILO DE CORRIENTE (1.ª FORMA)

$$\frac{c_1\, dA_1}{v_1} = \frac{c_2\, dA_2}{v_2} = \frac{c_3\, dA_3}{v_3} = C \qquad (5\text{-}4)$$

(régimen permanente)

Si el fluido es incompresible (suposición básica en este libro, véase pág. 31), ρ y v serán constantes, y por tanto

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE SOLAMENTE Y UN HILO DE CORRIENTE (1.ª FORMA)

$$c_1\, dA_1 = c_2\, dA_2 = c_3\, dA_3 = C \qquad (5\text{-}5)$$

(régimen permanente; fluido incompresible solamente)

En la mecánica del *fluido compresible* (termodinámica) se utiliza la variable G, llamada *caudal másico.*

Ecuación de dimensiones

$$[G] = [M][T]^{-1}$$

Unidad:

$$1\, G = 1\, \frac{\text{kg}}{\text{s}}\, SI$$

En un filamento de corriente

$$dG = \rho\, dQ = \rho c\, dA = \frac{c\, dA}{v}$$

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA FLUIDO COMPRESIBLE E INCOMPRESIBLE Y UN HILO DE CORRIENTE (2.ª FORMA)

$$dG = \frac{c\, dA}{v} = C \qquad (5\text{-}6)$$

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE Y UN HILO DE CORRIENTE (2.ª FORMA)

$$dQ = c\, dA = C \qquad (5\text{-}7)$$

Sólo en fluido incompresible el caudal volumétrico que atraviesa una sección transversal cualquiera de un filamento de corriente es constante; pero en todo fluido tanto compresible como incompresible el caudal másico es constante.

5.3.2. Ecuación de continuidad del fluido incompresible para un tubo de corriente

La ecuación de continuidad para un *tubo de corriente* (Fig. 5-5) y un fluido *incompresible*, se obtiene integrando (5-7)

$$Q = \int dQ = \int c\, dA = C \qquad 5\text{-}8)$$

donde c — componente normal de la velocidad en cada elemento dA, que coincide con la Ec. (5-1) antes aducida.

FORMULA PRACTICA DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD

$$\boxed{Q = A\bar{c} = C} \qquad (5\text{-}9)$$

donde Q — caudal volumétrico
A — área de una sección transversal del tubo
$\bar{c}$ — velocidad media normal a la sección considerada.

(Véase el problema 5-1.)

5.4. FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE UN FLUIDO

La ecuación fundamental de la hidrodinámica, o ecuación de Bernoulli, se deduce en la Sec. 5.6 de las ecuaciones de Euler (Sec. 5.5). Para deducir las ecuaciones de Euler estudiaremos en primer lugar en esta sección las *fuerzas* que intervienen en el movimiento de un fluido, a continuación estudiaremos las componentes de la *aceleración* (Sec. 5.5.1) y finalmente aplicando la segunda ley de Newton: *fuerza = masa × aceleración* deduciremos las ecuaciones de Euler (Sec. 5.5.2).

Las fuerzas que pueden intervenir en los problemas de mecánica de fluidos son:

1. La fuerza de la *gravedad.*
2. La fuerza causada por la *diferencia de presiones.* Si un carrito que puede rodar sin rozamiento sobre un plano horizontal es empujado por la derecha y por la izquierda con una fuerza de 10 N el carro no se mueve. *La presión por ambos lados es igual.* Si por el lado derecho la fuerza es de 10 N y por el lado izquierdo la fuerza es de 5 N *hay un gradiente de presiones* y el carro se moverá hacia la izquierda en el sentido decreciente del gradiente de presiones. (En un fluido en reposo hay un gradiente de presiones y la fuerza que este gradiente origina está en equilibrio con la fuerza de la gravedad.)
3. La fuerza de *viscosidad.* Es nula en el *fluido ideal* (véase Sec. 2.7).
4. La fuerza de la *elasticidad.* No entra en juego en el *fluido incompresible* (Sec. 2.3).
5. La *tensión superficial.* Juega de ordinario un papel poco importante (Sec. 2.5).

La fuerza de la gravedad es *externa* al fluido (la ejerce la tierra con su atracción). Las otras son *internas.* Además en problemas concretos pueden intervenir otras fuerzas externas. Deduciremos las ecuaciones de Euler (Sec. 5.5.2) en la hipótesis de un fluido ideal, sobre el que actúa como única fuerza externa la gravedad y que se mueve en régimen permanente. Por tanto en la deducción de estas ecuaciones solo intervendrán las fuerzas 1 y 2.

5.5. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL, O ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER

5.5.1. Componentes de la aceleración en un punto

Sea (Fig. 5-7) una conducción por la que circula un fluido ideal. Escojamos un sistema de coordenadas cartesianas *O-xyz.* Sea un punto A_1 (x, y, z). Sea A_1 A_2 un elemento infinitesimal de la trayectoria de este punto que en régimen permanente coincidiría en la línea de corriente. Los puntos A_1 y A_2 están infinitamente próximos a una distancia ds. Sean v_x, v_y y v_z las componentes del vector **v**, velocidad del punto A; **v** será tangente a la trayectoria.

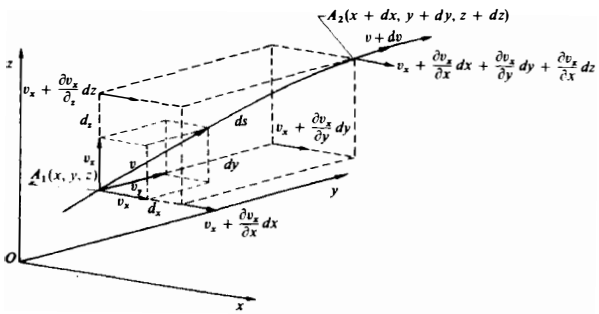


FIG. 5-7. $A_1 A_2$ es un elemento diferencial ds de la trayectoria de una partícula de fluido. La velocidad en el punto A_1 es $\bar{v}$ y en el punto A_2 $\bar{v} + d\bar{v}$. Si el régimen es permanente, la velocidad en un punto fijo del espacio (A_1 o A_2) no varía con el tiempo, se cumplen las Ecs. (5-11).

En general la velocidad **v** (y por tanto sus componentes v_x, v_y y v_z) en cada punto del fluido dependerá del punto de que se trate y del tiempo que se considere. Matemáticamente:

$$v_x = f_1(x,y,z,t)$$
$$v_y = f_2(x,y,z,t)$$
$$v_z = f_3(x,y,z,t)$$

En un instante t determinado estas ecuaciones nos dan la velocidad del fluido en cada punto del espacio, es decir la *configuración del flujo* en ese instante; mientras que en un punto determinado (x,y,z) las mismas ecuaciones nos dan la variación de la velocidad con el tiempo en ese punto.

Se tiene por tanto (1):

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}dt + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$
$$dv_y = \frac{\partial v_y}{\partial t}dt + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz \qquad (5\text{-}10)$$
$$dv_z = \frac{\partial v_z}{\partial t}dt + \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz$$

y dividiendo los dos miembros de las tres ecuaciones (5-10) por dt se tiene:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} \qquad (5\text{-}11)$$
$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ya que

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Las Ecs. (5-11) nos dan las componentes de la aceleración en cada punto y cada instante de tiempo. Si el movimiento es permanente, en un punto cualquiera del espacio la velocidad no varía con el tiempo; por tanto

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \qquad (5\text{-}12)$$

(1) Se supone que v_x, v_y y v_z son finitas y funciones continuas de x, y, z y que las derivadas parciales $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$, etc., en todos los puntos son finitas también.

y por tanto las Ecs. (5-11) de la aceleración en régimen permanente serán, teniendo en cuenta las Ecs. (5-12):

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{dv_y}{dt} &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{dv_z}{dt} &= v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \qquad (5\text{-}13)$$

(ecuaciones de la aceleración; régimen permanente)

5.5.2. Ecuaciones de Euler

Consideremos ahora (Fig. 5-8) el punto $A(x,y,z)$ en el centro del paralelepípedo rectangular de lados dx, dy, dz.

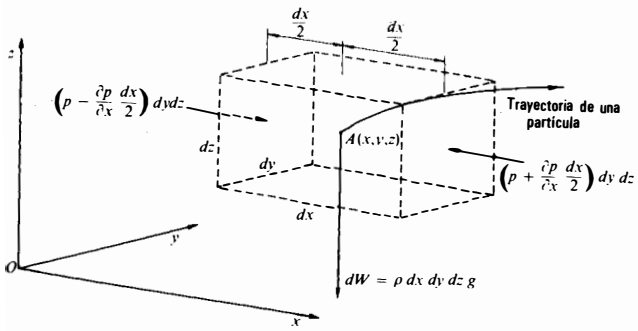


FIG. 5-8. Deducción de las *ecuaciones de Euler*. Se supone régimen permanente y se supone también que la única fuerza exterior que actúa sobre el fluido es la gravedad (dW en la figura). Sobre el fluido aislado, actúa también la fuerza debida a la presión que ejerce el fluido exterior sobre el paralelepípedo *aislado*.

Sea $p = f(x,y,z)$ la presión en el punto A. La presión en la cara vertical izquierda será:

$$p + dp = p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

y en la cara vertical derecha

$$p + dp = p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

como se indica en la figura.

— Sobre las seis caras del paralelepípedo actúa la fuerza debida a la presión. Por claridad en la Fig. 5-8 solamente se han indicado las fuerzas debidas a la presión que actúan sobre las caras normales al eje x;
— El eje z se ha elegido, como es costumbre en hidráulica, vertical hacia arriba;
— Por tanto sobre el paralelepípedo actúa la fuerza de la gravedad dW en la dirección negativa del eje z, como se indica en la figura; siendo esta fuerza igual a la masa del paralelepípedo × la aceleración de la gravedad:

$$dW = \rho\, dxdydz\, g$$

La segunda ley de Newton (fuerza = masa × aceleración) según el eje x, siendo la masa del paralelepípedo $dm = \rho\, dxdydz$, nos proporciona la siguiente ecuación:

$$\rho\, dxdydz \frac{dv_x}{dt} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

Dividiendo ambos miembros por la masa del paralelepípedo $\rho\, dxdydz$ y simplificando se tiene:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

o bien

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

en virtud de la primera de las Ecs. (5-13).

Análogamente para el eje y:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$$

o bien

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

En la ecuación correspondiente al eje z se ha de introducir en el segundo miembro la fuerza debida a la gravedad, indicada en la figura, a saber:

$$-\rho\, g\, dx\, dy\, dz$$

con lo que se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (5\text{-}14)$$
$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

e introduciendo las ecuaciones de la aceleración [Ecs. (5-13)] se obtienen finalmente las

ECUACIONES DE EULER

$$\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\rho y} \\ v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \qquad (5\text{-}15)$$

(régimen permanente, fluido ideal e incompresible, fuerza de la gravedad única fuerza exterior)

(2) En régimen uniforme la aceleración es igual a 0. Si suponemos en primer lugar que las líneas de corriente son horizontales y escogemos el eje x en la dirección de la corriente, el eje y horizontal y perpendicular a dicha dirección y el eje z vertical, la 3.ª ecuación (5-14) se reduce a

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

o sea

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

y

$$p = -\rho g z + C$$

o sea $p + \rho g z =$ cte que es la ecuación de la hidrostática. Si el régimen es uniforme y las líneas de corriente no son horizontales, eligiendo de nuevo la dirección de la corriente como eje x y como ejes y, z, dos ejes perpendiculares entre sí situados en el plano transversal la integración de las dos ecuaciones correspondientes a los ejes y, z convenientemente planteadas nos conduciría de nuevo a la misma ecuación de la hidrostática. De donde la siguiente conclusión:

En régimen uniforme la distribución de presiones en un plano normal a la corriente es hidrostática.

5.6. ECUACION DE BERNOULLI PARA EL FLUIDO IDEAL: PRIMERA DEDUCCION POR INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE EULER SEGUN UNA LINEA DE CORRIENTE

Tomando las Ecs. (5-14) o forma sintetizada de las ecuaciones de Euler, y multiplicando la primera ecuación por dx, la segunda por dy y la tercera por dz, tendremos:

$$\frac{dv_x}{dt}dx = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$
$$\frac{dv_y}{dt}dy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy \qquad (5\text{-}16)$$
$$\frac{dv_z}{dt}dz = -g\,dz - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Sumando miembro a miembro las tres ecuaciones (5-16) tendremos:

$$\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz = -g\,dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) \qquad (5\text{-}17)$$

Ahora bien, como

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt} = v_z \, ,$$

el primer miembro de la Ec. (5-17) se transforma así:

$$v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z = \frac{1}{2}\,d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}\,d(v^2)$$

(en efecto, si se diferencia el segundo miembro se obtiene el primero, lo que demuestra la validez del primer signo igual. Por otra parte, el cuadrado de la diagonal v de un paralelepípedo es igual a la suma de los cuadrados de sus aristas v_x, v_y y v_z, lo que demuestra la validez del segundo signo igual).

Al suponer que el régimen es permanente, p no es función de t, y su diferencial total será:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

con lo cual la Ec. (5-17) se transforma en:

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + \frac{d(v^2)}{2} = 0$$

Integrando esta última ecuación, entre dos puntos cualesquiera 1 y 2, situados en una misma línea de corriente, que en régimen permanente coincide con la trayectoria del movimiento y siguiendo con la hipótesis de un fluido *incompresible* ($\rho = C$), se tiene:

$$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} \tag{5-18}$$

que nos dice que la suma $\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)$ es constante a lo largo de una misma línea de corriente, ya que los puntos 1 y 2 son dos puntos cualesquiera de esta línea, o sea

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} = C \tag{5-19}$$

Dividiendo los dos miembros de esta última ecuación por g se tiene:

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = C \tag{5-20}$$

o bien

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = C \tag{5-21}$$

Las Ecs. (5-18) a (5-21) son expresiones diversas de la ecuación de Bernoulli para un hilo de corriente, que, según las hipótesis establecidas en su deducción, son válidas solamente para el *fluido ideal e incompresible que se mueve en régimen permanente*. Además los puntos entre los que se establecen estas ecuaciones se suponen que están situados en una misma línea de corriente.

Los términos de las Ecs. (5-18) y (5-19), como se verá en la segunda deducción de la ecuación de Bernoulli (Secs. 5.8.1 y 5.8.2), representan *energías específicas* y los de las Ecs. (5-20) y (5-21) *alturas equivalentes*. Entonces se entenderá mejor el significado de esta ecuación fundamental en la resolución de innumerables problemas prácticos y las unidades en que se miden sus términos.

5.7. CLASIFICACION DE LAS ENERGIAS DE UN FLUIDO INCOMPRESIBLE

La energía antiguamente se definió así: capacidad de un cuerpo de realizar trabajo mecánico. Posteriormente se demostró la equivalencia del calor y trabajo mecánico. La energía puede revestir formas muy diversas, que según la ley universal de la conservación de la energía o primer principio de la termodinámica, pueden transformarse unas en otras. Quizá la manera más clara, si no

la más lógica, de definir la energía será el describir las distintas formas de energía, que será el procedimiento que seguiremos nosotros.

La técnica estudia los cambios de unas formas de energía en otra, así como su intercambio con el trabajo mecánico y calor, llamadas estas dos últimas formas de energía, *energías de tránsito*, porque solo existen cuando pasa energía de un cuerpo a otro (3).

El estudio se simplifica porque la Mecánica del Fluido incompresible:

a) *No se ocupa* del calor ni de su transformación en otras formas de energía, lo cual pertenece al dominio de la Termodinámica.

b) *No se ocupa* de la energía atómica liberada en la fisión o fusión del átomo, de la energía química liberada o absorbida en las reacciones químicas, ni de otras muchas formas de energía como la eléctrica, magnética, etc. De estas formas de energía se ocupa la Ingeniería Nuclear, la Ingeniería Química, etc.

c) *Se ocupa* solo de las tres formas siguientes de energía del fluido: energía potencial geodésica, energía de presión y energía cinética.

d) *Estudia* las transformaciones de estas tres formas entre sí y de su intercambio con el trabajo mecánico.

En las transformaciones reales del fluido viscoso tiene lugar una *fricción*, que origina un aumento de la temperatura del fluido y por tanto de su *energía interna*. Pero esta fricción no existe en el fluido ideal que estamos considerando.

Ecuación de dimensiones.

Dimensiones de energía, E = dimensiones de trabajo

$$[E] = [F][L] = [M][L]^2[T]^{-2}$$

Unidad

$$1\ E = 1\ N \cdot \mathrm{m} = 1\ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \qquad SI$$

La unidad de energía y trabajo del *SI* se denomina Julio (J)

$$1\ \mathrm{J} = 1\ N \cdot \mathrm{m} = 1\ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

En Mecánica de Fluidos lo mismo que en Termodinámica se prefiere utilizar más que la energía total E la energía específica e.

En el *SI* la energía específica, lo mismo que otras magnitudes específicas (volumen específico, entropía, etc.) se refieren a la unidad de masa; mientras que en el *ST* se referían a la unidad de peso:

$$SI \qquad e = \frac{E}{\mathrm{m}}$$

$$ST \qquad e = \frac{E}{W}$$

(3) Véase C. Mataix, *Termodinámica Técnica y Máquinas Térmicas*, Ediciones I.C.A.I., Madrid, 1978.

Ecuación de dimensiones

$$[e] = \frac{[E]}{[M]} = [L]^2[T]^{-2} \quad SI \tag{5-22}$$

Unidad

$$1\ e = 1\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \quad SI \tag{5-23}$$

Así, por ejemplo, si una bomba hidráulica comunica al agua que la atraviesa una energía de 500 $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ esto significa que la bomba comunica una energía de 500 J/kg, o sea 500 J por cada kg de agua que la atraviesa, o bien una potencia de 50 J/s o Watios por cada kg/s que la atraviesa.

5.7.1. Energía potencial geodésica

Energía potencial geodésica o simplemente energía geodésica o de posición es igual al trabajo que la fuerza de la gravedad puede ejercer cuando su altura desciende de z_1 a z_2. Cuando el líquido se remonta, con una bomba por ejemplo, del nivel inferior z_2 al superior z_1, es preciso ejercer sobre él un trabajo contra la fuerza de la gravedad igual y de sentido contrario que se transforma en la susodicha energía potencial. Las alturas se refieren, lo mismo que en hidrostática, a un plano de referencia, $z = 0$. Siendo la fuerza de la gravedad igual al peso del fluido, $W = \rho g V$, se tiene:

Energía geodésica total:

$$E_z = \rho g V z \quad (\mathrm{J},\ SI) \tag{5-24}$$

Energía geodésica específica:

$$e_z = \frac{\rho g V z}{\rho V} = g z \quad (\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2,\ SI) \tag{5-25}$$

Ejemplo: el agua de un embalse posee una energía geodésica que es aprovechada en las turbinas de una central hidroeléctrica (Cap. 21).

5.7.2. Energía de presión

En el cilindro de la Fig. 5.9 el aceite a una presión p, que supondremos constante, desplaza el émbolo de superficie A venciendo la resistencia F, y recorriendo un espacio x. El trabajo que realiza el fluido es:

$$T = pAx = pV$$

donde $V = Ax$ es el volumen barrido por el pistón.

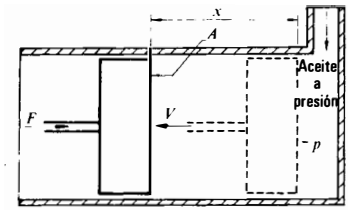


FIG. 5-9. Un volumen V de un fluido a una presión p tiene una *energía de presión* igual a pV, o sea igual a la fuerza pA que ejerce sobre el fluido multiplicado por el camino recorrido x.

Este trabajo se ha realizado a costa de la energía de presión que un volumen V de aceite a la presión p poseía en el tanque de aceite antes del desplazamiento del émbolo.

Luego un volumen V de aceite a la presión p posee la energía de presión pV. Se tiene por tanto:

$$E_p = pV = \frac{p\rho V}{\rho} = p\frac{m}{\rho}$$

La *energía de presión total* es, pues,

$$E_p = \frac{p}{\rho} m \quad (\mathrm{J},\ SI) \tag{5-26}$$

La *energía de presión específica* será

$$e_p = \frac{p}{\rho} \quad \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2},\ SI \tag{5-27}$$

Ejemplo: en un tubo piezométrico (Sec. 4.3.1) la energía de presión realiza el trabajo de elevar el líquido hasta una altura $\frac{p}{\rho g}$, que es la *altura equivalente de presión*. Por eso si se retira una partícula de líquido de la parte superior del tubo piezométrico de nuevo la presión hace que el líquido ascienda a la misma altura $\frac{p}{\rho g}$, y siguiendo así toda la masa de líquido a la presión p podría elevarse a esa altura, luego dicho líquido tiene la energía de presión $pV = \frac{pm}{\rho}$. (La expresión de la energía de presión y de las restantes energías del fluido en forma de alturas equivalentes se verá más adelante.)

5.7.3. Energía cinética

La energía cinética total de m kg de fluido es:

$$E_v = m\frac{v^2}{2}$$

(J, *SI*)

donde m es la masa total del fluido.

La energía cinética específica será

$$\boxed{e_v = v^2/2} \qquad (5\text{-}28)$$

$(m^2/s^2, SI)$

Ejemplo: el inyector de una turbina Pelton (Sec. 22.4) produce un chorro de 2.000 $\frac{J}{kg}$ de energía cinética. Esta energía cinética se transforma en el rodete (Fig. 22-3) en energía útil mecánica.

5.8. ECUACION DE BERNOULLI PARA EL FLUIDO IDEAL: SEGUNDA DEDUCCION, ENERGETICA

5.8.1. Deducción energética de la ecuación de Bernoulli para un hilo de corriente en régimen permanente

En un fluido ideal no hay viscosidad (Sec. 2.7) ni rozamiento ni, por tanto, transformación de energía hidráulica en energía térmica. Además en régimen permanente la trayectoria de una partícula de fluido coincide con una línea de corriente (pág. 91). Si además esta partícula de fluido no recibe energía de una máquina (bomba) ni tampoco cede energía a una máquina (turbina), en el tránsito de la partícula de un punto 1 a otro punto 2 de una línea de corriente la energía podrá transformarse de una clase a otra, pero según el principio de conservación de la energía la suma total de la energía que posee la partícula debe de permanecer constante. Considerando energías específicas esta suma en un fluido ideal e incompresible se compone de energía geodésica, zg (Sec. 5.7.1); energía de presión, p/ρ (Sec. 5.7.2) y energía de velocidad, $v^2/2$ (Sec. 5.7.3). La suma de estas tres energías debe pues permanecer constante. Por tanto [compárese con Ec. (5-18)]:

ECUACION DE BERNOULLI PARA UN HILO DE CORRIENTE

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g + \frac{v_2^2}{2} \qquad (5\text{-}29)$$

(1 y 2 en la misma línea de corriente, fluido ideal)

Nótese, sin embargo, que aun en un fluido ideal sin pérdidas, y sin adición ni cesión de energía, no se opone al principio de conservación de la energía el que partículas situadas en líneas de corriente diversas puedan transportar diversa cantidad de energía. Por tanto (Fig. 5-10), en un fluido ideal es posible que, siendo verdad (5-29) porque 1 y 2 están en la misma línea de corriente no sea verdad que

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + z_3 g + \frac{v_3^2}{2}$$

porque 1 y 3 están en distinta línea de corriente.

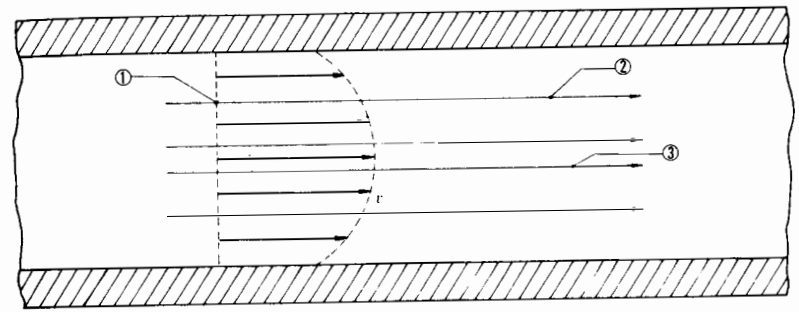


FIG. 5-10. La figura representa la corriente de un fluido ideal en *régimen rotacional* entre dos placas paralelas. No hay pérdida de energía, pero el filamento de corriente 1-2 transporta menos energía que el filamento de corriente 3. Si el régimen fuera *irrotacional* todas las líneas de corriente serían paralelas y equidistantes y todos los filamentos de corriente transportarían la misma cantidad de energía. La ecuación de Bernoulli en un fluido ideal en flujo irrotacional se cumpliría entre dos puntos cualesquiera, aunque dichos puntos no pertenezcan a la misma línea de corriente.

En tal caso el filamento de corriente 1-2 transportaría, por ejemplo, menos energía que el filamento de corriente 3, pero la energía no se perdería. Comparación: por dos calles paralelas a y b de la autopista Madrid-Adanero marchan dos camiones; el camión A con 1 tonelada de patatas y el camión B con 2. Si los camiones no pierden mercancía ni cargan ni descargan en el camino, el camión A al final del recorrido tendrá la misma mercancía que al comienzo y el camión B también; pero los camiones A y B no transportan la misma cantidad de mercancía.

5.8.2. La ecuación de Bernoulli generalizada para un tubo de corriente

Se demuestra matemáticamente (4) que para que la ecuación de Bernoulli se cumpla entre dos puntos cualesquiera, no situados en una misma línea de corriente (puntos 1 y 3 en la Fig. 5-10) de un tubo de corriente imaginario o materializado (tubería, canal), además de ser el fluido *ideal* (viscosidad cero) es menester que el flujo sea *irrotacional* (las partículas se trasladan sin realizar giro alguno alrededor de su centro de gravedad). Si se cumple la hipótesis de que el flujo es

(4) Véase, por ejemplo, Milne-Thomson, *Tratado de Hidrodinámica teórica*, traducción de Carlos Lago, Aguilar, 1951.

irrotacional además de ser el fluido ideal la Ec. (5-29) se cumple entre dos puntos cualesquiera de un fluido.

Es decir

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g + \frac{v_2^2}{2} \qquad (5\text{-}30)$$

(1 y 2 no necesariamente en la misma línea de corriente; velocidades locales en dichos puntos; fluido ideal e irrotacional)

La técnica de la construcción de máquinas hidráulicas (Caps. 18 a 29), por ejemplo, hace frecuente uso de la Ec. (5-30), y a pesar de que a la hipótesis simplificadora del *fluido ideal* se añade la más simplificadora aún del *flujo irrotacional* esta ecuación constituye un instrumento de trabajo excelente.

Es también muy frecuente en la práctica diaria de la ingeniería aplicar la ecuación de Bernoulli al conjunto de la corriente que circula por un canal, tubería, etc., sintetizando por decirlo así la corriente completa en un hilo de corriente al que se le asignan los valores medios de toda la sección: la altura del centro de gravedad de la sección como altura geodésica, la presión media, obtenida, por ejemplo, por tomas de presión convenientemente repartidas alrededor de la sección, y la velocidad media obtenida mediante la Ec. (5-9)

$$\bar{c} = Q/A$$

Esto equivale a aplicar la ecuación de Bernouilli no entre dos puntos de una *línea de corriente*, sino entre dos secciones de un *tubo de corriente*, por ejemplo, entre dos secciones transversales circulares de 3 m de diámetro de la tubería forzada de una central hidroeléctrica. Este método se conoce con el nombre de *método unidimensional* o *teoría de los hilos de corriente*, que proporciona muchas veces la solución del problema o al menos una primera aproximación. La validez del método unidimensional, del que se hace uso constante en hidráulica, y del que haremos nosotros uso constante también, está corroborado por la experiencia. Por tanto:

ECUACION DE BERNOULLI PARA UN TUBO DE CORRIENTE (1.ª FORMA)

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g + \frac{v_2^2}{2}} \qquad (5\text{-}31)$$

(v_1, v_2 velocidades medias en las secciones 1 y 2)

Adviértase que en la Ec. (5-30) v_1 y v_2 son las *velocidades locales* de los *puntos* 1 y 2; mientras que en la Ec. (5-31) v_1 y v_2 son las *velocidades medias* en las secciones 1 y 2 (5).

Comparando la Ec. (5-31) con la Ec. (4-2) se observa que la ecuación fundamental de la hidrostática no es más que un caso particular de la ecuación de Bernoulli: en el fluido en reposo el término $\frac{v^2}{2} = 0$. (En un fluido en reposo solo existe energía de presión y energía geodésica.)

(Véase problema 5-2.)

(5) Para simplificar la notación no empleamos el símbolo $\bar{v}$ para la velocidad media, ya que normalmente emplearemos el método unidimensional y v se interpretará como velocidad media.

5.9. LA ECUACION DE BERNOULLI Y EL PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

El *primer principio de la termodinámica*, o principio de la conservación de la energía, en forma diferencial puede enunciarse así:

$$dQ = du + p\,dv + v\,dp + de_v + de_z + dW \qquad (5\text{-}32)$$

donde dQ — calor absorbido (+) o cedido por el fluido (−) por kg;
u — energía interna específica;
p — presión;
v — volumen específico;
e_v — energía cinética específica, $\frac{v^2}{2}$ (véase Sec. 5.7.3);
e_z — energía geodésica específica, zg (véase Sec. 5.7.1);
W — trabajo realizado por el fluido (+) o absorbido por el fluido (−) por kg.

En el *SI* todos los términos vienen expresados en $\frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ o en el múltiplo $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Apliquemos la Ec. (5-32) al flujo de un fluido ideal en una tubería:

$dW = 0$ (el fluido no realiza ni absorbe trabajo).
$dQ = 0$ (tubería calorifugada).

La Termodinámica enseña que, si no hay rozamiento (fluido ideal) y el proceso (el flujo en la tubería en nuestro caso) puede considerarse *reversible*, $du + p\,dv = dQ$; pero $dQ = 0$. Luego $du + p\,dv = 0$.

$e_v = \frac{v^2}{2}$

$e_z = zg$

$v = \frac{1}{\rho} = C$ (fluido incompresible).

Por tanto (5-32) se transforma en

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + d(zg) = 0$$

e integrando entre dos puntos (secciones) cualesquiera 1 y 2 tendremos:

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g + \frac{v_2^2}{2} \qquad (5\text{-}33)$$

ue es la misma Ec. (5-31).

5.10. LAS ENERGIAS ESPECIFICAS Y LA ECUACION DE BERNOULLI EXPRESADAS EN ALTURAS EQUIVALENTES

Dimensionalmente dividiendo $[e]$ [véase Ec. (5-22)] por la aceleración de la gravedad, que es una constante en todos los problemas de este libro $[g] = [L][T]^{-2}$, se obtiene

$$\frac{[e]}{[g]} = \frac{[L]^2[T]^{-2}}{[L][T]^{-2}} = L$$

Llamaremos a

$$\frac{e}{g} = H \tag{5-34}$$

altura equivalente.

Aplicando la Ec. (5-34) sucesivamente a las Ecs. (5-25), (5-27) y (5-28) se obtiene:

Altura geodésica

$$\frac{e_z}{g} = z$$

Altura de presión

$$\frac{e_p}{g} = \frac{p}{\rho g}$$

Altura de velocidad

$$\frac{e_v}{g} = \frac{v^2}{2g}$$

Asimismo, dividiendo todos los términos de la Ec. (5-31) por g, se obtiene la

ECUACION DE BERNOULLI PARA UN TUBO DE CORRIENTE (2.ª FORMA)

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (6) \tag{5-35}$$

o bien

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = C}$$

(Ecuación de Bernoulli expresada en alturas)

(6) En el *ST* los términos de la Ec. (5-35) representan *energías específicas.* En efecto,

$$m = \frac{\text{kp} \cdot \text{m}}{\text{kp}}$$

(en el *ST* las energías específicas se refieren a las unidades de peso).

En el *SI* los mismos términos representan *alturas equivalentes* a las energías respectivas.

Nosotros utilizaremos la Ec. (5-35) con preferencia a la Ec. (5-31) porque en Mecánica de Fluidos las alturas tienen un significado físico bien determinado: así, por ejemplo, la altura de salto *(salto neto;* véase la Sec. 22.8) de una turbina, la altura que expresa la lectura de un tubo piezométrico o de un manómetro líquido, etc.

Asimismo se denomina:

Altura total, H, a la constante C de la ecuación de Bernoulli en la forma (5-35), o sea

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}$$

La altura total es la suma de las alturas de presión, geodésica y cinética, y es constante en el fluido ideal e incompresible.

Altura piezométrica, h (véase pág. 46)

$$\boxed{h = \frac{p}{\rho g} + z}$$

La altura piezométrica en un fluido real pero incompresible en reposo es constante.

5.11. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO REAL, O ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Si el fluido es real, y por tanto viscoso, una deducción más laboriosa que la llevada a cabo en la Sec. 5.5 para la deducción de las ecuaciones de Euler, nos conduciría a las ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido viscoso o ecuaciones de Navier-Stokes. Su deducción no pertenece a esta obra. Su expresión es la siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y \\ \frac{dv_z}{dt} &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z \end{aligned}} \tag{5-36}$$

donde ∇^2 — operador de Laplace, cuya expresión es:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ν — viscosidad cinemática.

Las Ecs. (5-36) se reducen a las ecuaciones de Euler (5-14) si el fluido es ideal, porque entonces $\nu = 0$.

5.12. ECUACION DE BERNOULLI PARA EL FLUIDO REAL

En un fluido real la viscosidad origina un rozamiento tanto del fluido con el contorno (tubería, canal, etc.) cuanto de las partículas de fluido entre sí. Entonces la ecuación de Bernoulli [Ec. (5-31)] no se cumple. Naturalmente se sigue cumpliendo el principio de la conservación de la energía o primer principio de la Termodinámica. Es decir, además de las tres clases de energía enumeradas y estudiadas en la Sec. 5.7 aparece la energía de fricción, que según la Termodinámica no es una energía distinta de las que figuran en la Ec. (5-32): la fricción provoca tan solo una variación del estado térmico del fluido. En el fluido real:

$$du \neq 0$$

(aunque si seguimos suponiendo que el fluido se comporta como incompresible $p\,dv = 0$) y $dQ \neq 0$, con aumento de la temperatura del fluido y/o del medio exterior. Esta fricción en la *mecánica de fluidos incompresibles* no es aprovechable y solo en este sentido la llamaremos energía perdida, o bien expresada en forma de altura, altura perdida H_r.

Ahora bien, siguiendo el mismo razonamiento de la Sec. 5.8.1, diremos que La energía en el punto 1 (o suma de la energía de posición, de presión y cinética en el punto 1) − la energía perdida entre el punto 1 y 2 por rozamiento = energía en el punto 2 (o suma de energía de posición, de presión y cinética en el punto 2), o sea:

ECUACION DE BERNOULLI CON PERDIDAS

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1\, g + \frac{v_1^2}{2} - y_{r1-2} = \frac{p_2}{\rho} + z_2\, g + \frac{v_2^2}{2}$$

(fluido real — viscoso pero incompresible — $v_1 v_2$ velocidades medias en las secciones 1 y 2)

o bien expresada en alturas:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - H_{r1-2} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}} \qquad (5\text{-}37)$$

(fluido real — viscoso e incompresible — v_1, v_2 velocidades medias en las secciones 1 y 2)

donde H_{r1-2} — altura perdida entre el punto 1 y el punto 2 ($g\,H_{r1-2} = y_{r1-2}$ es la energía perdida entre las secciones 1 y 2).

El análisis del término H_{r1-2}, que constituye un tema muy importante en la Mecánica de Fluidos, se hará detenidamente en los Caps. 9 a 12.

5.13. ECUACION DE BERNOULLI GENERALIZADA

Si la corriente atraviesa una o varias máquinas que le suministran energía (bombas) experimenta un incremento de energía que, expresada en forma de altura, la llamaremos ΣH_b. Asi mismo si la corriente atraviesa una o varias máquinas a las que cede energía (turbinas) experimenta un decremento de energía, que, expresada en forma de altura, la llamaremos $-\Sigma Ht$. Por tanto:

La energía del fluido en el punto 1 − la energía perdida entre el punto 1 y el punto 2 + la energía suministrada al fluido por las bombas que haya entre el punto 1 y el punto 2 − la energía cedida por el fluido a las turbinas o motores que haya entre el punto 1 y el punto 2, ha de ser igual a la energía en el punto 2. En Hidráulica se prefiere, como hemos dicho, expresar todas estas energías en forma de alturas equivalentes (dividiendo todos los términos por g). Expresando el párrafo anterior mediante una ecuación se tiene la:

ECUACION DE BERNOULLI GENERALIZADA

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \Sigma H_{r1-2} + \Sigma H_b - \Sigma H_t = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}} \qquad (5\text{-}38)$$

(Ecuación del circuito hidráulico en serie)

donde
- $p_1/\rho g$, $p_2/\rho g$ — alturas de presión
- z_1, z_2 — alturas geodésicas
- $v_1^2/2g$, $v_2^2/2g$ — alturas de velocidad
- ΣH_{r1-2} — suma de todas las pérdidas hidráulicas entre 1 y 2
- ΣH_b — suma de los incrementos de altura proporcionados por las bombas instaladas entre 1 y 2
- ΣH_t — suma de los incrementos de altura absorbida por los motores (turbinas) instalados entre 1 y 2.

La Ec. (5-38) está expresada en m; pero según la Ec. (5-34) multiplicando ambos miembros por g se expresaría en

$$\mathrm{m^2/s^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \quad \text{(energías específicas en el } SI\text{)}$$

Además:

$p_1/\rho g + z_1 = h_1$ — altura piezométrica en el punto 1
$p_1/\rho g + z_1 + v_1^2/2g = H_1$ — altura total en el punto 1.

Si no hay pérdidas (fluido ideal) ni cesión (turbina) de energía, la altura (energía) total de la corriente permanece constante:

$$H = C \text{ (constante de Bernoulli)}$$

— Si hay pérdidas y no hay adición de energía (mediante una o varias bombas) la altura (energía) total de la corriente disminuye siempre en el sentido de la misma:

$$H_2 = p_2/\rho g + z_2 + v_2^2/2g < H_1 = p_1/\rho g + z_1 + v_1^2/2g$$

Luego al aplicar la Ec. (5-38) el punto 1 se escogerá siempre aguas arriba y el punto 2 aguas abajo de la corriente. Esto es indiferente al aplicar la Ec. (5-35).

— H únicamente puede aumentar en dirección de la corriente si en el circuito hay una bomba.

Por tanto en el fluido real la altura (energía) total siempre disminuye en el sentido de la corriente (si no hay bomba); puede suceder que la altura de presión, la de velocidad, o la geodésica aumenten o bien que aumenten dos cualesquiera de estas tres energías, pero nunca puede aumentar la suma de las tres.

Ejemplos

— En la tubería forzada que baja desde el embalse a una central hidroeléctrica la *energía de presión* aumenta; pero el agua pierde altura y la *energía geodésica* disminuye. La *energía cinética* permanece constante si la tubería es de sección constante. *La suma de las tres* disminuye [la llamada altura neta, H, es menor que la altura bruta, H_b; véase Ec. (22-19)].
— En el agua que sube por una tubería vertical la *energía de presión* puede aumentar, aunque aumenta también la *energía geodésica:* basta que la tubería aumente de sección convenientemente; pero la *energía cinética* disminuye y *la suma de las tres* disminuye también.
— En una tubería horizontal la *energía geodésica* permanece constante; la *energía cinética* aumenta si la sección disminuye; pero entonces la *energía de presión* disminuirá, para que la *suma de las tres* disminuya.

La Ec. (5-38)

— si no hay bombas ni turbinas, se convierte en la Ec. (5-37).
— si además no hay pérdidas se convierte en la Ec. (5-31).
— si finalmente el fluido está en reposo se convierte en la Ec. (4-4) o ecuación fundamental de la hidrostática:

$$p_1/\rho g + z_1 = p_2/\rho g + z_2$$

es decir la altura piezométrica $h = \dfrac{p}{\rho g} + z$ permanece constante.

(Véanse problemas 5-3 a 5-7.)

5.14. GRAFICO DE ALTURAS

Todos los términos de la Ec. (5-38) se expresan en m; aunque propiamente, según hemos dicho, son alturas equivalentes, que resultan de dividir las

energías específicas correspondientes en $\dfrac{m^2}{s^2}$ por g en m/s^2. La ecuación de Bernoulli se presta, por tanto, a una representación gráfica e intuitiva, de manera análoga a como se hizo en la Sec. 4.2 con la Ec. (4-2). Más adelante en la Sec. 11.6 se aclarará el procedimiento para construir el *gráfico de alturas.*

5.15. LA ECUACION DE BERNOULLI PARA UN GAS INCOMPRESIBLE

Si multiplicamos los dos miembros de la Ec. (5-37) por ρg tendremos:

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} - \rho g H_{r1-2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} \qquad (5\text{-}39)$$

Los términos de esta ecuación tienen ahora las dimensiones de una presión.

En un gas la variación de presión geodésica (o equivalente en presión de la energía de posición) $\rho g(z_1 - z_2)$ suele ser despreciable en comparación con los otros términos de la Ec. (5-39).

Ejemplo

En el flujo de aire en una tubería supongamos $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 y un desnivel geodésico de $z_1 - z_2 = 5$ m. Tendremos:

$$\rho g(z_1 - z_2) = 1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 5 = 59 \text{ Pa}$$

presión muy pequeña. No obstante, si las restantes presiones que figuran en la Ec. (5-39) fuesen del mismo orden, o si $z_1 - z_2$ fuese aún mucho mayor que 5 m habría que tener en cuenta este término. Pero en general se podrá despreciar.

Haciendo $\rho g(z_1 - z_2) \simeq 0$, y llamando $\rho g H_{r1-2} = \Delta p_{r1-2}$ —presión perdida entre 1 y 2, tendremos la

ECUACION DE BERNOULLI PARA GASES

$$\boxed{p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} - \Delta p_{r1-2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}} \qquad (5\text{-}40)$$

(gas viscoso e incompresible)

donde p_1, p_2 — *presiones estáticas* en los puntos 1 y 2, Pa, *SI*

$\rho \dfrac{v_1^2}{2}, \rho \dfrac{v_2^2}{2}$ — *presiones dinámicas* en los puntos 1, 2, Pa, *SI*

Δp_{r1-2} — *presión perdida* por rozamiento entre 1 y 2, Pa, *SI*

$p_1 + \rho \dfrac{v_1^2}{2} = p_t$ — *presión total* en el punto 1, Pa, *SI.*

La Ec. (5-49) es válida también para líquidos en movimiento horizontal ($z_1 = z_2$).

Nota final

Si multiplicamos la Ec. (5-37) por G (caudal másico) $= Q\rho$ y por g, los términos de la ecuación resultante representarán potencias en W, *SI*. Por ejemplo, el segundo miembro

$$Q\rho g\left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}\right)$$

será la potencia que tiene la corriente en el punto 2.

Asimismo, si multiplicamos la Ec. (5-40) por Q = caudal másico, m^3/s, *SI*, los términos de la ecuación representarán potencias en W, *SI*. Por ejemplo, el segundo miembro

$$Q\left(p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2}\right)$$

será la potencia que tiene la corriente del gas en el punto 2.

PROBLEMAS

5-1. *Una tubería de 200 mm de diámetro transporta un caudal de fluido de 1 m^3/s. Al final de la tubería hay un difusor formado por dos discos de 500 mm de diámetro, a 100 mm de distancia, uno de ellos soldado al extremo de la tubería.*
Calcular c_1 y c_2.

Basta aplicar la Ec. (5-3), teniendo en cuenta que según la ecuación de continuidad el caudal es el mismo en la sección 1 y en la sección 2.

$$c_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4\cdot 1}{\pi\cdot 0{,}2^2} = 31{,}831 \text{ m/s}$$

$$c_2 = \frac{Q}{\pi d_2^2} = \frac{1}{\pi\cdot 0{,}5\cdot 0{,}1} = 6{,}366 \text{ m/s}$$

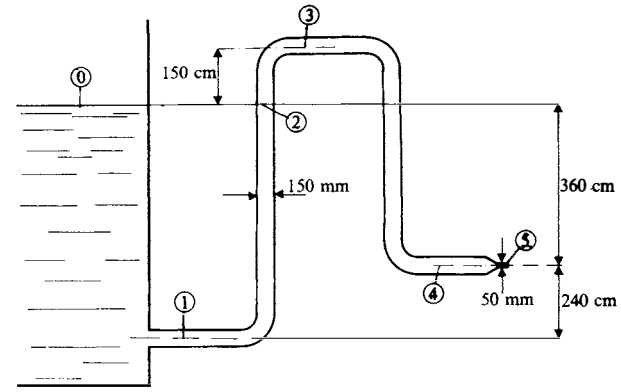
5-2. *Calcular el caudal que desagua la tubería de la figura y las presiones en los puntos 1, 2, 3 y 4. Despréciense los rozamientos.*

Aplicando Bernoulli entre 0 y 5 (sin tener en cuenta la contracción del chorro)

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_5}{\rho} + gz_5 + \frac{v_5^2}{2}$$

$$\frac{v_5^2}{2} + g(z_5 - z_0) = 0 \Rightarrow v_5 = \sqrt{2\cdot 9,\ 81\cdot 3{,}6} = 8{,}404\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q = \frac{\pi\cdot 0{,}05^2}{4}\cdot v_5 = 0{,}01650\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$



PROB. 5-2

Según la ecuación de continuidad:

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = \frac{Q\cdot 4}{H\cdot 0{,}15^2} = 0{,}934\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

$$p_1 = \left(g\cdot z_0 - \frac{v_1^2}{2}\right)\rho = \left(9{,}81\cdot 6 - \frac{v_1^2}{2}\right)\cdot 1.000 = 58{,}424\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$p_2 = -\frac{v_2^2}{2}\rho = -436\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

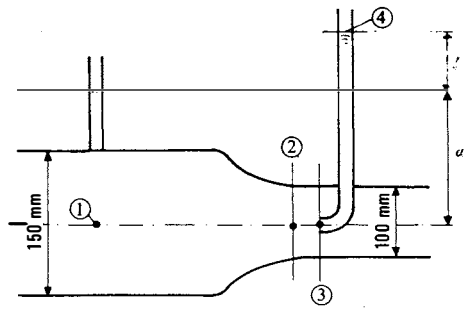
$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + gz_3 + \frac{v_3^2}{2}$$

$$p_3 = \left(g\cdot z_0 - \frac{v_3^2}{2} - gz_3\right)\rho = \left(9{,}81\cdot 6 - \frac{v_3^2}{2} - 9{,}81\cdot 7{,}5\right)\cdot 1.000 = -15{,}151\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0}{2} = \frac{p_4}{\rho} + gz_4 + \frac{v_4^2}{2}$$

$$p_4 = \left(gz_0 - \frac{v_4^2}{2} - gz_4\right)\rho = \left(9{,}81\cdot 6 - \frac{v_4^2}{2} - 9{,}81\cdot 2{,}4\right)\cdot 1.000 = +34.880\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

5-3. *Calcular el caudal ideal que circula por la tubería de la figura. Despréciense los rozamientos, l = 500 mm.*



PROB. 5-3

En 3 se produce un punto de estancamiento ($v_3 = 0$). Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1, 2 y 3 se tiene:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_3}{\rho}$$

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{p_3 - p_1}{\rho}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_3 - p_1)}{\rho}}$$

$$p_3 = \rho g(l + a)$$

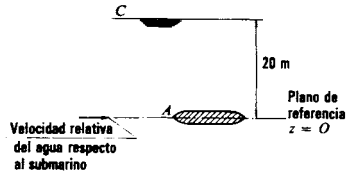
$$p_1 = \rho g\, a$$

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho} = lg$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} = 3{,}132 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q = \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{4} v_1 = 0{,}0553 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

5-4. *Un submarino navega a la velocidad de 15 km/h en agua salada ($\delta = 1{,}025$) a una profundidad de 20 m (véase figura).*
Calcular la presión en el borde de ataque A con relación a la atmósfera.



PROB. 5-4

Sumando una velocidad igual y de sentido contrario a la del submarino al conjunto agua más submarino, según se explicó en la página 91, éste quedará fijo, y el agua del mar se moverá (de izquierda a derecha en la figura) con una velocidad igual y de sentido contrario a la del submarino. Aplicando ahora la Ec. (5-31) entre el punto C y el punto A se tendrá:

$$\frac{p_C}{\rho} + z_C g + \frac{v_C^2}{2} = \frac{p_A}{\rho} + z_A g + \frac{v_A^2}{2}$$

donde ρ — densidad del agua salada. Ahora bien,

$$\frac{p_C}{\rho} = 0 \qquad z_C = 20 \text{ m} \qquad v_C = 15 \text{ km/h}$$

$$z_A = 0 \qquad \frac{v_{A^2}}{2} = 0 \quad \text{(punto de estancamiento)}$$

luego

$$\frac{p_A}{\rho} = 20 \cdot 9{,}81 + \left(\frac{15.000}{3.600}\right)^2 \frac{1}{2} =$$

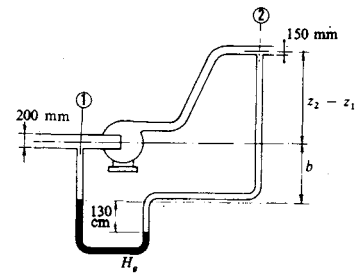
$$= 204{,}88 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Siendo para el agua salada $\delta = 1{,}025$, se tendrá para el agua salada también $\rho = 1.025$ kg/m^3 y, finalmente,

$$p_A = \frac{p_A}{\rho} \cdot \rho =$$

$$= 210.003 \text{ Pa} \simeq 2{,}1 \text{ bar}$$

5-5. *La bomba de la figura da un caudal de agua de 100 l/s.*
Calcular la potencia que la bomba comunica al fluido.



PROB. 5-5

En este caso, como no hay ninguna turbina, en la Ec. (5-38) $\Sigma H_t = 0$.

Haciendo

$$\Sigma H_b - \Sigma \acute{H}_{r\,1-2} = H \quad (*) \tag{1}$$

$Y = g\,H$ será la *energía específica* que la bomba comunica realmente al fluido. Llamando Q al caudal y ρ al peso específico se tendrá:

$$P\,(\text{W}) = Q\left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \rho\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) Y\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) =$$

$$= G\left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right) Y\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) = Q\rho g\, H \tag{2}$$

Cálculo de H:

Sustituyendo (1) en 5-38):

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + H = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

y

$$H = \left[\left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right)\right] + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \tag{3}$$

Aplicando el procedimiento en la Sec. 4.3.2.4 tendremos:

$$p_2 = p_1 + \rho g b + \rho_m \cdot g \cdot 1{,}3 - \rho g\, 1{,}3 - \rho g b - \rho g(z_2 - z_1) \tag{4}$$

donde ρ — densidad del agua, kg/m^3, *SI*
ρ_m — densidad del mercurio, kg/m^3, *SI*

Dividiendo la Ec. (4) por ρg, y simplificando:

$$\left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) = 1{,}3(\delta_m - 1) = 1{,}3 \times 12{,}6 = 16{,}38 \text{ m} \tag{5}$$

Además

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}150^2} = 5{,}659 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}200^2} = 3{,}183 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = 1{,}116 \text{ m} \tag{6}$$

(*) Esta altura coincide con la que más adelante llamaremos «altura útil» (véase Sec. 19.10).

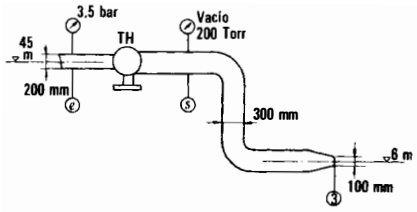
Llevando los valores de las diferencias de alturas piezométricas [Ec. (5)] y de alturas de velocidad [Ec. (6)] a la Ec. (3) tendremos

$$H = 16{,}38 + 1{,}116 = 17{,}496 \text{ m}$$

Cálculo de P:

En virtud de la Ec. (2)

$$P = Q\rho g H = 0{,}1 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H = 17.163 \text{ W} = 17{,}163 \text{ kW}$$



PROB. 5-6

5-6. *Calcular, despreciando las pérdidas, la potencia que desarrolla la turbina hidráulica TH de la figura.*

La potencia P desarrollada por la turbina tendrá una expresión análoga a la Ec. (2), a saber:

$$P = Q\rho g H \tag{7}$$

En la figura se han marcado las secciones siguientes:

Sección e — entrada en la turbina
Sección s — salida de la turbina
Sección 3 — salida del agua a la atmósfera.

En este problema en la Ec. (5-38),

$$\Sigma H_{r1-2} = 0 \qquad \Sigma H_b = 0$$

Escribiendo la misma Ec. (5-38) entre las secciones s y 3, $\Sigma H_t = 0$, y por tanto

$$\frac{p_s}{\rho g} + z_s + \frac{v_s^2}{2g} = 0 + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} \quad (*) \tag{8}$$

$$\frac{p_s}{\rho g} = 0{,}200 \cdot 13{,}6 = 2{,}72 \text{ m}$$

Además, por la ecuación de continuidad,

$$v_s = \left(\frac{d_3}{d_s}\right)^2 v_3 = \left(\frac{100}{300}\right)^2 v_3$$

valores que sustituidos en la Ec. (8) nos conducen a la ecuación siguiente:

$$\frac{v_3^2}{2g}(1 - 0{,}1111^2) = -2{,}72 + 45 - 6 = 36{,}28 \text{ m}$$

(*) Suponemos por más sencillez que en la misma sección 3 la presión es la atmosférica. En realidad la presión atmosférica tiene lugar en la vena líquida contraída.

$$v_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 36{,}28}{1 - 0{,}1111^2}} = 28{,}846 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se tiene también, en virtud de la ecuación de continuidad,

$$v_e = \left(\frac{d_3}{d_e}\right)^2 v_3 = \left(\frac{100}{200}\right)^2 v_3$$

Por tanto,

$$v_s = 2{,}983 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_e = 6{,}712 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y

$$\frac{v_s^2}{2g} = 0{,}454 \text{ m}$$

$$\frac{v_e^2}{2g} = 2{,}296 \text{ m}$$

El caudal Q en la Ec. (7) será:

$$Q = \frac{\pi d_3^2}{4} v_3 = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2 \cdot v_3}{4} = 0{,}2108 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

La altura H (*) en la misma Ec. (7) se obtendrá escribiendo la Ec. (5-38) entre las secciones e y s (véase figura):

$$\frac{p_e}{\rho g} + z_e + \frac{v_e^2}{2g} - H = \frac{p_s}{\rho g} + z_s + \frac{v_s^2}{2g}$$

o sea

$$H = \left(\frac{p_e}{\rho g} + z_e + \frac{v_e^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_s}{\rho g} + z_s + \frac{v_s^2}{2g}\right) = \left(\frac{3{,}5 \cdot 10^5}{1.000 \cdot 9{,}81} + 45 + \frac{v_e^2}{2g}\right) - \left(2{,}72 + 45 + \frac{v_s^2}{2g}\right) = 40{,}240 \text{ m}$$

Finalmente, aplicando la Ec. (7) se obtendrá la potencia pedida:

$$P = Q\rho g H = Q \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H = 83{,}234 \cdot 10^3 \text{ W} = 83{,}234 \text{ kW}$$

(*) Más adelante llamaremos a esta H «altura neta» (véase Sec. (22.8).

5-7. *Por una turbina hidráulica circula un caudal de 3 m^3/s. A la entrada de la turbina en la tubería forzada de 1 m de diámetro un manómetro marca una presión de 3,5 bar. A la salida de la turbina en la tubería de 1,5 m de diámetro un vacuómetro marca una presión de 150 Torr por debajo de la presión atmosférica. La salida de la turbina se encuentra 5 m más baja que la entrada. La altura perdida por rozamientos entre la entrada y la salida asciende a 10 m.*

Calcular la potencia suministrada por la turbina despreciando todas las demás pérdidas.

En la Ec. (5-38) $\Sigma H_b = 0$, porque entre el punto *1* que tomaremos a la entrada de la turbina y el punto *2* que tomaremos a la salida de la misma no hay ninguna bomba.

Escribamos:

$$\Sigma H_{r1-2} + \Sigma H_t = H$$

donde ΣH_{r1-2} — pérdidas, en nuestro caso 10 m
$\Sigma H_t = H_u$ — energía aprovechada
H — energía total puesta a disposición de la turbina (*).

Por tanto, en virtud de la citada Ec. (5-38)

$$H = \left(\frac{p_e}{\rho g} + z_e + \frac{v_e^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_s}{\rho g} + z_s + \frac{v_s^2}{2g}\right)$$

$$= \left(\frac{p_e}{\rho g} + 5 + \frac{v_e^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_s}{\rho g} + 0 + \frac{v_s^2}{2g}\right) \qquad (9)$$

$$\frac{p_e}{\rho g} = \frac{3{,}5 \cdot 10^5}{1.000 \cdot 9{,}81} = 35{,}678 \text{ m}$$

$$\frac{p_s}{\rho g} = -0{,}15 \cdot 13{,}6 = -2{,}040 \text{ m}$$

$$v_e = \frac{4Q}{\pi D_e^2} = \frac{4 \cdot 3}{\pi \cdot 1^2} = 3{,}820 \text{ m/s}$$

$$v_s = \frac{4Q}{\pi D_s^2} = \frac{4 \cdot 3}{\pi \cdot 1{,}5^2} = 1{,}698 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_e^2}{2g} = 0{,}744 \text{ m}$$

$$\frac{v_s^2}{2g} = 0{,}147 \text{ m}$$

Sustituyendo todos estos valores en la Ec. (9) se tiene:

$$H = 43{,}315 \text{ m}$$

La altura aprovechada por la turbina será:

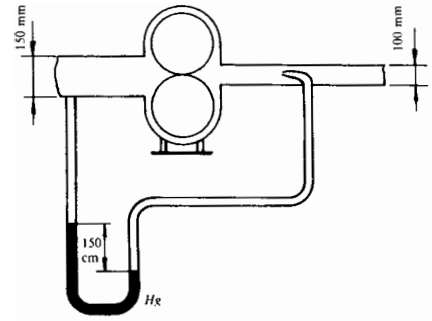
$$H_u = H - 10 = 33{,}315 \text{ m}$$

Y la potencia suministrada por la turbina

$$P = Q\,\rho g\,H_u = 3 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H_u = 980{,}453 \cdot 10^3 \text{ W} =$$
$$= 980{,}453 \text{ kW}$$

(*) H, que es también la diferencia de alturas entre 1 y 2 se denominará más adelante «altura neta» (véase Sec. 22.8).

5-8. *El caudal bombeado es de 20 l/s de agua. Los tubos manométricos están libres de aire. Calcular la potencia que la bomba ha comunicado a la corriente.*



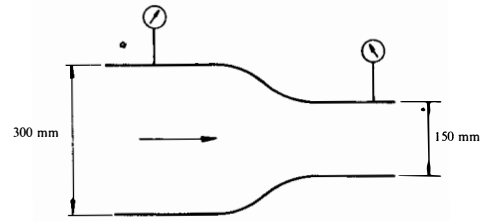
PROB. 5-8

5-9. *En una bomba de agua la tubería de aspiración es de 175 mm y la de impulsión de 150 mm. El caudal es de 50 l/s. Un manómetro situado en la tubería de impulsión a una cota de 10 m por encima del nivel del pozo de aspiración marca una presión de 2 bar. Despréciense las pérdidas en las tuberías. Calcular la potencia útil comunicada al agua.*

5-10. *Entre dos puntos situados a una distancia de 2 m de una tubería cuya inclinación es de 30° ésta cambia gradualmente de diámetro de 300 a 150 mm. La presión en el primer punto es de 10,5 bar y el caudal de agua 2.000 l/h. Supóngase que no hay pérdidas por rozamiento. Calcular la presión en el segundo punto.*

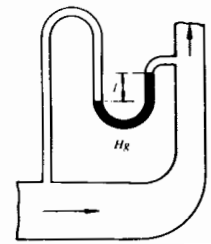
5-11. *Se bombea 1/2 m^3/s de agua a través de una tubería de 300 mm desde un lago a una colina. Se desea mantener a una altura de 30 m sobre el lago en la tubería una presión de 4 bar. Las pérdidas en la conducción equivalen a 10 m c.a. Determinar la potencia que la bomba ha de suministrar a la corriente.*

5-12. *En la contracción suave de la figura se desprecian las pérdidas. Calcular la diferencia de lecturas de los dos manómetros de la figura, si el caudal es de 5.000 l/min y el fluido aceite de densidad relativa $\delta = 0{,}95$.*



PROB. 5-12

5-13. *Por el codo de la figura circula un caudal de 300 l/s de un líquido de densidad relativa $\delta = 0{,}835$. Calcular l. La tubería se contrae desde 300 mm a 150 mm.*



5-14. *Un manómetro de mercurio situado a la entrada de una bomba de agua marca una presión absoluta de 500 Torr. El punto en que está conectado el manómetro se encuentra 2 m por encima del nivel del pozo de aspiración. La tubería de aspiración es de 150 mm. Despréciense las pérdidas.*
Calcular el caudal.

5-15. *La tubería de aspiración de una bomba tiene una pendiente de 1/4. La velocidad del agua en dicha tubería es de 4 m/s. Cuando en ella se produce un vacío del 50 por 100 (presión barométrica 1 bar), la bomba deja de funcionar, porque se produce cavitación (véase Sec. 15.2).*
Calcular la longitud máxima de la tubería, despreciando los rozamientos.

5-16. *Calcular la potencia necesaria para bombear 1 m^3/s de agua desde un depósito a otro situado 50 m más elevado, si las pérdidas en la bomba y en la tubería ascienden a 10 m.*

Algunas aplicaciones de la ecuación de Bernoulli. Instrumentación de medida de velocidad. Instrumentación de medida de caudal en flujo cerrado

6.1. INTRODUCCION

La ecuación de Bernoulli es uno de los pilares fundamentales de la hidrodinámica: son innumerables los problemas prácticos que se resuelven mediante esta ecuación:

- Con ella se determina la altura de suspensión a que debe instalarse una bomba (Sec. 19.12.1).
- Ella es necesaria para el cálculo de la altura efectiva o altura útil que se necesita en una bomba (Sec. 19.10).
- Con ella se estudia el problema de la cavitación (Sec. 15.2).
- Con ella se estudia el tubo de aspiración de una turbina (Sec. 22.10).
- Ella interviene en el cálculo de las tuberías de agua, oleoductos, tuberías de refrigeración y aire acondicionado, tuberías forzadas en centrales hidroeléctricas, etc.

En este capítulo se reúnen sólo algunos ejemplos de aplicación de la ecuación de Bernoulli de interés práctico, que ayudarán al mejor conocimiento de la *ecuación fundamental de la hidrodinámica.*

6.2. SALIDA POR UN ORIFICIO: ECUACION DE TORRICELLI

Sea el depósito de la Fig. 6-1 de forma cualquiera que contiene un líquido, por ejemplo agua, y que tiene en la parte inferior un orificio O provisto de una tubería T, que termina en una válvula V. Supondremos que el líquido se comporta como un fluido ideal.

- La superficie libre del depósito se mantiene a una altura H constante con relación al plano de referencia $z = 0$, que tomaremos a la salida de la tubería T; gracias a que en el depósito entra un caudal Q igual al que sale por la tubería T, regulado por la válvula V';
- el área de la superficie libre es suficientemente grande para que pueda considerarse la velocidad del fluido en ella, $v_1 = 0$;
- en el punto 1 la energía geodésica $z_1 = H$;
- se despreciarán las pérdidas.

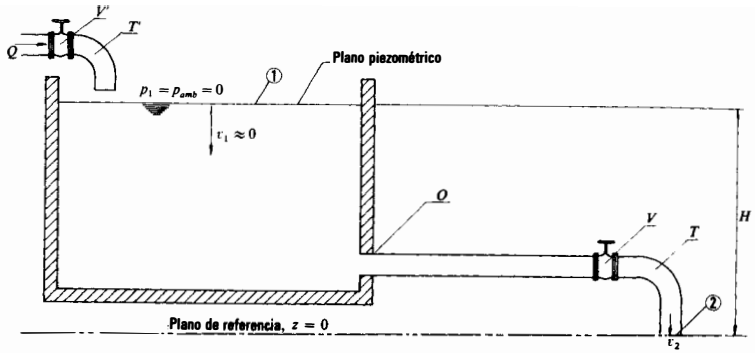


FIG. 6.1. La velocidad teórica de salida de un fluido por un orificio es independiente de la densidad del fluido y viene dada por la *ecuación de Torricelli*: $v = v_2 = \sqrt{2gH}$

Apliquemos entre los puntos (secciones) 1 y 2 la ecuación de Bernoulli en la forma (5-35), ya que hemos supuesto que el fluido se comporta como un fluido ideal:

$$p_1/\rho g + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = p_2/\rho g + z_2 + \frac{v_2^2}{2g},$$

o sea

$$O + H + O = O + O + v_2^2/2g,$$

porque en 1 y 2 reina la presión atmosférica o barométrica, que es igual a O (presión relativa).

De donde

$$v_2 = \sqrt{2g\,H} \qquad (6\text{-}1)$$

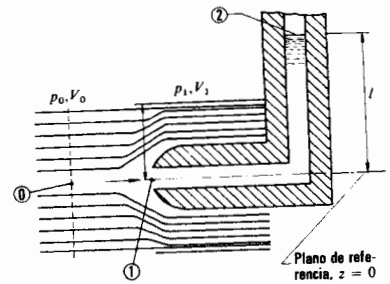
(salida a la atmósfera, pérdidas nulas)

Esta velocidad:

- Es igual a la que adquiriría una partícula de fluido al caer libremente desde una altura H;
- Es independiente del peso específico del fluido: con alcohol y mercurio la velocidad sería la misma.
- Es la velocidad teórica de salida en condiciones ideales (fricción nula).

6.3. TUBO DE PITOT

La Fig. 6-2 es un esquema del tubo ideado por Pitot para medir la presión total, también llamada *presión de estancamiento* (suma de la presión estática y de la presión dinámica). En la figura se han esquematizado también las líneas de corriente. Justo en la embocadura del tubo, punto 1, se forma un *punto de*



G. 6-2. *Tubo de Pitot* y líneas de corriente al-dedor del mismo. Este instrumento mide la pre-n total o presión de estancamiento.

tancamiento o de *remanso:* la velocidad allí se reduce a cero y la presión, según c. (5-35), aumenta hasta el valor

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_t}{\rho g} = \frac{p_o}{\rho g} + \frac{v_o^2}{2g} \qquad (6\text{-}2)$$

nde p_t — presión total o presión de estancamiento o de remanso
p_o, v_o — presión y velocidad de la corriente imperturbada (teóricamente en el infinito)

biendo supuesto para más sencillez que O y 1 se encuentran en un mismo no horizontal y habiendo despreciado las pérdidas.
Aplicando la misma Ec. (5-35) entre las secciones 1 y 2 tendremos

$$\frac{p_t}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + v_2^2/2g + z_2;$$

ro en 1 y 2 reinan condiciones estáticas, es decir, $v_1 = v_2 = 0$ y $z_2 - z_1 = l$ (lec-ra), luego

$$p_t = \rho g \cdot l \qquad (6\text{-}3)$$

(presión total o de estancamiento, tubo de Pitot)

onde $p_t = p_o + \rho \frac{v_o^2}{2}$, según la Ec. (6-2).

6.4. INSTRUMENTACION DE MEDIDA DE VELOCIDADES

Entre los instrumentos desarrollados para medir la velocidad de un fluido un punto, en módulo, en dirección o ambas cosas a la vez, figura el tubo Prandtl, cuyo fundamento es la ecuación de Bernoulli. Por eso hablaremos él en primer lugar y luego reuniremos aquí por conveniencia lo referente a s restantes instrumentos de medida de velocidad en flujo cerrado.

6.4.1. Teoría del tubo de Prandtl

Fue idea de Prandtl combinar en un solo instrumento un tubo de Pitot (Sec. 6.3) y un tubo piezométrico (Sec. 4.3.1): el *tubo de Pitot* mide la presión total; el *tubo piezométrico* mide la presión estática, y el *tubo de Prandtl* mide la diferencia de las dos, que es la presión dinámica. Es muy usado en los laboratorios con líquidos y gases, siendo el instrumento standard para medir la velocidad del aire en aerodinámica y la velocidad y el caudal en los ventiladores.

En la Fig. 6-3 se muestra un tubo de Prandtl introducido en una corriente de fluido de densidad ρ, conectado a un manómetro diferencial, cuyo líquido manométrico tiene una densidad ρ_m.

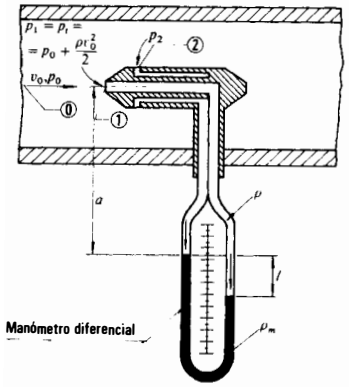


FIG. 6-3. El *tubo de Prandtl* combina en un único instrumento un tubo de Pitot 1 y un tubo piezométrico 2 y conectado a un manómetro diferencial mide la presión dinámica. Sirve para medir la velocidad de la corriente y el caudal.

El tubo de Prandtl, al igual que el tubo de Pitot, al ser introducido en el fluido produce una perturbación, que se traduce en la formación en 1 de un punto de estancamiento, de manera que

$$p_1 = p_t \qquad v_1 = 0$$

En el punto O la corriente no perturbada tiene la presión p_o y la velocidad v_o, que es la velocidad que queremos medir.

El punto 1 se elige a la entrada del tubo de Pitot y el punto 2, donde se indica en la figura. En el punto 2 lo que hay en realidad es un tubo piezométrico con diversas entradas laterales que no perturban la corriente y que miden por lo tanto la presión estática.

Despreciando en primera aproximación las diferencias de alturas de velocidad y geodésicas entre los puntos O y 2 que suelen ser muy pequeñas por ser el tubo muy fino y estar la corriente en 2 prácticamente normalizada después de la perturbación en 1, se tendrá, despreciando también las pérdidas:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{ot} \\ p_2 &= p_o \end{aligned} \tag{6-4}$$

donde v_{ot} — velocidad teórica en la sección O.

Ecuación de Bernoulli entre 0 y 1 ($z_o = z_1$, $v_1 = 0$ —punto de estancamiento):

$$p_o + \rho \frac{v_{ot}^2}{2} = p_1$$

y según Ecs. (6-4)

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{v_{ot}^2}{2} \tag{6-5}$$

Por otra parte, yendo de 1 a 2 por el interior del manómetro, estando tanto el fluido principal como el líquido manométrico en reposo, se podrá aplicar la ecuación fundamental de la hidrostática [véase Ec. (4-10)] entre 1 y 2 ($z_1 \approx z_2$), a saber:

$$p_1 = p_2 + \rho g a + \rho_m g l - \rho g l - \rho g a \tag{6-6}$$

de las Ecs. (6-5) y (6-6) se deduce finalmente

$$\rho \frac{v_{ot}^2}{2} = (\rho_m - \rho) g\, l \tag{6-7}$$

(presión dinámica teórica, tubo de Prandtl)

(Véase lo dicho en la pág. 56 sobre la elección del líquido manométrico para mayor sensibilidad del manómetro diferencial.)

Despejando en la Ec. (6-7) v_{ot}, tendremos:

$$v_{ot} = \sqrt{\frac{2g(\rho_m - \rho)}{\rho} l} \tag{6-8}$$

En el caso particular de que la medición de la velocidad se haga en el agua:

$$v_{ot} = \sqrt{2g(\delta - 1)\, l}$$

(velocidad teórica de la corriente, tubo de Prandtl)

donde δ — densidad relativa del líquido manométrico.

En la práctica v_2 es algo mayor que v_o, y por tanto, según la ecuación generalizada de Bernoulli [Ec. (5-29)], p_2 algo menor que p_o. Además en el punto 1, si el eje del tubo de Prandtl está inclinado con relación a las líneas de corriente puede producirse una velocidad distinta de cero y por tanto una presión $p_1 < p_t$ (1). La velocidad real v_o no es, pues, la expresada por la Ec. (6-8), sino la siguiente

$$v_o = C_v \sqrt{\frac{2g(\rho_m - \rho)}{\rho} l} \tag{6-9}$$

(Velocidad real de la corriente, tubo de Prandtl)

(1) Sólo inclinaciones mayores de $\pm 10°$ influyen en la exactitud de medida.

donde C_v — *coeficiente de velocidad* del tubo de Prandtl, que oscila entre 0,01 y 1,03 y que se determina experimentalmente. Sin embargo, si el tubo de Prandtl se orienta paralelamente a las líneas de corriente, puede hacerse aproximadamente $C_v = 1$.

El dimensionado de los tubos de Prandtl de ejecución corriente está normalizado y puede verse en la Fig. 6-4.

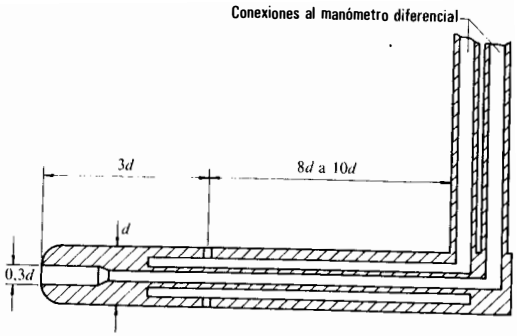


FIG. 6-4. Dimensiones normalizadas de un *tubo de Prandtl*.

6.4.2. Tipos diversos de tubos de Prandtl

Tubo de Prandtl con manómetro incorporado

La Fig. 6.5 representa el comercializado por la firma Wilh. Lambrecht KG, alemana. En él se utiliza como manómetro diferencial uno del tipo de balanza (véase la Fig. 4-17)

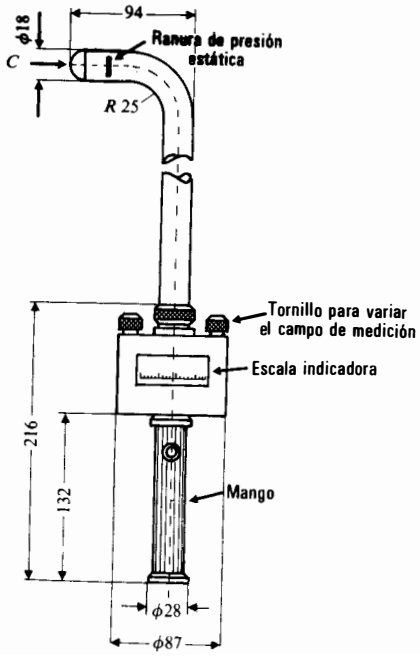


FIG. 6-5. *Tubo de Pitot* comercializado por la firma Wilh. Lambrecht KG de Alemania.

incorporado en el instrumento. Este que esencialmente no se diferencia al descrito en la Sec. 6.4.1., se introduce en el gas o aire que lo baña por completo tubo y balanza. Su precisión es del ±2%, lo que unido a su cómodo uso, lo hace muy práctico para medidas industriales en meteorología, minas, instalaciones de ventilación y aire acondicionado, etc. El tarado se hace normalmente para una densidad del aire determinada y el constructor suele suministrar tablas de corrección para su uso con otras densidades del aire o del gas.

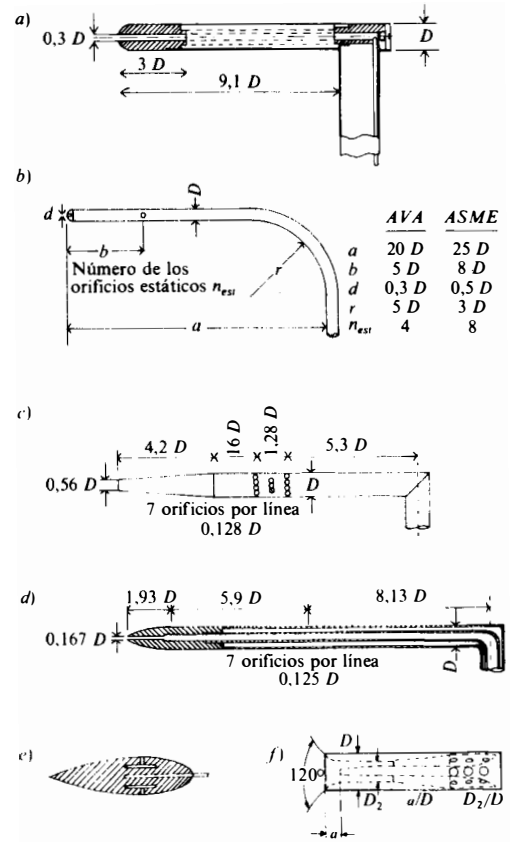


FIG. 6-6. Formas diversas de *tubos de Pitot y de Prandtl*.

Cabezas diversas de tubos de Prandtl

En la Fig. 6-6 se representan algunos de los modelos desarrollados:

a) cabeza semiesférica, tubo en gancho (construcción del mismo Prandtl);
b) cabeza semiesférica, codo suave (Laboratorios de Gottingen y A.S.M.E., de Norteamérica);
c) cabeza cónica (Nat. Phys., Lab., de Inglaterra);
d) cabeza helipsoidal (Nat. Phys. Lab., de Inglaterra); con esta construcción se evitan los desprendimientos de la corriente;
e) forma aerodinámica para reducir al mínimo las fuerzas perturbadoras de la configuración del flujo.
f) forma interior muy elaborada y sensible al cambio de dirección.

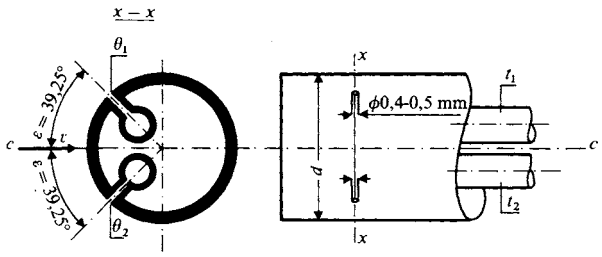


FIG. 6-7. *Cilindro de Pitot: a)* orificios piezométricos; *b)* tubos de conexión.

Tubo de Prandtl cilíndrico direccional

Se representa en la Fig. 6-7 y consiste en un tubo cilíndrico de un diámetro de 6 a 10 mm con dos orificios piezométricos θ_1 y θ_2, cuyos ejes forman entre sí un ángulo $2\varepsilon = 78{,}5°$ en la figura. La bisectriz es la línea central del tubo $c - c$. Los orificios piezométricos están conectados a un manómetro diferencial a través de los tubos metálicos t_1 y t_2. La orientación angular de la línea central c-c con respecto a un índice exterior se lee en una aguja indicadora, fija al eje del cilindro que gira con él recorriendo una escala graduada:

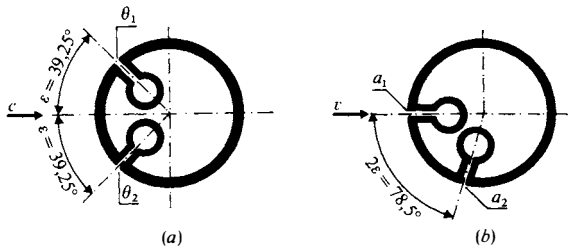


FIG. 6-8. Posición del cilindro: *a)* para determinar la dirección de la velocidad local; *b)* para determinar la presión dinámica.

a) medición de la dirección de la velocidad (Fig. 6-8): la línea central c-c del cilindro coincide con la dirección de la velocidad; las presiones en θ_1 y θ_2 son iguales y el manómetro diferencial no acusa diferencia de presión alguna. Esto se consigue girando la sonda hasta que las susodichas direcciones coincidan, lo que es acusado por el manómetro de la manera indicada;

b) medición del módulo de la velocidad: se hace girar la sonda un ángulo ε, con lo cual el eje del orificio θ_1 coincide con la dirección de la velocidad c; θ_1 actúa como un orificio de Pitot y θ_2 como un orificio piezométrico en la forma explicada en la Sec. 6.4.1, y la lectura del manómetro diferencial permite ahora determinar el módulo de la velocidad.

Sonda esférica

Este tubo desarrollado por Zijnen está representado en la Fig. 6-9. En la cabeza esférica hay cinco orificios: 1-4 simétricamente distribuidos en dos planos perpendiculares; mientras que el 5 se encuentra en el punto de intersección de los arcos $\widehat{13}$ y $\widehat{24}$. Para más detalles sobre este instrumento remitimos al lector a las obras especializadas en instrumentación (2).

6.4.3. Anemómetros

Los más frecuentes son de dos tipos: de eje vertical y de eje horizontal.

(2) Véase, por ejemplo, la excelente obra de A. T. Troskolański, *Hydrometry, theory and practice of hydraulic measurements* (traducción del polaco), Pergamon, Oxford, 1960, 684 págs. (Págs. 228 a 221.)

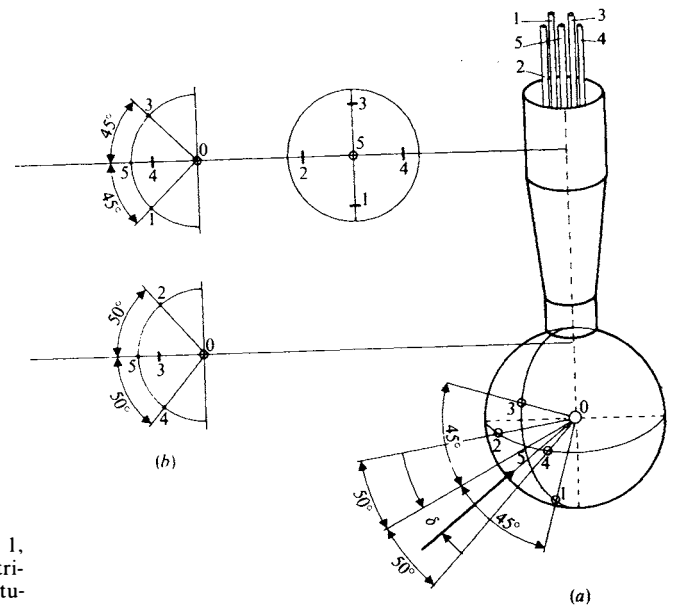


FIG. 6-9. *Esfera de Pitot:* 1, 2, 3, 4, 5 orificios piezométricos y sus correspondientes tubos de conexión.

6.4.1. Anemómetro de eje vertical

Se representa en la Fig. 6-10 y es muy usado en meteorología, navegación, etc. El fundamento de este instrumento es el siguiente. Cuatro casquetes esféricos están dispuestos en los extremos de una cruceta, que puede girar libremente, de manera que las caras cóncavas en el mismo brazo miren en direcciones opuestas. Se comprueba que la resistencia a la corriente de aire en la parte cóncava es aproximadamente tres veces mayor que en la convexa, lo que da origen a un par de giro. La velocidad del viento es aproximadamente proporcional al número de revoluciones de la cruceta. No obstante, será preciso un tarado del instrumento. Con este anemómetro pueden medirse velocidades en la gama de 0,5 a 50 m/s.

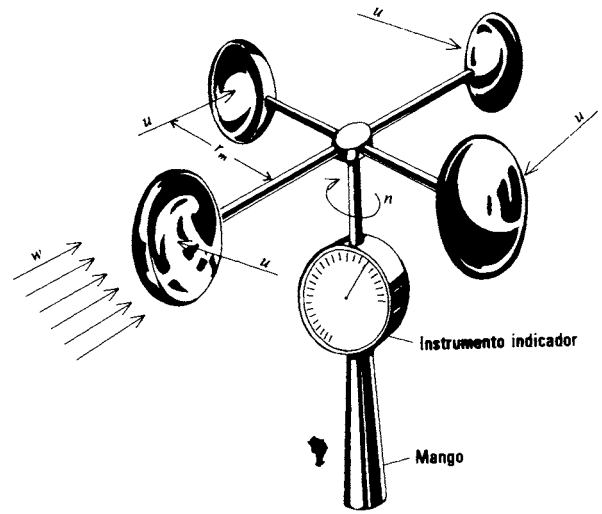


FIG. 6-10. *Anemómetro de cucharas* de eje vertical.

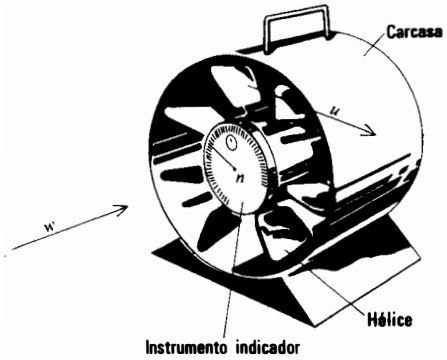


FIG. 6-11. *Anemómetro de paletas* de eje horizontal.

6.4.3.2. Anemómetro de eje horizontal

El anemómetro de paletas, que puede verse en la Fig. 6.11 no es más que una turbina hélice accionada por el viento (véanse las Secs. 22.6.2 y 23.1), que puede girar libremente en el interior de una caja cilíndrica. La velocidad del aire es aproximadamente proporcional y en todo caso función del número de revoluciones, lo que permite la medición de aquélla. La gama de aplicación de este instrumento oscila de ordinario entre 0,2 y 20 m/s.

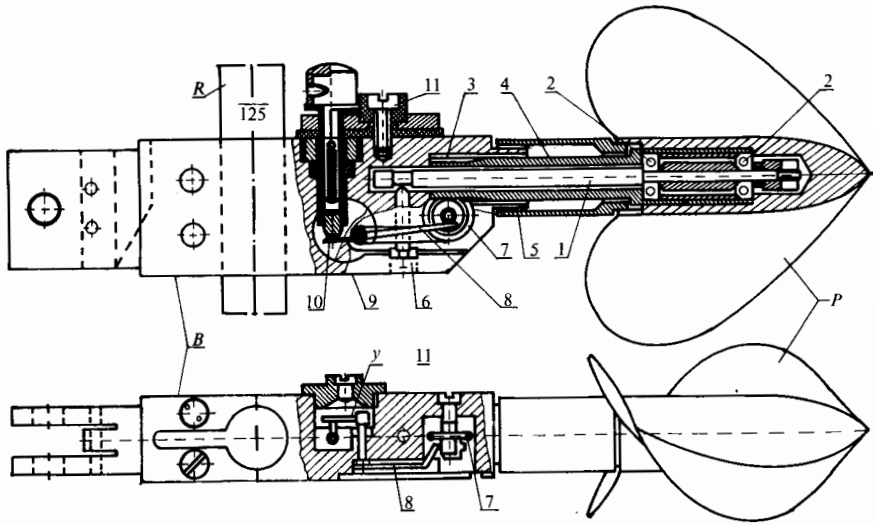


FIG. 6-12. *Molinete hidráulico* con contador eléctrico: *B*, cuerpo; *P*, hélice de dos paletas; *R*, vástago; 1, eje de la hélice; 2, cojinetes de bolas; 3, sin fin transmisor; 4, casquillo del sin fin; 5, casquillo protector; 6, tornillo de fijación; 7, contacto de la rueda y sin fin; 8, leva de contacto; 9, brazo; 10, contacto; 11, botón terminal; 12, cubierta.

6.4.4. Molinete hidráulico

Mientras que los anemómetros sirven para medir la velocidad en los gases, los molinetes sirven para medir la velocidad en los líquidos. El molinete consiste en una hélice de 6 a 12 cm de diámetro (Fig. 6-12), que arrastra por intermedio de un tornillo sin fin una rueda dentada provista de un contacto eléctrico. El contacto cierra el circuito de un timbre o de un

registrador de banda de papel cada 10, 20, 50 ó 100 revoluciones de la hélice. El molinete, provisto de cursor y tornillo de fijación, se instala en un vástago vertical a la altura del punto, donde se quiere medir la velocidad. La velocidad del fluido es directamente proporcionaí al número de revoluciones de la hélice e inversamente proporcional al tiempo transcurrido entre dos timbrazos consecutivos.

Los molinetes se utilizan mucho para medir los caudales de los ríos (aforos) en aquellas estaciones en que se preve una futura utilización de la energía en un salto hidroeléctrico. Con ayuda de los molinetes se construyen las curvas hidrógrafas. (Véase Fig. 21.1.) Se gana tiempo utilizando varios molinetes montados en una barra horizontal en las secciones rectangulares o vertical en las secciones irregulares. El molinete mide la velocidad en un punto; integrando los productos de estas velocidades locales por áreas transversales convenientemente escogidas, se mide el caudal. Un molinete provisto de registrador, montado en un conducto forzado de una central, permite controlar el caudal en cada instante.

6.4.5. Anemómetro de hilo caliente

El anemómetro de hilo caliente es un instrumento de gran precisión, de uso muy delicado, muy utilizado en los laboratorios de aerodinámica y de mecánica de fluidos, sobre todo en gases. El instrumento tiene la ventaja de su pequeño tamaño, que permite medir velocidades prácticamente puntuales o muy cercanas al contorno en que se mueve el fluido; de su pequeña inercia, que permite medir velocidades que varían rápidamente en el tiempo, por lo que es el instrumento fundamental para estudiar el *régimen turbulento* (véase el taquigrama de la Fig. 8-9).

El instrumento se basa en que la resistencia de los conductores eléctricos es función de la temperatura.

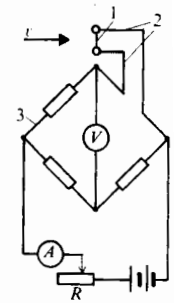


FIG. 6-13. *Anemómetro de hilo caliente* conectado según el método de resistencia constante.

Esencialmente consiste en un conductor 1 (Fig. 6-13) de metal inerte (platino, wolframio, níquel) soldado a dos electrodos, 2. El diámetro del conductor suele ser de 0,005 a 0,01 mm y su longitud tan sólo de 1 a 3 mm. El conductor 1 se introduce en la corriente de fluido (gas generalmente) y se calienta mediante una resistencia eléctrica. La corriente de fluido que baña el conductor la calienta, con lo que su resistencia eléctrica varía. Esta variación, una vez tarado el instrumento, permite medir la velocidad del fluido de la cual es función, como se ha dicho, la variación de la resistencia. Fundamentalmente hay dos esquemas eléctricos que permiten llevar a cabo la medición: esquema con intensidad de corriente constante y esquema con resistencia eléctrica constante. Nos limitaremos a este último esquema al que corresponde el esquema de la Fig. 6-13. En él el conductor 1 se conecta en una de las ramas del puente de Wheatstone, 3. El puente se equilibra para un cierto valor de la velocidad. Al variar la velocidad de fluido, el puente se desequilibra (el voltímetro, *V*, deja de marcar 0) porque varía la resistencia de 1. Para equilibrarlo de nuevo la temperatura de 1 se restituye al primitivo valor por medio del potenciómetro *R*. A continuación se mide la corriente en el amperímetro *A*, que nos da previo tarado la medida de la velocidad del fluido.

6.5. EL SIFON

La Fig. 6-14 representa un sifón que descarga agua por encima de una presa. El estudio que sigue es solo aproximado, porque se despreciarán las pérdidas.

La altura total en la sección 1 (nivel superior del embalse) es:

$$H = p_1/\rho g + z_1 + v_1^2/2g$$

pero

$$\frac{p_1}{\rho g} = 0, \qquad v_1 \simeq 0;$$

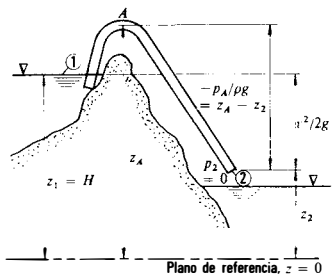


FIG. 6-14. En el *sifón* la presión alcanza su valor mínimo en el punto más elevado A y el caudal desaguado depende de la sección transversal del sifón y del valor z_1-z_2.

luego

$$O + z_1 + O = H$$

La constante de Bernoulli H vale, por tanto,

$$H = z_1 .$$

Al despreciar las pérdidas, la altura total en el punto 2 valdrá:

$$H = p_2/\rho g + z_2 + v_2^2/2g$$

pero

$$\frac{p_2}{\rho g} = 0;$$

luego

$$O + z_2 + v_2^2/2g = H \qquad (6\text{-}10)$$

$$v_2^2/2g = H - z_2$$

$$v = \sqrt{2g(H - z_2)}$$

Si el sifón es de sección transversal constante $v_2 = v$ será la velocidad del agua en todo el sifón. Aquí no se tiene en cuenta por sencillez la contracción

del chorro en la sección 2. El caudal desaguado por el sifón es igual a esta velocidad multiplicada por la sección de salida.

En el punto A, que es el más alto del sifón, la altura valdrá:

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v^2}{2g} = H$$

y

$$\frac{p_A}{\rho g} = H - z_A - \frac{v^2}{2g} \qquad (6\text{-}11)$$

y en virtud de (6-10), siendo $v_2 = v$

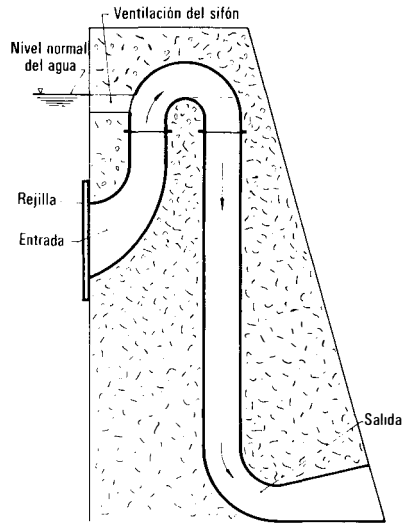
$$\frac{p_A}{\rho g} = H - z_A - H + z_2 = -(z_A - z_2) < 0.$$

Si el líquido es agua $p_A/\rho g$ *teóricamente* puede descender aproximadamente hasta -10 m (100% vacío), *prácticamente* antes de llegar al vacío absoluto se interrumpirá la corriente y se producirá el fenómeno de cavitación (Sec. 15.2).

Como muestra la Ec. (6-11), la presión p_A es tanto menor (y por tanto será mayor el peligro de cavitación).

- cuanto mayor sea $z_A - H$ (elevación del punto más alto del sifón con relación al nivel en el depósito de carga)
- cuanto mayor sea la velocidad (o el caudal) desaguado. Esta velocidad, a su vez, según la Ec. (6-10), crece al aumentar $H - z_2$ (cuando la cota de descarga con relación al nivel del depósito de carga sea mayor).

En la Fig. 6-15 se representa la forma real de un *vertedero sifónico* de presa. En el vertedero sifónico se puede conseguir una velocidad más alta que con un



6-15. *Vertedero sifónico de presa* de cebamiento mático.

vertedero ordinario de superficie, aumentando así en las crecidas el caudal, para el mismo nivel de agua en la presa. Su cebamiento es automático.

(Véase problema 6-2).

6.6. EL EYECTOR

El eyector acelera (o decelera) una corriente de fluido produciendo una depresión (o compresión). El fluido puede ser agua, vapor de agua, aire, o cualquier otro gas. Si se utiliza para producir una compresión, se llama *inyector*, si para producir una depresión o vacío *eyector* propiamente, o exhaustor. Este vacío puede utilizarse, por ejemplo, para elevar otro fluido igual o distinto, que se mezcla con el que produce el vacío. La Fig. 6-16 representa el último caso.

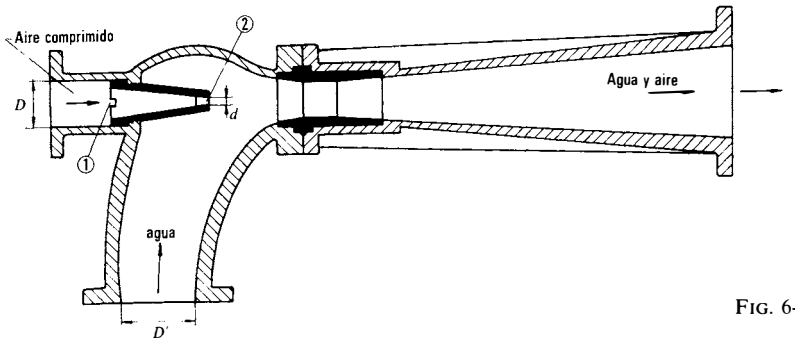


FIG. 6-16. *Eyector.*

Por el tubo de diámetro D circula un fluido, por ejemplo, aire comprimido. Su presión se controla por una válvula de estrangulamiento no indicada en la figura. Gracias a la depresión que se crea en d el agua sube por la tubería de diámetro D': este inyector es, pues, una bomba, cuya gran ventaja consiste en carecer de partes móviles.

Despreciando las pérdidas escribamos la ecuación de Bernoulli [Ec. (5-35)] entre las secciones 1 y 2: si los puntos 1 y 2 están en el mismo plano horizontal $z_1 = z_2$, y por tanto

$$p_1/\rho g + v_1^2/2g = p_2/\rho g + v_2^2/2g$$

y

$$p_2/\rho g = p_1/\rho g - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \qquad (6\text{-}12)$$

Aplicando la ecuación de continuidad [Ec. (5-9)]:

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} \qquad v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

donde Q — caudal de aire que pasa por la tubería D y, por tanto

$$v_1^2/2g = \frac{8\,Q^2}{g\,\pi^2\,d^4} \qquad v_2^2/2g = \frac{8\,Q^2}{g\,\pi^2\,D^4}$$

Llevando estos valores a la Ec. (6-12), tendremos:

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{8\,Q^2}{g\,\pi^2}\,\frac{D^4 - d^4}{D^4 \cdot d^4} \qquad (6\text{-}13)$$

Con una válvula no indicada en la figura se puede regular p_2. Así, por ejemplo, al abrir la válvula aumenta Q, con lo que disminuye p_2.

Otra aplicación interesante es el eyector de vapor de los condensadores de vapor de las centrales térmicas. Tiene como misión separar el aire del vapor condensado, y sustituye a la bomba de vacío alternativa. El aire mezclado con el vapor que produce el vacío es expulsado al drenaje. Con los eyectores modernos se llega a producir un vacío de 740 Torr calculado sobre una presión barométrica de 750 Torr. Las centrales térmicas para aumentar el salto térmico trabajan con un elevado vacío, y entonces suelen utilizarse dos eyectores, o sea dos escalonamientos de vacío.

INSTRUMENTACION DE MEDICION DE VOLUMENES

La medida del caudal es junto con la medida de presión y temperatura la que se realiza con más frecuencia en la industria y en los laboratorios de ensayo e investigación. Entre las innumerables aplicaciones de las técnicas que vamos a describir citemos los ensayos de las turbomáquinas y máquinas de fluido de desplazamiento positivo y las medidas en la industria necesarias para el control y regulación de los procesos industriales y de las centrales hidroeléctricas y térmicas. En la industria química los caudales se miden para controlar las proporciones de los productos y de sus componentes, así como para poder facturar a cada departamento el consumo realizado de vapor, gas-oil, etc. Todo esto explica el desarrollo extraordinario que ha experimentado la instrumentación de medida de caudales en los últimos años y la variedad inmensa de procedimientos e instrumentos que se han desarrollado para la medida, transmisión a distancia, control y registro de los mismos. La bibliografía sobre instrumentación de caudales es abundantísima y a ella remitimos al lector. En este libro nos contentaremos con exponer en la sección presente un panorama muy abreviado de las técnicas de medición de caudales como introducción a la Sec. 6.8 de este capítulo y al Cap. 14, en que trataremos con un poco más de detalle de los instrumentos más importantes para la medición de caudales en flujo cerrado y en flujo libre. La instrumentación de medición de velocidad, v, expuesta en la Sec. 6.4, la instrumentación de la medición de volumen de fluido, V, que pasa por una sección determinada en un intervalo de tiempo, Δt, y los instrumentos específicos para medir el flujo o caudal instantáneo, Q, cumplen objetivos entre sí relacionados, ya que estas variables están relacionadas entre sí por las ecuaciones:

$$Q = v \cdot A = \frac{V}{\Delta t}$$

Habiendo ya hablado de los instrumentos de medida de velocidad, los restantes pueden clasificarse en volumétricos y caudalimétricos. Estrictamente hablando, los primeros miden el volumen y los segundos el caudal.

Instrumentos volumétricos

Miden el volumen en un intervalo de tiempo. Los principales se pueden clasificar en tres grupos: *tanques volumétricos*, *tanques gravimétricos* y *contadores de volumen gastado*. Los dos primeros son los únicos medidores primarios, de manera que cualquier otro medidor volumétrico o de flujo en último término sólo es fiable si se contrasta con ellos.

La medición por pesada es aún más exacta que la volumétrica, pudiéndose alcanzar fácilmente una exactitud del 0,05% de la lectura máxima. Tanto los tanques gravimétricos como los volumétricos se realizan en tamaños muy diversos según las medidas a realizar. Se mide el peso, o respectivamente el volumen, en el tanque y simultáneamente el tiempo transcurrido en un cronómetro.

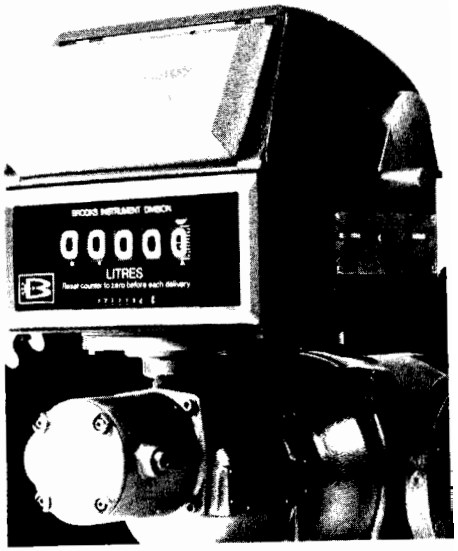


FIG. 6-17. *Contador oval* de Brooks Instrument de Estados Unidos.

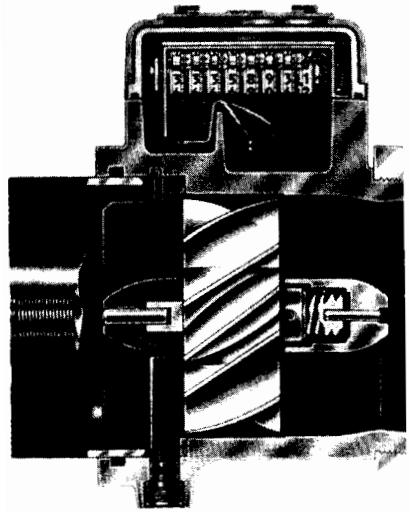


FIG. 6-18. *Contador de agua* WPG-K de la firma Brooks Instrument que puede ser utilizado en tubería horizontal, vertical o inclinada, con controlador de rodillos utilizable para caudales de 22 (50 mm de diámetro nominal) a 120 m^3/h (100 mm de diámetro).

Entre los contadores de volumen gastado se pueden distinguir dos tipos: *contadores de desplazamiento positivo* y *contadores de turbina.*

Los *contadores de desplazamiento positivo* se construyen en una gran variedad de tipos: en todos ellos es accionado un contador a expensas de la energía proveniente de la diferencia de presiones del líquido que pasa por el aparato. El rotor de estos instrumentos reviste gran cantidad de formas, algunas análogas a las máquinas de desplazamiento positivo que se estudiarán más adelante (Cap. 27). La Fig. 6-17 representa un contador de la firma Brooks de Estados Unidos, denominado «Oval» por tener engranajes ovalados. El rotor y la cámara de medición son de un fenol resínico muy resistente, por lo que puede emplearse con una gran variedad de líquidos industriales. El aparato está provisto de puesta a cero y de unidad impresora (para la facturación del fluido al departamento que lo ha gastado). Puede incorporarse también un transmisor de impulsos para la totalización o para conversión analógica. Son también contadores de este tipo los contadores de gas de tipo tornillo.

Los *contadores de turbina* funcionan según un principio totalmente distinto. Esencialmente el rotor no se diferencia en nada de una turbina hidráulica accionada por el mismo caudal que se quiere medir. Se construyen de eje horizontal y de eje vertical. El número de revoluciones de la turbina es directamente proporcional al volumen de agua que lo atraviesa. El eje está acoplado mecánica o eléctricamente con un contador, que permite medir este volumen.

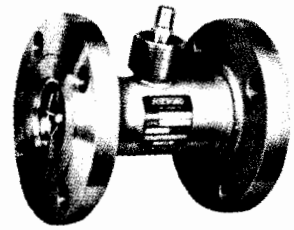


FIG. 6-19. *Transductor electromagnético* de flujo de tipo turbina, de la firma Foxboro de Estados Unidos. Se construyen para su uso con una gran variedad de fluidos: alcohol, acetona, solución amoniacal, benceno, butano, gasolina, queroseno, propileno, agua salada, agua, tetracloruro de titanio, etc.

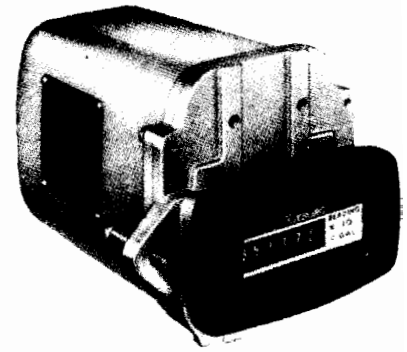


FIG. 6-20. *Integrador de flujo* de seis dígitos modelo 14A de la casa Foxboro con caja de aluminio. Recibe la salida de cualquier transmisor de flujo y está dotado de turbina accionada por aire, cuya velocidad varía en razón directa de la raíz cuadrada de la señal neumática recibida, la cual turbina acciona el contador, que totaliza el volumen gastado.

La Fig. 6-18 corresponde a un contador de agua de este tipo de la firma Brooks Instrument de Estados Unidos.

La Fig. 6-19 representa un contador de turbina de la Firma Foxboro, que opera como transductor eléctrico de caudal. Al pasar cada paleta por el «pickup» magnético genera un impulso o voltaje de corriente alterna. La frecuencia de impulsos es proporcional al caudal y cada impulso representa un volumen discreto de fluido. Los impulsos de salida pueden transmitirse a distancia a instrumentos digitales para indicación, totalización o también para control de flujo.

6.8. INSTRUMENTACION DE MEDICION DE CAUDALES

Los instrumentos para medir caudales se llaman caudalímetros, siendo la característica esencial de todos ellos, en contraposición a los instrumentos volumétricos, el ser un instrumento que mide el flujo instantáneo o caudal, que puede variar de un momento a otro.

Los caudales se pueden medir en flujo cerrado o tuberías o en flujo abierto o canales. A este último caso se refiere también el caso en que el caudal que circula en un conducto cerrado sale al exterior para su medición.

En este capítulo trataremos del primer grupo, relegando el estudio del segundo grupo al Cap. 14.

6.8.1. Caudalímetros de flujo cerrado

Los caudalímetros más importantes de esta clase pueden reunirse en dos grupos: caudalímetros de área de paso constante y caudalímetros de área de paso variable. El primer grupo es con mucho el más importante. Adaptando a un caudalímetro un integrador se tiene el flujo total o volumen que ha circulado por la tubería. La Fig. 6-20 representa un integrador conectable a cualquier tipo de caudalímetro, dotado de transmisión neumática.

6.8.1.1. Caudalímetros de área de paso constante

Todos los instrumentos de esta clase constan esencialmente de dos elementos: un *elemento deprimógeno*, es decir, un elemento que provoca una caída de presión, y un *manómetro diferencial*, que mide esta última. Característico de estos instrumentos es que *el caudal es proporcional a la raíz cuadrada de la caída de presión* provocada por el elemento deprimógeno y es preciso extraer esta raíz cuadrada para medir el caudal. Por eso los instrumentos standard para medir el caudal a partir de la depresión son los manómetros diferenciales de raíz cuadrada, que son aquellos manómetros diferenciales que incorporan un elemento que extrae la raíz cuadrada y da la lectura directamente en unidades de flujo.

Los manómetros de esta clase que estamos estudiando pertenecen a la categoría de los *manómetros inferenciales* (3), porque miden una variable a partir de otra distinta con ella relacionada.

Como se verá en los Caps. 9 y 11, un fluido que circula por un conducto cerrado experimenta una caída de presión (pérdida de carga) que es función de la velocidad (en *régimen declaradamente turbulento*, función del cuadrado de la velocidad) y, por tanto, del caudal. Luego como elemento deprimógeno podría servir incluso una longitud suficiente de tubería de sección circular constante y cualquier accesorio de tubería. En la práctica, los accesorios más utilizados para medir caudales son los codos y las válvulas.

Cualquier estrechamiento de flujo, provocado por una restricción o estrechamiento del área de paso, puede servir de elemento deprimógeno. Los caudalímetros basados en este principio los denominaremos *caudalímetros de constricción*. Lo característico de una constricción o estrechamiento es que la caída de presión en la misma Δh es mayor (lo que contribuye a la sensibilidad del caudalímetro) que la pérdida de carga remanente Δh_r. En los caudalímetros permanentemente instalados la pérdida Δh_r es un factor económico adverso muy importante, y entonces se debe escoger aquel caudalímetro que reduce Δh_r al mínimo.

Los caudalímetros de constricción más importantes y ya clásicos en la medida de caudales con líquidos y gases son tres: el tubo de Venturi, las toberas y los diafragmas. De ellos trataremos en las tres secciones siguientes.

6.8.1.1.1. Tubo de Venturi

El tubo de Venturi, que se representa en la Fig. 6-21, es un elemento deprimógeno, cuya función es provocar una diferencia de presiones. Siendo el caudal Q una función de dicha diferencia, midiendo ésta se puede calcular el valor de Q. Otros elementos deprimógenos también utilizados para medir caudales en conexión con un manómetro diferencial son las toberas y diafragmas, que se estudiarán en las secciones siguientes. Consta de tres partes: una convergente, otra de sección mínima o garganta, y finalmente una tercera parte divergente. La sección transversal del Venturi suele ser circular, pero puede tener cualquier otra forma. Se mide la diferencia de presiones entre la sección 1, aguas arriba de la parte convergente, y la sección 2, garganta del Venturi, utilizando un solo manómetro diferencial, como en la Fig. 6-21, o dos manómetros simples.

Despreciando en primera aproximación las pérdidas, la ecuación de Bernoulli en la forma [Ec. (5-35)] escrita entre las secciones 1 y 2 nos dará:

$$p_1/\rho g + z_1 + v_1^2/2g = p_2/\rho g + z_2 + v_2^2/2g \qquad (6\text{-}14)$$

(3) De inferir = sacar consecuencia o deducir una cosa de otra.

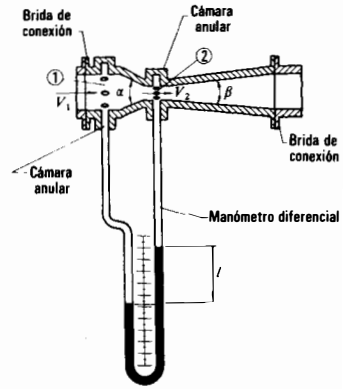


FIG. 6-21. *Venturi* conectado a manómetro diferencial. El Venturi sirve para medir caudales con gran precisión y pocas pérdidas.

La ecuación de continuidad entre las mismas secciones 1 y 2 nos dará:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

y por tanto

$$v_1 = A_2/A_1\, v_2 \qquad (6\text{-}15)$$

Sustituyendo la Ec. (6-15) en (6-14) se tiene:

$$p_1/\rho g + z_1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = p_2/\rho g + z_2 + v_2^2/2g$$

y despejando v_2, que llamaremos v_{2t} o velocidad teórica, pues no se ha tenido en cuenta el rozamiento, se tiene:

$$v_{2t} = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g[(p_1/\rho g + z_1) - (p_2/\rho g + z_2)]};$$

ahora bien, el caudal Q_t que pasa por el Venturi será:

$$Q_t = v_{2t} A_2 = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g[(p_1/\rho g + z_1) - (p_2/\rho g + z_2)]}.$$

El caudal real Q será igual a $v_2 A_2$, siendo v_2 la velocidad real:

$$v_2 = C_v\, v_{2t}$$

donde C_v — coeficiente de velocidad, que se obtiene experimentalmente y que oscila de 0,95 a poco más que la unidad, pudiéndose tomar como valor indicativo 0,985 para los Venturis nuevos y 0,98 para los que ya han estado en servicio.

Es decir,

$$Q = \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \qquad (6\text{-}16)$$

donde h_1, h_2 — alturas piezométricas en los puntos 1 y 2.

Finalmente definiendo un coeficiente de caudal C_q que se calculará también experimentalmente *(tarado del Venturi)*, y que engloba el coeficiente C_v:

$$C_q = \frac{C_v}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}}$$

se obtiene

$$\boxed{Q = C_q A_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}} \qquad (6\text{-}17)$$

(caudal real, Venturi)

En la Fig. 6-21, aplicando la Ec. (4-5), se comprueba fácilmente que $h_2 - h_1 = (\delta_m/\delta - 1)\, l$: donde δ_m — densidad relativa del líquido manométrico; δ — densidad relativa del fluido principal; l — lectura del manómetro.

Tanto C_v en la Ec. (6-16), como C_q en la Ec. (6-17) no son constantes, sino que dependen del número de Reynolds (Sec. 8.6). El taràdo del Venturi consiste en obtener experimentalmente la curva $C_a = f(\mathrm{Re})$, donde Re — número de Reynolds. Los Venturis, lo mismo que las toberas y los diafragmas pueden diseñarse de muy diversas formas (diversas relaciones A_2/A_1, etc.). Después de largas y sistemáticas investigaciones se han establecido los denominados *Venturis*, *toberas* y *diafragmas standard*. Las normas para su construcción pueden verse en el Apéndice 12. La ventaja de construir los *instrumentos normalizados* es que no requieren tarado previo, pudiéndose tomar los valores de C_q del citado Apéndice 12.

Para aminorar las pérdidas el ángulo α de la parte convergente suele hacerse del orden de 20° y el ángulo β de la parte divergente suele estar comprendido entre 5 y 7° (véase Fig. 6-21).

Este medidor es ideal como elemento deprimógeno en tuberías donde el flujo es continuo, porque produce depresión Δh grande con pérdidas Δh_r mínimas.

(Véase problema 6-1.)

Con mucha frecuencia, tanto en éste como en los otros instrumentos, las lecturas se han de hacer lejos del lugar donde se ha de instalar el Venturi. En este caso se utilizan *instrumentos telemétricos*. En ellos un transductor convierte la medición hidráulica en impulsos neumáticos (hasta alrededor de 150 m de distancia) y eléctricos (sin límite alguno de distancia).

La Fig. 6-22 muestra el esquema eléctrico de un Venturi equipado con telémetro, dotado de un conjunto completo de estos instrumentos, a saber: transmisor, *T*, indicador de flujo, *I*, registrador, *R*, e integrador de flujo, *S*. El transductor electromagnético consta de un manómetro diferencial de raíz cuadrada dotado de un flotador, que transmite impulsos mecánicos proporcionales al caudal instantáneo.

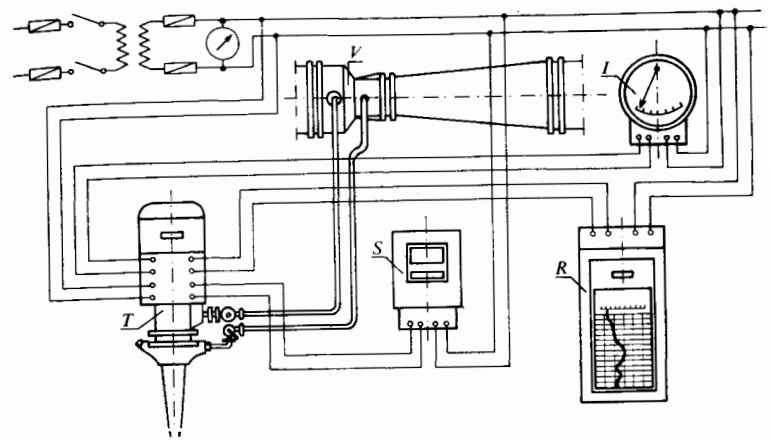


FIG. 6-22. *Tubo de Venturi: V*, con transmisor eléctrico; *T*, indicador de flujo; *I*, registrador de flujo *R* e integrador *S*.

6.8.1.1.2. Toberas de medida

Las toberas en general son conductos convergentes en la dirección del flujo (4) que producen un aumento de velocidad y una disminución de la presión.

Las toberas se utilizan en la técnica para múltiples fines. Véase, por ejemplo, el eyector (Sec. 6.6) y el inyector de una turbina Pelton (Sec. 22.4.1).

Se utilizan también para medir caudales. De las *toberas de medida* tratamos en esta sección.

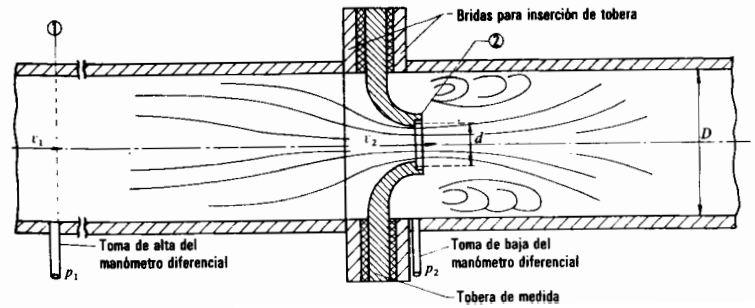


FIG. 6-23. La *tobera de medida* intercalada entre bridas en una tubería constituye un procedimiento muy utilizado para medir caudales.

La Fig. 6-23 es un esquema de una tobera de medida, en donde se han dibujado también las líneas de corriente. Como se ve, una tobera de medida no es más que un Venturi al que le falta la parte divergente. Es por tanto más económica que un Venturi; pero tiene más pérdidas y es más cara en su funcionamiento

(4) Con fluido compresible son divergentes si la velocidad del fluido excede la del sonido, según se demuestra en Termodinámica.

(las pérdidas se traducen en más kWh en el contador y más pts.) Experimentalmente se ha comprobado que la presión en la sección 2 es muy próxima a la que reina donde se ha hecho la toma 2 en la figura, es decir, en la pared de la tubería, no en la tobera misma donde sería más difícil de construir. El error que pudiera surgir por este motivo queda absorbido por el coeficiente de caudal, C_q. Las fórmulas (6-16 y 6-17) son obviamente aplicables en este caso.

Un *tarado de la tobera* será también aquí necesario para determinar C_q si la tobera no está construida según normas. En las *toberas standard* o normalizadas del Apéndice 12 el valor de C_q puede tomarse de la Fig. 12-6.

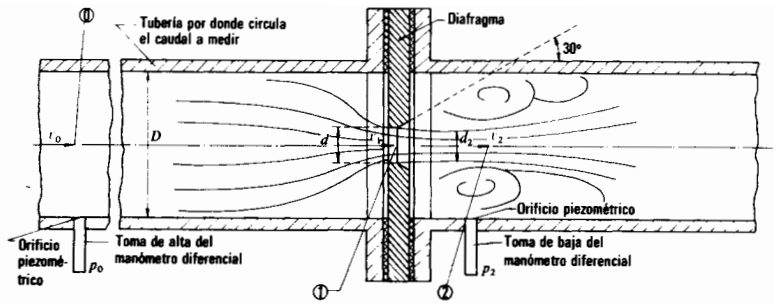


FIG. 6-24. El *diafragma* es un orificio de paredes afiladas y constituye un procedimiento muy económico y muy empleado para medir caudales en líquidos y gases.

6.8.1.1.3. Diafragmas

Un diafragma (Fig. 6-24) es una placa de metal, bronce, acero inoxidable, etc., que lleva un orificio circular de diámetro d concéntrico con el eje de la tubería de diámetro D, donde se instala entre dos bridas provistas de las juntas de estanqueidad convenientes. Por su sencillez de construcción son muy usados para medir caudales tanto en líquidos como gases. Resultan aún más económicos de instalación que las toberas; pero tienen aún más pérdidas. En las secciones 0 y 2 se hacen las tomas piezométricas que se conectan a un manómetro diferencial, como en la Fig. 6-21.

La fórmula para calcular el caudal es la misma que para el Venturi [Ec. (6-17)], donde C_q se ha de obtener también experimentalmente *(tarado del diafragma)*. En los *diafragmas standard* o normalizados del Apéndice 12 el valor de C_q puede tomarse de la Fig. 12-2 (pág. 630).

Deduzcamos esta fórmula [Ec. (6-17)] por otro procedimiento, como aplicación práctica de la ecuación de Bernoulli con pérdidas [Ec. (5-37)], aplicada entre las secciones 0 y 2:

$$\frac{p_0}{\rho g} + z_0 + \frac{v_0^2}{2g} - H_{r0-2} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \tag{6-18}$$

Luego

$$\left(\frac{p_0}{\rho g} + z_0\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) = h_0 - h_2 = H_{r0-2} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \tag{6-19}$$

donde $h_0 - h_2$ — diferencia de alturas piezométricas entre las secciones 0 y 2.

Las pérdidas H_{r0-2} pueden expresarse como fracción de la velocidad v_1 (Fig. 6-24).

$$H_{r0-2} = \zeta \frac{v_1^2}{2g} \tag{6-20}$$

donde ζ — coeficiente de pérdidas.

Por la ecuación de continuidad:

$$v_0 \frac{\pi D^2}{4} = v_1 \frac{\pi d^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

donde d_2 (Fig. 6-24) es el diámetro de la llamada *vena contracta*. Por tanto

$$v_0 = v_1 (d/D)^2 \tag{6-21}$$

y

$$v_2 = v_1 (d/d_2)^2. \tag{6-22}$$

Llamando para simplificar

$$\alpha = d/d_2, \quad \beta = d/D \tag{6-23}$$

sustituyendo (6-20), (6-21) y (6-22) en la Ec. (6-19), y teniendo en cuenta (6-23) tendremos:

$$h_0 - h_2 = (\zeta + \alpha^4 - \beta^4) \frac{v_1^2}{2g};$$

de donde

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha^4 - \beta^4}} \sqrt{2g(h_0 - h_2)}$$

y

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha^4 - \beta^4}} \sqrt{2g(h_0 - h_2)},$$

que coincide con la Ec. (6-17) haciendo

$$\frac{\pi d^2}{4} = A_2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha^4 - \beta^4}} = C_q.$$

Los Venturis, las toberas y los diafragmas (Sec. 6-7) normalizados son tan utilizados en la práctica para medir caudales que hemos creído conveniente reunir

en el Apéndice las normas para la construcción y lectura de estos instrumentos.

De los tres instrumentos descritos en las tres últimas secciones el diafragma es el más barato y el Venturi el más caro, ocupando la tobera una posición intermedia; en contraposición el diafragma produce una pérdida de carga que es el 50% de la presión diferencial; esta pérdida queda reducida a un 10-20% en el Venturi, ocupando en la tobera una posición intermedia.

6.8.1.1.4. Otros elementos deprimógenos

Además de los Venturis, toberas y diafragmas, en la práctica se emplean otros muchos elementos deprimógenos. En estos instrumentos el coeficiente de caudal C_q se ha de determinar en cada caso experimentalmente mediante un tarado del instrumento. Nos limitaremos a enumerar tres de los más importantes:

Codos. Un codo crea en virtud de la fuerza centrífuga una depresión en la parte que mira al interior y una sobrepresión en la parte que mira al exterior. Esta diferencia de presión es función del caudal. A los dos puntos indicados se puede conectar un manómetro diferencial, actuando de esta manera el codo como elemento deprimógeno.

Cámaras espirales. El caudal de agua que alimenta a una turbina puede medirse por la diferencia de presiones en la cámara espiral entre dos puntos convenientemente elegidos.

Válvulas. En las válvulas hidráulicas de cualquier tipo (véase la Sec. 11.3.6) se crea una diferencia de presiones antes y después de la válvula debida a la pérdida de carga que tiene lugar en la misma. La depresión es tanto mayor cuanto mayor sea el grado de cierre de la válvula.

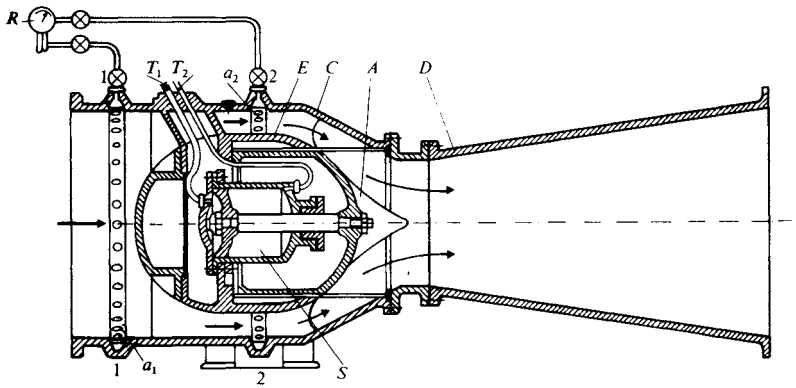


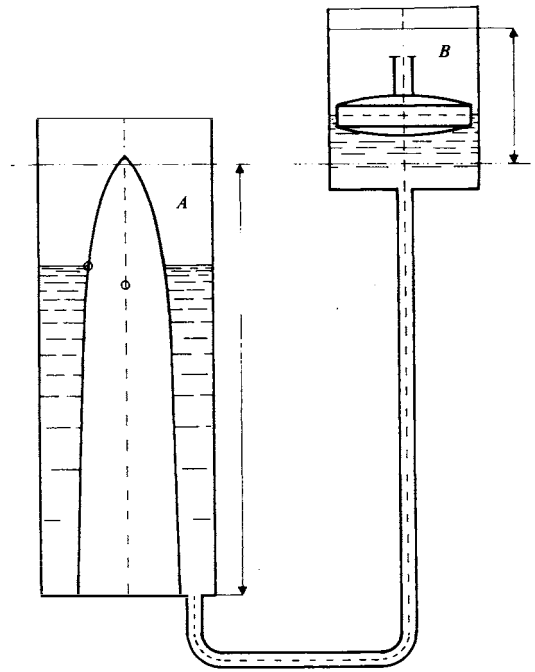
FIG. 6-25. *Válvula de aguja* como medidor de caudal.

La Fig. 6-25 muestra una válvula de aguja que puede servir simultáneamente para la regulación del caudal de una bomba, por ejemplo, y para la medición del mismo. La válvula está dotada de servomotor de aceite y de dos tomas, 1 y 2, conectadas a un aparato que registra directamente el caudal.

6.8.1.1.5. Manómetros diferenciales de raíz cuadrada

En los instrumentos descritos en las cuatro secciones precedentes el caudal viene dado por una expresión de la forma:

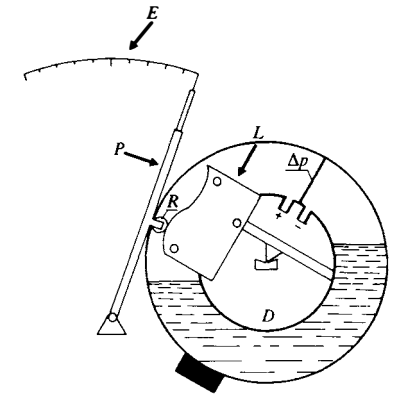
$$Q = C\sqrt{\Delta h}$$



IG. 6-26. Esquema de un manómetro iferencial con *extracción automática de iz cuadrada.*

El Δh se mide con un manómetro diferencial de tipo de flotador, de tipo anular tórico, tipo de Bourdon, etc. El manómetro puede dar directamente la lectura en caudales si le incorpora un convertidor de raíz cuadrada. Todos los caudalímetros registradores como los totalizadores de flujo dan la lectura directamente en unidades de caudal. La tracción automática de la raíz cuadrada puede hacerse hidráulica o mecánicamente.

El principio hidráulico, utilizado en los manómetros de flotador, se ilustra en la Fig. 6-26. os vasos comunicantes, A y B, están parcialmente llenos de mercurio. El vaso de alta resión A tiene en su interior un cuerpo cuyo perfil se diseña de manera que la elevación el mercurio en el vaso de baja presión B sea proporcional a la raíz cuadrada de la lectura Δh. El movimiento del flotador proporcional al caudal se transmite al indicador, registrador o integrador.



IG. 6-27. Manómetro tórico D equipado on leva de extracción de raíz cuadrada: , leva; P, palanca; R, rodillo; E, escala.

El principio mecánico, utilizado, por ejemplo, en el manómetro diferencial tórico, se presenta en la Fig. 6-27. Este tipo de manómetro diferencial es muy utilizado en la prác-

tica. La palanca P unida a la aguja indicadora lleva solidario el rodillo R, que recorre la curva de la leva solidaria al disco giratorio D del manómetro. El perfil de la leva se escoge de manera que la desviación angular de la aguja sea proporcional al caudal.

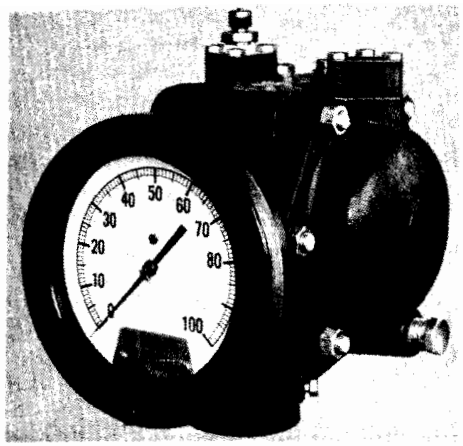


FIG. 6-28. *Medidor de flujo por presión diferencial* modelo 227X2 de la casa Honeywell de Estados Unidos. Este medidor convierte la diferencia de presiones que actúan sobre ambas caras de un fuelle en movimiento para accionar un indicador, registrador, controlador o transmisor. Entre otras aplicaciones puede utilizarse para indicación de volumen de procesos en que se emplea vapor, aire o agua. Puede suministrarse también con transmisor neumático y con integrador electrónico. La precisión es del $\pm 0{,}5\,\%$ de la escala completa.

La Fig. 6-28 muestra un medidor de flujo de la casa Honeywell de Estados Unidos que incorpora un manómetro diferencial del tipo de fuelle (Sec. 4.3.3.5) con traductor de raíz cuadrada para la lectura directa del caudal.

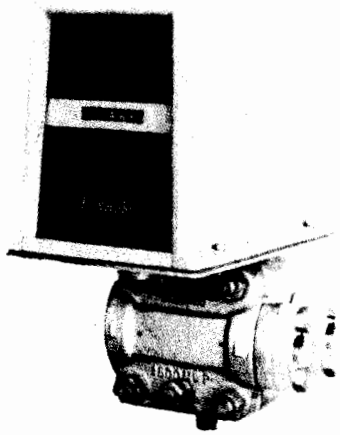


FIG. 6-29. *Computador de flujo* de seis dígitos modelo 541 de la firma Foxboro que realiza la medida, multiplicación, integración y extracción de la raíz cuadrada, a partir de una presión diferencial. Tiene incorporado un pickup magnético que puede hacer funcionar un indicador de flujo portátil, un calibrador portátil de alta frecuencia, así como un interruptor neumático o eléctrico para hacer funcionar un impresor de tickets para la facturación al departamento correspondiente. Su precisión es de $\pm 0{,}5\,\%$ de la escala completa.

La Fig. 6-29 corresponde al computador de flujo Modelo 541, de la firma Foxboro, que suministra el cálculo instantáneo de $\sqrt{\Delta h}$ y la lectura directa del caudal.

La Fig. 6-30 representa un manómetro diferencial de membrana con una balanza Rittmeyer que cuando se emplea para medir el caudal lleva una leva calculadora de la raíz cuadrada. Otras aplicaciones de esta balanza son la medida de niveles y de presiones.

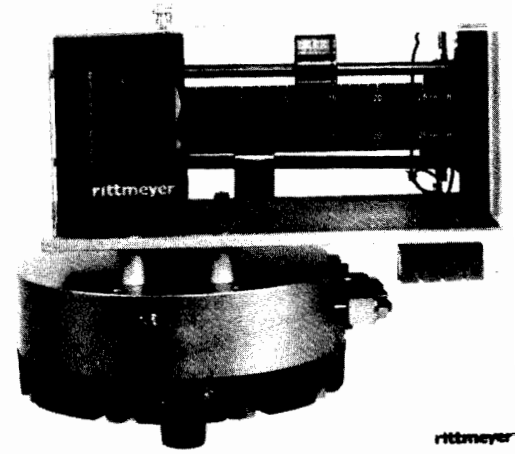


FIG. 6-30. *Manómetro diferencial de membrana con balanza* de la firma Rittmeyer de Suiza. Este tipo de balanza se emplea para medir niveles, presiones y caudales. Este último es el caso de la figura. Balanza con fiel de brazos desiguales, cargada sobre su brazo corto por el recipiente negativo y equilibrada por el desplazamiento automático del peso del cursor sobre el brazo largo. El sistema de medición de caudales consta además de una leva de interpretación de la presión diferencial en caudal y de un servomotor de corriente continua con su circuito de mando por medio de los contactos situados en el extremo del fiel, que efectúa la medida y acciona los mecanismos de indicación, totalización, teletransmisión y mando del automatismo. Estas balanzas tienen una precisión de 0,025 % de toda la escala.

6.8.1.2. Caudalímetros de área de paso variable

Los más importantes de este tipo son los rotámetros. La Fig. 6-31 representa un rotámetro simple de la casa Brooks Instrument de los Estados Unidos. El esquema de la Fig. 6-32 pertenece a un esquema más complejo, que permite la transmisión neumática del caudal a distancia.

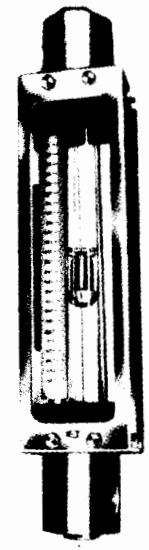


FIG. 6-31. *Rotámetro* de la casa Brooks Instrument de Estados Unidos.

El rotámetro consta esencialmente de un tubo cónico vertical abierto por arriba de vidrio, metal o de plástico, en cuyo interior puede moverse libremente arriba y abajo un flotador. Al circular el líquido de abajo arriba el flotador ocupa una posición tal que las tres fuerzas verticales que actúan sobre el mismo, a saber, el peso hacia abajo, el empuje

hidrodinámico y la resistencia, ambas hacia arriba, están en equilibrio. Al aumentar el caudal la presión dinámica sobre el flotador aumenta y éste sube; pero al mismo tiempo el área de paso aumenta con lo que la presión dinámica disminuye, estableciéndose de nuevo el equilibrio, pero a una altura mayor. El flotador tiene ranuras inclinadas en su periferia, gracias a las cuales el líquido al pasar lo hace girar con lo que disminuye el rozamiento. La resistencia aumenta con la viscosidad, razón por la cual el instrumento ha de ser tarado para cada líquido determinado. Con instrumentos de este tipo pueden medirse caudales desde 0,1 dm^3/h hasta 100 m^3/h. El instrumento se adapta a la medición de caudales con líquidos y con gases.

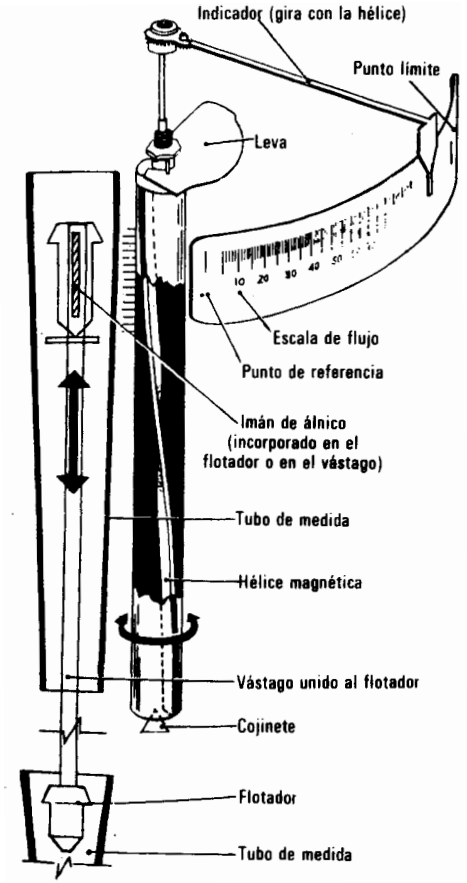


FIG. 6-32. Esquema del rotámetro Brooks dotado de *convertidor magnético.*

La Fig. 6-32 representa el esquema del convertidor magnético de posición de la misma firma Brooks Instrument. Este instrumento complementa el rotámetro de la Fig. 6-31 con un dispositivo, que convierte el movimiento lineal del flotador del aparato convencional en un movimiento de giro que permite realizar las funciones indicadora, transmisora, integradora o de señalización de alarma. El convertidor consta de una lámina de hierro magnético en forma de hélice y encapsulada en una varilla no magnética de aluminio apoyada en un pivote de zafiro que se apoya en un diminuto cojinete de bolas. El conjunto en el que se integra la hélice se sitúa paralelo al rotámetro. El vástago del flotador del rotámetro tiene embebido un imán que se mueve con el flotador. El borde de la hélice es atraído por el imán, convirtiéndose así el movimiento lineal en rotativo.

6.8.1.3. Caudalímetros electromagnéticos

La Fig. 6-33 muestra el esquema y principio de funcionamiento de estos caudalímetros. La Fig. 6-34 muestra una foto del mismo de la firma Brooks Instrument y la Fig. 6-35 el instrumento fabricado por la casa Foxboro, ambas de Estados Unidos. Se advertirá que estos instrumentos son transductores de flujo.

El fundamento es (véase Fig. 6-33) la ley de la inducción electromagnética de Faraday: el voltaje inducido entre dos puntos de un conductor que se mueve cortando en ángulo recto las líneas de flujo de un campo magnético es proporcional a la velocidad del conductor. En nuestro caso el conductor es el mismo fluido, cuyo caudal se quiere medir. La tubería del caudalímetro, que se embrida con la tubería principal, se introduce en el campo

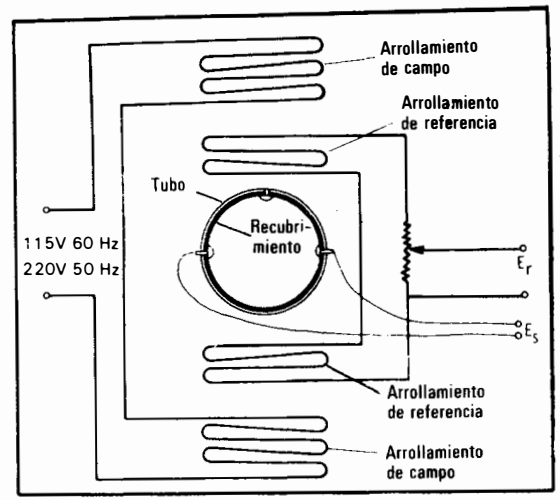


FIG. 6-33. Principio de funcionamiento de un *caudalímetro electromagnético.*

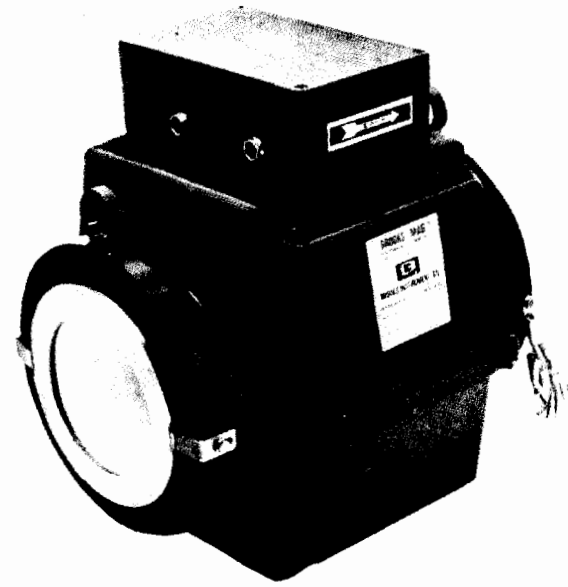


FIG. 6-34. *Caudalímetro electromagnético* Brooks.

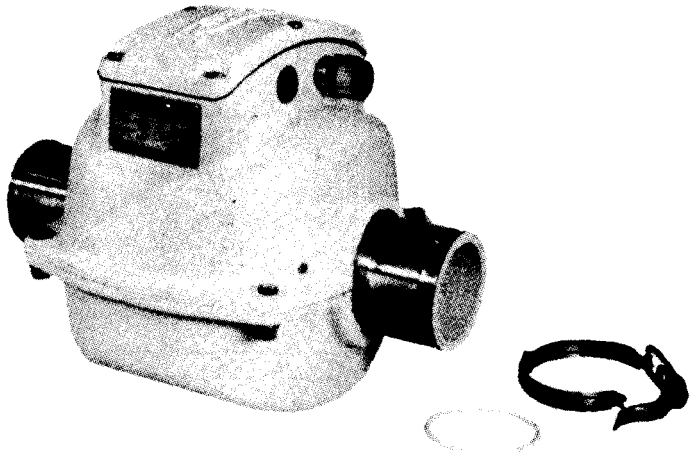


FIG. 6-35. *Caudalímetro electromagnético* de la casa Foxboro de Estados Unidos.

gnético creado por el arrollamiento de campo. Los electrodos montados en ángulo o a las líneas de fuerza del campo magnético están en contacto con el líquido y se comtan como las escobillas de un generador. Por ellos sale la corriente inducida, cuya medida da una medida del caudal. Como se muestra en el esquema, se ajusta un voltaje de rencia E_r desarrollado por el arrollamiento del secundario, a fin de que mida I un 100% caudal cuando la relación $\frac{E_s}{E_r}$ tiene un valor determinado, siendo

$$I = \frac{E_s}{E_r}$$

ma de medida es de 0 al 100% del valor ajustado. La precisión viene a ser de 0,5 a 1% audal máximo.

ólo es necesaria una conductividad eléctrica del fluido mínima de 5 mΩ/cm. Estos umentos son especialmente indicados para líquidos sucios, viscosos, corrosivos, con os en suspensión en los cuales resulta especialmente difícil la medición del caudal.

6.8.1.4. Caudalímetros de ultrasonido

Los caudalímetros de inducción descritos en la sección anterior son muy exactos, pero su precio es también muy elevado. Sucede lo mismo con los *caudalímetros de ultrasonido*. Constan (Fig. 6-36) de un trozo de tubería que se embrida en la tubería principal por la que circula el líquido. Está dotado de dos centros emisores de radiaciones ultrasónicas y de dos centros receptores: el centro emisor, 1, irradia en la dirección de la velocidad, v, del fluido; mientras que el centro 2 lo hace en sentido contrario. Uno y otro rayo forman un ángulo β con v. La radiación 1 se transmite a mayor velocidad que la 2. Las velocidades c_1 y c_2 se calculan con el aparato, dada la distancia l entre emisor y receptor. Se tendrá

$$c_1 = c_0 + v \operatorname{sen} \beta$$
$$c_2 = c_0 - v \operatorname{sen} \beta$$

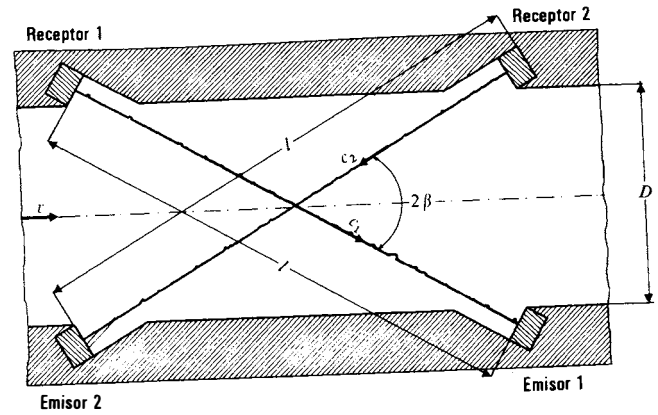


FIG. 6-36. Principio de funcionamiento del *caudalímetro de ultrasonido.*

de donde

$$c_1 - c_2 = 2 v \cos \beta$$
$$v = \frac{c_1 - c_2}{2 \cos \beta}$$

y finalmente el caudal será:

$$Q = C \frac{\pi D^2}{4} \frac{c_1 - c_2}{2 \cos \beta}$$

Con el factor C, que se determina mediante tarado, se tiene en cuenta la distribución de velocidades en el área transversal de la tubería, ya que en general v no coincide con la velocidad media.

La Fig. 6-37 es una foto de este instrumento fabricado por la firma Rittmeyer de Suiza.

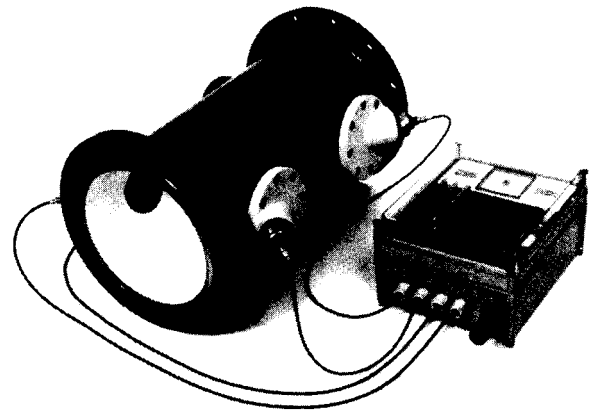
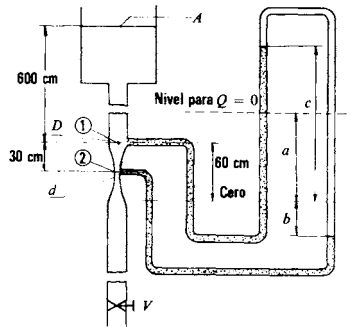


FIG. 6-37. *Caudalímetro de ultrasonido* de la firma Rittmeyer de Suiza.

PROBLEMA

6-1. *La figura representa un depósito de agua, que desagua a través de un Venturi vertical y de una válvula V que regula el caudal. Diámetro de entrada del Venturi, D = 100 mm. Diámetro de la garganta del Venturi, d = 40 mm. La posición del cero en los dos tubos del manómetro diferencial está en el mismo plano horizontal y se ha acotado en la figura. La parte superior del manómetro se haya llena de aire. Cuando la válvula V está cerrada la lectura del manómetro en ambas ramas es de 90 cm y entonces el volumen de aire contenido en la parte superior del manómetro es equivalente al contenido en 210 cm de longitud de la misma sección que el tubo manométrico. Cuando el caudal es de 486 l/min las lecturas del manómetro son c = 171 cm, y b = 57 cm.*



PROB. 6-1

Calcular:

a) coeficiente de velocidad del Venturi;
b) presión absoluta en la garganta del Venturi;
c) pérdida de carga en la tubería entre el depósito y la entrada del Venturi. Supóngase que el volumen del aire contenido en el manómetro varía inversamente con la presión. Presión barométrica = 1 bar.

a) En virtud de la Ec. (6-16)

$$Q = \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \qquad (1)$$

donde los puntos 1 y 2 están señalados en la figura.

$$Q = \frac{0{,}486}{60} = 0{,}0081 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_1 - h_2 = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) = b + c = 1{,}71 + 0{,}57 = 2{,}28 \text{ m}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4} = 0{,}9871$$

Llevando los valores de Q, $h_1 - h_2$ y $\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}$ hallados a la Ec. (1) y despejando C_v tendremos:

$$C_v = 0{,}9513$$

b) Llamando $p_i\ p_f$ a las presiones iniciales y finales del aire atrapado en el manómetro diferencial y $l_i\ l_f$ a las longitudes de tubo que ocupa dicho aire, se tendrá:

$$l_i = 2{,}10 \text{ m}$$

$$l_f = 2{,}10 - (c - a) + a + b$$

$$= 2{,}10 - (1{,}71 - 0{,}9) + 0{,}57 = 2{,}76 \text{ m}$$

$$\frac{p_{amb}}{\rho g} = \frac{1 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9{,}81} = 10{,}19 \text{ m}$$

$$\frac{p_i}{\rho g} = \frac{p_{amb}}{\rho g} + 6 + 0{,}6 - 0{,}9 = 15{,}894 \text{ m}$$

$$p_i\, l_i = p_f\, l_f$$

$$\frac{p_f}{\rho g} = \frac{l_i}{l_f}\frac{p_i}{\rho g} = \frac{2{,}1}{2{,}76} \cdot \frac{p_i}{\rho g} = 12{,}093 \text{ m}$$

Por tanto,

presión absoluta en la garganta del Venturi:

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_f}{\rho g} - 0{,}57 - 0{,}30 = 11{,}223 \text{ m}$$

Aplicando la *ecuación generalizada de Bernoulli* entre los puntos A (en el nivel superior del depósito) y 1 tendremos

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - H_r = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

y

$$H_r = \frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - \frac{p_1}{\rho g} - z_1 - \frac{v_1^2}{2g}$$

Ahora bien

$$v_A \simeq 0 \qquad v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0081}{\pi \cdot 0{,}1^2} = 1{,}031 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = 0{,}542 \text{ m}$$

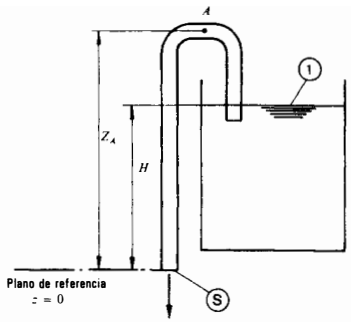
$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_f}{\rho g} + 1{,}71 - 0{,}6 = 13{,}203 \text{ m}$$

Por tanto,

$$z_A - z_1 = 6 \text{ m}$$

$$H_r = 2{,}937 \text{ m}$$

6-2. *En el sifón de agua de la figura, en el que se despreciarán las pérdidas, el diámetro es constante e igual a 150 mm, H = 3 m y z_A = 4,5 m. Presión barométrica = 770 Torr.*



PROB. 6-2

Calcular:
a) la velocidad y el caudal de desagüe;
b) presión absoluta y relativa en el punto más alto del sifón.

En el punto *1* la altura total del fluido es *H* (véase figura). Como no hay pérdidas la altura en el punto de salida *s* y en el punto *A* será también *H* (principio de la conservación de la energía. *H = constante de Bernoulli).*

a)
$$H_s = H = \frac{p_s}{2g} + z_s + \frac{v_s^2}{2g}$$

pero
$$\frac{p_s}{\rho g} = 0 \quad \text{(presión atmosférica)}$$
$$z_s = 0$$

luego
$$v_s = \sqrt{2gH} \quad \text{[ecuación de Torricelli, Ec. (6-1)]}$$
$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3} = 7{,}672 \text{ m/s}$$
$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_s = \frac{v_s \cdot \pi \cdot 0{,}15^2}{4} = 0{,}1356 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) La presión atmosférica
$$\frac{p_{amb}}{\rho g} = 0{,}770 \cdot 13{,}6 = 10{,}472 \text{ m}$$

La altura total absoluta del punto *A*
$$H_{Aa} = H_{Ae} + \frac{p_{amb}}{\rho g} = H + \frac{p_{amb}}{\rho g}$$
$$= 13{,}472 \text{ m}$$

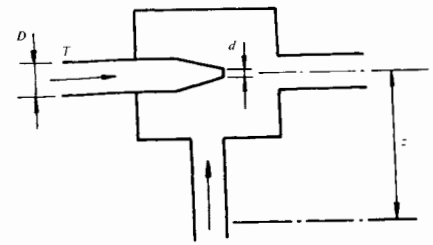
donde H_{Ae} = altura total relativa del punto *A*

$$H_{Aa} = \frac{p_{Aa}}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g}$$

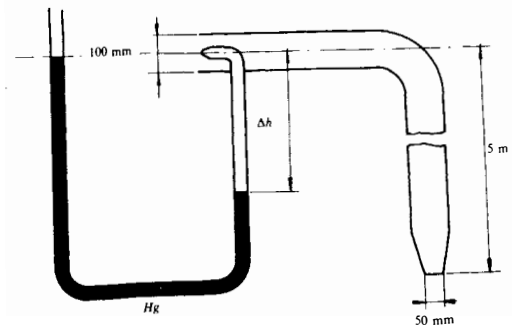
$v_A = v_s$ $\qquad \frac{v_A^2}{2g} = \frac{v_s^2}{2g} = H = 3$ m

Luego
$$\frac{p_{Aa}}{\rho g} = H_{Aa} - 4{,}5 - 3 = 5{,}972 \text{ m}$$
$$p_{Aa} = 5{,}972 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 =$$
$$= 58.585 \text{ Pa} = 0{,}58585 \text{ bar}$$
$$\frac{p_{Ae}}{\rho g} = \frac{p_{Aa}}{\rho g} - \frac{p_{amb}}{\rho g} =$$
$$= -4{,}5 \text{ m}$$
$$p_{Ae} = -4{,}5 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 =$$
$$= -44.145 \text{ Pa} =$$
$$= -0{,}44145 \text{ bar}$$

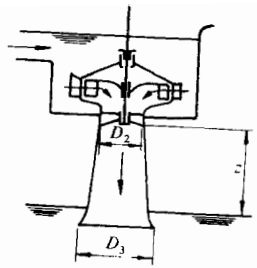
6-3. *A un eyector (véase figura), en el que se despreciarán las pérdidas, se suministra un caudal de agua Q = 34 l/s, por medio de una bomba centrífuga, a una presión absoluta de 1,5 bar. Las dimensiones del eyector son: D = 100 mm y d = 50 mm. El eyector desagua en la atmósfera. ¿Es posible elevar el agua con este eyector de un depósito situado a una cota z = 4,5 m por debajo del eyector? Presión barométrica 1 bar.*



6-4. *Calcular el caudal de agua que circula por la tubería de la figura. l = 1/2 m.*



PROB. 6-4



PROB. 6-5

6-5. *Determinar, despreciando las pérdidas, el vacío creado a la entrada del tubo de aspiración de una turbina hidráulica. El tubo de aspiración de la figura es troncocónico y $z = 5{,}0$ m. Diámetro de entrada del tubo de aspiración, $D_2 = 0{,}7$ m; diámetro de salida del mismo, $D_3 = 1{,}40$ m; caudal de la turbina, $Q = 1{,}50$ m³/s.*

6-6. *En una tubería de 75 mm de diámetro por donde circula agua hay instalado un Venturi. Entre la entrada y la garganta del Venturi hay un manómetro diferencial de mercurio; en él el espacio superior al mercurio está lleno de agua.*

Calcular: el diámetro de la garganta del Venturi para que la lectura l en el manómetro diferencial sea de 250 mm cuando por la tubería circule un caudal de 650 l/min. Supóngase un coeficiente de velocidad del Venturi de 0,97.

7. *La experimentación en Mecánica de Fluidos*

7.1. INTRODUCCION

El desarrollo de las máquinas calculadoras y ordenadores permite hoy día la resolución matemática de muchos problemas de Mecánica de Fluidos que hace algunos años eran inabordables. Sin embargo, son todavía muchos los problemas que solo pueden atacarse experimentalmente.

Las *variables* que pueden intervenir en un problema cualquiera de mecánica de fluidos se pueden reducir a ocho: la fuerza F, la longitud L, la velocidad v, la densidad ρ, la viscosidad dinámica η, la aceleración de la gravedad g, la velocidad del sonido c y la tensión superficial σ.

Supongamos que se trata, por ejemplo, de construir una serie nueva e importante de bombas centrífugas. Se necesitan ensayos experimentales en que se introduzcan y comprueben variantes de diseño (diámetro del rodete, forma de los álabes o paletas, etc.). Para ello se podría proceder así:

a) construir un prototipo del mismo tamaño y

b) considerar una de las variables, por ejemplo el rendimiento como variable dependiente, función de las restantes variables que intervienen en el fenómeno. Los resultados obtenidos en el banco de pruebas se podrían representar mediante curvas. Una función de una variable se puede representar por una curva. Una función de dos variables se puede representar por un ábaco o familia de curvas, una curva para cada valor de la tercera variable. Una función de tres variables se puede representar por una serie de ábacos; un ábaco por cada valor de la cuarta variable, y así sucesivamente.

Este procedimiento prácticamente resulta irrealizable, porque

En cuanto a la condición a: Si la máquina o estructura hidráulica es grande (por ejemplo, turbina hidráulica de 100.000 kW, presa de una central hidroeléctrica, etc.) sería antieconómico y muchas veces irrealizable construir un prototipo a escala 1/1, realizar las modificaciones requeridas por la experimentación, etc.; a causa de los gastos de energía, personal, instalaciones, etc.

En cuanto a la condición b: Si para cada curva se necesitan 10 puntos experimentales, cada ábaco ha de tener 10 curvas, y se han de hacer 10 ábacos, la representación experimental de un fenómeno con 3 variables independientes requeriría 1.000 puntos experimentales. Ahora bien, el coste de la obtención de

un solo punto experimental puede muchas veces ser muy elevado. Si las variables independientes son más de 3, el problema se complica en progresión geométrica.

En la práctica la *condición a* se sustituye por la siguiente:

1 — No se ensaya un *prototipo* a escala 1/1, sino un *modelo* reducido a escala 1/10 ó 1/100, por ejemplo.

La condición b se sustituye por la siguiente:

2 — Se reduce el número de variables. Como veremos en la investigación experimental de un fenómeno en Mecánica de Fluidos se puede reducir el número de variables en la mayor parte de los casos a una variable dependiente y a otra independiente. Así por ejemplo, el coeficiente λ de pérdida de carga en una tubería lisa se verá más adelante (Secs. 9.4.1, 9.4.2 y 9.4.3) que prácticamente es función sólo del número de Reynolds Re, aunque Re a su vez es una función de varias variables:

$$\mathrm{Re} = \frac{v\,D\rho}{\eta} \tag{7-1}$$

Este número adimensional Re, así como los otros números adimensionales que estudiaremos en este capítulo, nos ayuda a profundizar en el fenómeno que nos ocupa. En efecto, el coeficiente de pérdida de carga depende de la velocidad del fluido v y de la viscosidad η, pero con valores distintos de la velocidad y de la viscosidad, el coeficiente λ será constante si Re es constante. Es la relación adimensional de las cuatro variables de la Ec. (7-1) la que determina a fin de cuentas este fenómeno.

La nueva condición 1 plantea el siguiente problema: ¿Cómo predecir el comportamiento del prototipo a partir de los resultados obtenidos experimentalmente en un modelo a escala? Resuelto este problema queda abierto el camino a la experimentación con modelos.

La nueva condición 2 plantea el problema de la reducción del número de variables. En primer lugar las ocho enumeradas al comienzo de esta sección se han logrado reducir de una vez para siempre a cinco variables o *números adimensionales*, que son

— El *número de Euler*, $\mathrm{Eu} = \dfrac{v}{\sqrt{2\,\Delta p/\rho}}$

— El *número de Reynolds*, $\mathrm{Re} = \dfrac{v\,L\rho}{\eta}$

— El *número de Froude*, $\mathrm{Fr} = \dfrac{v}{\sqrt{Lg}}$

— El *número de Mach*, $\mathrm{Ma} = \dfrac{v}{c}$

— El *número de Weber*, $\mathrm{We} = \dfrac{v}{\sqrt{\sigma/\rho\,L}}$

De esta manera, en el caso general el estudio de un fenómeno consistiría en la investigación experimental de la función

$$\boxed{\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Fr},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Ma},\ \mathrm{We})} \tag{7-2}$$

Además, antes de abordar experimentalmente un problema mediante ensayos con un modelo reducido, se hace un estudio previo para determinar de las cinco fuerzas enumeradas en la Sec. 5.4, a saber, fuerzas debidas al gradiente de presiones, a la gravedad, a la viscosidad, a la elasticidad y a la sección superficial, cuál es aquella de la que fundamentalmente depende el problema concreto. Entonces:

a) Si sólo interviene la fuerza debida al *gradiente de presiones el número de Euler*, Eu, será automáticamente igual en el prototipo que en el modelo.

b) Si además de la fuerza debida al *gradiente de presiones* interviene solo la *gravedad*, la Ec. (7-2) se reducirá a

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Fr}) \tag{7-3}$$

y se harán los ensayos de manera que *los números de Froude*, Fr, sean iguales en el modelo y en el prototipo, y solo entonces serán iguales también *los números de Euler*, Eu.

c) Si además de la fuerza debida al *gradiente de presiones* interviene solo la *viscosidad*, la Ec. (7-2) se reducirá a

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Re}) \tag{7-4}$$

y se harán los ensayos de manera que *los números de Reynolds*, Re, sean iguales en el modelo y en el prototipo, y solo entonces serán iguales también *los números de Euler*, Eu.

d) Si además de la fuerza debida al *gradiente de presiones* interviene solo la elasticidad, la Ec. (7-2) se reducirá a

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Ma}) \tag{7-5}$$

y se harán los ensayos de manera que *los números de Mach*, Ma, sean iguales en el modelo y en el prototipo, y solo entonces serán iguales también *los números de Euler*, Eu.

e) Si además de la fuerza debida al *gradiente de presiones* interviene solo la *tensión superficial*, la Ec. (7-2) se reduce a

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{We}) \tag{7-6}$$

y se harán los ensayos de manera que *los números de Weber*, We, sean iguales en el modelo y en el prototipo, y solo entonces serán iguales también *los números de Euler*, Eu.

Nota. En realidad en todo fenómeno intervienen las 5 fuerzas enumeradas. Las Ecs. (7-3) a (7-6) entre dos variables son meras simplificaciones. Su aplicación implica una deformación del problema. Más aún, hay fenómenos cuyo

estudio no puede reducirse a la investigación experimental de una ecuación de dos variables, como el de la resistencia de los barcos, que se estudiará en la Sec. 13.4. Para que Eu sea igual en el modelo y el prototipo debería ser, según la Ec. (7-2), Fr, Re, Ma, We igual en el modelo y el prototipo y eso prácticamente sería imposible salvo que se utilizase una escala 1/1 (véase pág. 178) con lo que el ensayo con modelo reducido sería imposible.

Esta síntesis de la *teoría de modelos* se estudia con más detalle en las secciones siguientes.

7.2. SEMEJANZA DE MODELOS

El ensayo con modelos reducidos no es exclusivo de la Mecánica de Fluidos; pero en ella se ha empleado más que en ninguna otra rama de la ingeniería. En particular se construyen y experimentan modelos de:

— *Ríos y puertos.* El coste elevadísimo de estas obras hidráulicas hace que en los países industrializados, tanto las agencias estatales como las privadas posean laboratorios especiales consagrados al estudio de estos problemas (véanse las Figs. 7-1 y 7-2).

— *Estructuras hidráulicas.* Se ensaya, por ejemplo, una central o presa completa, o parte de ella (destructores de energía, aliviaderos de presa, etc.). La escala suele ser muy pequeña, 1/50, y aún menor.

FIG. 7-1. Estudio con *modelo reducido del amortiguamiento del oleaje* del puerto de Zonguldak (Turquía) en el laboratorio hidráulico de Grenoble, Francia (firma Neyrpic). Estos laboratorios son los mayores de Europa, ocupan una extensión de 60.000 m². La reserva de agua para los ensayos es de 15.000 m³ y la circulación sobre los modelos está asegurada por 36 grupos motobombas que suman una potencia de más de 2.200 kW. *(Por cortesía de SOGREAH.)*

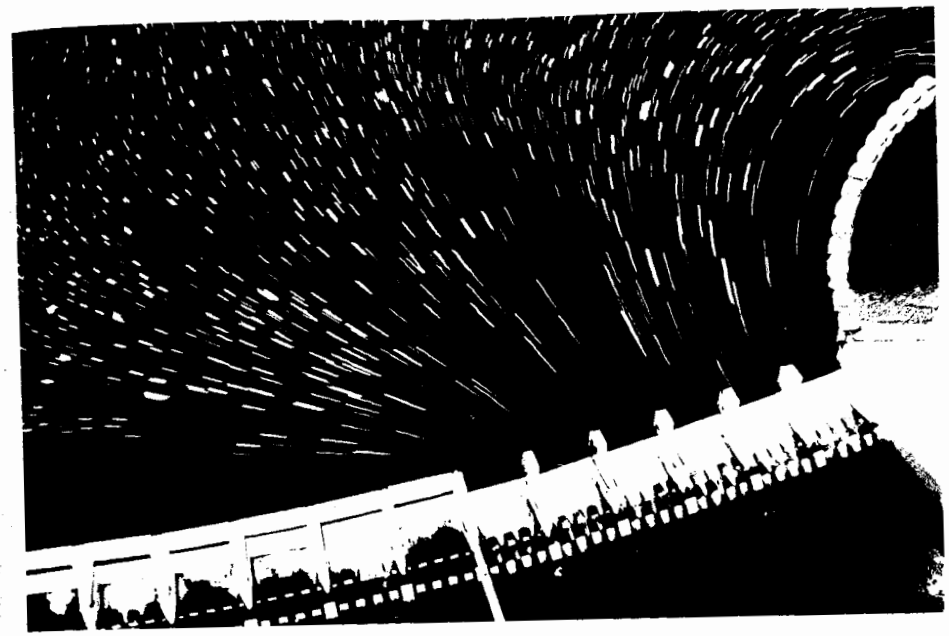


FIG. 7-2. En el *modelo del aliviadero de presa* construido y ensayado en St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, de la Universidad de Minnesota, U.S.A., las líneas de corriente se hacen visibles por los trazos que las partículas de confeti con que se espolvoreó la superficie del agua dejaron en la placa fotográfica en un segundo de exposición. Así se obtiene experimentalmente tanto la magnitud como la dirección de la velocidad. *(Por cortesía de University of Minnesota.)*

— *Máquinas hidráulicas.* Las bombas de gran potencia y sobre todo las turbinas hidráulicas se experimentan con modelos reducidos en los laboratorios de las grandes empresas constructoras de las mismas (ESCHER WYSS, SULZER, VOITH, NEYRPIC, etc. Véanse las Figuras 7-3 y 7-4.

— *Barcos.* La resistencia de los barcos se experimenta con maquetas a escala en los canales de ensayos hidrodinámicos, en los que el agua está en reposo y el barco es arrastrado con un carro de tracción eléctrica o hidráulica, equipado con balanza para medir la resistencia. La Fig. 7-5 se refiere al Canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo para estos estudios.

— *Aeronáutica.* El progreso espectacular de la aviación, espoleado por las dos últimas guerras mundiales, que ha multiplicado por 40 la velocidad máxima de vuelo, ha sido posible gracias a los ensayos con modelos reducidos en los *túneles de viento.* En la sección de ensayo de un túnel de viento se somete un modelo a escala del perfil de ala, o del avión completo que se quiere estudiar, a una corriente de aire producida por un ventilador o un compresor. El avión suele estar fijo y el aire en movimiento; pero el movimiento relativo es el mismo que en la realidad (aire fijo y avión en movimiento). Las fuerzas de empuje ascensional y arrastre o más exactamente las tres fuerzas y tres momentos según los tres ejes que actúan sobre el modelo se miden con balanzas especiales. Se estudia también la interacción

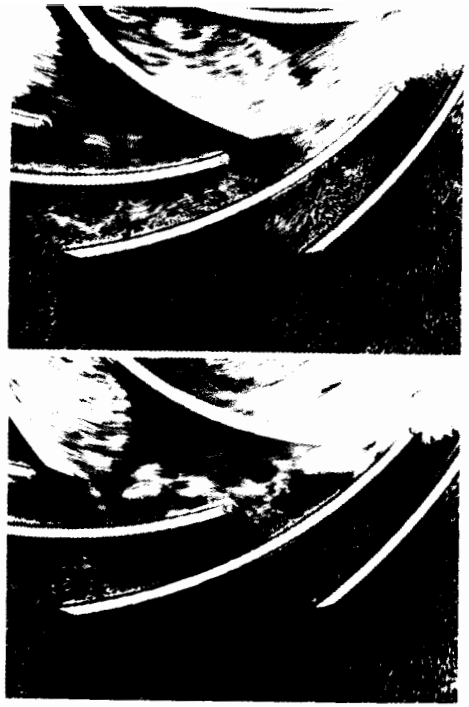


FIG. 7-3. La figura corresponde a la visualización del flujo conseguido espolvoreando en el agua polvo de aluminio en la corona directriz de una bomba centrífuga en los laboratorios de la firma KSB de Alemania.

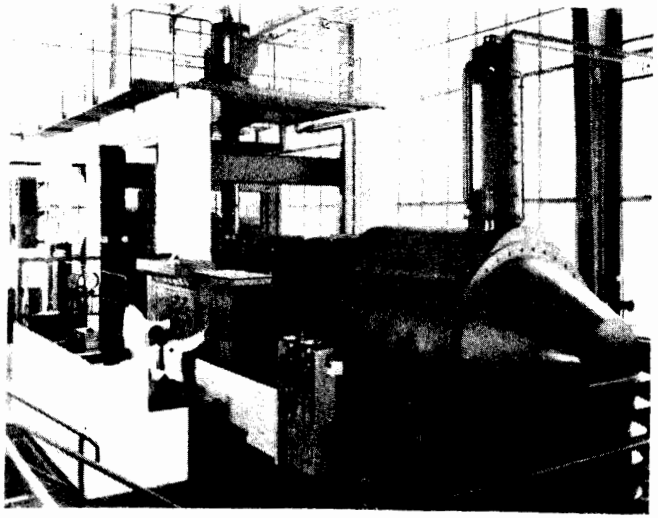


FIG. 7-4. Una de las dos grandes estaciones de ensayo de modelos de máquinas hidráulicas en circuito cerrado con recogida y procesado de datos centralizada y automatizada del laboratorio de la firma «Brunnenmühle» de la firma Voith de Alemania.

entre las fuerzas aerodinámicas y las deformaciones elásticas de la estructura, las vibraciones de las alas, etc. En la Fig. 7-6 se representa el modelo del Republic S-105, cazabombardero, en uno de los túneles de viento del Laboratorio de Langley del Nasa. Esta organización aeronáutica-espacial de Estados Unidos posee una red de túneles de viento por todo el país. En los túneles supersónicos e hipersónicos se ensayan modelos con velocidades de aire hasta 30 veces la velocidad del sonido y aún más. Los *programas espaciales* de Estados Unidos y de la U. R. S. S. hubieran sido imposibles sin la experimentación con modelos reducidos en los túneles de viento.

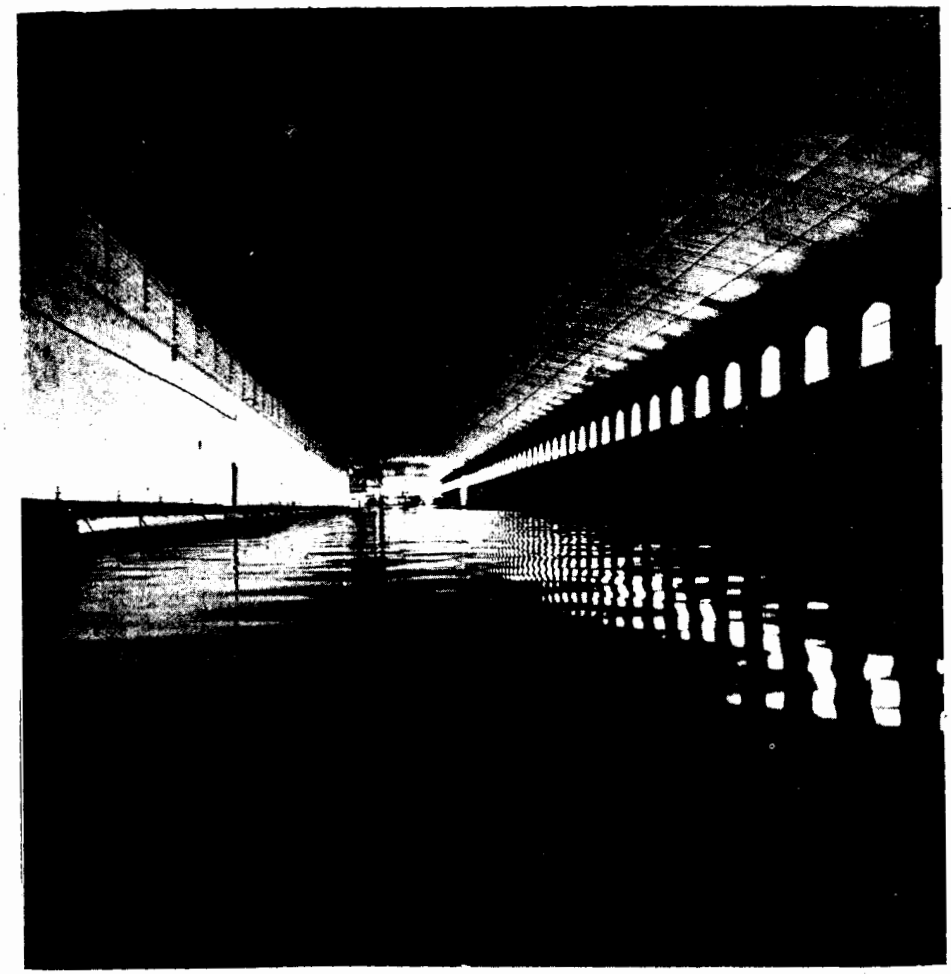


FIG. 7-5. *Canal de ensayos de maquetas de barcos* del Pardo, Madrid, de dimensiones 320 · 12,50 · 6,50. Hasta julio de 1969 se ensayaron en este canal 1.357 modelos de carena, 1.319 modelos de propulsor y se hicieron 4.752 ensayos, con más de 23.000 km recorridos por el carro remolcador. *(Por cortesía del Ministerio de Marina. Canal de Experiencias Hidrodinámicas.)*

7.3. TEORIA DE MODELOS

El problema formulado anteriormente (pág. 162): «¿cómo predecir el comportamiento del prototipo a partir de los resultados obtenidos experimentalmente en un modelo a escala?» se resuelve así:

1 — *El modelo ha de ser geométricamente semejante al prototipo.*

Es evidente que si no se cumple esta condición la comparación de resultados entre el modelo y el prototipo es imposible (1).
En adelante designaremos con el subíndice p las magnitudes del prototipo y con el subíndice m las del modelo.
Por tanto las longitudes L, superficies A, y volúmenes τ homólogos del prototipo y del modelo han de verificar las siguientes relaciones:

$$\frac{L_p}{L_m} = \lambda \quad ; \quad \frac{A_p}{A_m} = \lambda^2 \quad ; \quad \frac{\tau_p}{\tau_m} = \lambda^3 \tag{7-7}$$

donde λ — escala del prototipo con relación al modelo.

2 — *El modelo ha de ser dinámicamente semejante al prototipo.*

Para que los fenómenos en el modelo y en el prototipo sean comparables no basta que los modelos de estructuras o máquinas hidráulicas sean geométricamente semejantes a los prototipos, sino que también los flujos, o sea las líneas de corriente, han de ser semejantes. Para ello es necesario que las velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc., se hallen también en relaciones bien determinadas, que es preciso estudiar en las cinco secciones siguientes. Estas relaciones, como veremos, se deducen de la igualdad de los números de Euler, o de los de Froude, Reynolds, etc., según los casos.

7.4. SEMEJANZA DINAMICA Y GRADIENTE DE PRESIONES: NUMERO DE EULER

Supongamos que se trata de determinar experimentalmente las fuerzas a que estará sometido el pilar de un puente cuya sección transversal tendrá la forma de la Fig. 7-7. Se hará el estudio investigando un modelo reducido a escala 1/40, por ejemplo. En primera aproximación:

— La corriente tendrá lugar en planos horizontales (corriente bidimensional). Las partículas de fluido no se acelerarán verticalmente. La fuerza de la gravedad no tendrá influjo alguno sobre este tipo de corriente.

(1) A veces los modelos de ríos y puertos se hacen distorsionados, porque al ser la escala del modelo con relación al prototipo pequeña, la profundidad del modelo resultaría tan pequeña que se originarían fenómenos de tensión superficial que complicarían el experimento.

— Tanto las fuerzas debidas a la viscosidad como las restantes fuerzas enumeradas en la Sec. 5.4 se estima serán de escasa importancia y podrán despreciarse.
— Las únicas fuerzas que actuarán sobre el pilar serán, pues, las debidas al gradiente de presiones.
— En el infinito la corriente es uniforme, y además en todos los puntos del infinito (o puntos suficientemente alejados del pilar) la velocidad es la misma e igual a v_0.
— La ecuación de Bernoulli se cumplirá no solo entre dos puntos situados en la misma línea de corriente (en virtud de que la viscosidad es nula), sino entre dos puntos cualesquiera del fluido, porque supondremos que todas las partículas de fluido transportan la misma energía *(movimiento irrotacional*, véase la Sec. 5.8.1).

FIG. 7-6. En los laboratorios de Langley Field, Virginia, los principales de la NASA, se encuentra entre otros el *túnel aerodinámico* de la figura en que se está montando un modelo del caza-bombardero Republic F-105. *(Por cortesía de la N.A.S.A.)*

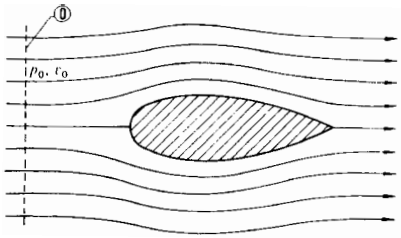


FIG. 7-7. Líneas de corriente en torno al pilar de un puente en un plano horizontal. En primera aproximación puede suponerse el fluido ideal e irrotacional. Entonces basta la semejanza geométrica entre el modelo y el prototipo para que los *números de Euler* sean iguales en puntos homólogos en el modelo y en el prutotipo.

Si en la Fig. 7-7 el plano del dibujo es horizontal, escribiendo la ecuación de Bernoulli entre dos puntos de este plano: un punto O situado suficientemente alejado del pilar y otro punto genérico cualquiera, aunque no estén en la misma línea de corriente, se tendrá:

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v^2)$$

por ser $z = z_0$. Llamando $p - p_0 = \Delta p$:

$$\frac{\Delta p}{\rho v_0^2/2} = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{7-8}$$

En la Fig. 7-7 se han trazado las líneas de corriente, cuyo conjunto se llama *configuración o mapa de corriente*. Matemáticamente se demuestra (2) que en el fluido ideal e irrotacional que estamos considerando esta configuración de corriente no depende más que de la geometría del contorno (el pilar en nuestro caso), pero no del tamaño (escala). Es decir, que las configuraciones de corriente del modelo y del prototipo serán también geométricamente semejantes (semejanza dinámica). Por tanto, según la Ec. (7-8) en puntos homólogos el segundo miembro es igual en el modelo que en el prototipo, luego también el primer miembro será igual en puntos homólogos en el modelo y en el prototipo.

Ahora bien, si

$$\frac{\Delta p}{\rho v_0^2/2} = C$$

siendo $\sqrt{1/\text{constante}} = \text{constante}$, se tendrá que en puntos homólogos

$$\frac{v_0}{\sqrt{2\,\Delta p/\rho}} = C \tag{7-9}$$

El primer miembro de (7-9) es el *número de Euler*, Eu:

$$\boxed{\text{Eu} = \frac{v}{\sqrt{2\,\Delta p/\rho}}} \tag{7-10}$$

donde v — velocidad característica (en nuestro caso $v = v_0$).

(2) Véase, por ejemplo, Milne-Thomson, obra citada.

El número de Euler puede considerarse como el cociente entre una fuerza de inercia característica y una fuerza debida al gradiente de presiones.

En efecto, la fuerza de inercia es igual a una masa multiplicada por una aceleración. La masa es igual a la densidad ρ multiplicada por el volumen que a su vez es proporcional al cubo de una cierta longitud característica L^3. La masa es, pues, proporcional a ρL^3. La aceleración es proporcional a una cierta velocidad característica v dividida por un tiempo, o sea proporcional a v/t. El tiempo a su vez es proporcional a la longitud característica L dividida por la velocidad v. Luego la aceleración es proporcional a v^2/L y la fuerza de inercia es proporcional a $\dfrac{\rho L^3 v^2}{L}$, o sea

$$\text{fuerza de inercia} \sim \rho L^2 v^2 \tag{7-11}$$

Por otra parte la fuerza debida al gradiente de presiones es proporcional a $\Delta p\, L^2$. Luego

$$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza gradiente presiones}} \sim \frac{\rho L^2 v^2}{\Delta p\, L^2} = \frac{v^2}{\Delta p/\rho}$$

que es el cuadrado de Eu salvo una constante.

El número de Euler es el parámetro adimensional de semejanza en los problemas en que sólo actúan las fuerzas debidas al gradiente de presiones.

Si el modelo es geométricamente semejante al prototipo y no interviene más fuerza que la debida al gradiente de presiones automáticamente el número de Euler en puntos homólogos es igual en el modelo y en el prototipo.

En el ensayo del modelo del pilar del puente de la Fig. 7-7, se construiría un modelo a escala, por ejemplo, $\lambda = 10/1$. Se introduciría en un canal de vidrio, donde por medio de una bomba se haría circular un caudal Q de agua cualquiera, obteniéndose una cierta velocidad $v_{om} = 2$ m/s, por ejemplo. En el modelo, que podría ser de plástico, se podrían tomar medidas de presión en todo el contorno. La presión en el punto homólogo del prototipo se determinaría por la ecuación:

$$\text{Eu}_p = \text{Eu}_m$$

o sea [Ec. (7-10)]:

$$\frac{v_{op}}{\sqrt{2\,\Delta p_p/\rho_p}} = \frac{v_{om}}{\sqrt{2\,\Delta p_m/\rho_m}}$$

El ensayo podría hacerse también con aire en un túnel de viento, en cuyo caso

$$\rho_p = \rho_{\text{H}_2\text{O}}$$
$$\rho_m = \rho_{\text{aire}}$$

n nuestro caso, sin embargo:

$$\rho_m = \rho_p$$

finalmente

$$\Delta p_p = \frac{v_{op}^2}{v_{om}^2} \Delta p_m$$

Esta ecuación aplicada punto por punto permitiría, por ejemplo, hallar ı distribución de presiones en el pilar del puente aún no construido, a base e los ensayos del modelo, donde se obtendría experimentalmente Δp_m en cada unto.

.5. SEMEJANZA DINAMICA CON PREDOMINIO DE LA GRAVEDAD: NUMERO DE FROUDE

Siempre que exista una superficie libre como, por ejemplo, en el desagüe por rificios, tubos y vertederos (Cap. 14), la gravedad juega un papel primordial. :n este tipo de problemas la semejanza geométrica entre el modelo y el prototipo erá condición necesaria pero no suficiente para que en puntos homólogos los úmeros de Euler sean iguales.

Hallemos el cociente entre la fuerza de inercia [Ec. (7-11)] y la fuerza de la ravedad:

$$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de la gravedad}} = \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g} = \frac{v^2}{Lg}$$

Si $\frac{v^2}{Lg}$ es constante también su raíz cuadrada $\frac{v}{\sqrt{Lg}}$ lo será.

Esta última relación adimensional se conoce con el nombre de *número de roude:*

$$\boxed{\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{Lg}}} \qquad (7\text{-}12)$$

Para que en este caso los ensayos del modelo y del prototipo sean dinámica- nente semejantes es menester que en puntos homólogos $\frac{v}{\sqrt{Lg}}$, o sea el número le Froude, sea idéntico.

El número de Froude es el parámetro adimensional de semejanza en los problemas con predominio de la gravedad.

Cuanto mayor es el número de Froude mayor es la importancia de la gravedad, y viceversa.

En los problemas con predominio de la gravedad se verifica aproxi- madamente la Ec. (7-3):

$$\boxed{\text{Eu} = f(\text{Fr})}$$

y por tanto sólo y cuando los números de Froude sean iguales los números de Euler también lo serán.

Como la aceleración de la gravedad suele ser igual en el modelo que en el prototipo, al igualar los números de Froude en el modelo y en el prototipo, se puede utilizar la relación más sencilla para el número de Froude $\frac{v}{\sqrt{L}}$, que obviamente ya no es adimensional.

Fórmulas de paso

Las relaciones que sirven para predecir, a partir de las velocidades, caudales, etc., medidas en el modelo, los valores correspondientes en el prototipo se deducen igualando los números de Froude en el modelo y en el prototipo

$$\frac{v_m}{\sqrt{L_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{L_p}}$$

De manera análoga se obtendrán las fórmulas de paso en los problemas con predominio de la viscosidad (igualando los números de Reynolds — Sec. 7.6), etc.

1 — *Escala de velocidades*

$$\frac{v_p^2}{v_m^2} = \frac{L_p}{L_m} = \lambda,$$

donde λ — escala del prototipo con relación al modelo.

Luego

$$\frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\lambda} \qquad (7\text{-}13)$$

(escala de velocidades, según la ley de Froude)

2 — *Escala de caudales*

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{A_p v_p}{A_m v_m} = \lambda^2 \sqrt{\lambda};$$

luego

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \lambda^2 \sqrt{\lambda} \qquad (7\text{-}14)$$

(escala de caudales, según la ley de Froude)

3 — *Escala de tiempos*

Puesto que

$$T_p = L_p/v_p \quad \text{y} \quad T_m = L_m/v_m$$

$$\left(\text{el tiempo dimensionalmente es } \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}\right)$$

se tiene

$$\frac{T_p}{T_m} = \frac{L_p}{L_m} \cdot \frac{v_m}{v_p} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda},$$

en virtud de (7-13).

Luego

$$\frac{T_p}{T_m} = \sqrt{\lambda} \tag{7-15}$$

(escala de tiempos, según la ley de Froude)

4 — *Escala de fuerzas*

$$F_p = gL_p^3 \qquad F_m = gL_m^3$$

suponiendo que los ensayos se hacen en el mismo fluido y por tanto $\rho_p = \rho_m$. Por consiguiente

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{gL_p^3}{gL_m^3} = \lambda^3;$$

luego

$$\frac{F_p}{F_m} = F_m\,\lambda^3 \tag{7-16}$$

(escala de fuerzas, según la ley de Froude)

(Véanse problemas 7-1 y 7-2.)

7.6. SEMEJANZA DINAMICA CON PREDOMINIO DE LA VISCOSIDAD: NUMERO DE REYNOLDS

En los ensayos aerodinámicos realizados en los túneles de viento y en otra multitud de problemas la fuerza predominante, además de la debida al gradiente de presiones, es la fuerza debida a la viscosidad.

De la ecuación de Newton [Ec. (2-7)] se deduce que la fuerza de la viscosidad es proporcional a $\eta v L$. Por lo cual la relación de la fuerza de inercia a la fuerza de la viscosidad será:

$$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de la viscosidad}} \sim \frac{\rho L^2 v^2}{\eta v L} = \frac{\rho L v}{\eta} = \frac{Lv}{\nu}$$

en virtud de la Ec. (2-10).

Esta relación adimensional se conoce con el nombre de *número de Reynolds*, Re

$$\boxed{\text{Re} = \frac{\rho L v}{\eta} = \frac{Lv}{\nu}} \tag{7-17}$$

Para que en este caso los ensayos del modelo y del prototipo sean dinámicamente semejantes es menester que el número de Reynolds sea idéntico en ambos.

El número de Reynolds mide la importancia relativa de cada una de las variables que intervienen en un fenómeno en que la fuerza predominante es la viscosidad, es decir la ρ, η, v, L. Cuanto mayor es el número de Reynolds menos importancia tiene la fuerza de viscosidad en el fenómeno, y viceversa. No es la viscosidad dinámica η el parámetro decisivo, sino $\text{Re} = \frac{\rho L v}{\eta}$.

Si en el ensayo con el modelo la fuerza de viscosidad ha de tener la misma importancia que tendrá en el prototipo, los números de Reynolds en el modelo y en el prototipo habrán de ser iguales:

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p$$

El número de Reynolds es el parámetro adimensional de semejanza en los problemas con predominio de la viscosidad.

Cuanto mayor es el número de Reynolds menor es la importancia de la viscosidad, y viceversa.

En los problemas con predominio de la viscosidad se verifica aproximadamente la Ec. (7-4):

$$\boxed{\text{Eu} = f(\text{Re})}$$

y por tanto sólo y cuando los números de Reynolds sean iguales los números de Euler también lo serán.

Supongamos que se utiliza el mismo fluido en el modelo y en el prototipo, es decir, $\nu_m = \nu_p$. La relación de velocidades según la ley de Froude será: [Ec. (7-13)]:

$$v_p/v_m = \sqrt{\lambda} \tag{7-18}$$

y según la ley de Reynolds, siendo $\text{Re}_p = \text{Re}_m$ y por tanto $v_p L_p = v_m L_m$ será:

$$\frac{v_p}{v_m} = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{\lambda} \tag{7-19}$$

Es imposible cumplir ambas condiciones simultáneamente, excepto para el caso $\lambda = 1$. Por lo cual si en el problema predomina la fuerza de la gravedad sobre la viscosidad se ensayará el modelo según la ley de Froude [Ec. (7-18)]. Entonces los resultados vendrán un tanto desfigurados por el incumplimiento de la ley de Reynolds. Si, por el contrario, en el problema predomina la viscosidad sobre la gravedad se adoptará la ley de Reynolds [Ec. (7-19)]. Entonces los resultados vendrán un tanto desfigurados por el incumplimiento de la ley de Froude.

Si en un problema tanto la fuerza de la gravedad como la viscosidad tienen importancia, como en el problema de la resistencia de un barco, se procede como se explica en la Sec. 13.4.

Como la densidad del aire es mucho menor que la densidad del agua en los ensayos con aire las fuerzas de inercia serán más débiles, con lo que las de la viscosidad se harán *relativamente* más importantes. Así el aire se comportará como un líquido *relativamente* más viscoso que el agua. En los túneles de viento los ensayos se hacen según la ley de Reynolds, en cambio en los ensayos de máquinas hidráulicas suele despreciarse la viscosidad porque la ley expresada en la Ec. (7-18) daría para el modelo una velocidad irrealizable o una altura de salto excesiva y se prescinde de la semejanza dinámica, es decir, se supone que si hay semejanza geométrica hay también semejanza dinámica. De los ensayos de máquinas hidráulicas trataremos extensamente en el Cap. 25, que se ha de considerar como un complemento de este capítulo (3)

(Véanse problemas 7-3 y 7-4.)

7.7. SEMEJANZA DINAMICA CON PREDOMINIO DE LA ELASTICIDAD: NUMERO DE MACH

Estudiemos ahora el caso en que la fuerza preponderante es la elasticidad.

Dimensionalmente la fuerza de elasticidad es proporcional al módulo de elasticidad de volumen E (véase Sec. 2.3) que es un esfuerzo y al área sobre la cual actúa dicha fuerza, o sea es proporcional a EL^2. Por tanto la relación de la fuerza de inercia a la fuerza de elasticidad será:

$$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de elasticidad}} \sim \frac{\rho L^2 v^2}{EL^2} = \frac{\rho v^2}{E}$$

También en este caso en vez de $\frac{\rho v^2}{E}$ se suele utilizar su raíz cuadrada $\frac{v}{\sqrt{E/\rho}}$. Ahora bien, según enseña la Física, $\sqrt{E/\rho} = c$ es la velocidad del sonido, o lo que es lo mismo la velocidad de la propagación de la onda elástica en el medio de que se trate.

La velocidad del sonido en el agua es 1.400 m/s y en el aire, 330 m/s. En los líquidos la velocidad del sonido varía solo ligeramente con la temperatura y la presión, mientras que en los gases sucede lo contrario.

(3) Sin embargo, aún en este caso, la semejanza geométrica ha de existir no sólo en el modelo mismo, sino en la configuración de la corriente *(semejanza cinemática)*.

Esta relación adimensional $\frac{v}{\sqrt{E/\rho}} = \frac{v}{c}$ se conoce con el nombre de *número de Mach, Ma.*

$$\boxed{\text{Ma} = \frac{v}{c}} \qquad (7\text{-}20)$$

El número de Mach es el parámetro adimensional de semejanza en los problemas con predominio de la elasticidad.

Cuanto mayor es el número de Mach mayor es la importancia de la elasticidad, y viceversa.

Si Ma < 1 la corriente se llama *subsónica;* si Ma $= 1$, *transónica* y si Ma > 1, *supersónica.*

En los problemas con predominio de la elasticidad se verifica aproximadamente la Ec. (7-5):

$$\boxed{\text{Eu} = f(\text{Ma})}$$

y por tanto sólo y cuando los números de Mach sean iguales los números de Euler también lo serán.

Las velocidades supersónicas se alcanzan ya hace tiempo en los aviones militares, en los proyectiles balísticos, en las naves espaciales, y en la aviación comercial (avión Concorde).

Los problemas en que el número de *Mach* tiene importancia son aquellos en que la compresibilidad tiene importancia: como en este curso (pág. 31) se considera prácticamente sólo el fluido incompresible, el número de Mach no será mencionado más en el texto.

(Véase problema 7-5.)

7.8. SEMEJANZA DINAMICA CON PREDOMINIO DE LA TENSION SUPERFICIAL: NUMERO DE WEBER

La tensión superficial σ (véase Sec. 2.5) es una fuerza superficial por unidad de longitud. Las dimensiones de σ son por tanto $[F]/[L]$. Por consiguiente la fuerza debida a la tension superficial será σL. Escribamos la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de la tensión superficial:

$$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza debida a la tensión superficial}} \sim \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma L} = \frac{\rho L v^2}{\sigma}.$$

También aquí se utiliza la raíz cuadrada de $\frac{\rho L v^2}{\sigma}$, o sea $\frac{v}{\sqrt{\sigma/\rho L}}$. Esta relación adimensional se conoce con el nombre de *número de Weber, We:*

$$\boxed{\mathrm{We} = \frac{v}{\sqrt{\sigma/\rho L}}} \qquad (7\text{-}21)$$

El número de Weber es el parámetro adimensional de semejanza en los problemas con predominio de la tensión superficial.

Cuanto menor sea el número de Weber mayor es la importancia de la tensión superficial, y viceversa.

En los problemas con predominio de la tensión superficial se verifica aproximadamente la Ec. (7-6):

$$\boxed{\mathrm{Eu} = f(\mathrm{We})}$$

y por tanto sólo y cuando los números de Weber sean iguales los números de Euler también lo serán.

La fuerza debida a la tensión superficial suele ser de ordinario muy pequeña. En la técnica esta fuerza entra en juego en las industrias relacionadas con la pulverización y atomización (formación de gotas, «sprays») que constituye una rama importante de la ingeniería química. Nosotros no volveremos a mencionar el número de Weber en nuestro texto.

Nota final

Para perfecta semejanza dinámica se deberían cumplir simultáneamente las cinco ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eu}_m &= \mathrm{Eu}_p \\ \mathrm{Fr}_m &= \mathrm{Fr}_p \\ \mathrm{Re}_m &= \mathrm{Re}_p \\ \mathrm{Ma}_m &= \mathrm{Ma}_p \\ \mathrm{We}_m &= \mathrm{We}_p \end{aligned} \qquad (7\text{-}22)$$

El cumplimiento simultáneo de estas cinco ecuaciones es imposible en el ensayo de modelos reducidos, porque estas ecuaciones prácticamente sólo pueden cumplirse si la escala es 1/1 (véase pág. 176). Por eso de ordinario se escoge de las Ecs. (7-22) una sola, la que más se ajuste al fenómeno.

Así por ejemplo en el ensayo de un perfil de ala de avión en un túnel aerodinámico se ve inmediatamente que las fuerzas de tensión superficial son despreciables; si el aire se supone incompresible las fuerzas elásticas tampoco existen. La fuerza de la gravedad no altera la configuración de la corriente. Lo importante

en este problema particular es mantener los números de Reynolds iguales en el modelo y en el prototipo [tercera Ec. (7-22)]. Si esto se cumple las configuraciones de corriente en el modelo y en el prototipo serán semejantes.

PROBLEMAS

7-1. *Determinar las dimensiones principales del modelo del tubo de aspiración de una turbina hidráulica (véase pág. 473), cuyas dimensiones reales son las siguientes:*
Diámetro del rodete de la turbina, $D_1 = 840$ mm;
diámetro del tubo de aspiración a la entrada, $D_2 = 1.170$ mm;
longitud de la parte cónica del tubo de aspiración, $l_c = 2.500$ mm;
diámetro de salida del tubo de aspiración, $D_3 = 1.740$ mm;
longitud total del tubo de aspiración, $L = 3.500$ mm. El caudal de la turbina, $Q = 970$ l/s. El modelo se construirá a la escala, $\lambda = 5$. Cálcular el caudal de la turbina modelo y la velocidad de salida en el tubo de aspiración de la turbina modelo, para que el ensayo se realice con semejanza dinámica.

Dimensiones del modelo:

$$D_m = \frac{D_p}{\lambda} = \frac{840}{5} = 168 \text{ mm}$$

$$D_{2m} = \frac{D_{2p}}{\lambda} = \frac{1170}{5} = 234 \text{ mm}$$

$$l_{cm} = \frac{l_{cp}}{\lambda} = \frac{2500}{5} = 500 \text{ mm}$$

$$D_{3m} = \frac{D_{3p}}{\lambda} = \frac{1740}{5} = 348 \text{ mm}$$

$$L_m = \frac{L_p}{\lambda} = \frac{3500}{5} = 700 \text{ mm}$$

Si se construye el modelo a escala con las dimensiones que acabamos de deducir se dará *semejanza geométrica.* Para que se dé *semejanza dinámica,* en un problema como éste *con predominio de la gravedad,* se ha de verificar que el número de Froude sea igual en el modelo y en el prototipo.

Esto, según la Ec. (7-14) equivale a ensayar el modelo con un caudal

$$Q_m = Q_p \lambda^{-5/2} = 970 \cdot 5^{-5/2} = 17{,}352 \text{ l/s}$$

La velocidad de salida del tubo de aspiración en el modelo será:

$$v_m = \frac{Q_m}{A_m} = \frac{4 \cdot Q_m}{\pi \cdot 0{,}348^2} = 0{,}182 \text{ m/s}$$

Supuesto que el modelo se ensaya con el caudal Q_m hallado, los datos obtenidos en el ensayo del modelo se trasladarán al prototipo, mediante fórmulas como las (7-13) a (7-16) u otras deducidas de manera semejante, según la variable de que se trate.

7-2. *Se trata de ensayar el modelo de un barco de 180 m de largo que ha de navegar a 46 km/h. El modelo tendrá 3 m de longitud.*
a) ¿A qué velocidad deberá marchar el modelo para que se conserve constante el número de Froude?
b) ¿Cuál es el valor del número de Froude?

En nuestro caso:

$L_p = 180$ m

$v_p = \frac{46.000}{3.600} = 12{,}78$ m/s

$L_m = 3$ m

$\lambda = \frac{L_p}{L_m} = \frac{180}{3} = 60$

a) En virtud de la Ec. (7-13)

$$v_m = \frac{v_p}{\sqrt{\lambda}} = \frac{v_p}{\sqrt{60}} = 1{,}650 \text{ m/s}$$

b) En virtud de la Ec. (7-12), tendremos:

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_p = \frac{v_p}{\sqrt{L_p g}} = \frac{12{,}78}{\sqrt{180 \cdot 9{,}81}} = 0{,}3041$$

7-3. *Un modelo de avión a escala $\lambda = 20$ se ha de ensayar en un túnel de viento cerrado a la misma velocidad que el prototipo. También será igual la temperatura del aire. El prototipo volará a una altura en que la presión barométrica media será de 500 Torr.*

Calcular la presión del aire en el túnel de viento de manera que se conserve el mismo número de Reynolds en el modelo y en el prototipo, para que exista semejanza dinámica.

Según la Ec. (7-17), y siendo Re igual en el modelo y en el prototipo, se verificará:

$$\frac{v_m L_m \rho_m}{\eta_m} = \frac{v_p L_p \rho_p}{\eta_p}$$

Si $t = C$ puede suponerse (véase pág. 25) $\eta_m = \eta_p$. Además, $v_m = v_p$; luego

$$L_m \rho_m = L_p \rho_p$$

y

$$\rho_m = \frac{L_p}{L_m} \rho_p = 20\rho_p \tag{1}$$

En el aire se cumple con suficiente aproximación la ecuación de los gases perfectos [Ec. (20-3)]:

$$\rho = \frac{p}{R_a T}$$

donde $R_a = C$; si además $T = C$, se tendrá $\rho = Cp$, y según la Ec. (1)

$$p_m = \frac{\rho_m}{\rho_p} p_p = 20\, p_p$$

obteniéndose finalmente

$$p_m = 20 \cdot 500 = 10.000 \text{ Torr} = 10 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 \text{ Pa} = \\ = 13{,}3416 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \\ = 13{,}3416 \text{ bar}$$

7-4. *Para determinar las fuerzas que se ejercen sobre una chimenea por la presión dinámica del aire a 100 km/h se construye un modelo a escala $\lambda = 15$ y se ensaya en un túnel de viento cerrado, en que el aire se mantiene a una densidad 5 veces mayor que la normal. La temperatura en el ensayo y en la realidad puede suponerse igual.*

Calcular el momento de flexión correspondiente en el prototipo, si se mide este momento en el modelo y tiene un valor de 25 m · N.

Si se ha escogido la velocidad del viento en el ensayo del modelo de manera que se conserve la semejanza dinámica, es decir

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$$

Luego siendo la temperatura igual en el modelo y en el prototipo será prácticamente $\eta = C$ (véase pág. 25). Luego

$$v_m \rho_m L_m = v_p \rho_p L_p$$

y

$$v_m = \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \frac{L_p}{L_m} v_p = \frac{15}{5} v_p$$

$$\frac{v_m}{v_p} = 3 \tag{2}$$

Además, según la Ec. (7-4), siendo $\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$:

$$\mathrm{Eu}_m = \mathrm{Eu}_p$$

En nuestro caso:

$L_p = 15\ L_m$
$v_p = 100$ km/h
$\rho_m = 5\rho_p$
$M_m = 25$ m · N

De la Ec. (7-4) y de la Ec. (7-10) se deduce que

$$\frac{\rho_m v_m^2}{\Delta p_m} = \frac{\rho_p v_p^2}{\Delta p_p}$$

Ahora bien

$$F \sim \Delta p\, L^2$$

Luego

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\Delta p_p L_p^2}{\Delta p_m L_m^2} = \frac{\rho_p v_p^2 L_p^2}{\rho_m v_m^2 L_m^2} \tag{3}$$

Además

$$\frac{M_p}{M_m} = \frac{F_p L_p}{F_m L_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{v_p^2}{v_m^2} \frac{L_p^3}{L_m^3} = \\ = \frac{1}{5} \frac{1}{9} 15^3 = 75$$

y finalmente

$$M_p = 25 \cdot 75 = 1.875 \text{ n} \cdot \text{N}$$

7-5. *Un avión ha de volar a una altura en que la presión absoluta del aire es de 530 Torr y la temperatura 15° C (cociente de valores específicos, $\gamma = 1{,}4$; constante de gas del aire, $R_a = 286{,}9$ J/kg · K).*

¿A qué velocidad el número de Mach será 0,8 y cuál será en este caso la presión de estancamiento?

Según la Ec. (7-20)

$$\text{Ma} = \frac{v}{c}$$

La velocidad del sonido, c en las condiciones del problema, se obtiene por la fórmula siguiente de Física:

$$c = \sqrt{\gamma R_a T}$$

donde $T = 15 + 273 = 288$ K. Por tanto

$$c = \sqrt{1{,}4 \cdot 286{,}9 \cdot 288} = \\ = 340{,}115 \text{ m/s}$$

Ahora bien

$$\text{Ma} = 0{,}8 = \frac{v}{c} = \frac{v}{340{,}1}$$

y

$$v = 0{,}8 \cdot \text{Ma} \\ = 272{,}092 \text{ m/s}$$

La *presión de estancamiento* se deducirá de

$$p_t = p_{amb} + \rho \frac{v^2}{2}$$

donde p_{amb} = presión barométrica = $0{,}530 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 = 70.710$ Pa

Además, según la ecuación de los gases perfectos [véase Ec. (20-3)],

$$\rho = \frac{p}{R_a T} = \frac{p_{amb}}{286{,}9 \cdot 288{,}15} = 0{,}855 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

y, finalmente,

$$p_t = 102.372 \text{ Pa} = 1{,}02372 \text{ bar}$$

7-6. *Calcular el número de Reynolds para una corriente de agua en una tubería de 200 mm de diámetro a 20° C y a una velocidad de 4 m/s.*

Calcular el número de Reynolds para el aire que fluye en una tubería de 200 mm de diámetro a una presión de 10 bar, una temperatura de 50° C y una velocidad de 4 m/s.

7-7. *Calcular para una corriente de agua a 20° C el número de Reynolds en los tres casos siguientes: a) tubería capilar de 6 mm de diámetro con velocidad de 10 cm/s; b) tubería de 200 mm con velocidad de 1 m/s; c) tubería de 2 m de diámetro con velocidad de 2 m/s.*

7-8. *Por una tubería de 150 mm de diámetro circula un caudal másico de aire, G = 100 kg/min. ¿Cuáles son los números de Mach en dos secciones de la tubería, en que las presiones medias son de 6 bar y 0,5 bar, respectivamente, siendo la temperatura en ambas secciones igual a 25° C?*

8. *Resistencia de los fluidos en general*

8.1. INTRODUCCION

Cuando un cuerpo sólido se mueve en un fluido, por ejemplo, un avión en el aire, se originan unas fuerzas que no tienen lugar cuando una nave espacial se mueve en el vacío. La resultante de estas fuerzas en la dirección normal al movimiento es el empuje ascensional, y de ella se tratará en el Cap. 17. La resultante de las mismas fuerzas en la dirección del movimiento es el arrastre o *resistencia*. El origen de esta fuerza es la viscosidad; aunque también la resultante de las fuerzas debidas a las presiones normales puede a veces dar origen a una resistencia que se llama *resistencia de presión*.

Mientras que en los capítulos 5 y 6 nos hemos ocupado preferentemente del fluido ideal ($\eta = 0$) en los capítulos 8 al 14 en que estudiaremos la resistencia nos ocuparemos del fluido real ($\eta \neq 0$).

Por el principio de acción y reacción el cuerpo ejerce sobre el fluido una fuerza igual y de sentido contrario a la que el fluido ejerce sobre el sólido. Es decir, el fenómeno de la resistencia que un sólido experimenta al moverse en un fluido es fundamentalmente igual al de la resistencia que un fluido experimenta al moverse en el interior de un sólido, como una tubería.

Así los siguientes fenómenos de trascendental interés en la ingeniería, aunque aparentemente tan dispares, están sometidos a las mismas leyes, y se han de estudiar conjuntamente:

a) Pérdidas de energía en conducciones cerradas o *tuberías* (Caps. 9, 11 y 12) producidas por el rozamiento del fluido con las paredes de la tubería y de las partículas de fluido entre sí.

b) El flujo de conducciones abiertas o *canales* está sometido a idéntico tipo de resistencia (Cap. 10).

c) El arrastre de un avión que exige un consumo de energía para mantenerlo a velocidad constante es análogo, como hemos dicho, a los dos casos anteriores (corriente alrededor de un contorno —avión— y corriente en el interior de un contorno —tubería, canal—). En efecto, aunque en la práctica el avión se mueve y el aire está en reposo, sumando al sistema aire + avión una velocidad igual y de sentido contrario a la velocidad del avión, este queda en reposo y el aire se mueve sobre él. (Véase pág. 91.)

d) La navegación submarina constituye un caso análogo al anterior, con las diferencias producidas por ser el fluido distinto —agua— y las velocidades más pequeñas.

La importancia del tema se desprende de que las cuestiones *a)* y *b)* ocupan un puesto primordial en la *ingeniería hidráulica*, *c)* es el problema básico de la *aerodinámica*, y *d)* ocupa un puesto primordial en la *ingeniería naval*.

8.2. PARADOJA DE D'ALEMBERT

Si un cilindro circular se mueve con velocidad constante v_∞ *de derecha a izquierda* en un fluido en reposo, dinámicamente nada varía, como ya hemos dicho, si sumando al fluido y al cilindro una velocidad igual y de sentido contrario el cilindro queda en reposo y el fluido se mueve *de izquierda a derecha* con velocidad v_∞, caso representado en la Fig. 8-1. Suponemos que el fluido es ideal (energía constante en todos los puntos de una misma línea de corriente), e irrotacional (energía constante en todos los puntos aunque no estén en la misma línea de corriente; véase pág. 107). Por tanto la Fig. 8-1 representa el

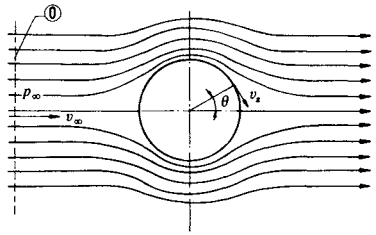


FIG. 8-1. Líneas de corriente en un movimiento uniforme en el infinito de un *fluido ideal alrededor de un cilindro circular*. La configuración de corriente es simétrica con respecto a los ejes paralelo y perpendicular a la corriente, que pasan por el centro del círculo.

caso del *cilindro circular en corriente uniforme* (1) *en el infinito* (2) *de un fluido ideal e irrotacional*. Un cálculo matemático, que omitimos, permite hallar las ecuaciones de las líneas de corriente, que se han trazado en la figura. Del cálculo omitido se deduce que la velocidad en cada punto de la superficie del cilindro v_s (véase figura) es:

$$v_s = 2v_\infty \operatorname{sen} \theta \tag{8-1}$$

donde v_s — velocidad del fluido en un punto de la superficie del cilindro;
v_∞ — velocidad de la corriente imperturbada, o velocidad en el infinito;
θ — ángulo que fija la posición del punto en el cilindro (véase Fig. 8-2).

Si suponemos que la gravedad no juega papel alguno (plano del dibujo horizontal; o bien si el fluido es un gas), aplicando la ecuación de Bernoulli en la

(1) Se trata de un caso particular de la corriente uniforme definida en la página 89, en la cual la velocidad en el infinito no varía ni a lo largo de una línea de corriente ni en una sección transversal a la misma.

(2) La expresión «en el infinito» quiere decir prácticamente, suficientemente antes del contorno (cilindro en este caso). Alrededor del cilindro la corriente evidentemente deja de ser uniforme.

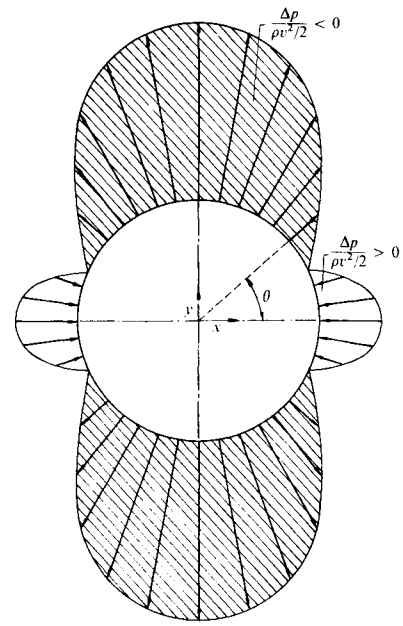


FIG. 8-2. El *diagrama polar de presiones* en el movimiento descrito en la Fig. 8-1 sirve para visualizar la paradoja de D'Alembert. Por la simetría del dibujo, la resultante de todas las fuerzas debidas a la presión según el eje horizontal (= arrastre) es nula.

forma [Ec. (5-40)] entre un punto en la sección O (corriente imperturbada) y un punto cualquiera s del cilindro, tendremos:

$$p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p_s + \frac{\rho v_s^2}{2}$$

de donde

$$p_s = p_\infty + \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v_s^2) = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2}(1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta) \tag{8-2}$$

habiendo empleado en el último miembro la Ec. (8-1), y finalmente

$$\frac{p_s - p_\infty}{\rho v_\infty^2/2} = \frac{\Delta p}{\rho v_\infty^2/2} = 1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (3) \tag{8-3}$$

Las fuerzas debidas a la presión son normales al cilindro. Los valores de $\frac{\Delta p}{\rho v_\infty^2/2}$ tomados de la Ec. (8-3) se han llevado a escala normalmente al cilindro en la Fig. 8-2, en la que se ha tomado la superficie del cilindro como línea en la cual $\frac{\Delta p}{\rho v_\infty^2/2} = 0$. La simetría de la Fig. 8-2 nos dice que:

(3) El primer miembro de esta ecuación es igual a $\frac{1}{\mathrm{Eu}^2}$, donde Eu — número de Euler [Ec. (7-10)]. El segundo miembro de la Ec. (8-3) depende sólo de la geometría del contorno (cilindro), pero no de la escala. Luego el número de Euler es constante en puntos homólogos en dos cilindros de distinto tamaño, lo que confirma lo dicho en la Sec. 7.4.

— la resultante de todas las fuerzas que el fluido ejerce sobre el cilindro en la dirección normal al movimiento *(empuje ascensional)* es nula;
— la resultante de todas las fuerzas en la dirección del movimiento *(arrastre)* es nula.

Un cilindro se movería en un fluido ideal sin experimentar resistencia alguna.

Ahora bien, fluido ideal es aquel cuya viscosidad $\eta = 0$. Pero nos encontramos con el hecho paradójico de que el agua y el aire (fluidos los más interesantes en la técnica) siendo muy poco viscosos ofrecen a un cilindro en movimiento una gran resistencia. Este hecho se conoce con el nombre de *paradoja de D'Alembert.*

La explicación de esta paradoja nos conduce lógicamente a dos conceptos de primordial importancia en Mecánica de Fluidos: *la capa límite y el desprendimiento de la capa límite.*

La explicación de la paradoja de D'Alembert se resume en los dos puntos siguientes. En el agua, en el aire y en cualquier fluido muy poco viscoso:

a) Aun en el caso en que *macroscópicamente* la configuración de la corriente fuera la de la Fig. 8-1, que se repite en la Fig. 8-3 *a*, *microscópicamente* en las inmediaciones de un punto cualquiera del cilindro, *A*, reina la distribución de velocidades que se representa en la Fig. 8.3 *b*.

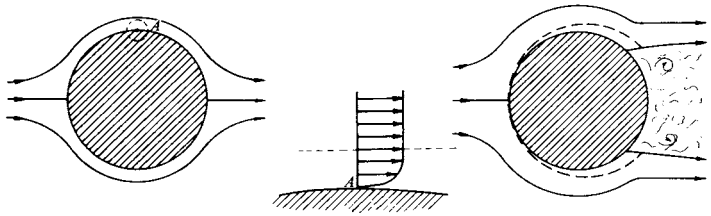


FIG. 8-3. *Cilindro circular en corriente real uniforme en el infinito.* En (*a*) la corriente se adhiere al cilindro, *macroscópicamente* la configuración de la corriente es la misma del fluido ideal. En (*b*) la observación *microscópica* del punto *A* (círculo de puntos) revela la existencia de la capa límite. En (*c*) se ha producido el *desprendimiento* de la capa límite.

Es decir, la capa de fluido contigua al cilindro se adhiere al mismo por su viscosidad (véase pág. 22); a consecuencia de lo cual la velocidad del fluido junto al cilindro mismo se reduce a 0. Esta velocidad aumenta rapidísimamente, hasta que pasada una *película de fluido (capa límite*, Sec. 8.3) la velocidad v_s es la que corresponde a las líneas de corriente de la Fig. 8-1 u 8-3 *a*. Por tanto en la ecuación de Newton [Ec. (2-8)],

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

η es muy pequeña (la viscosidad del aire y agua son muy pequeñas); pero $\frac{dv}{dy}$ es grande (todo el aumento de velocidad tiene lugar en una película de fluido muy fina — la capa límite) y por tanto el esfuerzo cortante y la resistencia (esfuerzo cortante × superficie) es muy grande. Esta resistencia se llama *resistencia de superficie* (Sec. 8.3).

Ahora bien, en la práctica la configuración de la corriente de la Fig. 8-3 *a* no suele realizarse, excepto el caso de una velocidad v_∞ muy pequeña, porque:

b) el cilindro, aerodinámicamente hablando, tiene una forma *roma* y las líneas de corriente se separan como se indica en la Fig. 8-3 *c (desprendimiento de la capa límite:* Sec. 8.8) creándose corriente abajo del cilindro remolinos que originan una depresión, con lo cual en el caso de que el fluido estuviera en reposo y el cilindro se moviera de derecha a izquierda este experimentaría una resistencia que se llama *resistencia de forma.*

8.3. CAPA LIMITE: RESISTENCIA DE SUPERFICIE

La teoría de la *capa límite* ideada al comienzo de este siglo por Prandtl ha revolucionado la aeronáutica y toda la Mecánica de Fluidos, hasta el punto de que se considera a Prandtl como fundador de la Mecánica de Fluidos moderna. (Véase pág. 4, núm. 22.)

Esta teoría encuentra aplicación precisamente en los fluidos poco viscosos como el aire y el agua, y por tanto es una teoría fundamental en aeronáutica y en ingeniería naval.

La Fig. 8-4 *a* representa un cuerpo sólido sumergido en una corriente de fluido, por ejemplo, un perfil de ala de avión en una corriente de aire. Estudiemos la distribución de velocidades a lo largo de la normal a la superficie en un punto *A*. Aproximando un tubo de Prandtl muy cerca del punto *A*, se mide una velocidad v. «Macroscópicamente» v es la velocidad del fluido en el punto *A*. Sin embargo, sabemos que a causa de la viscosidad, la velocidad del fluido en el punto *A* es 0 (véase pág. 22). Una observación «microscópica», representada en la Fig. 8-4 *b*, nos revela según los casos, una de las distribuciones de velocidades siguientes, en una película muy fina (la *capa límite):*

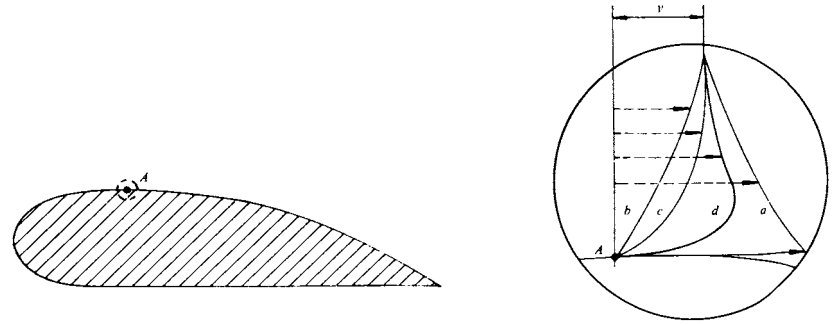


FIG. 8-4. (*a*) Perfil de ala de avión sumergido en una corriente de aire. (*b*) Observación *microscópica* del punto *A*. En este entorno infinitesimal del punto *A* se sienten los efectos de la *capa límite.*

— si el fluido fuera ideal la teoría hidrodinámica que en este curso no abordamos nos da una distribución de velocidades como la de la curva *a*.
— si los efectos de la viscosidad son muy apreciables (número de Reynolds bajo, Sec. 8.6), la distribución de velocidades es parabólica y se representa en la curva *b*.
— si los efectos de la viscosidad son muy poco apreciables (número de Reynolds alto), la distribución de velocidades es logarítmica y se representa por la curva *d*. La curva *c* representa un caso intermedio.
— La curva *d* solo diverge de la curva ideal *a* en una película muy fina (es decir, en un entorno de radio muy pequeño (de unas centésimas de mm, por ejemplo) en la normal al contorno en un punto cualquiera *A*, como en la Fig. 8-4 *a*, que agrandando puede verse en la Fig. 8-4 *b*) Esta película se denomina *la capa límite*. El aire y el agua realizan con frecuencia curvas del tipo *d*.

Esta *capa límite:*

— escapó a la observación experimental antes de Prandtl por no disponerse de instrumentos de medida de velocidad suficientemente precisos;
— tiene un espesor muy pequeño, del orden de micras o mm, según los casos;
— en ella se hacen sentir intensamente los efectos de la viscosidad y rozamiento, aunque η sea pequeño, porque el gradiente de velocidades es grande [Ec. (2-8)].

La resistencia a la deformación (véase nota, pág. 23 y Fig. 2-3) debida a la viscosidad tiene lugar en todo el seno del fluido real; pero si la viscosidad η es pequeña solo tiene importancia en una *película fina —capa límite— y le llamaremos rozamiento pelicular o simplemente rozamiento de superficie.*

— fuera de esta película prácticamente infinitesimal, un líquido poco viscoso, como el aire y el agua, se comporta como un fluido ideal;
— fuera de la capa límite se pueden aplicar todos los métodos matemáticos (ecuaciones de Euler) y experimentales (líneas de corrientes y redes de corriente) que permiten trazar las líneas de corriente alrededor de un contorno y obtener la distribución de presiones en las cercanías de las paredes sólidas del cuerpo;
— en las ecuaciones de Navier-Stokes [Ec. (5-36)] los términos en que interviene la viscosidad son muy importantes en la capa límite y despreciables fuera de la misma;
— suponiendo que el espesor de la capa límite es infinitesimal se simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes. Anteriormente a Prandtl estas ecuaciones habían podido integrarse en muy pocos casos [por ejemplo, en la deducción de la ecuación de Poiseuille, Ec. (9-16)].
— Utilizando el reparto de velocidades y de presiones por la teoría del fluido ideal en las proximidades de la pared se puede determinar la evolución del fluido en la capa límite y los esfuerzos ejercidos sobre esta pared, ya que la presión se transmite a través de la capa límite sin cambiar de dirección, de manera que sigue siendo normal a la superficie del cuerpo y sin cambiar tampoco de valor, lo cual permite el cálculo de estas presiones.

El impacto del descubrimiento de la capa límite ha sido y continúa siendo grande. En nuestros días el progreso de las máquinas calculadoras ha permitido resolver ecuaciones antes prácticamente insolubles o solubles con gran laboriosidad. Así ya en el año 1964 en los laboratorios de Langley, pertenecientes a la NASA, se predecía el diagrama polar de un ala de avión —curva del coeficiente de arrastre/coeficiente de empuje con una exactitud del 3 por 100. Esto constituyó una revolución en aerodinámica, porque además la salida de la calculadora se introduce en un aparato inscriptor que automáticamente traza la geometría del perfil, o bien se introduce en una perforadora de cinta, la cual alimenta a una máquina-herramienta controlada numéricamente para producir el modelo que se ha de ensayar en el túnel de viento en pocas horas en contraposición de días y meses que se requieren sin estos métodos.

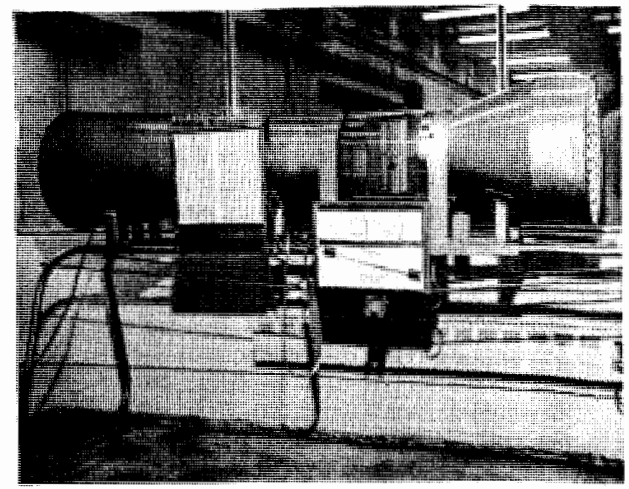


FIG. 8-5. Pequeño *túnel subsónico* Aerolab del Laboratorio de Ensayo de Máquinas de Fluido del I.C.A.I. En él puede variarse y medirse la velocidad del aire, así como el empuje ascensional y arrastre. En la foto se ensaya con variación y medición del ángulo de ataque un perfil de ala de avión provisto de 22 tomas piezométricas que se conectan al *multimanómetro* de la figura.

En el pequeño túnel aerodinámico de la Fig. 8-5, del Laboratorio de Dinámica de Fluidos integrado en el Laboratorio de Ensayos de Máquinas del I.C.A.I., puede estudiarse la distribución de velocidades en la capa límite con el montaje de la Fig. 8-6.

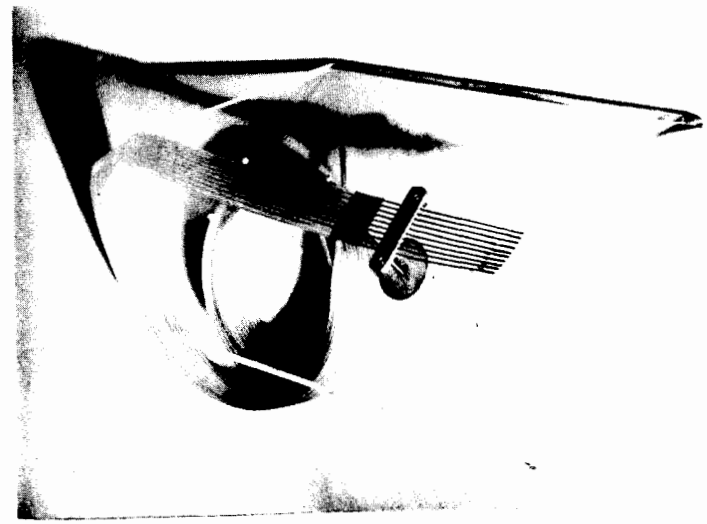


FIG. 8-6. Mediante esta placa plana de plástico se estudia en el túnel aerodinámico de la Fig. 8-5 la capa límite laminar y turbulenta. El modelo está provisto de 10 tubos de Pitot convenientemente distribuidos por la placa.

8.4. REGIMEN LAMINAR Y TURBULENTO

En la Sec. 5.1 se dividieron los regímenes de corriente en permanentes y variables, y tanto unos como otros en uniformes y no uniformes. Todos ellos, como ya dijimos, se refieren por decirlo así a la corriente observada *macroscópicamente*. La clasificación de los regímenes de corriente en *régimen laminar y turbulento* se refiere a la corriente estudiada *microscópicamente*. Como esta clasificación es fundamental en el estudio del fluido real, de ella nos vamos a ocupar más detenidamente.

Consideremos en primer lugar la corriente de un fluido muy viscoso, por ejemplo, aceite lubricante, a pequeña velocidad, por una tubería de pequeño diámetro y de sección constante en régimen permanente: este movimiento, permanente y uniforme, es un movimiento *laminar*.

Consideremos en segundo lugar la corriente de un fluido poco viscoso, por ejemplo agua, a gran velocidad, por una tubería de gran diámetro y de sección constante: este movimiento, permanente y uniforme, es un movimiento *turbulento*.

La instrumentación moderna, por ejemplo, el anemómetro de aire caliente, permite hacer un estudio *microscópico* de ambos regímenes.

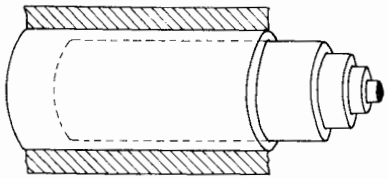


FIG. 8-7. *Flujo laminar* en una tubería circular. El fluido se desplaza ordenadamente en capas anulares concéntricas que deslizan unas sobre otras con velocidad decreciente desde el eje (velocidad máxima) hasta la pared de la tubería (velocidad cero). Este tipo de movimiento se ha denominado a veces movimiento telescópico.

El movimiento en *régimen laminar* es ordenado, estratificado: el fluido se mueve como clasificado en capas que no se mezclan entre sí. Así en el primer ejemplo (aceite a pequeña velocidad) el fluido no se desplaza como un cilindro, que desliza en el interior de la tubería estacionaria de sección circular, sino, como se representa en la Fig. 8-7, en forma de tubos concéntricos cilíndricos que deslizan unos con relación a los otros como los tubos de un telescopio. El tubo exterior de fluido queda adherido siempre a la tubería, su velocidad es cero. La velocidad de desplazamiento del filamento interior de sección circular infinitesimal es máxima.

El movimiento en *régimen turbulento* es caótico. Así en el segundo ejemplo (agua a gran velocidad) las partículas se mueven desordenadamente y las trayectorias de las partículas se entrecruzan formando pequeños remolinos aperiódicos.

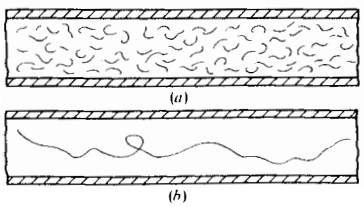


FIG. 8-8. El *flujo turbulento* es un movimiento desordenado: (*a*) segmentos de trayectorias de diversas partículas en un mismo espacio de tiempo; (*b*) trayectoria de una sola partícula.

La Fig. 8-8 *a* y *b* es una representación del régimen turbulento, la Fig. 8-8 *a* representa pequeños trozos de trayectoria de muchas partículas correspondientes a un mismo espacio breve de tiempo, y la Fig. 8-8 *b* representa la trayectoria de una sola partícula durante un periodo más largo de tiempo. Como se ve la velocidad fluctúa continuamente en cada punto. La velocidad en cada punto tiene tres componentes v_x v_y v_z que hoy día con instrumentación delicada es posible registrar en función del tiempo. Uno de estos *taquigramas* es el representado en la Fig. 8-9. $\bar{v}_x$ es la velocidad cuadrática media de la componente v_x en el intervalo de tiempo del taquigrama.

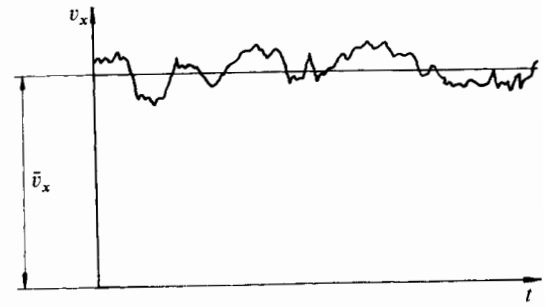


FIG. 8-9. Componente v_x de la velocidad de una partícula en función del tiempo en *movimiento turbulento*. $\bar{v}_x$ representa la velocidad media según el eje x en un cierto intervalo de tiempo.

No es menester que haya remolinos observables macroscópicamente para que se dé movimiento turbulento. Macroscópicamente el movimiento puede ser suave y uniforme.

Es evidente que la disipación de energía es mucho más intensa en el movimiento turbulento que en el movimiento laminar. Existirá también un esfuerzo cortante, que no vendrá ya regido por la ley de Newton [Ec. (2-8)] propia del régimen laminar. No obstante, definiendo un esfuerzo cortante medio, debido a la turbulencia, se enuncia la ley siguiente análoga a la Ec. (2-8) y propia del régimen turbulento:

$$\bar{\tau} = \eta_r \frac{d\bar{v}}{dy} \tag{8-4}$$

donde $\bar{\tau}$ — esfuerzo cortante medio
η_r — *viscosidad* llamada *de «remolino»* (análoga a la viscosidad «molecular» η)
$\bar{v}$ — valor medio temporal de la velocidad en un punto cualquiera.

La *distribución de velocidades en régimen laminar* en una tubería de sección

circular es *parabólica* y se representa en la Fig. 8-10. La ecuación de esta parábola es la Ec. (9-10), que se deducirá en la Sec. 9.4.1.

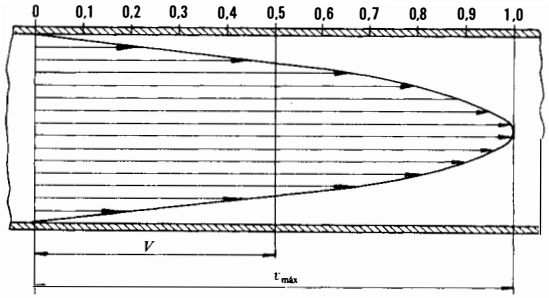


FIG. 8-10. Distribución parabólica de velocidades en *régimen laminar*. La ecuación de la parábola es la Ec. (9-10), que se deduce más adelante. $\bar{v}$ es la velocidad media $= \frac{v_{máx}}{2}$ [Ec. (9-15)].

La *distribución de velocidades en régimen turbulento* en una tubería de sección circular es *logarítmica* y se representa en la Fig. 8-11, en la curva de la derecha. Como se ve la velocidad en toda la sección transversal es mucho más uniforme que en el régimen laminar (Fig. 8-10). Sin embargo, las velocidades que en la curva de la derecha de la Fig. 8-11 se representan son las velocidades medias temporales, $\bar{v}$. En la curva de la izquierda de la Fig. 8-11 se representa la distribución de velocidades *en un instante determinado*, que es totalmente irregular como corresponde al régimen turbulento.

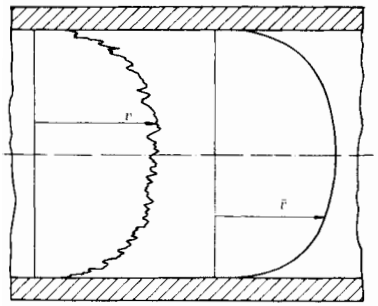


FIG. 8-11. Distribución de velocidades en *régimen turbulento*. Curva de la izquierda: distribución instantánea; curva de la derecha: distribución media temporal. Esta última es una curva logarítmica.

Una aplicación interesante de estos dos regímenes de corriente es el *amplificador de modo de flujo* de la Fig. 8-12 utilizado en la *Fluídica*. El nombre se debe a su principio de funcionamiento que es precisamente el tránsito de régimen laminar a turbulento en determinadas condiciones. Cuando la velocidad del chorro que sale de la tobera está por debajo del valor del dintel requerido para flujo laminar (Fig. 8-12 *a*, véase además Sec. 8.7) tiene lugar una corriente laminar entre la tobera y el receptor. Si la velocidad es demasiado elevada o si se introduce (véase Fig. 8-12 *b*) una perturbación (esto último es precisamente lo que sucede en el amplificador que describimos en que el *chorro de control* perturba el fluido principal) se verificará el tránsito de corriente laminar a turbulenta.

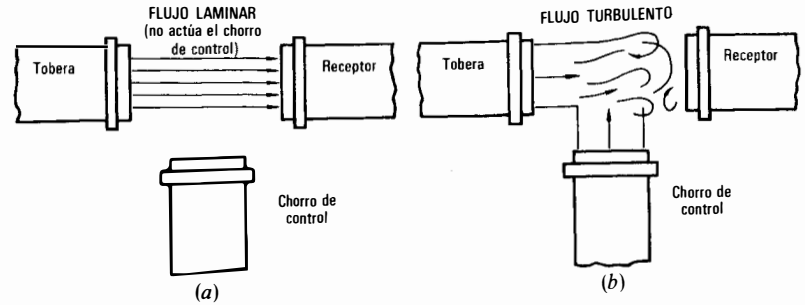


FIG. 8-12. El *amplificador de modo de flujo* utilizado en fluídica se basa en el tránsito de régimen laminar a turbulento.

8.5. CAPA LIMITE LAMINAR Y TURBULENTA

La Fig. 8-13 representa una placa fija con borde de ataque afilado sumergida en una corriente uniforme en el infinito, cuya velocidad en el infinito es v_∞ constante y paralela a la placa. El fluido en contacto con la placa por adherencia queda fijo, y las capas sucesivas sufren un frenado. A medida que la corriente avanza por la placa , más capas de fluido quedan afectadas por este frenado.

El espesor δ de la capa límite dibujado en la figura (véase en ella la curva «*frontera de la capa límite*») suele definirse convencionalmente como la distancia desde la superficie al punto en que su velocidad difiere de la velocidad correspondiente al fluido ideal en un 1 por 100. La figura indica dónde tiene lugar la transición, es decir, donde el flujo laminar se empieza a hacer inestable y comienza a desarrollarse la turbulencia en el interior de la capa límite. La figura indica también dónde la capa límite se hace francamente turbulenta, aumentando más y más corriente abajo el espesor de la misma.

Las conclusiones de este estudio son universales y su importancia estriba en que, como ya hemos dicho, en esta capa límite tienen lugar exclusivamente los fenómenos de la viscosidad en los fluidos poco viscosos (aire y agua).

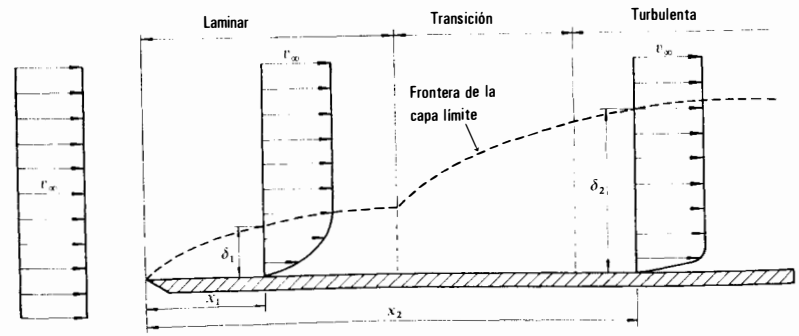


FIG. 8-13. Espesor creciente δ de la *capa límite* alrededor de una placa plana de borde de ataque afilado sumergida en una corriente uniforme en el infinito. A la distancia x_1, por ejemplo, la corriente es laminar y a la distancia x_2, turbulenta.

8.6. EL NUMERO DE REYNOLDS PARAMETRO ADIMENSIONAL DE RESISTENCIA

Vimos en la Sec. 7.6, que el número de Reynolds era el parámetro adimensional de la semejanza en los problemas con predominio de la viscosidad. Vimos también que el número de Reynolds, cociente de una fuerza de inercia por una fuerza de viscosidad mide el influjo relativo de esta última: un número de Reynolds grande implica un influjo de la viscosidad pequeño y viceversa. Jugando en los fenómenos de resistencia un papel decisivo el que la corriente sea laminar o turbulenta, también jugará un papel decisivo en ello el número de Reynolds. Con números de Reynolds pequeños la corriente es laminar; con números de Reynolds grandes la corriente es turbulenta.

En el ejemplo de la placa estudiado en la Sec. 8.5 el tránsito de régimen laminar a turbulento, fenómeno que depende de la viscosidad y que influye grandemente en la resistencia de la placa, se verifica también para un número de Reynolds determinado. En este caso el número de Reynolds se definiría así:

$$\mathrm{Re} = \frac{v_\infty x}{\nu} \tag{8-5}$$

donde x — distancia desde el borde de ataque de la placa
v_∞ — velocidad de la corriente imperturbada, o velocidad en el infinito.

También será función del número de Reynolds el espesor δ de la capa límite, es decir, expresando este espesor en forma adimensional, δ/x se tendrá

$$\delta/x = f(\mathrm{Re}) \tag{8-6}$$

Este influjo decisivo del número de Reynolds, que predice el análisis dimensional, lo veremos confirmado en la deducción de la ecuación de Poiseuille [Ec. (9-16)] que nos conducirá a la Ec. (9-18), a saber

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

válida, como veremos, solamente para régimen laminar, que expresa que el coeficiente λ de pérdida de carga en una tubería es función del número de Reynolds. (Para los límites de la validad de esta ecuación, véase la Sec. 9.4.1.)

8.7. NUMERO CRITICO DE REYNOLDS

Reynolds, físico inglés de finales del siglo pasado, llevó a cabo una serie de experimentos con el sencillo aparato que se esquematiza en la Fig. 8-14. Un tubo de cristal con su boca abocinada termina en una válvula. En el tubo entra agua desde un recipiente en reposo a una velocidad controlada por dicha válvula. El pequeño depósito contiene un colorante fuerte, por ejemplo anilina,

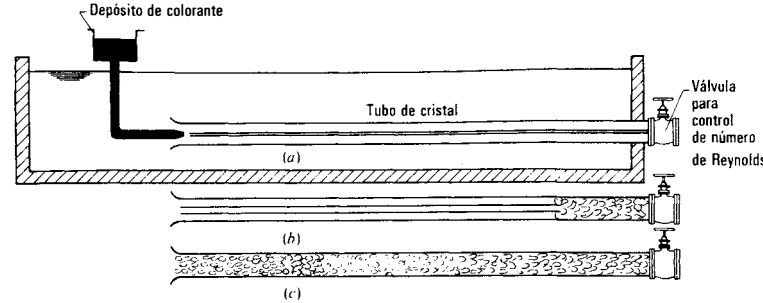


FIG. 8-14. *Experimento de Reynolds:* el colorante en (*a*) no se mezcla con el agua, porque el régimen es laminar y sólo se colorea en el eje del tubo un filamento de corriente; en (*b*) la turbulencia incipiente colorea parcialmente el tubo aguas arriba de la válvula; en (*c*) la corriente es declaradamente turbulenta y el colorante colorea todo el tubo de cristal.

que se inyecta a la entrada del tubo de vidrio por un tubito terminado en una boquilla. El número de Reynolds en la corriente del tubo de vidrio

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu} \tag{8-7}$$

donde D — diámetro de la tubería, que en este caso permanece constante
ν — viscosidad cinemática del agua, también constante

aumenta de una manera continua al abrir la válvula; en efecto, al abrir entonces aumenta el caudal y con él aumenta v, y por tanto el número de Reynolds.

Se abre poco a poco la válvula y se observa la corriente:

— al principio el hilo de corriente visible por el colorante es prácticamente una línea recta: *corriente laminar* (Fig. 8-14 *a*);
— luego, con la válvula suficientemente abierta se empiezan a formar remolinos aguas abajo junto a la válvula, mezclándose allí el colorante con el agua: *comienzo de turbulencia* (Fig. 8-14 *b*);
— finalmente los remolinos se propagan por todo el tubo, intensificándose la mezcla del colorante y quedando todo el tubo coloreado: *corriente turbulenta* (Fig. 8-14 *c*).

Reynolds observó:

— cuando el número de Reynolds, Re > 12.000 la corriente era necesariamente turbulenta: 12.000 sería el *número crítico de Reynolds superior;* pero tomando precauciones delicadas de laboratorio (eliminación de transmisibilidad de vibraciones al aparato) posteriormente se ha conseguido corriente laminar con número Re = 40.000. No es posible probar la imposibilidad de conseguir corriente laminar con números de Reynolds aún más elevados. *El número crítico de Reynolds superior es, pues, indeterminado.*

— cuando el número de Reynolds Re $\leq$ 2.000 la corriente era necesariamente laminar. Es decir, si se producía alguna perturbación la turbulencia inicial quedaba en seguida amortiguada por la viscosidad y no se desarrollaba jamás un flujo turbulento: Re = 2.000 es el *número crítico inferior de Reynolds*. En la práctica siempre existen perturbaciones que hacen que por encima de este número la corriente difícilmente es ya totalmente laminar.

El experimento se puede repetir con otros fluidos: aceite, alcohol, etc. (ν variable) y con diversos diámetros de tubería (D variable): Reynolds experimentó con tuberías de diversos diámetros. Todo lo cual demuestra que no es un cierto valor de la viscosidad ν o de la velocidad v lo que condiciona el tránsito de régimen laminar a turbulento, sino un cierto valor de la relación vD/ν = Re.

Para un determinado diámetro de tubería la velocidad que hace crítico el número de Reynolds se llama *velocidad crítica*. En los conductos de agua industriales la velocidad media es superior a la velocidad crítica y el régimen de corriente suele ser siempre turbulento. Este régimen se presenta en la técnica con mucha más frecuencia que el régimen laminar. Este último se produce, por ejemplo, en las tuberías de engrase a presión.

Es lógico que en la capa límite turbulenta se forme una subcapa laminar porque la velocidad del fluido en contacto con el contorno es 0 (véase pág. 187), y por tanto el número de Reynolds crece desde 0 formando dicha subcapa laminar, allí donde Re es todavía suficientemente pequeño.

8.8. DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE: RESISTENCIA DE FORMA

La noción de *capa límite*, expuesta en la Sec. 8.3, condujo al concepto de *resistencia de superficie*. El fenómeno de *desprendimiento de la capa límite* que expondremos a continuación conducirá al concepto de *resistencia de forma*.

En la Fig. 8-13 se ve que el espesor de la capa límite aumenta (véase en la figura «frontera de la capa límite») con la distancia a partir del borde de ataque de la *placa*, lo que se explica por la deceleración que sufre el fluido a causa del esfuerzo cortante (viscosidad).

Si tenemos un conducto de sección variable como el de la figura del problema 5-12, y hacemos que el flujo vaya de izquierda a derecha, con lo que se trataría de un *conducto convergente*, la aceleración del flujo compensa la deceleración que sufre por el esfuerzo cortante, y se opone al aumento de espesor de la capa límite.

Si, por el contrario, hacemos que el flujo vaya de derecha a izquierda, con lo que se trataría de un *conducto divergente*, la presión aumenta en la dirección de la corriente y el gradiente de presiones se opone al movimiento y tiende a retardar el flujo, con lo que se suma este efecto con el efecto decelerador producido por el esfuerzo cortante. Entonces la capa límite *se separa* del contorno.

La explicación de este fenómeno, que se conoce con el nombre de *desprendimiento de la capa límite* o simplemente *desprendimiento*, se hace en la Fig. 8-15. El flujo en las proximidades del contorno se va continuamente decelerando a causa de la viscosidad hasta que en el punto A la velocidad sería cero. La forma

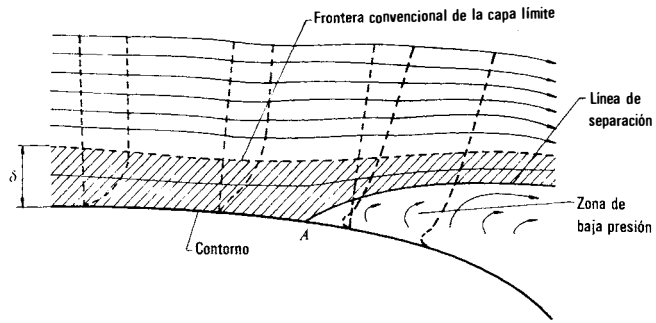


FIG. 8-15. *Separación de la capa límite.*

del contorno exigiría aún una disminución mayor de la velocidad, porque allí el contorno diverge; pero como esto es imposible el flujo se separa del contorno al mismo tiempo que se produce un contraflujo producido por el gradiente de presiones adverso. Aguas abajo de la línea de desprendimiento se crea una zona de baja presión.

Aguas arriba la presión será más alta que aguas abajo. El cuerpo sumergido en el fluido experimentará una fuerza F_p debida a este gradiente de presiones dirigida de izquierda a derecha.

En la Fig. 8-15 el cuerpo (contorno) está fijo, y el fluido se mueve de izquierda a derecha. Si ahora el fluido queda fijo y el cuerpo se mueve de derecha a izquierda la fuerza F_p se opondrá al movimiento, será una resistencia, que se denomina *resistencia de forma*, por depender de la forma del cuerpo.

> *Resistencia de forma es la producida por un gradiente de presiones adverso que se origina al desprenderse la capa límite y que depende en gran manera de la forma del contorno.*

Por tanto, la *resistencia de superficie* está causada directamente por la viscosidad; la *resistencia de forma* directamente por el gradiente de presiones; pero indirectamente por la viscosidad, que junto con la forma adversa del contorno producen el desprendimiento de la capa límite.

Estos dos tipos de resistencia se presentan continuamente en la técnica, como se verá en los problemas de *resistencia de superficie* que se estudian en los Caps. 9, 10 y en los de *resistencia de forma* que se estudian en el Cap. 11. Con frecuencia los dos tipos de rozamiento se presentan simultáneamente, como se verá en los Caps. 12, 13 y 14. El proyectista de una máquina hidráulica sabe que si aumenta la longitud de los álabes del rodete de una turbina, por ejemplo, aumenta la superficie mojada, y con ello aumenta el *rozamiento de superficie* y disminuye el rendimiento hidráulico η_h. Si por el contrario se acortan excesivamente los álabes, el agua al no ser bien guiada se *desprende* de las paredes, y aumenta el *rozamiento* de forma y vuelve a disminuir η_h. El proyectista seleccionará aquella forma de los álabes en que la suma de ambos rozamientos sea mínima.

8.9. RESISTENCIA DE FORMA: CONTORNOS ROMOS Y CONTORNOS BIEN FUSELADOS

He aquí algunos ejemplos:

1 — El *contorno bien fuselado* de la Fig. 8-16 *a*, en que se han dibujado también las líneas de corriente correspondientes al *fluido ideal*, evita en el *fluido real* (Fig. 8-16 *b*) el fenómeno de desprendimiento, y por tanto la *resistencia de forma*, reduciéndose la resistencia a la *resistencia de superficie* en la *capa límite*.

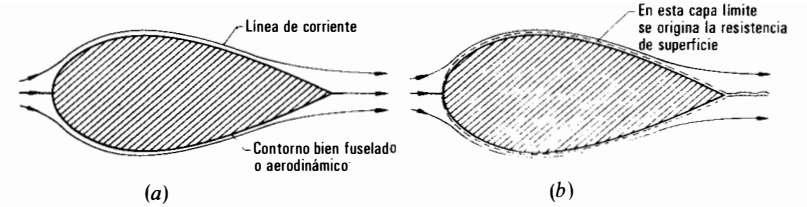


FIG. 8-16. En este *contorno simétrico bien fuselado* la resistencia es nula en el fluido ideal (*a*); y queda circunscrita a la resistencia en la capa límite en el fluido viscoso (*b*).

2 — La Fig. 8-17 representa un fluido en movimiento sobre un contorno angular *(forma roma)*. La Fig. 8-17 *a* corresponde al fluido ideal y la Fig. 8-17 *b*, al fluido real. En el punto *A* la velocidad se haría teóricamente infinita; como esto es físicamente imposible, en el fluido real (Fig. 8-17 *b*) la corriente se desprende. Ni la capa límite ni el desprendimiento, por tanto, existen en el fluido ideal (Fig. 8-17 *a*). En el punto *A* de la Fig. 8-15 se iniciaba un *desprendimiento* porque físicamente es imposible que la velocidad en valor absoluto sea menor que cero. Aquí se inicia el *desprendimiento*, porque la velocidad físicamente tampoco puede ser infinita.

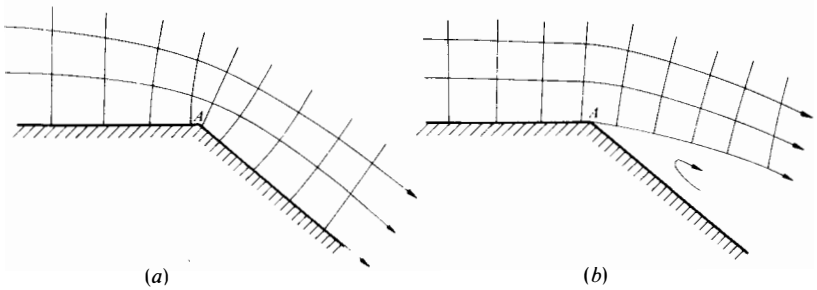


FIG. 8-17. En un *contorno angular* el fluido ideal sigue perfectamente la forma del contorno (*a*); mientras que el fluido real se desprende del mismo (*b*).

3 — La placa plana colocada transversalmente —no paralelamente como en la Fig. 8-13— a las líneas de corriente de la Fig. 8-18 es una forma aerodinámicamente *roma*. Las líneas de corriente del fluido real aguas abajo no pueden seguir al contorno: la capa límite se desprende. Se crea una gran *resistencia de forma* (Fig. 8-18 *b*). La Fig. 8-18 *a* muestra la *configuración de corriente* del fluido ideal.

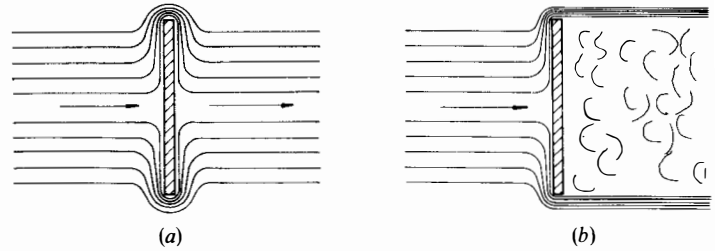


FIG. 8-18. La *placa plana normal a la corriente* es una forma aerodinámicamente *roma*. En el fluido real la configuración de la corriente es simétrica (*a*). La disimetría que se produce por *el desprendimiento* en el fluido real (*b*) produce una *resistencia de forma*.

4 — En la Fig. 8-3 *a* el fluido es ideal, no hay *desprendimiento* de la corriente: *resistencia de forma* nula, no hay tampoco *resistencia de superficie* (viscosidad nula): la resistencia total es nula (paradoja de d'Alembert, Sec. 8.2). En la Fig. 8-3 *c* tiene lugar el *desprendimiento de la corriente* del fluido real: *resistencia de forma* grande. Un cilindro es una forma muy poco aerodinámica, o sea una forma *roma*. (La Fig. 8-3 *b* representa en detalle «*microscópico*» la distribución de velocidades en el punto *A*.)

5 — Todos los cuerpos de la Fig. 8-19 tienen igual resistencia, supuesto que el flujo vaya de izquierda a derecha. En particular el diminuto disco circular rayado, que se supone colocado normalmente a la corriente, tiene igual resistencia que el cuerpo aerodinámico dibujado en la parte superior de la

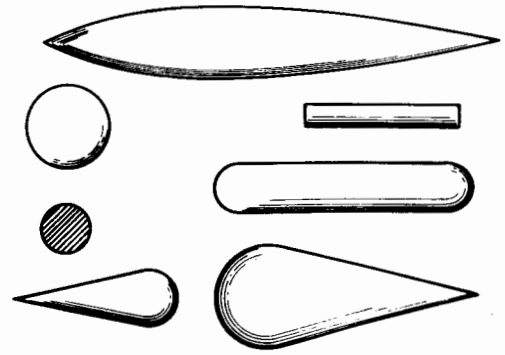


FIG. 8-19. Si el flujo va de izquierda a derecha o los cuerpos se mueven de derecha a izquierda, todos los cuerpos representados en esta figura a escala experimentan la misma resistencia, a pesar de su distinto tamaño.

figura, porque en este último se ha evitado con su forma *bien fuselada* la enorme *resistencia de forma* que ofrece el disco circular con su forma *roma.*

6 — En el Venturi mal proyectado de la Fig. 8-20 *a*, la *separación* de la corriente en el conducto divergente produce los remolinos que allí se representan y una pérdida de energía debida a la *resistencia de forma* no pequeña. En el Venturi bien proyectado de la Fig. 8-20 *b*, la resistencia de forma debida a los *desprendimientos* en la zona divergente han desaparecido. La resistencia total debida únicamente a la *resistencia de superficie* es muy pequeña. El Venturi se puede instalar permanentemente en una conducción para el registro continuo de caudales con gasto prácticamente nulo (véase pág. 144).

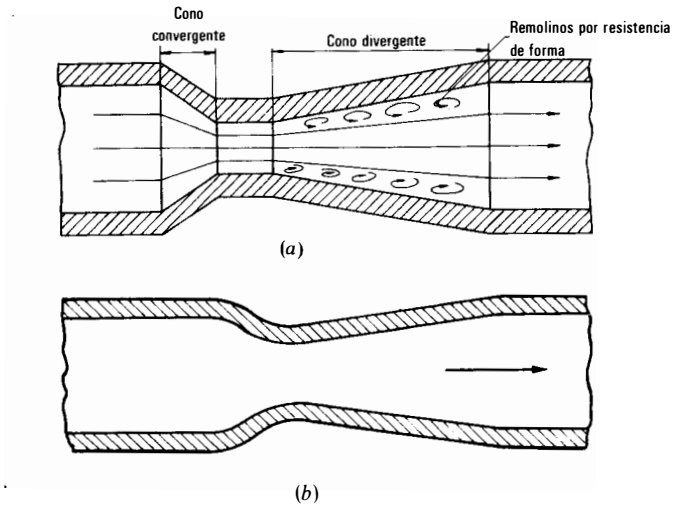


FIG. 8-20. El Venturi con aristas interiores vivas (*a*) produce el desprendimiento de la corriente, aguas abajo de la garganta y remolinos, que desaparecen en un Venturi bien proyectado (*b*).

7 — La Fig. 8-21 es una foto de la corriente en un conducto divergente: el flujo es de izquierda a derecha. Pasada la garganta el flujo sigue en forma de chorro, no se adapta a las paredes, se ha desprendido la capa límite, produciéndose los remolinos que quedan fotografiados en la parte inferior de la figura.

8 — Mientras el autor trabajaba en St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Minnesota, U.S.A., se realizaban unos ensayos a escala 1/1 en el canal grande del laboratorio para el estudio de la junta más económica de unos colectores de hormigón para saneamiento de carreteras: una junta muy elaborada evitaría totalmente los *desprendimientos* pero sería excesivamente costosa; una junta mala sería muy económica, pero produciría desprendimientos de la corriente; el efecto del desprendimiento sería una disminución de la capacidad de evacuación del colector; entonces para evacuar el mismo caudal el colector tendría que ser más grande y más costoso. Se investigaba experimentalmente un compromiso entre los dos extremos.

FIG. 8-21. Flujo en una *transición divergente* según Prandtl. El flujo es de izquierda a derecha. La corriente se desprende del contorno. El desprendimiento provoca los torbellinos visibles en la fotografía y la pérdida de energía de la corriente aumenta considerablemente. *(Por cortesía de UNITED ENGINEERING TRUSTEES, INC.)*

Conclusión

El fenómeno del desprendimiento de la capa límite explica el por qué en Hidráulica es más difícil proyectar un tubo divergente o difusor que un tubo convergente o tobera. Así, por ejemplo:

— Es más difícil alcanzar un buen rendimiento en el *tubo de aspiración* de una turbina (véase Fig. 22-7) que en el distribuidor o inyector de una turbina Pelton (véase Fig. 22-2).
— Es más difícil proyectar los álabes *divergentes* del rodete de una bomba (véase Fig. 19-16) que los álabes convergentes de una turbina (véase Fig. 22-9).

Las máquinas generadoras (bombas, ventiladores, compresores) tienen en igualdad de condiciones peor rendimiento que las máquinas motoras (turbinas hidráulicas, turbinas de vapor, turbinas de gas). En efecto, en las máquinas generadoras, por ejemplo en una bomba, el flujo, tanto en los álabes móviles como en los fijos (véase Fig. 19-1) es *antinatural:* la presión aumenta en el sentido del flujo: tiende a producirse el desprendimiento de la capa límite con las contracorrientes y remolinos consiguientes, con lo que la pérdida de energía aumenta y baja el rendimiento. En cambio en las turbinas el flujo en los álabes del distribuidor y en los álabes del rodete (véase Fig. 22-8) es convergente y por tanto *natural:* la presión disminuye en el sentido de la corriente y no tienden a producirse contraflujos y desprendimientos de la capa límite, con lo que la pérdida de energía es menor y el rendimiento es mayor que en las máquinas generadoras de la misma potencia.

Otras veces el desprendimiento se provoca para aumentar la resistencia, como en los *laberintos* que estrangulan el flujo y reducen las pérdidas de caudal con lo que el rendimiento volumétrico aumenta (véase Sec. 19.11.1.2 y Fig. 19-22).

8.10. LA ENERGIA PERDIDA POR LA RESISTENCIA SE TRANSFORMA EN ENERGIA TERMICA

La energía consumida en vencer la resistencia hidráulica causada por la viscosidad del fluido real, la energía equivalente a la pérdida de altura, H_r, que

aparece en la ecuación de Bernoulli en la forma [Ec. (5-37)], el arrastre que experimenta un avión, las pérdidas hidráulicas que tienen lugar en las bombas y turbinas hidráulicas (véanse Secs. 19.11.1.1 y 22.9) y que disminuyen el rendimiento hidráulico de las máquinas hidráulicas, en realidad no son pérdidas según el primer principio de la Termodinámica o *principio de la conservación de la energía* [Ec. (5-32)], sino energía que, si el sistema está aislado térmicamente del exterior o calorifugado (adiabático), se invierte bien en incremento de *energía interna*, con el consiguiente aumento de temperatura del fluido, bien en $\Delta(pv)$ con el consiguiente aumento del *volumen específico*, v; si el sistema no es adiabático la energía de fricción se transforma en calor que se disipa al exterior. En hidráulica estas energías representadas por el calor, Q, energía interna Δu, etc., no pueden aprovecharse y constituyen una *pérdida de energía*.

La elevación de temperatura que se produce por efecto de estas pérdidas hidráulicas es muy pequeña. Así toda la energía hidráulica del agua que sale por el aliviadero de presa de la central de San Esteban y es destruida al pie de la presa por los llamados destructores de energía no elevarían excesivamente la temperatura del agua. En efecto: suponiendo la altura de la presa 115 m, lo que equivale a una energía de $115 \cdot 9{,}81 = 1.128$ J $= 1{,}128$ kJ por cada kg de agua vertido por la presa, y siendo el calor específico del agua $c = 4{,}19 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ se tendrá

$$\Delta t = \frac{1{,}128}{4{,}19} = 0{,}269 \text{ K}$$

La elevación de la temperatura será de 0,269° C. La elevación final de la temperatura no será muy grande a causa de la radiación de calor a la atmósfera.

9. *Resistencia de Superficie: Pérdidas primarias en conductos cerrados o tuberías*

9.1. INTRODUCCION

Los conductos que se utilizan para transportar fluidos son de dos clases:

— *conductos cerrados* o tuberías en los cuales el fluido se encuentra bajo presión o depresión;
— *conductos abiertos* o canales (acueductos, canales de riego, ríos, etc.).

El cálculo de la resistencia o *pérdida de carga* en las dos clases de conductos presenta problemas análogos; pero la pérdida de carga en canales, por el hecho de presentar éstos una superficie libre y formas comúnmente más irregulares, la estudiaremos especialmente en el capítulo siguiente.

El cálculo de pérdidas de carga en las tuberías que se estudia en este capítulo y en los Caps. 11 y 12 pertenece a la práctica diaria del ingeniero instalador y proyectista, en los sistemas de flujo de gasolina, gas-oil, fuel, aceites lubricantes, etc.; en los sistemas de refrigeración y aire acondicionado, redes de suministro de agua, etc.; en los sistemas de aspiración e impulsión de las bombas, etc.

9.2. PERDIDAS PRIMARIAS Y SECUNDARIAS EN LAS TUBERIAS

Las pérdidas de carga en las tuberías son de dos clases: primarias y secundarias.

Las *pérdidas primarias* son las *pérdidas de superficie* en el contacto del fluido con la tubería (capa límite), rozamiento de unas capas de fluido con otras (régimen laminar) o de las partículas de fluido entre sí (régimen turbulento). Tienen lugar en flujo uniforme, por tanto principalmente en los tramos de tubería de sección constante.

Las *pérdidas secundarias* son las *pérdidas de forma*, que tienen lugar en las transiciones (estrechamientos o expansiones de la corriente), codos, válvulas, y en toda clase de *accesorios de tubería*.

En este capítulo se estudian las pérdidas primarias. En el Cap. 11 se estudian las pérdidas secundarias. Si la conducción es larga (oleoductos, gasoductos...) las pérdidas secundarias tienen poca importancia (de ahí el nombre de pérdidas secundarias), pudiendo a veces despreciarse; o bien se tienen en cuenta al final,

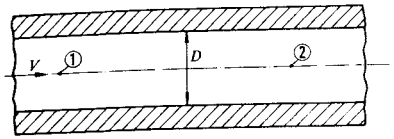


FIG. 9-1. En una corriente real en tubería horizontal de diámetro constante D, la presión en 2 es menor que la presión en 1.

sumando un 5 al 10 por 100 de las pérdidas principales halladas. Si la conducción es corta y complicada (flujo de gasolina y de aire en un carburador, por ejemplo) las pérdidas secundarias pueden jugar un papel preponderante, y pueden incluso llegar a ser despreciables en comparación con ellas las pérdidas primarias.

Pérdidas primarias

Supongamos una tubería horizontal de diámetro constante D (Fig. 9-1) por la que circula un fluido cualquiera, cuya velocidad media en la tubería es v. La energía en el punto (sección) 2 será igual a la energía en el punto 1 menos la energía perdida (pérdida de carga) entre los puntos 1 y 2, es decir, se cumple la ecuación de Bernoulli con pérdidas, que expresada en alturas equivalentes será [Ec. (5-37)]:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - H_{r1-2} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \qquad (9\text{-}1)$$

En el caso particular del ejemplo:

$z_1 = z_2$ (tubería horizontal) y $v_1 = v_2$ (sección transversal constante). Luego

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H_{r1-2} = H_{rp1-2} \qquad (9\text{-}2)$$

donde H_{rp1-2} — pérdidas primarias entre 1 y 2.

Pérdidas primarias y secundarias

Consideremos el esquema de conducción representado en la Fig. 9-2. Los tramos *a-b*, *d-e*, *f-g*, *h-i*, *j-k* y *l-m* (la figura no está a escala y estos tramos son más largos en la realidad que en el esquema) son tramos rectos de tubería de sección constante. En todos ellos se originan *pérdidas primarias*. En los restantes tramos se originan pérdidas secundarias: así F es un filtro, F-*a* desagüe de un depósito, *b-c* un codo, *c-d* un ensanchamiento brusco, *e-f* un codo, *g-h* un ensanchamiento brusco, *i-j* un estrechamiento brusco, *k-l* un medidor de caudal y *m-n* desagüe en un depósito.

La ecuación de Bernoulli escrita entre el punto 1 y 2 es la misma Ec. (9-1); pero el término H_{r1-2} engloba ahora las pérdidas primarias y secundarias.

En el caso particular del ejemplo:

$p_1 = p_2 = 0$ (presión atmosférica)
$v_1 = v_2 = 0$ (depósitos grandes, velocidad de descenso del agua en 1 y de ascenso en 2 despreciables).

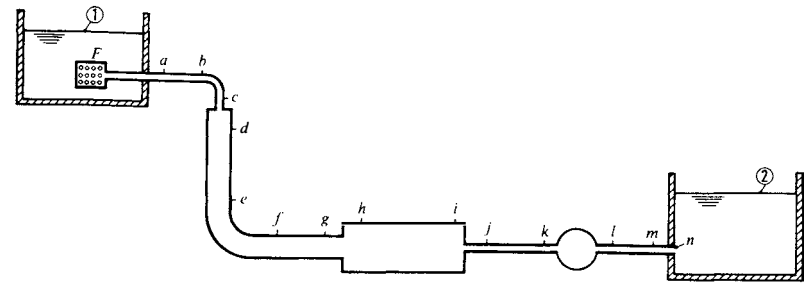


FIG. 9-2. En la conducción que une los recipientes 1 y 2 hay *pérdidas primarias* en los tramos rectos *a-b*, *d-e*, etc., y *pérdidas secundarias* en las transiciones y accesorios: ensanchamientos bruscos, codos, etc... La escala longitudinal se ha acortado mucho por conveniencia.

Luego

$$z_1 - z_2 = H_{r1-2} \qquad (9\text{-}3)$$

El término H_{r1-2} de la Ec. (9-3) se puede descomponer así:

$$H_{r1-2} = H_{rp1-2} + H_{rs1-2}$$

donde H_{rp1-2} — Suma de pérdidas primarias entre 1 y 2
H_{rs1-2} — Suma de pérdidas secundarias entre 1 y 2.

El término H_{r1-2} de la Ec. (9-1) se conoce con el nombre de *pérdida de carga*, y es precisamente el objeto de nuestro estudio en estos capítulos.

Pérdida de carga en régimen laminar y turbulento

En el cálculo de las pérdidas de carga en tuberías juegan un papel discriminante dos factores: el que la tubería sea lisa o rugosa y el que el régimen de corriente sea laminar o turbulento.

Consideremos con más detención el influjo del segundo factor. Supongamos una tubería de sección constante y veamos qué sucede cuando aumenta el caudal y por tanto la velocidad del fluido.

En la Fig. 9-3 se representa en papel doblemente logarítmico la pérdida de altura por unidad de longitud de la tubería como ordenada y la velocidad como abscisa. Si la velocidad del fluido en la tubería es pequeña, como en el punto A, el régimen es *laminar*. Entonces, como se ve en la figura, la pérdida de carga es proporcional a la primera potencia de la velocidad. En el punto B el régimen pasa de laminar a turbulento (zona de transición), pudiendo variar el punto de transición, por ejemplo, B' en vez de B. En el punto C el régimen es ya francamente *turbulento*. Como se ve en régimen turbulento la pérdida de carga es mucho mayor, siendo ésta proporcional a la segunda potencia de la velocidad. Advirtamos una vez más que en realidad no es la velocidad la que condiciona este fenómeno, sino como siempre el número de Reynolds.

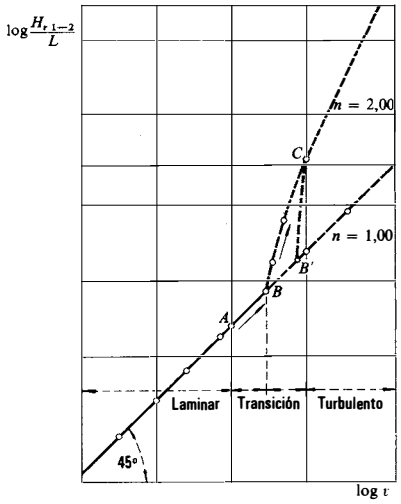


FIG. 9-3. En régimen laminar, la pérdida de carga es proporcional a la primera potencia de la velocidad; en régimen declaradamente turbulento, a la segunda potencia, y en régimen de transición, a una potencia de la velocidad comprendida entre 1 y 2.

9.3. ECUACION GENERAL DE LAS PERDIDAS PRIMARIAS: ECUACION DE DARCY-WEISBACH

Los manuales de hidráulica están llenos de tablas, curvas, ábacos y nomogramas para el cálculo del término H_{rp1-2} en la Ec. (9-1), que es preciso utilizar con precaución. Hay tablas, por ejemplo, que solo sirven para las tuberías de fundición. En estas tablas no se menciona para nada la rugosidad porque es un factor constante en las tuberías de fundición; pero sería erróneo utilizar estas tablas, por ejemplo, para pérdida de carga en tuberías de uralita. Otras tablas se han construido para utilizarlas únicamente para el agua. En estas tablas no se menciona para nada la viscosidad porque es un factor constante en el flujo con agua; pero sería erróneo utilizar estas tablas cuando se trata de calcular la pérdida de carga en un conducto de lubricación.

Ya a fines del siglo pasado experimentos realizados con tuberías de agua de diámetro constante demostraron que la pérdida de carga era directamente proporcional al cuadrado de la velocidad media en la tubería y a la longitud de la tubería e inversamente proporcional al diámetro de la misma. La fórmula fundamental que expresa lo anterior es la:

ECUACION DE DARCY-WEISBACH

$$H_{rp} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \tag{9-4}$$

(Fórmula de Darcy-Weisbach, pérdidas primarias)

donde H_{rp} — pérdida de carga primaria
λ — coeficiente de pérdida de carga primaria
L — longitud de la tubería
D — diámetro de la tubería
v — velocidad media del fluido.

Esta fórmula es de uso universal en el mundo entero en los libros y formularios de hidráulica. Las tablas, curvas, ábacos y nomogramas a que aludíamos al comienzo de esta sección sirven solo para obtener el coeficiente λ, que llevado a la Ec. (9-4) nos da la *pérdida de carga primaria* H_{rp}.

Modernamente, a partir aproximadamente de 1940, se ha venido usando cada vez más un ábaco llamado diagrama de Moody (Sec. 9.5), que actualmente se ha difundido en el mundo entero.

El diagrama de Moody

— resuelve todos los problemas de pérdidas de carga primarias en tuberías con cualquier diámetro, cualquier material de tubería y cualquier caudal;
— puede emplearse con tuberías de sección no circular sustituyendo el diámetro D por el radio hidráulico R_h (véase Sec. 10.2);
— se usa para determinar el coeficiente λ, el cual luego se lleva a la ecuación de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)].

Por el contrario, las tablas, curvas, etc., de que están llenos los formularios de hidráulica:

— no suele ser de uso universal;
— sirven también para determinar el coeficiente λ de la ecuación de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)];
— con frecuencia no tienen en cuenta todas las variables de que en general depende el coeficiente λ;
— sin embargo, pueden ser de uso más cómodo que el diagrama de Moody en casos particulares.

El factor λ

El factor λ en la Ec. (9-4) es obviamente adimensional [L/D es adimensional y $v^2/2g$ tiene la misma dimensión que H_{rp}, o sea (L)]. El factor λ depende de la velocidad v, del diámetro de la tubería D, de la densidad ρ, de la viscosidad η y de la rugosidad k, la cual, como se explica en la Fig. 9-4, puede expresarse en unidades de longitud, m, *SI*. Dicha figura representa *macroscópicamente* la rugosidad de la tubería y con ello se explica el significado del parámetro k.

De lo dicho se deduce

$$\lambda = f(v, D, \rho, \eta, k) \tag{9-5}$$

Siendo λ adimensional la función f de la Ec. (9-5) deberá ser una función de variables adimensionales. En efecto, el análisis dimensional demuestra que

$$\lambda = f\left(\frac{v D \rho}{\eta}, \frac{k}{D}\right) \tag{9-6}$$

donde $vD\rho/\eta$ — número de Reynolds, Re
k/D — rugosidad relativa.

En el caso más general λ, coeficiente adimensional de pérdida de carga es función de dos variables adimensionales: el número de Reynolds y la rugosidad relativa.

Como veremos más adelante, si Re es muy pequeño *(régimen laminar)* λ es sólo función de Re [Ec. (9-18)]; mientras que si Re es muy grande (Sec. 9.4.4.) *(régimen declaradamente turbulento)* λ no depende ya de Re, sino solo de la rugosidad relativa $\frac{k}{D}$ y para una misma tubería, como k/D es constante, λ será también constante.

Escribamos la Ec. (9-4) en función del caudal $Q = \frac{\pi D^2}{4} v$

$$H_{rp} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} = 0{,}0828\, \lambda\, L \frac{Q^2}{D^5},\ SI \tag{9-7}$$

$$H_{rp} = 0{,}0828\, \lambda\, L \frac{Q^2}{D^5},\ SI$$

o sea

$$H_{rp} = CL \frac{Q^2}{D^5} \tag{9-8}$$
$$(\lambda = \text{cte.})$$

Por tanto, si λ = cte.:

— la pérdida de carga H_{rp} varía proporcionalmente a L, si Q y D permanecen constantes;
— la pérdida de carga H_{rp} es directamente proporcional a Q^2, si L y D permanecen constantes;
— la pérdida de carga H_{rp} es inversamente proporcional a D^5, si Q y L permanecen constantes;
— el caudal Q es inversamente proporcional a $\sqrt{L}$, si H_{rp} y D permanecen constantes;
— el caudal Q es directamente proporcional a $\sqrt{H_{rp}}$, si L y D permanecen constantes;
— el caudal Q es directamente proporcional a $D^{5/2}$, si L y H_{rp} permanecen constantes;
— el diámetro D es inversamente proporcional a $H_{rp}^{1/5}$, si L y Q permanecen constantes;
— el diámetro D es directamente proporcional a $L^{1/5}$, si H_{rp} y Q permanecen constantes;
— el diámetro D es directamente proporcional a $Q^{2/5}$, si H_{rp} y L permanecen constantes.

(Véase problema 9-1.)

9.4. CALCULO DEL COEFICIENTE DE PERDIDAS PRIMARIAS λ

Todos los casos, que pueden presentarse, pueden reducirse a estos cuatro:

— Régimen laminar:

a) Con tuberías lisas ($k/D \simeq 0$: tuberías de vidrio o de cobre, por ejemplo).
b) Con tuberías rugosas: tuberías de hierro, hormigón, etc.

— Régimen turbulento:

a) Con tuberías lisas.
b) Con tuberías rugosas.

El coeficiente λ

— En general $\lambda = f(\text{Re}, k/D)$.
— En régimen laminar $\lambda = f(\text{Re})$. λ no es función de la rugosidad (k/D).
— En régimen turbulento con número elevado de Reynolds $\lambda = f(k/D)$. λ no es función del número de Reynolds.

Estudiemos sucesivamente estos cuatro casos.

9.4.1. Cálculo de λ en régimen laminar (tuberías lisas y rugosas): fórmula de Poiseuille

El efecto de la rugosidad de la tubería, que se representa a escala macroscópica en la Fig. 9-4, es favorecer el *desprendimiento* (Sec. 8.8) y la turbulencia (Sec. 8.4): como si las rugosidades *microscópicamente* produjeran un efecto de rozamiento de forma (Sec. 8.8). Sin embargo, si el flujo es laminar la corriente es *relativamente* lenta, la viscosidad *relativamente* grande, y la corriente no es perturbada por las protuberancias del contorno; más aún, si se inicia una turbulencia la viscosidad la destruye. Por tanto:

En régimen laminar λ no es función de la rugosidad.

La fórmula que vamos a deducir vale, pues, para tuberías lisas y rugosas.

La Fig. 9-5 representa una tubería de radio R constante, y en ella dos secciones transversales 1 y 2 que distan entre sí una longitud L y que limitan el trozo de tubería $ABCD$. La tubería es horizontal. Consideremos el cilindro coaxial con el eje de la tubería $abcd$ de base ω y radio r. Sobre el cilindro $abcd$ actúa la fuerza T debida al esfuerzo cortante, que ejerce el resto del fluido en virtud de la viscosidad [Ec. (2-8)].

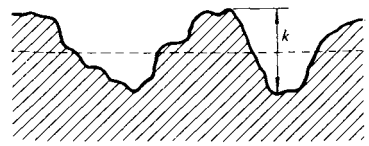


FIG. 9-4. Una *tubería rugosa* macroscópicamente presenta este aspecto. En la figura se ve que la rugosidad absoluta k tiene una dimensión lineal.

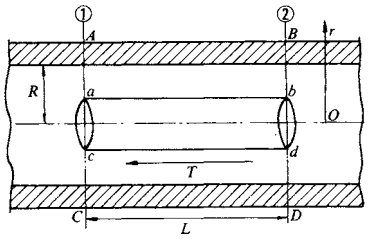


FIG. 9-5. Al *flujo laminar* de izquierda a derecha en una tubería circular se opone la fuerza T originada por el esfuerzo cortante. La integración de todas las fuerzas que actúan sobre el fluido comprendido entre las secciones 1 y 2 de la tubería conduce a la ecuación de Poiseuille [Ec. (9-16)].

Por la primera ley de Newton, que es aplicable como es sabido tanto a la estática como, en este caso, al movimiento uniforme de cada tubo concéntrico con la tubería (véase Fig. 8-7), tendremos:

$$p_1 \omega - p_2 \omega - T = 0$$

donde T — fuerza debida al esfuerzo cortante
$p_1\ p_2$ — presiones en el centro de gravedad del área transversal del tubo en las secciones 1 y 2.

Se tiene:

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 + 2\pi r L\eta \frac{dv}{dr} = 0$$

en virtud de la Ec. (2-8), y simplificando

$$\pi r^2 \Delta p = -2\pi r L\eta \frac{dv}{dr}$$

y

$$r\Delta p = -2L\eta \frac{dv}{dr}$$

y despejando dv:

$$dv = -\frac{\Delta p}{2L\eta} r\, dr$$

ecuación de variables separadas, que integrada nos da:

$$v = -\frac{\Delta p}{4L\eta} r^2 + C \tag{9-9}$$

La constante C se determina por las condiciones en los límites que son $v = 0$ para $r = R$ (véase pág. 22), y por tanto:

$$C = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2$$

Llevando este valor a la Ec. (9-9) se obtiene la fórmula que nos da la distribución de velocidades en la tubería:

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2) \tag{9-10}$$

ecuación en el plano de una parábola y en el espacio de un paraboloide de revolución. La velocidad máxima tiene lugar en el eje del paraboloide, que es el eje de la tubería:

$$v_{máx} = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2 \tag{9-11}$$

En la práctica es mucho más fácil medir la velocidad media, $\bar{v}$ que la velocidad máxima, $v_{máx.}$ Es conveniente, pues, expresar la Ec. (9-9) en función de la velocidad media $\bar{v}$. Así pues, por definición

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} \tag{9-12}$$

El caudal elemental a través del anillo circular comprendido entre dos circunferencias concéntricas con el eje de la tubería de radios r y $r + dr$ será

$$dQ = 2\pi r\, dr\, v = 2\pi r\, dr \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

Integrando esta ecuación entre los límites O y R se tendrá el caudal total:

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2)\, dr$$

$$= \frac{\pi \Delta p}{2L\eta} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr = \frac{\pi \Delta p}{2L\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

y

$$\boxed{Q = \frac{\Delta p\, \pi R^4}{8L\eta}} \tag{9-13}$$

Sustituyendo ahora en la Ec. (9-12) Q por el valor hallado en la Ec. (9-13), tendremos:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p \pi R^4}{8L\eta \pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8L\eta} \tag{9-14}$$

Comparando esta ecuación con la Ec. (9-11) se deduce que:

$$\boxed{\bar{v} = \frac{v_{máx}}{2}} \tag{9-15}$$

La velocidad media de la tubería es igual a la mitad de la velocidad máxima en el eje de la misma.

En la Ec. (9-14)

$$\bar{v} = \frac{\Delta p R^2}{8L\eta} = \frac{\Delta p D^2}{32L\eta}$$

despejando la pérdida de presión, Δp, se obtiene la

ECUACION DE POISEUILLE

$$\boxed{\Delta p = \frac{32\eta L\bar{v}}{D^2}} \qquad (9\text{-}16)$$

(Pérdida de presión, régimen laminar, tubería de sección constante)

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la Ec. (9-16) por $2\rho\bar{v}g$ tendremos:

$$\Delta p = \frac{32\eta L\bar{v}}{D^2} \cdot \frac{2\rho\bar{v}g}{2\rho\bar{v}g} = \frac{64\eta}{\bar{v}D\rho} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \cdot \rho g$$

pero $\frac{\Delta p}{\rho g} = H_{rp}$ es la pérdida de carga primaria, luego:

$$H_{rp} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \qquad (9\text{-}17)$$

donde $\mathrm{Re} = \frac{\bar{v}D\rho}{\eta}$ – número de Reynolds.

Tres notas importantes:

1.ª La ecuación de Poiseuille [Ec. (9-16)] demuestra que

La pérdida de carga en régimen laminar en tuberías tanto lisas como rugosas es directamente proporcional a la primera potencia de la velocidad.

2.ª En la deducción de la ecuación de Poiseuille (9-16) ó (9-17) hemos supuesto que el fluido se mueve ordenadamente en cilindros coaxiales concéntricos (véase Fig. 8-7), es decir, que el flujo es laminar. Por tanto la teoría predice y la experiencia confirma que la ecuación de Poiseuille

— para Re < 2.000 (número de Reynolds *crítico inferior)* siempre es válida;
— para Re > 2.000 solo es válida si el flujo sigue siendo laminar (el número de Reynolds *crítico superior* es indeterminado: véase pág. 195).

3.ª Comparando la Ec. (9-17) con la ecuación de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)] se deduce el valor de λ en la

ECUACION DE POISEUILLE (valor de λ)

$$\boxed{\lambda = 64/\mathrm{Re}} \qquad (9\text{-}18)$$

[*Coeficiente λ de la Ec. (9-4), flujo laminar, tuberías lisas y rugosas*]

(Véanse problemas 9-2 y 9-3.)

9.4.2. Cálculo de λ en régimen turbulento y tuberías lisas: para 2.000 < Re < 100.00: fórmula de Blasius

En esta sección y en la siguiente, 9.4.3, investigamos el valor de λ en *régimen turbulento* y *tuberías lisas*, para diferentes valores de Re. En esta sección hasta Re = 100.000 solamente.

Como las tuberías son lisas λ no es función de la rugosidad relativa, $\frac{k}{D}$, ya que ésta es nula ($k = 0$), o sea

$$\lambda = f(\mathrm{Re})$$

En este caso se aplica la

ECUACION DE BLASIUS

$$\boxed{\lambda = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}^{1/4}}} \qquad (9\text{-}19)$$

[*Coeficiente λ de la Ec. (9-4), flujo turbulento, tuberías lisas, Re < 100.000*]

Nota: El límite inferior de aplicabilidad de esta ecuación Re = 2.000 está indeterminado, ya que la aplicación de la Ec. (9-21) exige que Re < 100.000 y que el régimen sea turbulento (el número crítico superior de Reynolds es indeterminado).

9.4.3. Cálculo de λ en régimen turbulento y tuberías lisas: para Re > 100.000: fórmula primera de Kármán-Prandtl

Para *régimen turbulento y tuberías lisas también;* pero para Re > 100.000, con estudios teóricos, y ajustando los coeficientes experimentalmente, Kármán y Prandtl dedujeron la

PRIMERA ECUACION DE KÁRMÁN-PRANDTL

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log_{10}(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}) - 0{,}8} \qquad (9\text{-}20)$$

[*Coeficiente λ de la Ec. (9-4), flujo turbulento, tuberías lisas, Re > 100.000*]

9.4.4. Cálculo de λ en régimen turbulento y tuberías rugosas

En las tuberías rugosas

— *si el número de Reynolds es bajo* (Re < 2.000, o Re > 2.000, pero de manera que el flujo sea laminar (véase pág. 195) la rugosidad no influye en la pérdida de carga y

$$\lambda = f(\mathrm{Re}) \tag{9-21}$$

(Régimen laminar, Re pequeño, tuberías lisas y rugosas)

— Si el *número de Reynolds* es elevado por el contrario, λ deja de ser función de Re y se tiene

$$\lambda = f(k/D) \tag{9-22}$$

(Régimen turbulento, Re elevado, tubería rugosa)

— Si el *número de Reynolds tiene un valor intermedio* se tendrá en general

$$\lambda = f\left(\mathrm{Re}, \frac{k}{D}\right) \tag{9-23}$$

(Régimen turbulento, Re valor intermedio, tubería rugosa)

De este último caso nos vamos a ocupar en las dos secciones siguientes.

9.4.4.1. Tuberías de rugosidad artificial: Trabajos de Nikuradse

Nikuradse, ingeniero alemán, discípulo de Prandtl, experimentó con tuberías de *rugosidad artificial* obtenida con granitos de arena esféricos de diámetro k controlado exactamente con los que recubría interiormente la tubería. Como una protuberancia pequeña puede ser insignificante en una tubería grande la variable representativa del fenómeno no será k, la rugosidad absoluta, sino k/D, la rugosidad relativa. Los valores más corrientes de k/D oscilan entre 0,0333 y 0,000985 en las *tuberías comerciales* según la equivalencia de que hablaremos en la sección siguiente.

La *rugosidad natural* de las tuberías comerciales (hierro fundido, hormigón, etcétera) es naturalmente irregular. Sin embargo, la *rugosidad absoluta* de una tubería comercial se puede caracterizar también por un valor k que es igual al diámetro k de los granitos de arena de una tubería de rugosidad artificial que diera el mismo valor de λ para un número de Reynolds suficientemente elevado para que se cumpla la Ec. (9-25).

Los trabajos de Nikuradse sirvieron para deducir las ecuaciones que se aducen en la sección siguiente.

9.4.4.2. Tuberías comerciales o de rugosidad natural: Fórmula de Colebrook-White y fórmula segunda de Kármán-Prandtl

En las tuberías comerciales pueden ocurrir los tres casos expresados por las Ecs. (9-21), (9-22) y (9-23).

En la zona de transición [en que $\lambda = f(\mathrm{Re}\ \text{y}\ k/D)$], se cumple la

ECUACION DE COLEBROOK-WHITE

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{k/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{R\sqrt{\lambda}}\right) \tag{9-24}$$

[*Coeficiente λ de la Ec. (9-4), zona de transición $\lambda = f(Re, k/D)$*]

La Ec. (9-24) es la fórmula universal de pérdida de carga en los conductos industriales.

Los problemas prácticos con frecuencia se encuentran en esta zona de transición.

A números de Reynolds tanto más elevados cuanto la tubería es más rugosa se cumple la

SEGUNDA ECUACION DE KÁRMÁN-PRANDTL

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log_{10}\frac{D}{2k} + 1{,}74 \tag{9-25}$$

[*Coeficiente λ de la Ec. (9-4), flujo declaradamente turbulento, tuberías rugosas, para Re creciente al aumentar k/D*]

La Ec. (9-24) en que $\lambda = f(\mathrm{Re}, k/D)$ es asintótica tanto a la primera ecuación de Kármán-Prandtl [Ec. (9-20)], en que $\lambda = f(\mathrm{Re})$ como a la segunda [Ec. (9-25)], en que $\lambda = f(\mathrm{Re}, k/D)$.

La tabla 9-1 es un resumen de todo lo dicho hasta ahora para el cálculo de λ en las tuberías comerciales.

Teniendo en cuenta lo dicho y observando la Ec. (9-4) (véase la Fig. 9-3) se tiene:

— *para números de Reynolds grandes (tanto mayores cuanto menor es la rugosidad relativa) la pérdida de carga es función del cuadrado de la velocidad;*
— *para números de Reynolds pequeños la pérdida de carga es proporcional a la primera potencia de la velocidad;*
— *para números de Reynolds intermedios la pérdida de carga es proporcional a la velocidad elevada a un exponente comprendido entre 1 y 2.*

TABLA 9-1

COEFICIENTE λ DE LA EC. 9-4 PARA TUBERIAS COMERCIALES

Tuberías	*Régimen*	*Fórmula*	*Autor*	*Número de la ecuación en el texto*
lisas y rugosas	laminar	$\lambda = \frac{64}{Re}$	Poiseulle	(9-18)
lisas	turbulento (1) $Re < 100.000$	$\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}}$	Blasius	(9-19)
lisas	turbulento (1) $Re < 100.000$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \left(Re \sqrt{\lambda} \right) - 0,8$	Kármán-Prandtl (primera ecuación)	(9-20)
rugosas	turbulento (zona de transición)	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$	Colebrook	(9-24)
rugosas	turbulento (zona final)	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \frac{D}{2k} + 1,74$	Kármán-Prandtl (segunda ecuación)	(9-25)

(1) La corriente no pasa bruscamente de laminar a turbulenta. Hay una zona en que el régimen puede ser mixto.

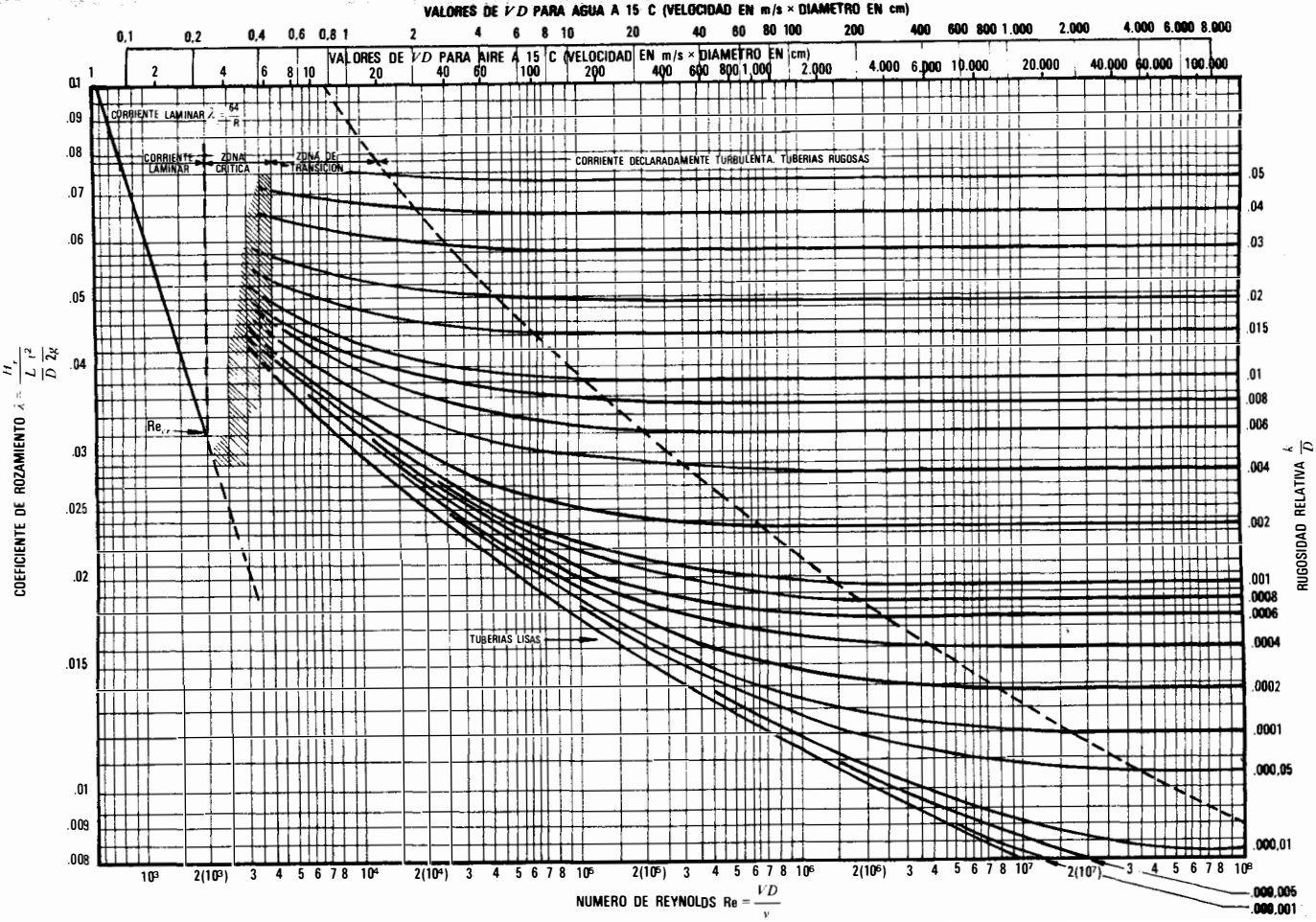


FIG. 9-6. *Diagrama de Moody.*

5. DIAGRAMA DE MOODY

La ecuación de Poiseuille [Ec. (9-18)] junto con la ecuación de Colebrook-White [Ec. (9-24)] (1) permiten el cálculo del coeficiente λ en todos los casos que pueden presentarse en la práctica. Dichas ecuaciones pueden programarse para resolución de los problemas pertinentes con ordenador. Las mismas ecuaciones se representan gráficamente en el ábaco conocido con el nombre de *diagrama de Moody*, representado en la Fig. 9-6 y reproducido en mayor tamaño en el Apéndice 13.

El diagrama de Moody

— está construido en papel doblemente logarítmico;
— es la representación gráfica de dos ecuaciones:

La *ecuación de Poiseuille* [Ec. (9-18)]. Esta ecuación en papel logarítmico es una recta. La prolongación dibujada a trazos es la *zona crítica*. En esa zona solo se utilizará la recta de Poiseuille si consta que la corriente sigue siendo puramente laminar. De lo contrario λ puede caer en cualquier punto (según el valor de Re) de la zona sombreada. (La zona crítica es una *zona de incertidumbre*).

La *ecuación de Colebrook-White* [Ec. (9-24)]. En esta ecuación $\lambda = f(\text{Re}, k/D)$, o sea λ es función de dos variables. Dicha función se representa en el diagrama de Moody por una familia de curvas, una para cada valor del parámetro k/D. Estas curvas para números bajos de Reynolds coinciden con la ecuación de Blasius [Ec. (9-19)] y la primera ecuación de Kármán-Prandtl [Ec. (9-20)], es decir, son asintóticas a una u otra ecuación y se van separando de ellas para números crecientes de Reynolds. Esto se representa en el esquema simplificado (Fig. 9-7) del diagrama mismo de Moody.

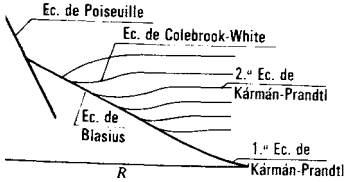


FIG. 9-7. La ecuación de Colebrook-White, Ec. (9-25), es asintótica a la 1.ª y 2.ª ecuación de Kármán-Prandtl [Ecs. (9-22) y (9-27)].

— es un diagrama adimensional, utilizable con cualquier sistema *coherente* de unidades;
— incorpora una curva de trazos, que separa la zona de transición de la zona de completa turbulencia, es decir la zona en que $\lambda = f(\text{Re}, k/D)$ [Ec. (9-23)] de aquella en que $\lambda = f(k/D)$ [Ec. (9-25)]. Esta curva de trazos es convencional (en realidad las curvas son, como ya se ha dicho, asintóticas).

Los valores de k que se necesitan para leer este diagrama pueden obtenerse la tabla siguiente.

(1) A la cual son asintóticas las dos ecuaciones de Kármán-Prandtl [Ecs. (9-20) y (9-25)].

TABLA 9-2. *COEFICIENTE DE RUGOSIDAD ABSOLUTA, k PARA TUBERIAS COMERCIALES*

Tipo de tubería	*Rugosidad absoluta* — k (mm)	*Tipo de tubería*	*Rugosidad absoluta* — k (mm)
Vidrio, cobre o latón estirado	<0,001 (o lisa)	Hierro galvanizado	0,15 a 0,20
Latón industrial	0,025	Fundición corriente nueva	0,25
Acero laminado nuevo	0,05	Fundición corriente oxidada	1 a 1,5
Acero laminado oxidado	0,15 a 0,25	Fundición asfaltada	0,1
Acero laminado con incrustaciones	1,5 a 3	Cemento alisado	0,3 a 0,8
Acero asfaltado	0,015	Cemento bruto	Hasta 3
Acero roblonado	0,03 a 0,1	Acero roblonado	0,9 a 9
Acero soldado, oxidado	0,4	Duelas de madera	0,183 a 0,91

Los valores de la tabla son un tanto imprecisos, por lo cual el valor de λ obtenido, que puede tener un error de ± 5 por 100 en tuberías lisas, puede llegar a ± 10 por 100 en tuberías rugosas. De ordinario no se necesita más precisión. *En muchos problemas puede obtenerse una primera aproximación haciendo $\lambda = 0{,}02$ a $0{,}03$.* En un tubo rectilíneo la influencia del cambio de sección se hace sentir hasta un recorrido igual a 10 veces el diámetro (60 veces si el flujo es laminar). El cálculo de λ es, pues, menos preciso aún si la tubería es corta.

La variación de la rugosidad con el tiempo es aún más imprecisa. Puede utilizarse la fórmula de Colebrook:

$$k = k_0 + \alpha t \tag{9-26}$$

donde k_0 — rugosidad absoluta del material nuevo.

Con el valor de k_0 de la tabla y con el valor de la rugosidad k obtenido experimentalmente en un tiempo cualquiera t, se calcula α, que luego puede tomarse como constante.

Resumen del procedimiento para el cálculo de las pérdidas primarias, H_{rp}

El procedimiento siguiente vale cuando la incógnita del problema es H_{rp}.

Cálculo de H_{rp} por el diagrama de Moody conocidos Q, L, D, ν, k.

Nota: Si la tubería no es circular sustitúyase D por $4R_h$ (véase Sec. 10.2).

1 — Según el material de la tubería se toma k de la tabla 9-2
2 — Se calcula la rugosidad relativa k/D
3 — Se calcula $\text{Re} = \dfrac{vD}{\nu}$
4 — Se lee λ en el diagrama de Moody (Fig. 9-6 y Apéndice)
5 — Este valor de λ se lleva a la ecuación de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)] y se calcula H_{rp}.

9.6. DIAMETRO DE TUBERIA MAS ECONOMICO

Muchas veces, se presenta en la práctica el problema de fijar la pérdida de carga H_r, por *consideraciones económicas.* En efecto:

Si se aumenta el diámetro D de la tubería la pérdida de carga H_r disminuye. Económicamente hablando, un aumento de D supone un aumento de *gasto de instalación;* pero al mismo tiempo una disminución de las pérdidas de energía y por tanto una disminución de *gastos de funcionamiento.*

El diámetro más económico será aquel que reduzca a un mínimo la suma del coste de la tubería y el valor en pesetas de la energía perdida por rozamiento, ambas reducidas a un año.

Para una misma presión el espesor de la pared de la tubería aumenta con el diámetro, si el esfuerzo de trabajo de la tubería debe permanecer constante. Por lo cual el peso es proporcional al cuadrado del diámetro, y el coste también. Por tanto el coste por año de la tubería puede expresarse por αD^2, en que α depende de la longitud de la tubería, del coste unitario, tipo de construcción, tanto por ciento de interés fijado, depreciación, etc.

De la Ec. (9-8) se deduce que la pérdida de carga y por tanto el valor reducido al año de la pérdida de potencia por fricción se puede representar por β/D^5 en que β depende de la longitud de la tubería, del valor reducido al año de la potencia perdida, del caudal, de la densidad del fluido y de λ que como se sabe depende también del diámetro.

El coste total anual de la tubería se podrá expresar así:

$$C = \alpha D^2 + \frac{\beta}{D^5}$$

donde α y β — constantes en una primera aproximación.

El diámetro que hace el coste total anual mínimo se obtendrá derivando la ecuación anterior con relación al diámetro, igualándolo a cero y despejando el diámetro:

$$D = \left(\frac{5\beta}{2\alpha}\right)^{1/5} \qquad (9\text{-}27)$$

(diámetro de tubería más económico)

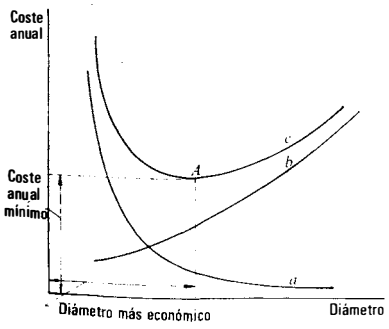


FIG. 9-8. Obtención gráfica del *diámetro más económico de una tubería,* que es el que produce el coste anual mínimo.

La Fig. 9-8 muestra el procedimiento gráfico para hallar el diámetro más económico. Con los datos de que se pueda disponer se traza la curva *a* del *coste anual de la potencia perdida,* y la *b* del *coste anual de la tubería.* Luego sumando las ordenadas se traza la curva *c* del coste anual total. Al punto *A* corresponde el coste total anual mínimo y el *diámetro más económico.* Una de las aplicaciones del estudio anterior más interesantes es la selección del diámetro de la *tubería forzada* en una instalación hidroeléctrica, cuya longitud es a veces de varios kilómetros, cuya presión puede llegar a veces en algún tramo de algunas centrales a superar los 100 bar, y cuyo coste por consiguiente es muy elevado. La selección de este diámetro, en que además del factor económico intervienen otros problemas (golpe de ariete, etc.), constituye un ejemplo interesante de evaluación técnico-económica característica de un ingeniero.

PROBLEMAS

9-1. *Por una tubería de 300 mm de diámetro y 300 m de longitud circula agua entre dos puntos, cuya diferencia de cotas es de 15 m. En el punto más alto B un manómetro señala una presión equivalente a 28 m c.a. y en el más bajo A otro manómetro señala una presión de 3,5 bar.*

Calcular la dirección del flujo y la pérdida de carga. Si el caudal es de 140 l/s, calcular el coeficiente de rozamiento λ.

Según lo dicho en la pág. 114, en la corriente real se pierde *altura total, H.* En nuestro caso, sin embargo, al ser el diámetro de la tubería constante, la *altura de velocidad* $\frac{v^2}{2g}$ será constante también. Luego en este caso se pierde *altura piezométrica, h.* Ahora bien

$$h_A = \frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{3{,}5 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9{,}81} = 35{,}678 \text{ m}$$

tomando como plano de referencia el plano horizontal que pasa por el punto más bajo *A* (véase figura). Y

$$h_B = \frac{p_B}{\rho g} + z_B = 28 + 15 = 43 \text{ m}$$
$$h_B > h_A$$

Luego *la dirección del flujo* es la marcada con la flecha en la figura (en ella la pendiente de la tubería se ha exagerado mucho).

La *pérdida de carga* se calcula por la Ec. (5-37), a saber

$$H_{rA-B} = \frac{p_B}{\rho g} + z_B - \frac{p_A}{\rho g} - z_A = h_B - h_A = 43 - h_A = 7{,}322 \text{ m}$$

Finalmente, siendo

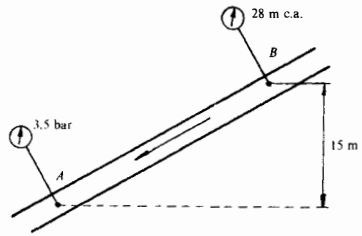
$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}14}{\pi \cdot 0{,}300^2} = 1{,}981 \text{ m/s}$$

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}200 \text{ m}$$

el coeficiente de rozamiento λ, en virtud de la Ec. (9-4), será:

$$\lambda = H_{rA-B}\frac{D}{L}\frac{1}{v^2/2g} =$$

$$= 0{,}0366$$



PROB. 9-1

9-2. *Por una tubería vertical de 50 mm desciende 1 l/s de aceite cuya viscosidad cinemática es* $20 \cdot 10^{-6}$ *m/s² y su densidad relativa 0,92. Se conecta un manómetro diferencial entre dos puntos situados a una distancia de 400 cm. El líquido manométrico tiene una densidad relativa de 1,4. No hay aire en las conexiones.*

Calcular la lectura del manómetro.

Calculemos el número de Reynolds de esta tubería:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}001}{\pi \cdot 0{,}050^2}$$

$$= 0{,}509 \text{ m/s} \qquad \frac{v^2}{2g} = \frac{0{,}5093^2}{19{,}62} = 0{,}013 \text{ m}$$

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} = 1.273 < 2.000$$

luego el flujo es laminar, y según la Ec. (9-18)

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = 0{,}05027$$

Según la Ec. (9-4):

$$H_{r1-2} = \lambda \frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} = 0{,}0532 \text{ m} \qquad (1)$$

En virtud de la Ec. (9-1)

$$H_{r1-2} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)$$

$$p_1 = p_2 + \rho g\, a + \rho_m g\, l - \rho g\, l - \rho g\, a - \rho g(z_1 - z_2)$$

donde ρ — densidad del aceite;
ρ_m — densidad del líquido manométrico.

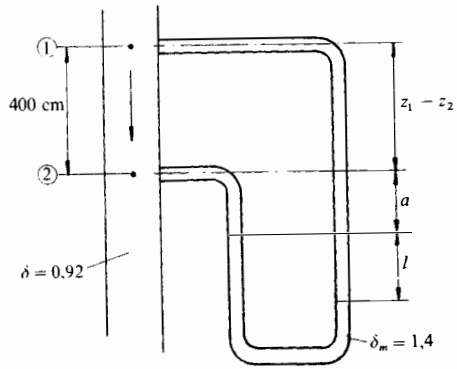
Dividiendo ambos miembros por ρg y simplificando:

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) = \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) l$$

$$\left(\frac{1{,}4}{0{,}92} - 1\right) l = 0{,}5217\, l \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) tendremos finalmente:

$$l = 101{,}9 \text{ mm}$$



PROB. 9-2

9-3. *Por un conducto de diámetro constante e igual a 305 mm se bombea un caudal de 60 l/s de combustible de densidad 980 kg/m³ y de viscosidad cinemática 4 cm²/s. La longitud del conducto es 1.800 m, la cota inicial* $z_1 = 85$ *m y la final* $z_2 = 105$ *m.*

Calcular la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2.

Examinemos en primer lugar el carácter de la corriente:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}06}{\pi \cdot 0{,}305^2} = 0{,}821 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} = \frac{0{,}8212 \cdot 0{,}305}{4 \cdot 10^{-4}} = 6{,}18$$

luego la corriente es laminar. Por tanto se podrá aplicar la Ec. (9-18)

$$H_{rp} = \frac{64}{\text{Re}}\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} = 20{,}734 \text{ m}$$

Aplicando la Ec. (5-37), siendo

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$$

por ser D = constante, tendremos:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H_{rp} + z_2 - z_1$$

o sea

$$p_1 - p_2 = 980 \cdot 9{,}81(H_{rp} + 105 - 85) = 391.605 \text{ Pa} = 3{,}91605 \text{ bar}$$

9-4. *Por una tubería horizontal de fundición corriente nueva de 250 mm circulan 4 kg/s de aire a una presión absoluta de 20 bar y a una temperatura de 40° C. Supóngase el aire incompresible.*
Calcular la pérdida de presión en 90 m de esta tubería.

$$\rho = \frac{p}{R_a T} = \frac{20 \cdot 10^5}{286{,}9 \cdot (273{,}15 + 40)} = 22{,}261 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$v = \frac{G}{A\rho} = \frac{4G}{\pi d^2 \rho} = \frac{4{,}4}{\pi \cdot 0{,}250^2 \cdot 22{,}26} = 3{,}661 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$H_r = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{90}{0{,}250} \cdot \frac{3{,}66^2}{2 \cdot 9{,}81} =$$

$$= 245{,}886 \ \lambda$$

$$\frac{k}{d} = \frac{6{,}25}{250} = 0{,}01$$

$$\text{Re} = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{3{,}661 \cdot 0{,}250 \cdot 22{,}26}{1{,}913 \cdot 10^{-5}} = 1{,}065 \cdot 10^6$$

$$\mu_{\text{aire } 40^\circ} = 1{,}95 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81 = 1{,}913 \cdot 10^{-5} \ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

En el diagrama de Moody (o mejor mediante la ecuación de Colebrook-White) se lee

$$\lambda = 0{,}0199$$

$$H_r = 4{,}893$$

$$\Delta p_r = H_r = \rho g = 1069 \text{ Pa}$$

9-5. *Por una tubería de acero soldado oxidado de 600 mm fluye agua a 20° C. Por rozamiento la presión disminuye en 25 mbar por cada 100 m.*
Calcular la velocidad.

$$\frac{0{,}025 \cdot 10^5}{1.000 \cdot g \cdot 100} = \lambda \frac{1}{0{,}600} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{\frac{0{,}025 \cdot 10^5 \cdot 0{,}600 \cdot 2}{1.000 \cdot 100}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= \frac{0{,}1732}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\frac{k}{d} = \frac{0.4}{600} = 0{,}0006667$$

$$\text{Re} = \frac{d}{\nu} v = \frac{0{,}600}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} v = 5{,}958 \cdot 10^5 \ v$$

Primer tanteo

$$\lambda' = 0{,}025$$

$$v' = 1{,}0954 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}' = 6{,}5265 \cdot 10^5$$

$$\lambda'' = 0{,}0185$$

Segundo tanteo

$$v'' = 1{,}2734 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Re}'' = 758.691$$

$$\lambda''' = 0{,}0184$$

Tercer tanteo

$$v''' = 1{,}2768 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Re}''' = 760.745$$

$$\lambda^{\text{IV}} = \lambda''' = 0{,}0184$$

$$v = 1{,}277 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9-6. *En dos tomas piezométricas de una tubería de 50 mm por la que circula agua, situadas a 15 m de distancia y con una diferencia de cotas de 3 m, se conecta un manómetro diferencial de mercurio, sin aire en las conexiones, cuya lectura es de 250 mm. La velocidad media en la tubería es de 3 m/s.*
Calcular el coeficiente de rozamiento λ de la tubería.

9-7. *En una tubería de 1 m de diámetro el coeficiente de rozamiento $\lambda = 0{,}04$ y el número de Reynolds $R = 1.000.000$.*
Calcular la rugosidad absoluta de la tubería.

9-8. *Para que en una tubería de duelas de madera de 3 km de longitud la pérdida de carga valga 3 m circulando un caudal de 3.000 l/min de agua a 15° C, ¿qué diámetro de tubería se requiere?*

9-9. *Se suministra agua a una fábrica por una tubería de fundición de 3,5 km de longitud y de 300 mm de diámetro desde un depósito elevado. La cota del terreno en el sitio del depósito es 130 m. La distancia del nivel de agua en el depósito al terreno, 17 m. La cota del terreno en la fábrica es de 110 m. El agua ha de tener en la fábrica una altura de presión de 25 m.*

Calcular:

a) el caudal.
b) ¿Qué altura debería tener el nivel de agua en el depósito para asegurar en la fábrica un caudal de 85 l/s en las mismas condiciones anteriores?

9-10. *El líquido que fluye por una tubería lisa de 150 mm de diámetro y 200 m de longitud tiene las siguientes características: $\delta = 0{,}92$ y $\eta = 0{,}1226$ kg/m · s.*
Calcular la pérdida de carga para los dos caudales siguientes: 25 l/s y 75 l/s.

9-11. *Por una tubería lisa de 150 mm fluye gasolina, cuya viscosidad cinemática es $5 \cdot 10^{-7}$ m²/s. La pérdida de carga asciende a 200 mm de columna de gasolina en 18 m.*
Calcular la velocidad.

9-12. *Una tubería de fundición corriente nueva de 2.400 m de longitud suministra agua a 10° C desde un depósito cuyo nivel de agua está 25 m más elevado que el punto de utilización abierto a la atmósfera.*
Calcular el diámetro de la tubería para conseguir un caudal de agua $Q = 35$ l/s.

9-13. *Calcular la pérdida de carga en una tubería de fundición asfaltada por la que circula un caudal de agua a 20° C de 45 l/s, que consta de los siguientes elementos colocados en serie: $l_1 = 700$ m, $l_2 = 500$ m, $l_3 = 200$ m; siendo $d_1 = 300$ mm, $d_2 = 250$ mm, $d_3 = 200$ mm.*

9-14. *Circula agua por gravedad a 15° C de un depósito a otro, cuyo nivel de agua está 20 m más bajo que el primero, por una tubería lisa de 100 m de longitud y 50 mm de diámetro.*
Calcular el caudal.

9-15. *Por una tubería de función corriente nueva de 400 mm circula agua a 15° C y a una velocidad de 5 m/s.*

Calcular:

a) pérdida de carga por cada 100 m de tubería;
b) pérdida de carga por cada 100 m en la misma tubería si la velocidad fuera 3 veces menor.

9-16. *Calcular el diámetro necesario de una conducción de aceite si la pérdida de altura de presión no debe exceder 1 m de columna de aceite en una longitud $l = 4{,}5$ m con un caudal $Q = 1$ l/s. La viscosidad del aceite a $t = 50°$ es $\nu = 1{,}6$ cm^2/s.*

9-17. *Determinar la capacidad de un sifón de agua que es de fundición y verificar la presión mínima en el punto más alto del mismo. Diámetro del sifón $D = 0{,}15$ m, longitud $L = 40$ m. Distancia vertical del nivel del embalse superior al punto más elevado, 3 m; cota del embalse superior, 25 m; del embalse inferior, 5 m. Presión barométrica, 1 bar; longitud del sifón desde la boca hasta el punto más alto, 3,8 m. Temperatura del agua, 35° C. Las pérdidas secundarias que se estudiarán más adelante no se tendrán en cuenta en este problema.*

10. Resistencia de superficie: Pérdidas primarias en conductos abiertos o canales

10.1. INTRODUCCION

En contraposición a los *conductos cerrados o tuberías*, en los *conductos abiertos o canales*

— la corriente no está totalmente rodeada por un contorno sólido, sino que tiene una superficie libre a la presión atmosférica;
— las formas de la sección transversal son mucho más variadas: en las tuberías las secciones suelen ser circulares (tuberías de agua) o rectangulares (conducciones de aire).

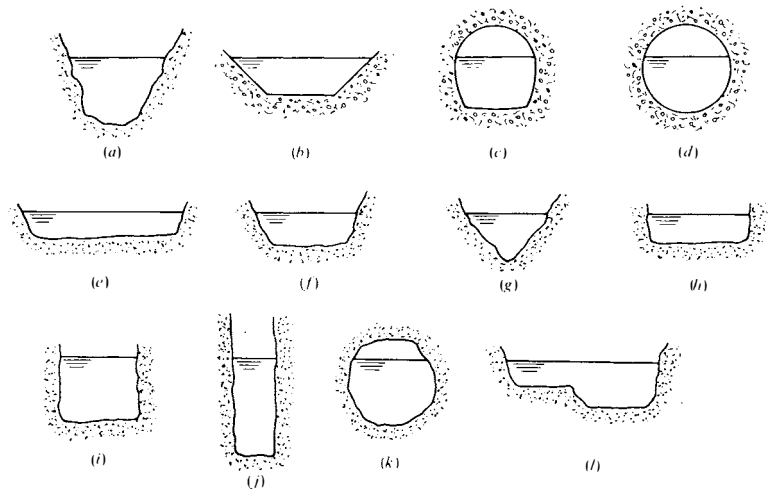


FIG. 10-1. Formas diversas de conductos abiertos o *canales*.

En la Fig. 10-1 pueden verse algunas formas de sección transversal:

a) canal natural de sección irregular (río);
b) canal de sección trapezoidal;
c) galería de servicio;
d) tubería parcialmente llena que funciona como conducto abierto porque tiene una superficie libre;
e) a *l)* otras formas de sección transversal.

Los conductos abiertos generalmente transportan agua; pero a veces se utilizan para transportar otros líquidos también. Sin embargo las fórmulas, tablas y ábacos existentes se han obtenido mediante experimentos hechos con canales de agua. La aplicación a otros líquidos hay que hacerla con precaución.

El flujo en un canal puede ser uniforme y no uniforme. En este capítulo solo tratamos del primero. En los tramos de suficiente longitud, de pendiente constante y sección transversal constante el flujo automáticamente se hace uniforme. En los tramos donde varía la pendiente o la sección transversal el flujo deja de ser uniforme. Así en la Fig. 5-2 en el tramo B-C la pendiente del canal varía. El flujo es uniforme solo en los tramos A-B y C-D.

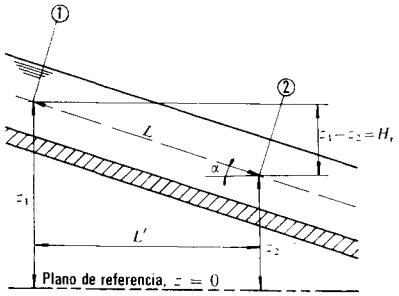


FIG. 10-2. *Flujo uniforme* en un conducto abierto o canal.

En la Fig. 10-2 aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 tendremos:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - H_r = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

donde H_r — pérdida de altura entre 1 y 2; $v_1 = v_2$ (sección transversal constante);

además

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g}$$

luego

$$H_r = z_1 - z_2 \tag{10-1}$$

En un canal con corriente uniforme la disminución de energía potencial es consumida totalmente por la pérdida de altura total.

Para que haya flujo es menester añadir a la corriente la energía que se pierde en rozamiento. En un canal con flujo uniforme esta energía proviene de la energía potencial. En una tubería con flujo uniforme (sección transversal constante) la energía proviene tanto de la energía potencial (tubería no horizontal) como de la energía de presión que lleva el fluido.

Las fórmulas que vamos a estudiar en este capítulo se refieren al régimen turbulento que es el que prácticamente se da siempre en los canales.

10.2. RADIO HIDRAULICO

Las fórmulas de Poiseuille [Ec. (9-18)] y Colebrook-White [Ec. (9-24)] o bien el diagrama de Moody, estrictamente hablando, sólo sirven para calcular λ y, mediante la Ec. (9-4) H_{rp} en conductos cerrados de *sección circular* constante.

El nuevo concepto de radio hidráulico, R_h, que se expone en esta sección, nos servirá para poder utilizar aquellas fórmulas con aproximación al cálculo de pérdida de carga en conductos (tanto cerrados como abiertos) de *sección no circular* constante.

El rozamiento en un conducto cerrado o abierto depende de la superficie mojada, y por tanto no depende solo de la sección transversal en m^2, sino también de la forma de ésta, que hará que la superficie en contacto con el líquido sea mayor o menor. Se llama radio hidráulico R_h al cociente del área transversal ocupada por la corriente por el perímetro mojado de esta sección

$$R_h = \frac{\text{área transversal}}{\text{perímetro mojado de la sección transversal}} \tag{10-2}$$

En un canal la superficie en contacto con la atmósfera prácticamente no tiene rozamiento alguno. El radio hidráulico en un canal será la superficie transversal *ocupada por el flujo* dividida por el perímetro mojado (excluyendo por tanto el lado en contacto con la atmósfera).

En particular en un conducto de sección circular totalmente lleno:

$$R_h = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}$$

y

$$D = 4R_h \tag{10-3}$$

El radio hidráulico de una tubería circular es igual a la mitad del radio de la tubería.

Aplicando la fórmula (10-2) se deducirá, fácilmente, por ejemplo, que

— El radio hidráulico de una sección cuadrada es $a/4$.

— El radio hidráulico de una sección rectangular es $\frac{ab}{2(a+b)}$.

— El radio hidráulico de una sección triangular es $\frac{ah}{2(a+b+c)}$,

donde a,b,c — lados
h — altura.

La fórmula de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)] fundamental para el cálculo de tuberías de sección constante se puede expresar en función de R_h, utilizando la Ec. (10-3), de la siguiente manera

$$H_{rp} = \lambda \frac{L}{4R_h} \frac{v^2}{2g} \tag{10-4}$$

(Fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo de pérdidas primarias, aplicable a tuberías y canales de sección transversal cualquiera.)

Las fórmulas de Poiseuille y Colebrook-White, aludidas al comienzo de esta sección, han sido deducidas con teorías y experimentos basados en que la tubería era de sección circular. Sin embargo, pueden emplearse para el cálculo de conductos cerrados o abiertos de sección transversal cualquiera, con tanta mayor aproximación cuanto la sección del conducto se acerque más a la sección circular (con mucha aproximación en el canal de la Fig. 10-1 *c* y con mucho menor en el de la Fig. 10-1 *j*).

Todas las fórmulas y gráficos del Cap. 9 con el procedimiento a seguir indicado en el cuadro de la pág. 219 para el cálculo de tuberías de sección circular es aplicable con aproximación al cálculo de tuberías y canales de sección cualquiera, sustituyendo siempre el diámetro D por $4R_h$. *El* R_h *se calculará mediante la Ec. (10-3).*

10.3. VELOCIDAD EN UN CANAL CON MOVIMIENTO UNIFORME. PRIMERA FORMULA: FORMULA DE CHÉZY

Introduciendo en la ecuación de Darcy-Weisbach [Ec. (10-4)] la Ec. (10-1) tedremos:

$$z_1 - z_2 = \frac{\lambda L v^2}{8g R_h};$$

o sea

$$\frac{z_1 - z_2}{L} = s = \frac{\lambda v^2}{8g R_h}$$

donde s — pendiente del canal. En realidad (Fig. 10-3) la pendiente del canal es $\text{tg}\,\alpha = \frac{z_1 - z_2}{L'}$, no $\frac{z_1 - z_2}{L} = \text{sen}\,\alpha$. Pero si la pendiente es pequeña $\text{sen}\,\alpha \simeq \text{tg}\,\alpha$

v — velocidad media en el canal de sección constante.

Despejando v

$$v = \sqrt{\frac{8R_h g s}{\lambda}} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{R_h s}.$$

y finalmente tendremos la

ECUACION DE CHÉZY

$$v = C\sqrt{R_h s} \tag{10-5}$$

[*Fórmula de Chézy, velocidad en un canal de sección uniforme, C se calcula con la Ec. (10-7) y tabla 10-1 o con la Ec. (10-8) y tabla 10-2*]

donde s — pendiente del canal

$$C = \sqrt{8g/\lambda} \tag{10-6}$$

es la constante de Chézy de dimensiones $[L]^{1/2}\,[T]^{-1}$; pero que al ser g constante, en régimen marcadamente turbulento, depende solo de la rugosidad del contorno [véase Ec. (9-22)], y por tanto es constante para un canal determinado.

El coeficiente C de la ecuación de Chézy puede calcularse

— por la Ec. (10-6) y el diagrama de Moody (Fig. 9-6) en función de λ;
— por la fórmula de Bazin [Ec. (10-7)] en función de m (tabla 10-1) y del R_h;
— por la fórmula de Kutter [Ec. (10-8)] en función de n (tabla 10-2), s y R_h.

10.4. COEFICIENTE C DE LA FORMULA DE CHEZY. PRIMERA FORMULA: FORMULA DE BAZIN

Esta fórmula es la más utilizada en Francia:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \tag{10-7}$$

[*Fórmula de Bazin: coeficiente C de la Ec. (10-5), m en tabla 10-1, R_h en metros*]

(Véase problema 10-1.)

TABLA 10-1. *VALORES DE m EN LA FORMULA DE BAZIN, Ec. (10-7)*

Material	*m*
Cemento alisado, madera cepillada	0,06
Ladrillos, piedras de sillería	0,16
Mampostería en bloques pequeños	0,46
Tierra regular	0,85
Tierra ordinaria	1,30
Paredes con hierba y fondos de guijarro	1,75

10.5. COEFICIENTE C DE LA FORMULA DE CHEZY. SEGUNDA FORMULA: FORMULA DE KUTTER

Esta fórmula muy usada aún es la siguiente:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{s}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{s}\right)\frac{n}{\sqrt{R_h}}} \qquad (10\text{-}8)$$

donde R_h — radio hidráulico expresado en metros
n — coeficiente de rugosidad (véase tabla 10-2)
s — pendiente del canal.

TABLA 10-2

VALORES DEL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD n Y DE 1/n EN LAS FORMULAS DE KUTTER [(EC. 10-8)] Y DE MANNING [(Ec. 10-9)]

Material	*n*	*1/n*
Madera cepillada	0,010-0,011	100,0-90,9
Madera sin cepillar	0,012-0,014	83,3-71,4
Hormigón alisado	0,010-0,013	100,0-76,9
Hormigón en bruto	0,015-0,020	66,7-50,0
Ladrillos	0,013-0,017	76,9-58,8
Piedra: según tipo, desde piedra pulimentada hasta canal de tierra con laterales de grava	0,017-0,033	58,8-30,0
Tierra: según tipo	0,018-0,030	55,6-33,3
Acero roblonado	0,017-0,020	58,8-50,0
Hierro fundido	0,013-0,017	76,9-58,8

Tanto la fórmula de Bazin como la fórmula de Kutter se basan en experimentos con agua. En los manuales de hidráulica existen tablas, curvas y ábacos que facilitan el uso de estas y otras fórmulas análogas.

(Véase problema 10-2.)

10.6. VELOCIDAD EN UN CANAL CON MOVIMIENTO UNIFORME: SEGUNDA FORMULA: FORMULA DE MANNING

La fórmula de Manning considerada como la más satisfactoria para flujo uniforme en conducciones abiertas, es la siguiente:

$$v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} s^{1/2} \qquad (10\text{-}9)$$

[*Fórmula de Manning, velocidad en canal de sección uniforme, equivalente a la de Chézy, Ec. (10-5)*]

donde n — coeficiente de rugosidad que puede tomarse de la misma tabla 10-2.

10.7. PROBLEMAS DE CANALES CON MOVIMIENTO UNIFORME

En los problemas de canales de ordinario se conoce la pendiente del canal dictada por la configuración del lugar. Según los casos se trata de

— *Dada* la sección transversal del canal, *determinar* el gasto en función de la profundidad del agua en el mismo.
— *Dada* la sección del canal y el caudal *determinar* la profundidad de agua en el mismo.
— *Dado* el caudal del canal o el material de su superficie, o su pendiente, etc., *determinar* la sección más favorable.

PROBLEMAS

10-1. *Determinar la profundidad h del agua en un canal trapezoidal en que el caudal es $Q = 100\ m^3/s$, la pendiente $s = 0{,}0001$, el coeficiente de rugosidad $n = 0{,}025$, ctg φ (véase figura) = 2,5 y el ancho del canal en el fondo $b = 15{,}0$ m.*

Dando valores diversos a la altura h, por ejemplo, empezando por $h = 4$ m hasta $h = 4{,}8$ m, determinamos para cada valor de h el área transversal efectiva A, el perímetro mojado, P_m, el radio hidráulico R_h [Ec. (10-2)], la constante C por la Ec. (10-8) y el caudal por la ecuación de Chézy (10-5).

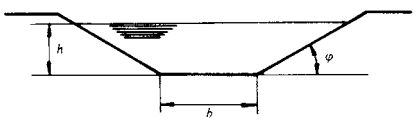
$$Q = CA\sqrt{R_h s}$$

Calculemos

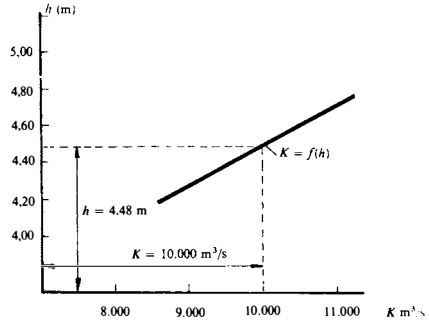
$$K = CA\sqrt{R_h}$$

Los resultados se encuentran en la tabla siguiente:

h, m	A, m^2	P_m, m	R_h, m	C, $m^{1/2}/s$	K, m^3/s
4,00	100,00	36,56	2,73	48,55	8.010
4,20	107,10	37,64	2,84	48,90	8.850
4,40	114,50	38,70	2,96	49,22	9.700
4,60	121,90	39,80	3,06	49,42	10.510
4,80	129,60	40,88	3,17	49,65	11.300



PROB. 10-1 *a*



PROBf 10-1 *b*

Con esta tabla se puede trazar la curva $h = f(K)$ (véase figura adjunta); pero en nuestro caso

$$K = \frac{Q}{\sqrt{s}} = \frac{100}{\sqrt{0{,}0001}} = 10.000 \text{ m}^3/\text{s}$$

valor para el cual la curva $K = f(h)$ nos da la solución del problema, es decir

$$h = 4{,}48 \text{ m}$$

10-2. *Determinar el caudal Q que circula por un canal trapezoidal de mampostería, en que las paredes laterales forman con la horizontal un ángulo de 45°, el ancho de la superficie transversal en el nivel del agua es de 3 m, la profundidad del canal 1 m y la pendiente 0,05 por 1.000.*

Para resolver este problema seguiremos el procedimiento siguiente:

1.º Aplicar la Ec. (10-2) para obtener el radio hidráulico, R_h.
2.º Aplicar la fórmula de Bazin [Ec. (10-7)] para obtener el coeficiente C.
3.º Aplicar la fórmula de Chézy [Ec. (10-5)] para obtener la velocidad media del agua en el canal v.
4.º Aplicar la fórmula $Q = Av$ para obtener el caudal Q.

Por tanto:

1.º

$$R_h = \frac{\frac{3+1}{2}}{1 + 2 \cdot 1{,}41} = \frac{2}{3{,}82} = 0{,}524 \text{ m}$$

2.º

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{R_h}}$$

según la tabla 10-1 para canales de mampostería $m = 0{,}46$. Luego

$$C = \frac{87}{1 + \frac{0{,}46}{\sqrt{R_h}}} = 53{,}187 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

3.º

$$v = C\sqrt{R_h s} = C\sqrt{R_h \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3}} = 0{,}272 \frac{\text{m}}{s}$$

4.º

$$A = \frac{3+1}{2} \cdot 1 = 2 \text{ m}^2 \qquad Q = Av = 0{,}544 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

10-3. *Calcular por la fórmula de Manning la pendiente necesaria para que un canal rectangular de hormigón alisado de sección transversal 1 × 2 m transporte un caudal de 3 m³/s.*

10-4. *Un canal de sección trapezoidal tiene un ancho en la base de 5 m y paredes laterales de pendiente 1/2.*
Calcular el radio hidráulico, cuando la profundidad del agua es 150 cm.

10-5. *La pendiente en un canal de sección rectangular de 5 m de ancho es de 3 por 1.000. El canal es de hormigón alisado. El caudal es de 10 m³/s. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?*

10-6. *Calcular el radio hidráulico de un canal de sección hexagonal en que el flujo llena la mitad del canal.*

10-7. *Un canal de sección triangular, cuyas paredes laterales de fundición forman un ángulo de 90°, tiene una pendiente de 9,5‰.*
Calcular la profundidad de agua en el canal si la velocidad en él se mantiene a 1 m/s.

10-8. *Calcular el radio hidráulico en función de la profundidad en un canal en V con ángulo de 60°.*

11. *Resistencia de forma: Pérdidas secundarias en conductos cerrados o tuberías*

11.1. INTRODUCCION

En la Sec. 9.2, y en conexión con la Fig. 9-2, se explicó en qué consisten estas pérdidas de forma, que tienen lugar en los cambios de sección y dirección de la corriente, en las contracciones, ensanchamientos, codos, diafragmas, válvulas de diferentes tipos, etc.: en general en todos los *accesorios* de tuberías. Estos elementos producen una perturbación de la corriente que origina remolinos y desprendimientos, que intensifican las pérdidas.

Se advirtió también que estas pérdidas, a pesar de llamarse *secundarias*, pueden ser más importantes que las primarias estudiadas en el Cap. 9, si la conducción es *relativamente* corta. Se admite generalmente que si la longitud de la tubería es mayor que 1.000 diámetros el error en que se incurre despreciando las pérdidas secundarias es menor que el error en que se incurre al calcular el valor de λ para la Ec. (9-4). En esto se ha de utilizar el sentido común hidráulico: así, por ejemplo, una válvula puede ser una pérdida pequeña y despreciable cuando está totalmente abierta; sin embargo, cuando está parcialmente abierta puede ser la pérdida más importante del sistema.

Las pérdidas secundarias se pueden calcular por dos métodos:

Primer método: por una fórmula especial y un coeficiente de pérdidas adimensional de pérdidas secundarias [Ec. (11-1)]. Este método se estudia en las Secs. 11.2 a 11.4.

Segundo método: por la misma fórmula de las pérdidas primarias [Ec. (9-4)], sustituyendo en dicha fórmula la longitud de la tubería, L por la longitud equivalente L_e. Este método se estudia en la Sec. 11.5.

11.2. PRIMER METODO: ECUACION FUNDAMENTAL DE LAS PERDIDAS SECUNDARIAS

De uso universal en el mundo entero en los libros y formularios de hidráulica, y análoga a la fórmula de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)] para las pérdidas primarias, es la siguiente

ECUACION FUNDAMENTAL DE LAS PERDIDAS SECUNDARIAS

$$H_{rs} = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{11-1}$$

donde H_{rs} — pérdida de carga secundaria
ζ — coeficiente adimensional de pérdida de carga secundaria
v — velocidad media en la tubería, si se trata de codos, válvulas, etc. Si se trata de un cambio de sección como contracción o ensanchamiento, suele tomarse la velocidad en la sección menor. Lo correcto en un Manual de Hidráulica será indicar junto al valor de ζ la velocidad v que hay que tomar en cada caso.

11.3. EL COEFICIENTE ζ DE LA ECUACION FUNDAMENTAL DE PERDIDAS SECUNDARIAS

El coeficiente ζ de la Ec. (11-1) depende del tipo de accesorio, del número de Reynolds, de la rugosidad y hasta de la configuración de la corriente antes del accesorio. En general, antes y después del accesorio en que se produce la pérdida ha de haber un trozo de tubería recta al menos de 4 a $5D$ (D — diámetro de la tubería), para que los valores que se aducen a continuación puedan aplicarse con precisión. En la práctica no suele necesitarse por lo demás demasiada precisión.

Para Re $> 1 \cdot 10^5$ a $2 \cdot 10^5$, ζ no depende prácticamente del número de Reynolds. Ahora bien, los problemas prácticos con fluidos de poca viscosidad como el aire y el agua suelen caer en esta región.

Los coeficientes ζ para los diferentes accesorios que se aducen en las secciones siguientes son experimentales (1).

11.3.1. Salida brusca y suave de un depósito

Salida brusca

Los valores de ζ pueden tomarse de la Fig. 11-1. ζ depende de la longitud l del trozo de tubería que penetra en el depósito y del espesor δ de la tubería.

Salida suave

En este caso la pérdida es mucho menor (forma más aerodinámica, disminución o anulación de la resistencia de forma).

Los coeficientes ζ se pueden tomar de la tabla 11-1 en relación con la Fig. 11-2:

(1) El coeficiente ζ para un ensanchamiento brusco (Sec. 11.3.2) se puede obtener fácilmente por cálculo, que omitimos.

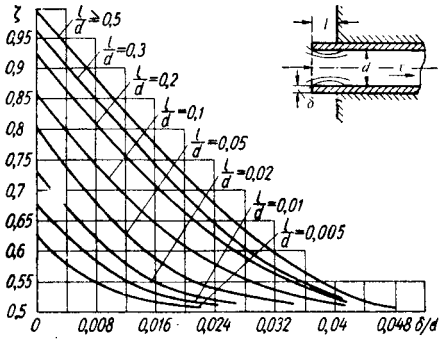


FIG. 11-1. Coeficientes de rozamiento para la *salida brusca de un depósito.*

TABLA 11-1

r/D	0	0,02	0,04	0,08	0,12	0,16	>0,2
ζ	0,5	0,37	0,26	0,15	0,09	0,06	<0,03

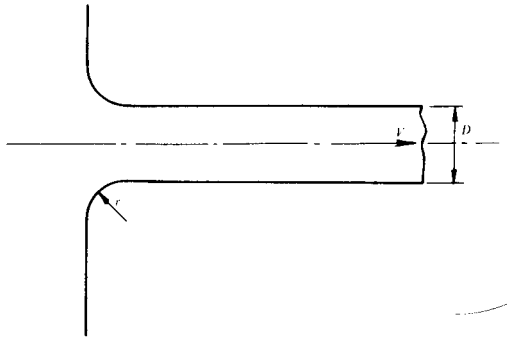


FIG. 11-2. *Salida suave de un depósito.* Los valores del coeficiente de pérdidas ζ se toman de la tabla 11-1 según el valor de $\frac{r}{D}$.

11.3.2. Ensanchamientos bruscos y suaves

La transición en un conducto de sección circular de un diámetro d a otro mayor D puede hacerse de las dos maneras representadas en la Fig. 11-3: *brusca* o *suavemente* median-

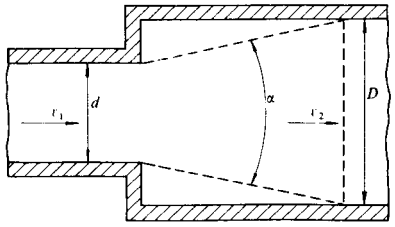


FIG. 11-3. *Ensanchamiento brusco y suave.* Los valores de ζ se toman según el ángulo α de la Tabla 11-2 junto con la Ec. (11-3).

te un difusor cónico de ángulo α (indicado con línea de trazos en la figura). La pérdida de carga se calcula en este caso por la fórmula:

$$H_r = m\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = m\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2 \frac{v_1^2}{2g} \qquad (11\text{-}2)$$

donde

$$m\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2 = \zeta. \qquad (11\text{-}3)$$

El coeficiente m se toma de la siguiente tabla:

TABLA 11-2

$\alpha°$	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
m	0,18	0,13	0,14	0,16	0,27	0,43	0,62	0,81

Si el ensanchamiento es brusco ($\alpha = 180°$) m es aproximadamente igual a la unidad.

11.3.3. Contracciones bruscas y suaves

Es el caso opuesto al anterior, con lo que las Figs. 11-4 y 11-5 se entenderán fácilmente. De esta última se obtienen los coeficientes ζ.

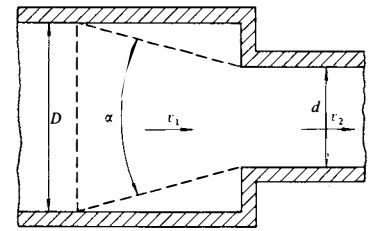


FIG. 11-4. *Contracción brusca y suave.* Los valores de ζ se toman de la Fig. 11-5.

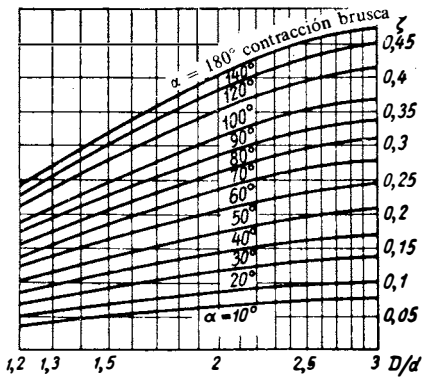


FIG. 11-5. Valores de ζ, según la Fig. 11-4.

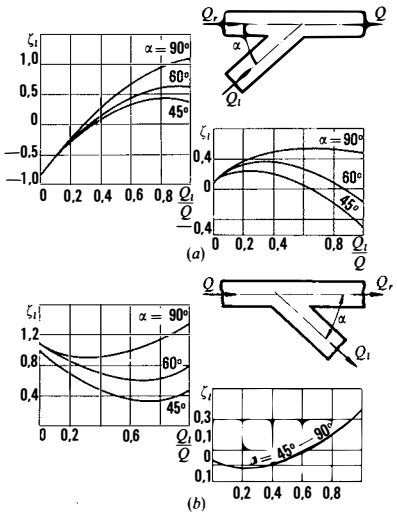


FIG. 11-6. Formas diversas de *T's* con los valores correspondientes de ζ.

11.3.4. Tes

Son de dos tipos: de confluencia (Fig. 11-6 *a*) y de divergencia (Fig. 11-6 *b*). Se calculan por separado las pérdidas de energía correspondientes al caudal lateral Q_l y al caudal recto, Q_r (que no cambia de dirección), por las ecuaciones

$$H_{rl} = \zeta_l \frac{v^2}{2g}$$

$$H_{rr} = \zeta_r \frac{v^2}{2g}$$

y luego se suman ambas pérdidas.

donde v — velocidad de la corriente total.
Evidentemente $Q = Q_l + Q_r$.

Las curvas se refieren al caso en que los conductos tienen el mismo diámetro.

La tabla 11-3 representa otros casos frecuentes. El coeficiente ζ se tomará de esta tabla según el caso y se llevará a la Ec. (11-1) para calcular H_{rs}.

TABLA 11-3
OTRAS FORMAS DE TES Y COEFICIENTES ζ PARA CADA FORMA

Figura					
ζ	0.5	1,0	1,5	3.0	0,05
Figura					
ζ	0,1	0,15	2,0	3,0	

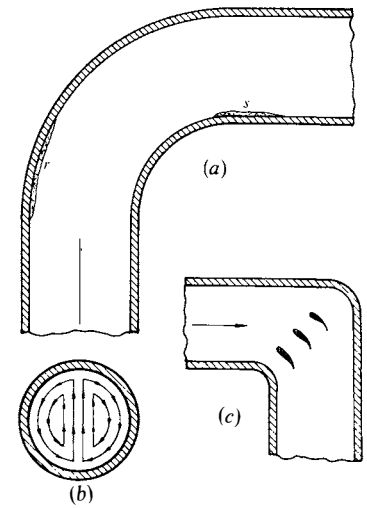


FIG. 11-7. En un *codo* se originan desprendimientos en las zonas *r* y *s* (*a*); en (*b*) se ven las corrientes secundarias que producen pérdidas adicionales. En (*c*) los perfiles aerodinámicos guían la corriente y se reducen considerablemente las pérdidas.

11.3.5. Codos

En el *codo* que se representa en la Fig. 11-7 *a* se originan dos tipos de pérdidas:

— Las producidas por la fuerza centrífuga que origina un *flujo secundario* (Fig. 11-7 *b*) que se superpone al flujo principal y que intensifica el rozamiento.
— Las producidas por la *separación* (Sec. 8.8) que se produce en las zonas *r* y *s* (Fig. 11-7 *a*).

El flujo secundario se evita casi por completo con alabes directrices, cuya forma de perfil aerodinámico se representa en la Fig. 11-7 *c*. Esta solución es cara y no se emplea más que en casos especiales.

Los coeficientes ζ se tomarán de las Figs. 11-8 *a-f*, en los que se aducen algunos ejemplos de sección rectangular por su uso frecuente en las conducciones de aire de los sistemas de refrigeración y aire acondicionado.

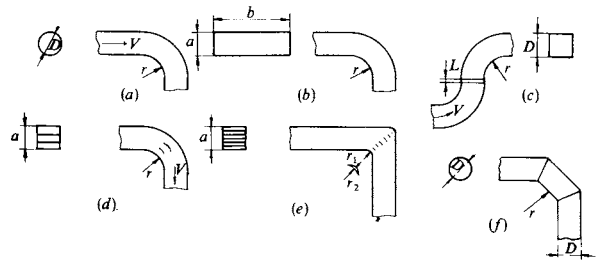


FIG. 11-8. Coeficientes ζ de pérdidas en *codos* diversos:

(*a*) $\frac{r}{D}$ =	0	0,25	0,5	1,0
ζ =	0,8	0,4	0,25	0,16

(*b*)	$\frac{r}{a}$	$\frac{b}{a}=1$	$\frac{b}{a}=2$	$\frac{b}{a}=3$	$\frac{b}{a}=4$
	0	$\zeta=1{,}0$	$\zeta=0{,}9$	$\zeta=0{,}8$	$\zeta=0{,}73$
	0,25	0,4	0,4	0,39	0,32
	0,5	0,2	0,2	0,19	0,16
	1,0	0,13	0,13	0,13	0,10

(*c*) $L=0$ $\zeta=0{,}62$ $L=D$ $\zeta=0{,}68$

(*d*) N.º de álabes =	1	2	3
$\frac{r}{a}$ =	0,25	0,2	0,15
ζ =	0,15	0,12	0,10

(*e*) $r_1=\frac{r_2}{2}=\frac{a}{b}$ $\zeta=0{,}1$

(*f*) $\frac{r}{D}=0{,}25$	0,5	1	
ζ (codo de 3 piezas) 0,8	0,4	0,3	
ζ (codo de 5 piezas) 0,5	0,3	0,2	

11.3.6. Válvulas

El coeficiente ζ de una válvula depende del tipo de la misma (compuerta, mariposa, etc.), del diseño particular dentro de cada tipo y del grado de apertura dentro de cada válvula. Así, por ejemplo, en la válvula de macho de la Fig. 11-11 el coeficiente ζ que para una apertura de 5° tiene un valor pequeño ($\zeta = 0{,}05$) para una apertura de 65° tiene un valor grandísimo ($\zeta = 486$. Véase tabla 11-4). Si no se dispone de datos más precisos del fabricante o de datos experimentales, pueden consultarse orientativamente las figuras siguientes.

11.3.6.1. Válvula de compuerta

El coeficiente ζ se toma de la Fig. 11-9 que no necesita explicación.

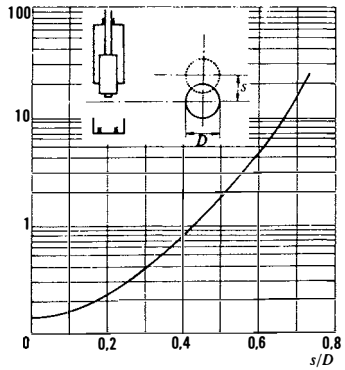


FIG. 11-9. Coeficientes ζ de una *válvula de compuerta*.

11.3.6.2. Válvula de mariposa

El coeficiente ζ se toma de la Fig. 11-10.

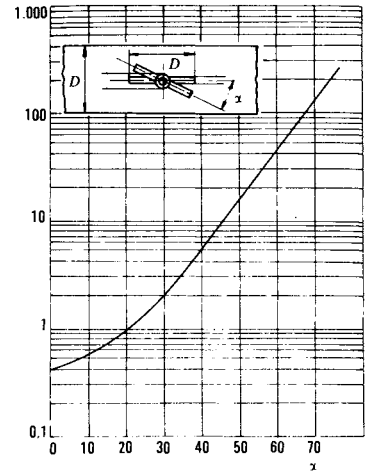


FIG. 11-10. Coeficientes ζ de una *válvula de mariposa*.

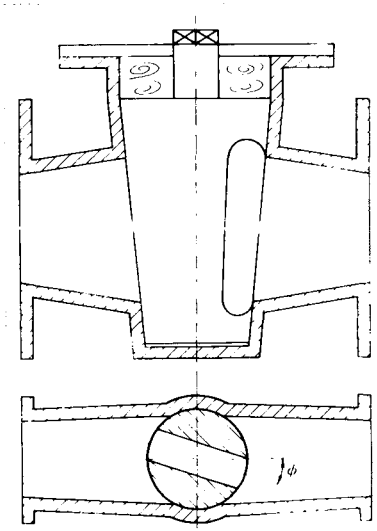


FIG. 11-11. *Válvula de macho*. Los coeficientes ζ en función del ángulo φ se encuentran en la tabla 11-4.

11.3.6.3. Válvula de macho

Esta válvula se representa en la Fig. 11-11. El coeficiente ζ se toma de la

TABLA 11-4

ϕ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40°	45°	50°	60°	65°	70°	90°
ζ	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	17,3	31,2	52,6	206	486	—	∞

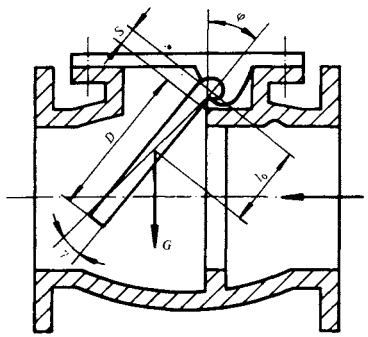


FIG. 11-12. *Válvula de retención.* Los coeficientes ζ figuran en la tabla 11-5.

11.3.6.4. Válvula de retención de charnela

La válvula se representa en la Fig. 11-12 y los coeficientes ζ se toman de la

TABLA 11-5

φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40°	50°	60°	65°	70°	90°
ζ	—	5,25	3,10	2,40	2,10	2,0	1,85	1,80	1,55	1,2	—	∞

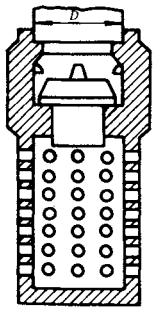


FIG. 11-13. *Válvula de pie con alcachofa.* Los coeficientes ζ figuran en la tabla 11-6.

11.3.6.5. Válvula de pie con alcachofa

Este accesorio representado en la Fig. 11-13 es standard en las aspiraciones de las bombas (véase Fig. 19-1). El coeficiente ζ se toma de la

TABLA 11-6

D mm	ζ	*D* mm	ζ
40	12,0	200	5,2
50	10,0	250	4,4
65	8,8	300	3,7
80	8,0	350	3,4
100	7,0	400	3,1
125	6,5	450	2,8
150	6,0	500	2,5

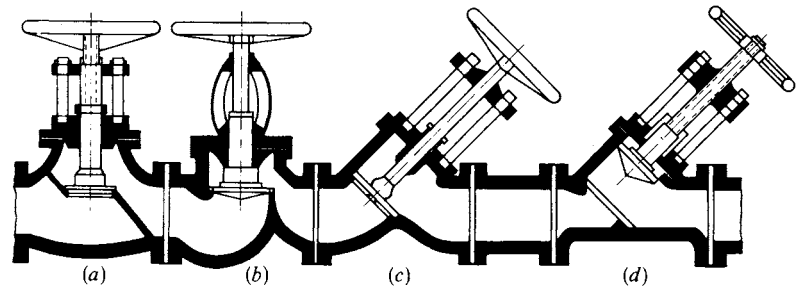


FIG. 11-14. *Válvulas diversas.* Los coeficientes ζ figuran en la Tabla 11-7.

11.3.6.6. Otras válvulas

Para las válvulas que se representan en la Fig. 11-14 los coeficientes ζ se toman de la

TABLA 11-7

Esquema	*a*	*b*	*c*	*d*
ζ	2,9	2,0 a 2,7	1,4 a 2,5	0,44 a 0,8

Nota. — Los coeficientes ζ correspondientes a otros accesorios tales como filtros, tubos de intercambiadores de calor, etc., habrán de obtenerse del fabricante, de los formularios o de ensayos realizados con el accesorio mismo.

11.4. COEFICIENTE TOTAL DE PERDIDAS, ζ_t

La ecuación fundamental de las pérdidas secundarias [Ec. (11-1)] tiene la misma forma que la de las pérdidas primarias [Ec. (9-4)] si se hace en esta última

$$\lambda \frac{L}{D} = \zeta$$

En una conducción como la de la Fig. 9-2 las pérdidas primarias y secundarias se suceden unas a otras. Conviene, pues, definir el coeficiente total de pérdidas primarias y secundarias, ζ_t.

Las *pérdidas primarias* tendrán lugar en los tramos rectos de tuberías de diversos diámetros; pero todas se expresan [Ec. (9-4)] por una ecuación del tipo:

$$H_{rp} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

variando la velocidad media v al variar el diámetro de la tubería.

Las *pérdidas secundarias* tendrán lugar en los distintos accesorios (codos, válvulas, etc.), pero todas se expresan [Ec. (11-1)] por una ecuación de la forma:

$$H_{rs} = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Si la conducción es de sección constante

$$H_r = \Sigma H_{rp} + \Sigma H_{rs} = \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \dots \zeta_n + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{v^2}{2g}$$

donde H_r — pérdida total
$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — coeficientes de los distintos accesorios,

y finalmente

$$\boxed{H_r = \zeta_t \frac{v^2}{2g}} \qquad (11\text{-}4)$$

donde

$$\boxed{\zeta_t = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n + \lambda \frac{L}{d}} \qquad (11\text{-}5)$$

coeficiente total de pérdida.

Si la conducción no es de sección constante se procede análogamente, pero utilizando además la ecuación de continuidad, resultando:

$$\zeta = \left[\zeta_1 + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \left(\zeta_2 + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\right)\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\zeta_3 + \lambda_3 \frac{L_3}{D_3}\right)\left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 + \dots\right] \frac{v_1^2}{2g} \qquad (11\text{-}6)$$

donde ζ_1, λ_1; $\zeta_2, \lambda_2, \dots$ — coeficientes de pérdidas secundarias y primarias en las tuberías de diámetro $D_1, D_2, \dots$, respectivamente.

En régimen turbulento para una misma tubería $\left(\frac{k}{D} = C\right)$, $\zeta_t = C$, porque tanto los coeficientes ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) como λ_i en la Ec. (11-6) son constantes. (Véanse problemas 11-1 a 11-3.)

11.5. SEGUNDO METODO: LONGITUD DE TUBERIA EQUIVALENTE

Este segundo método consiste en considerar las pérdidas secundarias como *longitudes equivalentes*, es decir longitudes en metros de un trozo de tubería del mismo diámetro que produciría las mismas pérdidas de carga que los accesorios en cuestión. Así en la Fig. 9-2 cada codo, medidor de caudal, etc., se sustituirían por su longitud de tubería equivalente, L_e. A continuación se aplicaría la ecuación fundamental de las pérdidas primarias [Ec. (9-4)] en la siguiente forma:

$$\boxed{H_r = \lambda \frac{(L + \Sigma L_e)}{D} \frac{v^2}{2g}} \qquad (11\text{-}7)$$

(fórmula de las pérdidas primarias y secundarias empleando la longitud equivalente)

donde H_r — suma total de pérdidas primarias y secundarias
λ — coeficiente de pérdidas del *diagrama de Moody* (Fig. 9-6)
L — longitud total de los tramos rectos de tuberías
ΣL_e — suma de todas las longitudes equivalentes a los accesorios diversos
v — velocidad media en la tubería.
Si la tubería cambia de sección se aplicará la ecuación de continuidad, como ya se ha advertido.

El monograma de la Fig. 11-15 es un ejemplo de aplicación de este método. Este monograma consta de tres escalas: uniendo con una recta el punto de la escala izquierda correspondiente al accesorio de que se trata con el punto de la escala derecha correspondiente al diámetro interior de la tubería, el punto de intersección de esta recta con la escala central nos da la L_e del accesorio.

11.6. GRAFICO DE LA ECUACION DE BERNOULLI CON PERDIDAS

Ahora podemos ya hacer una representación gráfica de la ecuación de Bernoulli en su forma más general [Ec. (5-38)].

Con referencia al ejemplo representado en la Fig. 11-16 el gráfico se construye de la manera siguiente:

— En el esquema de la conducción se escoge un plano de referencia $z = 0$, cualquiera (mejor en el punto más bajo para que todas las z sean positivas).
— Se numeran en el gráfico de la conducción las secciones en que hay discontinuidad en el flujo: cambio de sección transversal, accesorio, bomba, etc., 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en la figura.

En una conducción como la de la Fig. 9-2 las pérdidas primarias y secundarias se suceden unas a otras. Conviene, pues, definir el coeficiente total de pérdidas primarias y secundarias, ζ_t.

Las *pérdidas primarias* tendrán lugar en los tramos rectos de tuberías de diversos diámetros; pero todas se expresan [Ec. (9-4)] por una ecuación del tipo:

$$H_{rp} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

variando la velocidad media v al variar el diámetro de la tubería.

Las *pérdidas secundarias* tendrán lugar en los distintos accesorios (codos, válvulas, etc.), pero todas se expresan [Ec. (11-1)] por una ecuación de la forma:

$$H_{rs} = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Si la conducción es de sección constante

$$H_r = \Sigma H_{rp} + \Sigma H_{rs} = \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \dots \zeta_n + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{v^2}{2g}$$

donde H_r — pérdida total

$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — coeficientes de los distintos accesorios,

y finalmente

$$\boxed{H_r = \zeta_t \frac{v^2}{2g}} \qquad (11\text{-}4)$$

donde

$$\boxed{\zeta_t = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n + \lambda \frac{L}{d}} \qquad (11\text{-}5)$$

coeficiente total de pérdida.

Si la conducción no es de sección constante se procede análogamente, pero utilizando además la ecuación de continuidad, resultando:

$$\zeta = \left[\zeta_1 + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \left(\zeta_2 + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\right)\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\zeta_3 + \lambda_3 \frac{L_3}{D_3}\right)\left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 + \dots\right] \frac{v_1^2}{2g} \qquad (11\text{-}6)$$

donde ζ_1, λ_1; $\zeta_2, \lambda_2, \dots$ — coeficientes de pérdidas secundarias y primarias en las tuberías de diámetro $D_1, D_2, \dots$, respectivamente.

En régimen turbulento para una misma tubería $\left(\frac{k}{D} = C\right)$, $\zeta_t = C$, porque tanto los coeficientes ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) como λ_i en la Ec. (11-6) son constantes. (Véanse problemas 11-1 a 11-3.)

11.5. SEGUNDO METODO: LONGITUD DE TUBERIA EQUIVALENTE

Este segundo método consiste en considerar las pérdidas secundarias como *longitudes equivalentes*, es decir longitudes en metros de un trozo de tubería del mismo diámetro que produciría las mismas pérdidas de carga que los accesorios en cuestión. Así en la Fig. 9-2 cada codo, medidor de caudal, etc., se sustituirían por su longitud de tubería equivalente, L_e. A continuación se aplicaría la ecuación fundamental de las pérdidas primarias [Ec. (9-4)] en la siguiente forma:

$$\boxed{H_r = \lambda \frac{(L + \Sigma L_e)}{D} \frac{v^2}{2g}} \qquad (11\text{-}7)$$

(fórmula de las pérdidas primarias y secundarias empleando la longitud equivalente)

donde H_r — suma total de pérdidas primarias y secundarias

λ — coeficiente de pérdidas del *diagrama de Moody* (Fig. 9-6)

L — longitud total de los tramos rectos de tuberías

ΣL_e — suma de todas las longitudes equivalentes a los accesorios diversos

v — velocidad media en la tubería.

Si la tubería cambia de sección se aplicará la ecuación de continuidad, como ya se ha advertido.

El monograma de la Fig. 11-15 es un ejemplo de aplicación de este método. Este monograma consta de tres escalas: uniendo con una recta el punto de la escala izquierda correspondiente al accesorio de que se trata con el punto de la escala derecha correspondiente al diámetro interior de la tubería, el punto de intersección de esta recta con la escala central nos da la L_e del accesorio.

11.6. GRAFICO DE LA ECUACION DE BERNOULLI CON PERDIDAS

Ahora podemos ya hacer una representación gráfica de la ecuación de Bernoulli en su forma más general [Ec. (5-38)].

Con referencia al ejemplo representado en la Fig. 11-16 el gráfico se construye de la manera siguiente:

— En el esquema de la conducción se escoge un plano de referencia $z = 0$, cualquiera (mejor en el punto más bajo para que todas las z sean positivas).

— Se numeran en el gráfico de la conducción las secciones en que hay discontinuidad en el flujo: cambio de sección transversal, accesorio, bomba, etc., 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en la figura.

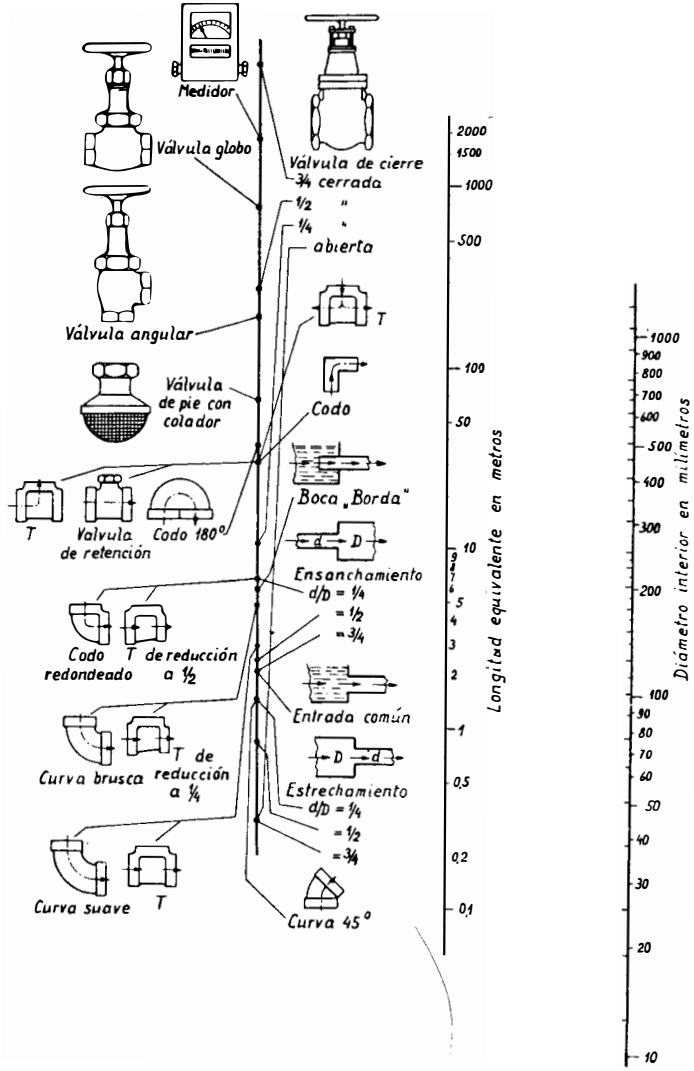


FIG. 11-15. Nomograma de pérdida de carga secundaria de la firma Gould Pumps, U.S.A. en *accesorios de tubería* para agua.

— El eje de la conducción es la *línea de alturas geodésicas*. En la figura, al ser la conducción horizontal, esta línea se ha hecho coincidir con la línea de referencia, $z = 0$.

— Se traza la línea de altura total H (H = cte en fluido ideal). Las pérdidas primarias H_{rp} y secundarias H_{rs} producen una disminución de H, que calculadas y reducidas a escala se llevan al dibujo a partir de la línea horizontal H = cte. obteniéndose así la *línea de alturas totales* del fluido real. Una bomba produce un ΔH y una turbina un $-\Delta H$. (La bomba *suministra* energía al fluido y la turbina *absorbe* energía del fluido).

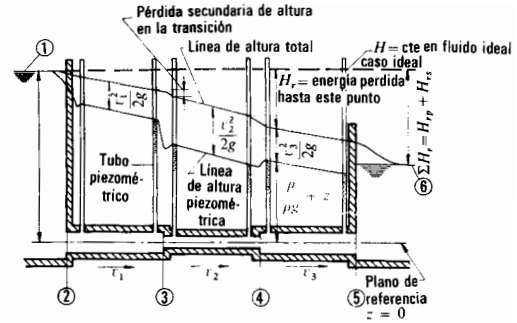


FIG. 11-16. Gráfico de energía.

— A partir de esta línea en vertical hacia abajo se acotan las alturas de velocidad en cada uno de los tramos, obtenidas mediante la ecuación de continuidad. Así se obtiene la *línea de alturas piezométricas*. En un tubo piezométrico practicado en cualquier punto de la conducción el líquido ascendería hasta esa línea, como puede verse en el dibujo.

— Es evidente que la *altura de presión*, $p/\rho g$, en cada punto de la tubería viene definida por el segmento de vertical comprendido entre esta última línea y el eje de la tubería que, como ya hemos dicho, es *la línea de alturas geodésicas*.

PROBLEMAS

11-1. *¿Cuál es el coeficiente de un tipo de válvula de 100 mm de diámetro, sabiendo que su pérdida de carga es igual que la que se produce en 8 m de tubería de hierro galvanizado del mismo diámetro, para una misma velocidad del agua de 4 m/s a una temperatura de 20° C?*

En virtud de las Ecs. (11-1) y (9-4) se tiene:

$$H_r = \zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

o sea

$$\zeta = \lambda \frac{L}{D} \tag{1}$$

Calculemos en primer lugar λ:

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\nu} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} = 397.219$$

habiéndose obtenido el valor de ν para el agua a 20° C en la tabla 2-4. Con el valor de la rugosidad para el hierro galvanizado, obtenido de la tabla 9-2, se obtiene la *rugosidad relativa*,

$$\frac{k}{D} = \frac{0{,}17 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}17 \cdot 10^{-2}$$

y con los valores de Re y $\frac{k}{D}$ así obtenidos, mediante el diagrama de Moody (o mejor, mediante la ecuación de Colebrook-White), del apéndice se obtiene λ resultando

$$\lambda = 0{,}0229$$

y volviendo a la Ec. (11-4),

$$\zeta = \frac{0{,}0229 \cdot 8}{0{,}1}$$
$$= 1{,}832$$

11-2. *Por un sifón se trasvasa agua de un pozo a otro. La longitud de la tubería del sifón, L = 400 m; diámetro constante del sifón, D = 200 mm. Diferencia de niveles entre las superficies libres de los pozos, H = 1,30 m. λ = 0,0263. El coeficiente global de todas las pérdidas secundarias, ζ = 8,4. Calcular el caudal del sifón.*

Según la Ec. (11-5)

$$\zeta_t = \zeta + \lambda \frac{L}{D} = 8{,}4 + 0{,}0263 \cdot \frac{400}{0{,}2} = 61{,}0$$

Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre el nivel libre del agua del pozo 1 (punto 1) y el mismo nivel del pozo 2 (punto 2) tendremos

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \zeta_t \frac{v^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

donde v — velocidad del agua en el sifón, o sea

$$0 + H + 0 - \zeta_t \frac{v^2}{2g} = 0 + 0 + 0$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\zeta_t}}$$

y

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{\zeta_t}} = \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 1{,}30}{61}}$$
$$= 0{,}0203 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$= 20{,}3 \text{ l/s}$$

11-3. *En una instalación de bomba centrífuga de agua el diámetro del tubo de aspiración es 250 mm, su longitud 20 m, el caudal de la bomba 60 l/s, la presión absoluta a la entrada de la bomba 400 mbar. La tubería tiene alcachofa con válvula de pie ζ₁ = 6,1, un codo ζ₂ = 0,4 y una válvula de entrada en la bomba ζ₃ = 2; además, λ = 0,03. La presión barométrica es de 1 bar.*
Calcular la altura geodésica a que se encuentra la entrada de la bomba.

Basta escribir la ecuación generalizada de Bernoulli desde el nivel superior del depósito de aspiración (punto 1), que supondremos abierto a la atmósfera, hasta la entrada de la bomba (punto E):

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{v_E^2}{2g} = \frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{v_E^2}{2g}$$

donde z_E es la cota que se trata de hallar ($z_1 = 0$).
Tenemos además

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{10^5}{10^3 \cdot 9{,}81} = 10.194 \text{ m}$$
$$z_1 = 0 \qquad \text{(tomando como plano de referencia el nivel del depósito de aspiración)}$$

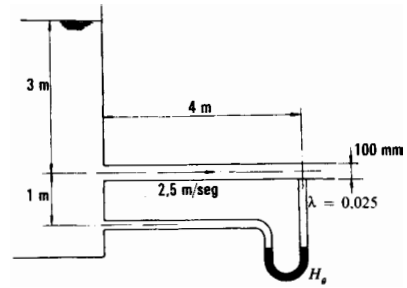
$$v_E = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}060}{\pi \cdot 0{,}25^2} = 10{,}194 \text{ m}$$

$$\frac{p_E}{\rho g} = \frac{0{,}400 \cdot 10^5}{1.000 \cdot 9{,}81} = 4{,}078 \text{ m}$$

Luego

$$z_E = \frac{p_1 - p_E}{\rho g} - \left(1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{v_E^2}{2g}$$
$$= \frac{p_1 - p_E}{\rho g} - \left(1 + 6{,}1 + 0{,}4 + 2 + 0{,}03 \frac{20}{0{,}25}\right) \frac{v_E^2}{2g}$$
$$= 5{,}210 \text{ m}$$

11-4. *En la figura calcular la lectura del manómetro. El líquido del tanque es agua.*

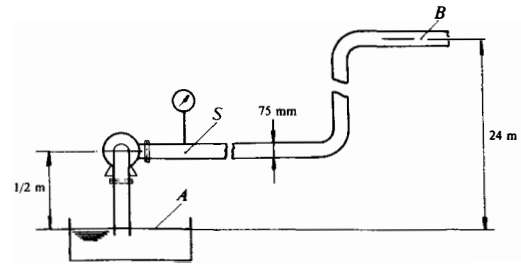


PROB. 11-4

11-5. *La figura representa una instalación de bomba centrífuga de agua, que tiene en la impulsión dos codos de 90° de un radio interior de 37,5 mm. El manómetro situado a la salida de la bomba indica una presión de 5,5 bar. Las pérdidas en la tubería de aspiración, que es muy corta, pueden despreciarse. La tubería de impulsión tiene además 500 m de tramos rectos de hierro galvanizado. El rendimiento total de la bomba es 0,75. La bomba, girando a 1.490 rpm, impulsa un caudal de agua a 20° C de 300 l/min.*

Calcular:

a) la potencia comunicada por la bomba a la corriente;
b) la potencia de accionamiento;
c) el par de accionamiento;
d) la presión en el punto B situado a una cota de 24 m después de los tramos rectos y de los dos codos indicados.

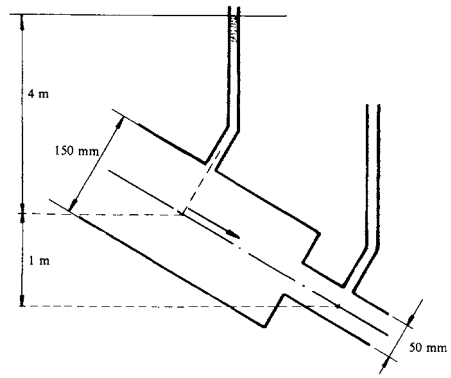


PROB. 11-5

11-6. *Dos tanques en que el nivel de agua es idéntico, pero uno está sometido a una presión de 2 bar más que el otro, pueden conectarse entre sí bien con tubería recta de 125 m de longitud bien con tuberías de 120 m de longitud con dos codos de 90° de 150 mm de radio interior. En ambos casos la tubería es de 300 mm y puede considerarse lisa. La temperatura del agua es 20°. Las pérdidas a la salida y entrada de los depósitos pueden despreciarse.*

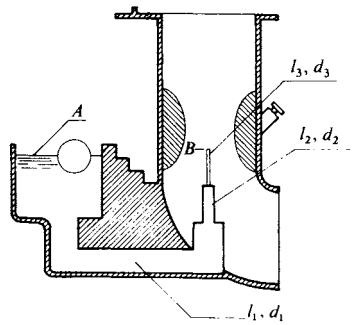
¿Cuál es la disposición con la que se obtiene mayor caudal?

11-7. *La figura representa una contracción brusca por la que circula un caudal de agua de 15 l/s. Calcular la lectura del tubo piezométrico situado aguas abajo.*



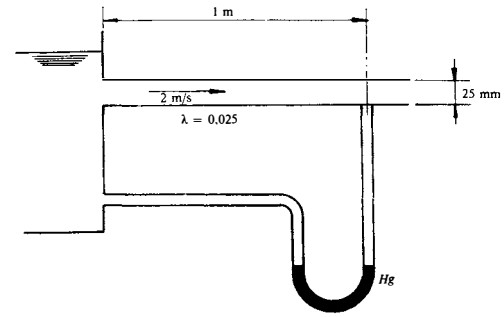
PROB. 11-7

11-8. *Determinar el caudal másico de gasolina a través del sicler de un carburador, para depresiones en el sicler de 2.000 y 4.000 N/m², si (véase figura) $l_1 = 75$ mm, $d_1 = 5$ mm, $l_2 = 30$ mm, $d_2 = 2$ mm, $l_3 = 10$ mm, $d_3 = 1$ mm, estando la boquilla del sicler 3 mm por encima del nivel de gasolina; $\nu = 0{,}0083$ cm²/s. En el vaso del flotador la presión es atmosférica; para cada codo se estima un coeficiente de pérdida de carga de 0,985; densidad de la gasolina $\rho = 750$ kg/m³; los conductos pueden suponerse lisos.*



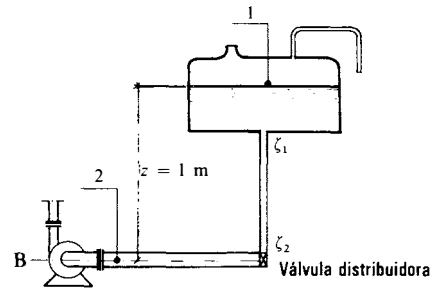
PROB. 11-8

11-9. *Calcular en el depósito de tetracloruro de carbono de la figura la lectura l del manómetro conectado entre la tubería de desagüe y el depósito.*



PROB. 11-9

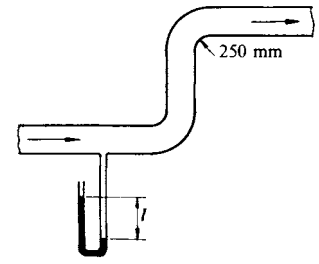
11-10. *Determinar el diámetro mínimo del tubo de aspiración de un conducto de aceite de 4 m de longitud para que, circulando un caudal $Q = 1{,}25$ l/s, la presión absoluta a la entrada de la bomba B no sea inferior a 80 mbar. Viscosidad cinemática del aceite para la temperatura de trabajo $\nu = 1{,}0$ cm²/s. La presión en la superficie superior del depósito de la figura es atmosférica. El coeficiente de pérdida a la entrada de la tubería $\zeta_1 = 0{,}5$ y en la válvula de distribución $\zeta_2 = 4{,}0$ y $z = 1$ m. Densidad del aceite 860 kg/m³; presión barométrica 735 Torr.*



PROB. 11-10

11-11. *En la figura se representa la tubería de impulsión de chapa ($k = 0{,}065$ mm) de un ventilador de sección rectangular de 250 × 500 mm y de 50 m de longitud y tiene dos codos de 90°. La salida del ventilador a la atmósfera se encuentra 5 m más elevada que la toma del manómetro. El líquido manométrico es agua. El caudal de aire es de 7.200 m³/h, la temperatura del aire 30° C y la presión barométrica 760 Torr.*

Calcular l.



PROB. 11-11

12. *Redes de distribución*

12.1. INTRODUCCION

La aplicación de las ecuaciones estudiadas en los Caps. 9 y 11 al cálculo de tuberías es muy frecuente en ingeniería, como ya se ha dicho anteriormente, no sólo en el cálculo de las redes de suministro urbano de agua y gas, y en los proyectos de viviendas; sino también en los conductos de refrigeración y aire acondicionado, en los proyectos de plantas industriales, refinerías, proyectos de los diferentes sistemas de fluido que llevan los aviones modernos: aire, agua, gasolina, aceite, proyectos de transmisiones y controles hidráulicos, máquinas-herramientas, etc.

Un caso muy interesante que se presenta con mucha frecuencia es la selección de una bomba hidráulica: el cliente debe especificar a la empresa la altura útil efectiva que ha de proporcionar la bomba, para lo cual el ingeniero deberá hacer un estudio previo de las pérdidas en la instalación [véase Sec. 19.9.2, Ec. (19-13)].

Las redes de distribución hidráulica tienen una analogía con las redes de distribución eléctrica. En esta analogía el caudal corresponde a la intensidad de la corriente, la pérdida de carga a la caída de tensión y la resistencia hidráulica a la resistencia óhmica (o a la impedancia). Los problemas que se presentan en la práctica en ambos casos suelen ser a veces muy laboriosos. En hidráulica una ley semejante a la ley de Ohm en corriente continua $V = IR$ sólo se verifica si el régimen es laminar (pérdida de carga proporcional a la primera potencia de la velocidad; véase Fig. 9-3). Si el régimen es declaradamente turbulento H_r es proporcional a v^2 (y a Q^2). Si el problema se encuentra en la zona de transición esta última relación es aún más complicada, pérdida de carga proporcional a v elevado a una potencia comprendida entre 1 y 2, y dependiente también de la rugosidad relativa [véase Ec. (9-24)].

Las fórmulas que vamos a deducir en este capítulo y los procesos laboriosos de tanteo se prestan fácilmente a una programación para su resolución por medio de un ordenador.

En las cuatro secciones siguientes estudiamos los siguientes problemas por orden de complejidad:

— tuberías en serie
— tuberías en paralelo
— tuberías ramificadas
— redes de tuberías.

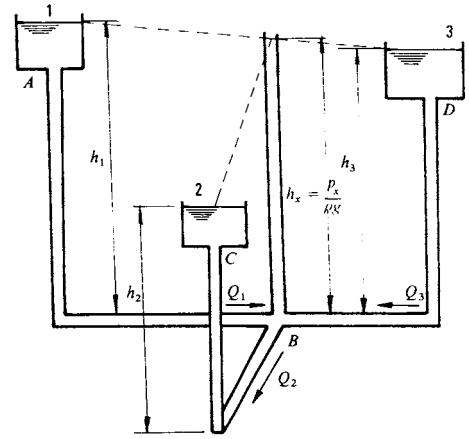


FIG. 12-1. Tuberías ramificadas.

En las *tuberías ramificadas* (Fig. 12-1) la tubería principal simplemente se bifurca una o varias veces. En las *redes* las tuberías se cierran en anillos (véase figura del problema 12-8).

12.2. TUBERIAS EN SERIE

Véase la Fig. 12-2. En el caso de *tuberías en serie* se aplican las fórmulas siguientes:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots \tag{12-1}$$

$$H_r = H_{r1} + H_{r2} + H_{r3} + \dots \tag{12-2}$$

$$v_1 D_1^2 = v_2 D_2^2 = v_3 D_3^3 = \dots \tag{12-3}$$

En efecto:

— el caudal que circula por los tramos 1, 2, 3, ... de diámetros D_1, D_2, D_3, ... es el mismo [Ec. (12-1)],

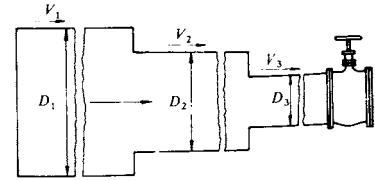


FIG. 12-2. Tuberías en serie.

— la pérdida total es igual a la suma de las pérdidas parciales [Ec. (12-2)],
— se cumple la ecuación de continuidad [Ec. (12-3)].

Con las fórmulas 12-1 a 12-3 junto con las ecuaciones estudiadas en los Caps. 9 y 11 para las pérdidas primarias y secundarias se resuelven los problemas *directos*, en los cuales el caudal es un dato e *inversos*, en los cuales el caudal es la incógnita.

(Véase problema 12-1.)

12.3. TUBERIAS EN PARALELO

Véase la Fig. 12-3.

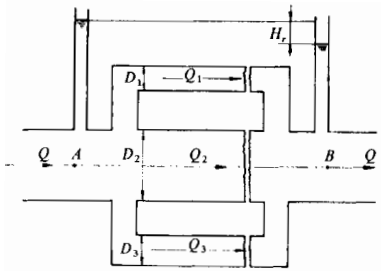


FIG. 12-3. Tuberías en paralelo.

En el caso de tuberías en paralelo se aplican las fórmulas siguientes:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots \tag{12-4}$$

$$H_{r1} = H_{r2} = H_{r3} = \ldots \tag{12-5}$$

En efecto:

— el caudal total Q se reparte entre todas las tuberías [Ec. (12-4)],
— la presión al comienzo p_A y al fin p_B de cada rama es la misma para todas las ramas, luego la caída de altura de presión (diferencia de lecturas en los tubos piezométricos de la figura), H_r será también igual en todas las ramas [Ec. (12-5)].

Los problemas que pueden presentarse son de dos tipos:

PROBLEMAS DE TUBERIAS EN PARALELO

Problema	*Datos*	*Incógnitas*
1	H_r	$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q$
2	Q	$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots H_r$

Solución problema tipo 1

Se calculan los caudales Q_1, Q_2, Q_3, ..., como en la Sec. 12.2 y luego, aplicando la Ec. (12-4), se obtiene Q.

Solución problema tipo 2

— En virtud de la Ec. (12-5) aplicando la Ec. (11-4) a una rama cualquiera, por ejemplo la 1 se tendrá

$$H_{r1} = H_r = \zeta_{t1} \frac{v_1^2}{2g} \tag{12-6}$$

donde ζ_{t1} — coeficiente de pérdida total en la rama 1 [Ec. (11-5)].

— El caudal en la misma rama será:

$$Q_1 = A_1 v_1 = A_1 \sqrt{\frac{2g H_r}{\zeta_{t1}}} = \alpha_1 \sqrt{H_r}$$

y en general para cualquier caudal:

$$Q_i = \alpha_i \sqrt{H_r} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12-7}$$

En virtud de la Ec. (12-4):

$$\boxed{Q = \Sigma Q = \sqrt{H_r}\, \Sigma \alpha_i} \tag{12-8}$$

porque H_r es igual en todas las ramas [Ec. (12-5)]

donde α_i — en general función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de cada rama; pero en régimen marcadamente turbulento (caso frecuente en la práctica) las α_i son constantes.

— De la Ec. (12-8), suponiendo valores convenientes de α_i (es decir, valores convenientes de λ_i y ζ_i), se obtiene un valor provisional de H_r, y con ello se obtienen a continuación los caudales y velocidades de cada rama. Conocidas estas velocidades se halla un valor más aproximado de los coeficientes λ_i y ζ_i y se repite el cálculo. Generalmente un tercer cálculo es innecesario.

(Véase problema 12-2.)

12.4. TUBERIAS RAMIFICADAS

Concretemos en un ejemplo clásico que no tiene interés meramente académico, pues se presenta con frecuencia en la práctica, a saber:

El problema de los tres recipientes

Se representa en la Fig. 12-1. El problema admite múltiples aplicaciones: así el recipiente 1 puede sustituirse por una bomba que dé la misma altura piezométrica h_1, y B sería, por ejemplo, la entrada en un edificio, 2 y 3 pueden ser dos lavabos situados en diferentes pisos del edificio. Otra aplicación sería que el punto 1 fuera la tubería principal de abastecimiento de agua; y entonces 2 y 3 serían dos puntos en dos barriadas donde debería asegurarse una cierta presión y un cierto caudal. Otra aplicación totalmente distinta, pero que conduciría al mismo esquema y a las mismas soluciones, sería el sistema de alimentación de combustible a los motores de un avión (punto B en la figura) desde tres depósitos situados uno en el fuselaje y dos en las alas.

Datos: alturas piezométricas h_1, h_2 y h_3.
Incógnitas: dirección de la corriente y caudales Q_1, Q_2 y Q_3.

Supondremos que los conductos que conectan los recipientes son de igual diámetro.

En la Fig. 12-1:

$h_x = \frac{p_x}{\rho g}$ — altura piezométrica en el punto B

h_1, h_2, h_3 — alturas piezométricas en los puntos 1, 2 y 3.

Despreciando el efecto de la altura de velocidad creada en los conductos de conexión

$$\begin{aligned} H_{r1} &= h_1 - h_x \\ H_{r2} &= h_2 - h_x \\ H_{r3} &= h_3 - h_x \end{aligned} \qquad (12\text{-}9)$$

donde H_{r1}, H_{r2}, H_{r3} — pérdida de carga entre los puntos 1, 2, 3 y B.

Elevando al cuadrado la Ec. (12-7) y utilizando las Ecs. (12-9), tendremos:

$$\begin{aligned} Q_1^2 &= (h_1 - h_x)\,\alpha_1^2 \\ Q_2^2 &= (h_2 - h_x)\,\alpha_2^2 \\ Q_3^2 &= (h_3 - h_x)\,\alpha_3^2 \end{aligned} \qquad (12\text{-}10)$$

Pueden suceder tres casos:

Primer caso: $h_1 > h_x$; $h_x > h_3$; $h_x > h_2$. Entonces Q_1 se dirige de 1 a B y Q_2, Q_3 de B a 2 y 3. Es decir pasará líquido a 1, a 2 y 3. Así se establece la ecuación (véase Fig. 12-1):

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad (12\text{-}11)$$

Las Ecs. (12-10) y (12-11) forman ya un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas Q_1, Q_2, Q_3 y h_x que nos resuelven el problema.

Segundo caso: $h_1 > h_x$; $h_3 > h_x$; $h_x > h_2$. En este caso pasa fluido de 1 y 3 a 2, y la cuarta ecuación será

$$Q_2 = Q_1 + Q_3$$

Tercer caso: $h_1 > h_x$; $h_2 > h_x$; $h_x = h_3$. Entonces $Q_3 = 0$. El líquido pasa de 1 a 2, 3 queda sin influjo y la cuarta ecuación será

$$Q_1 = Q_2$$

(Véase problena 12-3.)

12.5. REDES DE TUBERIAS

Las redes de distribución de agua urbanas forman ramificaciones complicadas, que se cierran formando mallas, de manera que el agua en un punto puede venir por dos direcciones distintas, lo que presenta la ventaja de no interrumpir el suministro, aun en el caso de reparaciones. Las figuras de los problemas 12-4 y 12-8 representan redes de distribución. Su cálculo es laborioso y se hace por el método de las aproximaciones sucesivas introducido por Hardy Cross. Se han de cumplir las tres leyes siguientes:

— *Ley de la pérdida de carga:* En cada tubería se ha de cumplir la Ec. (11-4), que puede transformarse así, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2g} &= \frac{8}{g\pi^2}\frac{1}{d^4}Q^2 \\ H_r &= \beta Q^2 \end{aligned} \qquad (12\text{-}12)$$

donde

$$\beta = \frac{8}{g\pi^2}\frac{\zeta_t}{d^4}$$

En la práctica β se supone constante en todo el cálculo (en realidad β depende de ζ_t que depende de λ y λ depende de Re y de d).

En los problemas de redes de tuberías se suelen despreciar las pérdidas secundarias en los nudos mismos, pero se tienen en cuenta las restantes pérdidas secundarias en forma de longitud equivalente (véase Sec. 11.5). La ecuación de las pérdidas primarias puede ponerse en la siguiente forma

$$\frac{H_r}{L} = \frac{R_r Q^n}{D^m} \qquad (12\text{-}13)$$

donde

$$R_r = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \qquad n = 2 \qquad D = 5$$

R_r es un coeficiente de rozamiento que depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. En la práctica se utiliza un valor de λ medio, con lo cual R_r = cte.

En el cálculo de redes de tuberías o de agua a las temperaturas normales, se puede emplear la fórmula de Hazen-Williams, o sea la misma Ec. (12-13), haciendo $R_r = \frac{10{,}675}{C^n}$ (unidades *SI*), $n = 1{,}852$ y $m = 4{,}8704$. El coeficiente C se toma de la tabla siguiente:

TABLA 12-1

COEFICIENTE C DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS [Ec. (12-11)]

Material de la tubería	*C*
Extremadamente lisa; cemento-amianto	140
Muy lisa; hormigón; fundición nueva	130
Duelas de madera; nueva de acero soldado	120
Arcilla vitrificada; nueva de acero roblonado	110
Tubería vieja de fundición	100
Tubería vieja de acero roblonado	95
Tubería vieja en mal estado	60-80

— *Ley de nudos:* El caudal que entra en un nudo debe igualar a la suma de los caudales que salen del nudo

$$\boxed{\Sigma Q = 0} \qquad \text{(suma algebraica)}$$

(ley de los nudos)

(Si esta ley no se cumpliese habría en el nudo un consumo o un suministro de fluido.)

— *Ley de las mallas:* La suma algebraica de las pérdidas de carga en una malla ha de ser igual a cero:

$$\boxed{\Sigma H_r = 0} \qquad (12\text{-}14)$$

(ley de las mallas)

(Si esta ley no se cumpliese en el punto de partida utilizado para recorrer la malla, habría dos presiones distintas.)

Resumen del método de Hardy Cross

— Sobre un croquis de la red se hace una distribución razonable de caudales dibujando con flechas los sentidos estimados.
— Se escribe para la tubería 1 la primera ley:

$$H'_{r1} = \beta_1 Q_1'^2 \qquad (12\text{-}15)$$

donde H'_{r1} — pérdida de carga en la tubería 1, *primera aproximación.*
β_1 — será cte. en todo el cálculo.
Q'_1 — caudal en la tubería 1, *primera aproximación.*

y se hace lo mismo con las restantes tuberías. Si se utiliza, por ejemplo, la Ec. (12-13)

$$\beta = \frac{R}{D^m}$$

— Se escribe la suma de las pérdidas para cada malla en la forma:

$$\Sigma H'_r = \Sigma \beta Q'^2 \qquad (12\text{-}16)$$

donde ΣH_r es una suma algebraica. Se escoge un sentido como positivo, por ejemplo, el de las agujas del reloj: las pérdidas correspondientes a los caudales cuyo sentido coincide con el elegido serán positivas y las correspondientes a los caudales que circulan en sentido contrario serán negativas. Normalmente en esta *primera aproximación* la tercera ley, $\Sigma H_r = 0$ no se cumplirá.
— Se corrige el caudal de todas las tuberías en un ΔQ, igual para todas, para conseguir que se cumpla la tercera ley. Así, por ejemplo, en la 1.ª tubería

$$Q''_1 = Q'_1 + \Delta Q \qquad (12\text{-}17)$$

donde Q''_1 — caudal de la 1.ª tubería, *segunda aproximación.* Por tanto, para cada tubería en virtud de las Ecs. (12-15) y (12-17) se tendrá en *segunda aproximación:*

$$H''_r = \beta Q''^2 = \beta(Q' + \Delta Q)^2 = \beta(Q'^2 + 2Q'\Delta Q)$$

despreciando el término en ΔQ^2, y en virtud de la ley de las mallas [Ec. (12-14)]

$$\Sigma H''_r = \Sigma \beta Q''^2 = \Sigma \beta Q'^2 + 2\Delta Q \Sigma \beta Q' = 0 \quad (1)$$

(1) Si se utiliza una fórmula del tipo (12-13), pero con n distinto de 2 se desarrollaría la expresión $\Sigma\beta(Q' + \Delta Q)^n$ por el binomio de Newton y despreciando todos los términos excepto los dos primeros se tendría:

$$\Sigma\beta(Q' + \Delta Q)^n = \Sigma\beta Q'^n + \Delta Q \Sigma \beta n Q'^{n-1} = 0$$

Al final obtendríamos, en vez de la Ec. (12-17), la siguiente:

$$\Delta Q = -\frac{\Sigma \beta Q'^2}{n \Sigma |\beta Q'^{n-1}|}$$

habiendo sacado ΔQ factor común por ser igual para todas las tuberías de la malla; de donde

$$\Delta Q = \frac{-\Sigma\, \beta\, Q'^2}{2\,\Sigma\,|\beta\, Q'|} = -\frac{\Sigma\, H_r}{2\,\Sigma\left|\dfrac{H_r}{Q'}\right|} \qquad (12\text{-}17)$$

habiendo utilizado la Ec. (12-15).

El numerador de (12-17) es una suma algebraica y el denominador una suma aritmética. De esta manera si ΔQ resulta positivo tendrá la corrección el mismo sentido de las agujas del reloj, o sea se sumará a Q' para obtener Q'' en cada tubería.

Como las tuberías que pertenecen a la vez a dos anillos distintos en esta segunda corrección reciben dos correcciones independientes, en esta segunda aproximación en general tampoco se verificará la tercera ley. Habrá que hacer una tercera aproximación y así sucesivamente.

Este procedimiento tiene la ventaja de que los errores en los cálculos tienen el mismo efecto que los errores en las suposiciones que se van haciendo y por tanto se corrigen automáticamente en el desarrollo del problema.

PROBLEMAS

12-1. *En el esquema, que acompaña este problema, $H = 10$ m. La temperatura del agua es 20°. Las tuberías son de 300, 200 y 250 mm respectivamente y sus longitudes de 400, 150 y 200 m respectivamente. Las tres tuberías son nuevas de fundición.*
Calcular el caudal.

Para resolver este problema del tipo inverso:

1.° Determinaremos una velocidad cualquiera, por ejemplo, la v_2 (véase figura), que es la más elevada.

2.° Aplicaremos la ecuación $Q = \dfrac{\pi D_2^2}{4} v_2$ para determinar el caudal.

1.° *Determinación de v_2*

La ecuación de Bernoulli entre las secciones A y B de la figura se expresa así:

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - H_{rA-B} = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$$

que se reduce a

$$z_A - z_B - H_{rA-B} = 0$$

y por tanto

$$H_{rA-B} = z_A - z_B = 10 \text{ m} \qquad (1)$$

Según lo dicho en la pág. 236, en este problema las pérdidas secundarias podrán despreciarse. (La tubería 1, por ejemplo, tiene 400 m de longitud y $400 > 1.000\, D_1 = 1.000 \cdot 0{,}3 = 300$.)

Aplicando la Ec. (12-2) tendremos:

$$H_r = H_{r_1} + H_{r_2} + H_{r_3} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} + \lambda_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{v_3^2}{2g} \qquad (2)$$

Asimismo aplicando la ecuación de continuidad [Ec. (12-3)] tendremos:

$$v_1^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 v_2^2 = \left(\frac{200}{300}\right)^4 v_2^2 = 0{,}1975\, v_2^2 \qquad (3)$$

$$v_3^2 = \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^4 v_2^2 = \left(\frac{200}{250}\right)^4 v_2^2 = 0{,}4096\, v_2^2$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (2) se obtiene, despejando v_2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{196}{\lambda_1 \cdot \dfrac{400}{0{,}3} \cdot 0{,}1975 + \lambda_2 \dfrac{150}{0{,}2} + \lambda_3 \dfrac{200}{0{,}25} \cdot 0{,}4096}}$$

y simplificando:

$$v_2 = \sqrt{\frac{196}{263{,}3\,\lambda_1 + 750\,\lambda_2 + 327{,}7\,\lambda_3}} \qquad (4)$$

Para hallar las λ's en el diagrama de Moody (véase apéndice) necesitamos conocer los números de Reynolds, lo cual, en este problema, como en todo problema inverso, no es todavía posible, porque no conocemos las velocidades v'. *En los problemas inversos hay que proceder por tanteos.*
En una primera aproximación estimemos:

$$\lambda_1' = 0{,}020 \qquad \lambda_2' = 0{,}022 \qquad \lambda_3' = 0{,}021$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (4) y utilizando a continuación las Ecs. (3), tendremos:

$$v_2' = \sqrt{\frac{196}{263{,}3 \cdot 0{,}020 + 750 \cdot 0{,}022 + 327{,}7 \cdot 0{,}021}}$$

$$= 2{,}616 \text{ m/s}$$
$$v_1' = 1{,}162 \text{ m/s}$$
$$v_3' = 1{,}674 \text{ m/s}$$

Con estos valores y con la ν_{agua} (a 20° C) $= 1{,}007 \cdot 10^{-6}$ m^2/s tendremos:

$$\text{Re}_1' = \frac{v_1' D_1}{\nu} = \frac{1{,}162 \cdot 0{,}3}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} = 346.200$$

$$\text{Re}_2' = \frac{v_2' D_2}{\nu} = \frac{2{,}616 \cdot 0{,}2}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} = 519.600$$

$$\text{Re}_3' = \frac{v_3' D_3}{\nu} = \frac{1{,}674 \cdot 0{,}25}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} = 415.600$$

Además, suponiendo para nuestras tuberías de fundición $k = 0{,}000259$ m, tendremos

$$\frac{k}{D_1} = \frac{0{,}000259}{0{,}3} = 0{,}0008633$$

$$\frac{k}{D_2} = \frac{0{,}000259}{0{,}2} = 0{,}001295$$

$$\frac{k}{D_3} = \frac{0{,}000259}{0{,}25} = 0{,}001036$$

Con los valores hallados de Re y los valores constantes para todo el problema de $\frac{k}{D}$ puede ya leerse el diagrama de Moody, obteniéndose:

$$\lambda_1'' = 0{,}0198 \qquad \lambda_2'' = 0{,}021 \qquad \lambda_3'' = 0{,}0205$$

y

$$v_2'' = \sqrt{\frac{196}{263{,}3 \cdot 0{,}0198 + 750 \cdot 0{,}021 + 327{,}7 \cdot 0{,}0205}}$$

$$= 2{,}661 \text{ m/s}$$
$$v_1'' = 1{,}183 \text{ m/s}$$
$$v_3'' = 1{,}703 \text{ m/s}$$

Además

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{2{,}661^2}{19{,}62} = 0{,}3609 \text{ m}$$
$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{1{,}183^2}{19{,}62} = 0{,}0713 \text{ m}$$
$$\frac{v_3^2}{2g} = \frac{1{,}703^2}{19{,}62} = 0{,}1478 \text{ m}$$

Podría demostrarse que este proceso es rápidamente convergente. Suponiendo, para abreviar, que estos valores obtenidos puedan considerarse definitivos, calculemos por separado las pérdidas de carga (primarias) en los tramos 1, 2 y 3:

$$H_{r_1} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}0198 \cdot \frac{400}{0{,}3} \cdot 0{,}0713 = 1{,}882 \text{ m}$$

$$H_{r_2} = \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}021 \cdot \frac{150}{0{,}2} \cdot 0{,}3609 = 5{,}684 \text{ m}$$

$$H_{r_3} = \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}0205 \cdot \frac{200}{0{,}25} \cdot 0{,}1478 = 2{,}424 \text{ m}$$

$$\Sigma H_r \ldots = 9{,}99 \text{ m} \simeq 10$$

que concuerda satisfactoriamente con la Ec. (1).

2.° *Determinación de Q*

$$Q = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2 = \frac{\pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 2{,}661}{4}$$

$$= 0{,}0836 \text{ m}^3/\text{s} = 83{,}6 \text{ l/s}$$

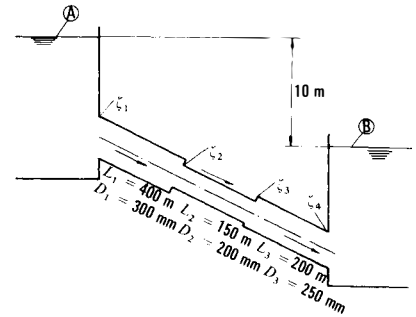
Con todos estos datos se puede construir si se desea un *gráfico de energías* de la manera que se indicó en la Sec. 11.6 y en la Fig. (11-16).

Nota final. Teniendo en cuenta las pérdidas secundarias (véase figura), se tendría:

$$H_r = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_3 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_4 \frac{v_3^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g}$$

donde $\zeta_1 = 0{,}5$ (desagüe de un embalse; Sec. 11.3.1)
$\zeta_2 = 0{,}32$ (contracción brusca; Sec. 11.3.3)
$\zeta_3 = 0{,}1296$ (ensanchamiento brusco; Sec. 11.3.2)
$\zeta_4 = 1$ (desagüe en un embalse; Sec. 11.3.2).

A continuación se utilizarían las mismas Ecs. (3) y se llegaría a una fórmula análoga a la Ec. (4), aplicándose a continuación el mismo método de las aproximaciones sucesivas comenzando los tanteos con los últimos valores λ_1'', λ_2'', λ_3'' anteriormente obtenidos.



PROB. 12-1

12-2. *En el esquema de la figura todas las tuberías son de fundición ($k = 1$ mm). El fluido es petróleo de viscosidad cinemática* $\nu = 0{,}25 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$.

Calcular la pérdida de carga entre los dos puntos y la distribución del caudal en las tres tuberías.

Siguiendo el procedimiento indicado en la Sec. 12-3, se tendrá:

$$\frac{k}{D_1} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \qquad \frac{k}{D_2} = \frac{1}{75} = 0{,}0133 \qquad \frac{k}{D_3} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Primer tanteo

Suponiendo *en primera aproximación* que λ no depende del número de Reynolds, se tendrá leyendo el diagrama de Moody (o mejor, mediante la 2.ª ecuación de Kármán-Prandtl):

$$\lambda_1' = 0{,}0486 \qquad \lambda_2' = 0{,}0418 \qquad \lambda_3' = 0{,}0379$$

$$\alpha_1' = \frac{\pi \cdot 0{,}050^2}{4} \sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}050}{0{,}0486 \cdot 150}} = 0{,}00072$$

$$\alpha_2' = \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4} \sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}075}{0{,}0418 \cdot 90}} = 0{,}002763$$

$$\alpha_3' = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}1}{0{,}0379 \cdot 200}} = 0{,}003996$$

Aplicando la Ec. (12-8) y despejando H_r se tendrá:

$$H_r' = \left(\frac{Q}{\Sigma \alpha_i'}\right)^2 = \left(\frac{0{,}020}{0{,}00072 + 0{,}002763 + 0{,}003996}\right)^2 =$$

$$= 7{,}151 \text{ m}$$

y siendo:

$$H_r = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \qquad v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda} \frac{H_r}{L} \frac{D}{}}$$

se tendrá:

$$v_1' = \sqrt{\frac{2g \cdot 7{,}151}{0{,}0486}\frac{0{,}050}{150}} = 0{,}981 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2' = \sqrt{\frac{2g \cdot 7{,}151}{0{,}0418}\frac{0{,}075}{90}} = 1{,}672 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_3' = \sqrt{\frac{2g \cdot 7{,}151}{0{,}0379}\frac{0{,}1}{200}} = 1{,}360 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Con los valores conocidos de v_1 v_2 v_3 podemos calcular los números de Reynolds provisionales:

$$\text{Re}_1' = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{0{,}981 \cdot 0{,}050}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 1{,}962 \cdot 10^3$$

$$\text{Re}_2' = \frac{1{,}672 \cdot 0{,}075}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 5{,}016 \cdot 10^3$$

$$\text{Re}_3' = \frac{1{,}360 \cdot 0{,}1}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 5{,}440 \cdot 10^3$$

$$\lambda_1'' = \frac{64}{\text{Re}_1'} = 0{,}03262 \qquad (\text{Re} < \text{Re}_{crit})$$

Mediante el diagrama de Moody (o mejor mediante la ecuación de Colebrook-White) se obtienen:

$$\lambda_2'' = 0{,}05006$$
$$\lambda_3'' = 0{,}04722$$

Segundo tanteo

$$\alpha_1'' = \frac{\pi \cdot 0{,}050^2}{4}\sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}050}{0{,}03262 \cdot 150}} = 0{,}0009$$

$$\alpha_2'' = \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4}\sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}075}{0{,}05006 \cdot 90}} = 0{,}0025$$

$$\alpha_3'' = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4}\sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}1}{0{,}04722 \cdot 200}} = 0{,}0036$$

$$H_r'' = \left(\frac{0{,}020}{0{,}0009 + 0{,}0025 + 0{,}0036}\right)^2 = 8{,}1633 \text{ m}$$

$$v_1'' = \sqrt{\frac{2g \cdot 8{,}1633}{0{,}03262} \cdot \frac{0{,}050}{150}} = 1{,}2793 \text{ m/s}$$

$$v_2'' = \sqrt{\frac{2g \cdot 8{,}1633}{0{,}05006} \cdot \frac{0{,}075}{90}} = 1{,}6329 \text{ m/s}$$

$$v_3'' = \sqrt{\frac{2g \cdot 8{,}1633}{0{,}04722} \cdot \frac{0{,}1}{200}} = 1{,}3023 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_1'' = \frac{1{,}2793 \cdot 0{,}050}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 2{,}5586 \cdot 10^3$$

$$\text{Re}_2'' = \frac{1{,}6329 \cdot 0{,}075}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 4{,}8987 \cdot 10^3$$

$$\text{Re}_3'' = \frac{1{,}3023 \cdot 0{,}1}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 5{,}2092 \cdot 10^3$$

$$\lambda_1'' = 0{,}060806$$
$$\lambda_2'' = 0{,}050242$$
$$\lambda_3'' = 0{,}046956$$

Un tanteo ulterior es innecesario.
Por tanto:

$$\alpha_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}050^2}{4}\sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}050}{0{,}060806 \cdot 150}} = 0{,}00064$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4}\sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}075}{0{,}050242 \cdot 90}} = 0{,}00252$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4}\sqrt{\frac{2g \cdot 0{,}1}{0{,}046956 \cdot 200}} = 0{,}00359$$

$$H_r = \left(\frac{0{,}020}{0{,}00064 + 0{,}00252 + 0{,}00359}\right)^2 = 8{,}779 \text{ m}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g \cdot 8{,}779}{0{,}060806} \cdot \frac{0{,}050}{150}} = 0{,}97171 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g \cdot 8{,}779}{0{,}050242} \cdot \frac{0{,}075}{90}} = 1{,}69024 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2g \cdot 8{,}779}{0{,}046956} \cdot \frac{0{,}1}{200}} = 1{,}35429 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} \cdot 0{,}97171 = 0{,}00191 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

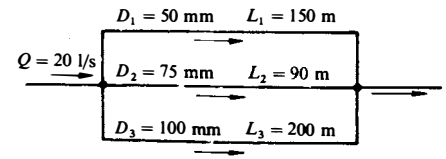
$$Q_2 = \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4} \cdot 1{,}69024 = 0{,}00747 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_3 = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \cdot 1{,}35429 = 0{,}01064 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0{,}02001 \simeq 0{,}020 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Resultados:

$$H_r = 8{,}779 \text{ m}$$
$$Q_1 = 0{,}00191 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_2 = 0{,}00747 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_3 = 0{,}01064 \text{ m}^3/\text{s}$$



PROB. 12-2

12-3. *Los tres recipientes A, B y C de la figura están unidos por los conductos Ax, xB y xC que son de hormigón. Los demás datos se tomarán de la figura.*
Calcular h_x, Q_A, Q_B y Q_C.

Si suponemos, como en la figura, que $h_A > h_x$, $h_x > h_C$ y $h_x > H_B$, los recipientes B y C se alimentarán del recipiente A.

Teniendo en cuenta el significado de las α_i [Ec. (12-7)] se determinan sus valores mediante el diagrama de Moody.

Este procedimiento obligaría a proceder por tanteos, porque los coeficientes α dependen de los caudales que son desconocidos.

Para tubos de hormigón en buen estado y en las condiciones ordinarias de la explotación sugiere Pabloski los valores siguientes en función del diámetro y de la longitud de la tubería:

VALORES DE $\alpha\sqrt{L}$ *PARA LAS TUBERIAS DE HORMIGON EN BUEN ESTADO EN FUNCION DEL DIAMETRO*

D (m)	$\alpha\sqrt{L}$ (m^3/s)	D (m)	$\alpha\sqrt{L}$ (m^3/s)
0,050	0,00987	0,350	1,684
0,075	0,0287	0,400	2,397
0,100	0,0614	0,450	4,259
0,125	0,111	0,500	4,324
0,150	0,179	0,600	6,999
0,200	0,384	0,700	10,517
0,250	0,692	0,800	14,965
0,300	1,121	0,900	20,430
		1,000	26,485

De esta tabla se deduce:

$$\alpha_1 = 0{,}00566\ \frac{m^{5/2}}{s} \qquad \alpha_2 = 0{,}00768\ \frac{m^{5/2}}{s} \qquad \alpha_3 = 0{,}004622\ \frac{m^{5/2}}{s}$$

Dando una serie de valores a la altura piezométrica h_x de modo que se cumpla la condición de la figura, calcularíamos mediante las Ecs. (12-10) los caudales:

$$Q_A^2 = (h_A - h_x)\,\alpha_1^2$$
$$Q_B^2 = (h_x - h_B)\,\alpha_2^2$$
$$Q_C^2 = (h_x - h_C)\,\alpha_3^2$$

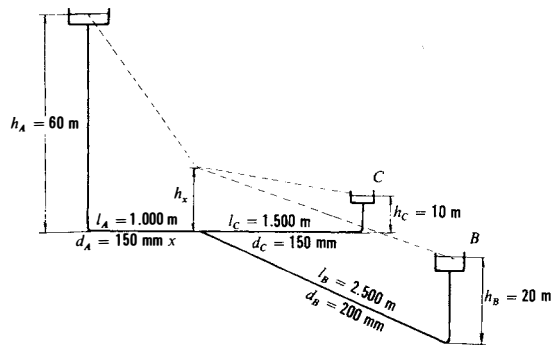
A continuación se trazarán las curvas $Q_A = f(h_x)$ y $Q_B + Q_C = f(h_x)$. El punto de intersección de estas dos curvas nos da la solución del problema; siendo $Q_A = Q_B + Q_C$.

La solución analítica consiste en resolver el sistema formado con las 3 Ecs. (12-10) y la ecuación

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

para hallar las incógnitas, resultando

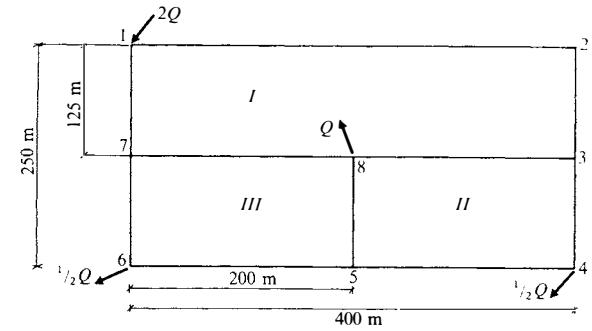
$$h_x = 24{,}45 \text{ m}$$
$$Q_A = 0{,}03375 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_B = 0{,}0162 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_C = 0{,}01757 \text{ m}^3/\text{s}$$



PROB. 12-3

12-4. *Las pérdidas en todas las tuberías de la figura son proporcionales al cuadrado de la velocidad. Todas las tuberías son de fundición. Las dimensiones de la red pueden verse en la figura.* $Q = 20$ *l/s. Los diámetros en mm son:* $d_{12} = 300$; $d_{23} = d_{78} = d_{83} = 200$; $d_{45} = d_{56} = d_{67} = 250$; $d_{34} = d_{58} = 150$. *Por las tuberías circula agua. La presión en 1 es 4 bar.*
Calcular: a) distribución de caudales; b) presión en 8.

a) Distribución de caudales



PROB. 12-4, 1

Diámetros de las tuberías: $D_{12} = 300$ mm; $D_{23} = D_{78} = D_{83} = 200$ mm; $D_{45} = D_{56} = D_{67} = D_{71} = 250$ mm; $D_{34} = D_{58} = 150$ mm.

Rugosidades relativas $\varepsilon = \frac{k}{D}$:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1{,}1}{300} = 3{,}667 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{78} = \varepsilon_{83} = \frac{1{,}1}{200} = 5{,}50 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{45} = \varepsilon_{56} = \varepsilon_{67} = \varepsilon_{71} = \frac{1{,}1}{250} = 4{,}40 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{34} = \varepsilon_{58} = \frac{1{,}1}{150} = 7{,}333 \cdot 10^{-3}$$

Mediante el diagrama de Moody (o mejor mediante la 2.ª ecuación de Kármán-Prandtl) se obtienen los siguientes valores:

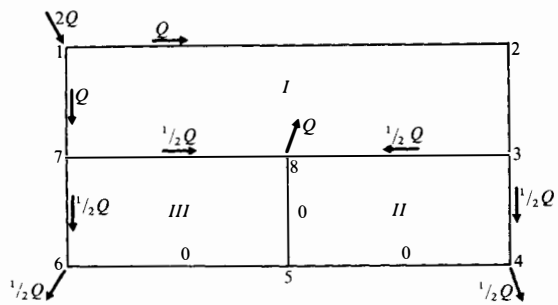
$$\lambda_{12} = 0{,}02769 \qquad \lambda_{45} = \lambda_{56} = \lambda_{67} = \lambda_{71} = 0{,}02921$$
$$\lambda_{23} = \lambda_{78} = \lambda_{83} = 0{,}03125 \qquad \lambda_{34} = \lambda_{58} = 0{,}03420$$

Valores de β

Mediante la ecuación $\beta = \frac{8}{\pi^2 g} \cdot \frac{L\lambda}{D^5} = 0{,}08263 \frac{L\lambda}{D^5}$ se obtienen los valores de β siguientes:

$$\beta_{12} = 376{,}615$$
$$\beta_{23} = 1.008{,}629$$
$$\beta_{78} = \beta_{83} = 1.613{,}806$$
$$\beta_{45} = \beta_{56} = 494{,}291$$
$$\beta_{67} = \beta_{71} = 308{,}932$$
$$\beta_{34} = \beta_{58} = 4.651{,}586$$

Suponemos la distribución provisional siguiente de caudales, que cumple la ley de los nudos:

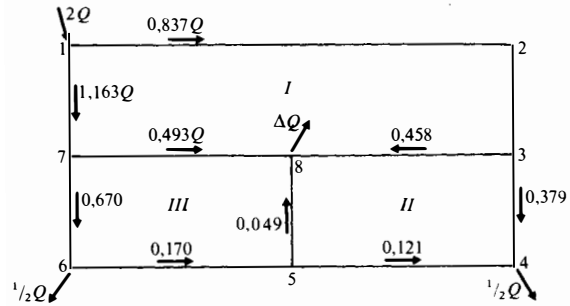


PROB. 12-4, 2

PRIMERA CORRECCION

Anillo	*Rama*	β	Q	$2\beta Q$	βQ^2	ΔQ
I	1-2	376,615	1	753,230	376,615	
	2-3	1.008,629	1	2.017,258	1.008,629	
	*3-8	1.613,806	0,5	1.613,806	403,452	
	*8-7	1.613,806	−0,5	1.613,806	−403,452	
	7-1	308,932	−1	617,864	−308,932	
				Σ = 6.615,964	Σ = 1.076,311	−0,163
II	*8-3	1.613,806	−0,5	1.613,806	−403,452	
	3-4	4.651,586	0,5	4.651,586	1.162,897	
	4-5	494,291	0	0	0	
	*5-8	4.651,586	0	0	0	
				Σ = 6.265,392	Σ = 759,445	−0,121
III	*7-8	1.613,806	0,5	1.613,806	403,451	
	*8-5	4.651,586	0	0	0	
	5-6	494,291	0	0	0	
	6-7	308,932	−0,5	308,932	−77,233	
				Σ = 922,738	Σ = 326,218	−0,170

La nueva distribución de caudales será:

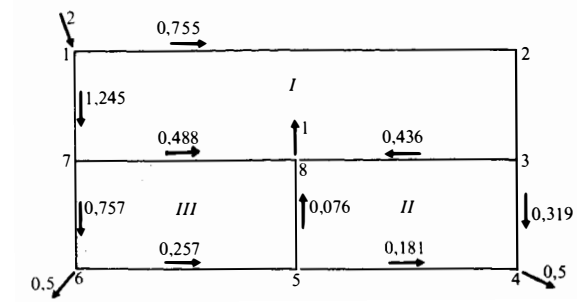


PROB. 12-4, 3

SEGUNDA CORRECCION
(Los valores de β son siempre los mismos)

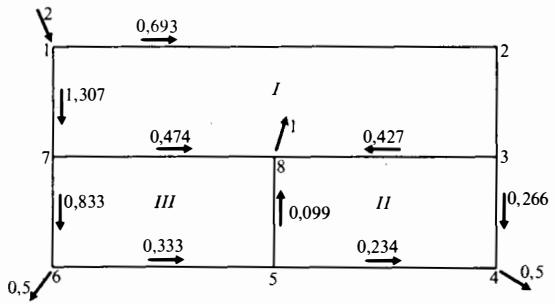
Anillo	*Rama*	Q	$2\beta Q$	βQ^2	ΔQ
I	1-2	0,837	630,454	263,845	
	2-3	0,837	1.688,445	706,614	
	*3-8	0,458	1.478,246	338,518	
	*8-7	−0,493	1.591,213	−392,234	
	7-1	−1,163	718,576	−417,852	
			Σ = 6.106,934	Σ = 498,893	−0,082
II	*8-3	−0,458	1.478,246	−338,518	
	3-4	0,379	3.525,902	668,158	
	4-5	−0,121	119,618	− 7,237	
	*5-8	0,049	455,855	11,168	
			Σ = 5.579,621	Σ = 333,571	−0,060
III	*7-8	0,493	1.591,213	392,234	
	*8-5	−0,049	455,855	− 11,168	
	5-6	−0,170	168,059	− 14,285	
	6-7	−0,670	413,969	−138,680	
			Σ = 2.629,096	Σ = 228,101	−0,087

La nueva distribución de caudales será:



PROB. 12-4, 4

Repitiendo una y otra vez el mismo proceso se llega a la siguiente distribución de caudales que se tomará como definitiva, ya que la reducción ulterior del error exigiría mayor número de iteraciones. Por lo demás es fácil programar este tipo de problemas en un ordenador y obtener la solución con el grado de aproximación deseado.



PROB. 12-4, 5

Anillo	Rama	Q	2β Q	β Q²	ΔQ
I	1-2	0,693	Σ = 521,988	180,869	
	2-3	0,693	1.397,960	484,393	
	*3-8	0,427	1.378.190	294.244	
	*8-7	−0,474	1.529.888	−362.583	
	7-1	−1,307	807,548	−527,733	
			Σ = 5.635,575	69,189	−0,012
II	*8-3	−0,427	1.378,190	−294,244	
	3-4	0,266	2.474,644	329,128	
	4-5	−0,234	231.328	− 27,065	
	*5-8	0,099	921,014	45,590	
			Σ = 5.005,176	53.409	−0,011
III	*7-8	0,474	1,529,888	362,584	
	*8-5	−0,099	921,014	− 45,590	
	5-6	−0,333	329,198	− 54,811	
	6-7	−0,8333	514,681	−214,365	
			Σ = 3.294,781	47,817	−0,015

b) Presión en el punto 8

$$p_8 = p_1 - H_{r_{1-8}}\rho g$$
$$H_{r_{ij}} = \beta_{ij} Q_{ij}^2$$

Para reducir el error calcularemos la caída de presión $H_{r_{1-8}}$ por dos caminos y hallaremos la media.

$$H'_{r_{1-8}} = H_{r_{1-2}} + H_{r_{2-3}} + H_{r_{3-8}} = (\Sigma\beta Q^2)(0{,}02\ \text{m}^3/\text{s})$$
$$H_{1-8} = (180{,}869 + 484{,}393 + 294{,}244)\cdot 0{,}02^2 = 0{,}384\ \text{m}$$

$$H''_{r_{1-8}} = H_{r_{1-7}} + H_{r_{7-8}}$$
$$H_{1-8} = (527{,}733 + 362{,}583)\cdot 0{,}02^2 = 0{,}356\ \text{m}$$

$$H_{r_{1-8}} = \frac{0{,}384 + 0{,}356}{2} = 0{,}370\ \text{m}$$

$$p_8 = p_1 - 0{,}370\cdot 1.000\cdot 9{,}81 = 4\cdot 10^5 - 0{,}370\cdot 1.000\cdot 9{,}81 = 396.370{,}3\ \text{N/m}^2 \simeq 3{,}964\ \text{bar}$$

12-5. *Se conectan en serie dos tuberías lisas de 150 y 100 mm cuyos ejes están en un mismo plano horizontal. La tubería de 100 mm tiene 20 m de longitud y termina en un depósito en que el nivel de agua se haya 4 m por encima del eje de la tubería. En la tubería de 150 mm, 20 m aguas arriba de la unión con la otra tubería la presión es 2,5 bar. Temperatura del agua 10° C.*

Calcular el caudal.

12-6. *Entre dos depósitos que mantienen un desnivel de 40 m circula agua por tres tuberías en serie de 200, 150 y 100 mm de diámetro respectivamente, cada una de 400 m de longitud. Todos los cambios de sección son bruscos. En todas las tuberías* $\lambda = 0{,}02$.

Calcular:

1) el caudal;

2) trazar la línea de energía en los dos casos siguientes:

a) despreciando las pérdidas secundarias;

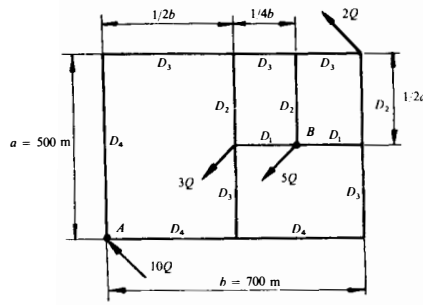
b) teniendo en cuenta estas pérdidas.

12-7. *Una tubería de 2 km de longitud une dos depósitos. En ella se establece un caudal de 500.000 l/h, gracias a la diferencia de nivel entre ambos depósitos. El primer km de la conducción tiene un diámetro de 300 mm y en él* $\lambda = 0{,}02$. *El segundo km tiene un diámetro de 500 mm, y en él* $\lambda = 0{,}018$. *Todos los cambios de sección son bruscos.*

Calcular la diferencia de nivel entre ambos depósitos.

12-8. *Por la red de la tubería circula agua;* $Q = 1.500$ *l/min. Las tuberías de 600 y 400 mm son de cemento alisado (*$k' = 0{,}5$ *mm) y las tuberías de 300 y 450 mm de fundición (*$k'' = 1{,}2$ *mm). En todas las tuberías la pérdida de carga es proporcional al cuadrado de la velocidad (régimen declaradamente turbulento). La presión en A es 5 bar;* $d_1 = 300$ *mm;* $d_2 = 400$ *mm;* $d_3 = 450$ *mm y* $d_4 = 600$ *mm.*

Calcular los caudales que circulan por las diferentes ramas y la presión en B.



PROB. 12-8

12-9. *Se trasvasa agua de un depósito a otro por unión brusca de dos tuberías de fundición corriente nueva en serie, una de 200 mm y 25 m de longitud y la otra de 400 mm y 50 m de longitud, en la cual hay además instalada una válvula de compuerta medio abierta. La diferencia del nivel del agua en ambos depósitos abiertos a la atmósfera es de 10 m. La temperatura del agua es de 20° C.*

Calcular el caudal.

12-10. *El caudal de agua antes del punto A y después del punto B en el esquema de la Fig. 12-3 es* $Q = 250$ *l/s. Las tuberías se supondrán lisas, se despreciarán las pérdidas secundarias y se supondrá* $\nu = 1{,}007\cdot 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$.

Determinar la pérdida de presión entre los puntos A y B y los caudales Q_1, Q_2 *y* Q_3, *si* $D_1 = 300$ *mm,* $L_1 = 500$ *m,* $D_2 = 250$ *mm,* $L_2 = 300$ *m,* $D_3 = 400$ *mm,* $L_3 = 800$ *m.*

12-11. *Entre dos depósitos, cuyos niveles superiores tienen una diferencia de cotas de 4 m, circula agua por una tubería de 50 m de longitud. Los primeros 30 m tienen un diámetro de 100 mm y los últimos 20 m un diámetro de 50 mm. El coeficiente de pérdida de carga puede tomarse igual a* $\lambda = 0{,}02$ *para ambas tuberías. Todos los cambios de sección son bruscos.*

Calcular:

a) el caudal;

b) trazar la línea de energía.

12-12. *En una sección transversal de una tubería horizontal de 100 mm un manómetro marca una altura de presión de 15 m; 20 m aguas abajo se conecta una tubería de 50 mm y 30 m de longitud. Ambas tuberías son de fundición. La última está conectada a un tanque hermético, en cuyo nivel superior reina una altura de presión de 5 m. El eje de la tubería se encuentra 5 m por debajo del nivel del líquido en el depósito. Todas las transiciones son bruscas y la viscosidad cinemática del líquido es* $\nu = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$ m^2/s.

Calcular el caudal.

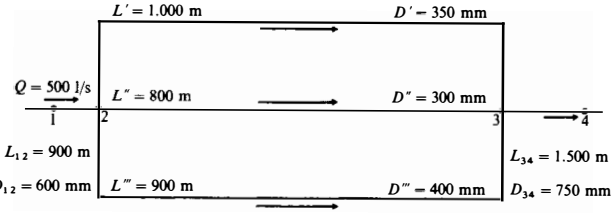
12-13. *Todas las tuberías de la figura son de fundición. El caudal total de agua* ($\nu = 1{,}308 \cdot 10^{-6}$ m^2/s) *es de 500 l/s. Se despreciarán las pérdidas secundarias.*

Calcular:

a) la pérdida de carga entre los puntos 1 y 4 y el caudal que pasa por cada tubería;

b) manteniendo la misma pérdida de carga entre 2 y 3, el tanto por ciento de aumento en la capacidad del sistema que se obtendría añadiendo en paralelo otra tubería de 300 mm y 800 m de longitud entre los puntos 2 y 3;

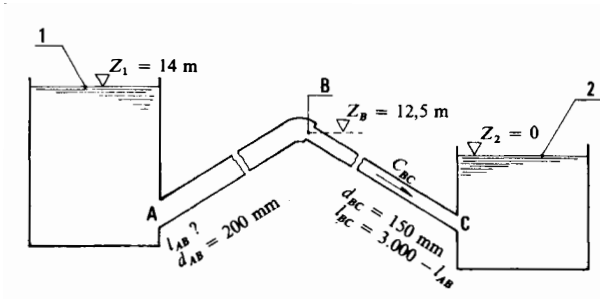
c) el diámetro de una sola tubería entre los puntos 2 y 3 que, reemplazando a las tres tuberías de la figura, mantuviera el mismo caudal con la misma pérdida de carga entre los puntos 2 y 3, siendo la longitud de la tubería única de 800 m y el material fundición.



PROB. 12-13

12-14. *Se conectan dos depósitos, cuya diferencia de nivel es 14 m por una tubería ABC, cuyo punto más elevado B se encuentra 1,5 m por debajo del nivel del líquido en el depósito superior (véase figura). El trozo AB tiene un diámetro de 200 mm y el BC de 150 mm. El coeficiente* $\lambda = 0{,}02$ *para ambas ramas. La longitud total de la tubería es de 3 km.*

Calcular la longitud máxima permisible del trozo AB si la altura de presión en B ha de ser igual o superior a -3 *m con respecto a la presión atmosférica. Despréciense las pérdidas secundarias.*



PROB. 12-14

12-15. *El desagüe de un depósito de agua a la atmósfera se realiza por un conducto que consta de tres tuberías en serie de 500, 300 y 400 mm respectivamente. La tubería de 500 mm está conectada al depósito. Cada tubería es de 100 m de longitud. Las tuberías son de fundición y el agua puede suponerse a 10° C. El eje de la tubería a la salida se encuentra 10 m por debajo del nivel del agua en el depósito.*

Calcular el caudal.

12-16. *En una transmisión de potencia a distancia por medio de agua a presión se trata de transmitir 200 kW a 8 km de distancia mediante una serie de tuberías horizontales de 100 mm, en las cuales el coeficiente de rozamiento* λ *se tomará igual a 0,03. Las tuberías están alimentadas por un acumulador hidráulico en el que se mantiene una presión de 70 bar. Se debe asegurar un rendimiento no inferior al 90%.*

Calcular el número mínimo de tuberías que se necesitan.

12-17. *Un depósito desagua a la atmósfera por una tubería de 100 mm de 30 m de longitud, que tiene un codo de 90° y de 0,15 m de radio interior y desagua en un punto situado 5 m por debajo del nivel de agua en el depósito. La tubería es de fundición.*

Calcular el caudal.

12-18. *Una tubería horizontal por la que circula un caudal de agua de 25 l/s consta de dos tramos, el primero de 2.000 m de tubería de 150 mm y el segundo de 1.000 m de 100 mm;* $\lambda = 0{,}028$.

Calcular, despreciando las pérdidas secundarias, la caída de presión en cada tramo.

13. *Resistencia de superficie y de forma en un cuerpo que se mueve en un fluido: Navegación aérea y marítima*

13.1. INTRODUCCION

En el presente capítulo se estudia el mismo *problema de resistencia;* pero recíproco al problema estudiado en los Caps. 9 a 12 —*fluido en movimiento* en el interior de un *contorno en reposo* (tubería, canal)—, a saber: *contorno en movimiento* (avión, submarino, barco) en un *fluido en reposo.*

El estudio de la resistencia de los contornos en movimiento ha progresado gracias en gran parte a los ensayos con modelos reducidos, que se estudiaron en el Cap. 7.

Si en el ensayo de un avión por ejemplo se suma al conjunto contorno y fluido (aire) una velocidad igual y de sentido contrario a la velocidad de vuelo, lo que se hace casi siempre en los túneles aerodinámicos, como el de la Fig. 7-6, el avión queda en reposo y el fluido se mueve: el segundo caso se ha reducido al primero, *fluido en movimiento en un contorno en reposo.* El que en una tubería el fluido se mueva en el interior del contorno, y en un ala de avión en el exterior es aún más accidental. *Esencialmente* el problema recíproco tratado en este capítulo es el mismo que el problema directo tratado en los Caps. 9 a 12.

El *problema recíproco* de la resistencia de un contorno en movimiento en un fluido en reposo es importantísimo en ingeniería naval y aeronáutica. Como este texto está dirigido principalmente a ingenieros mecánicos, nuestra principal atención se ha dirigido al *problema directo;* pero basándonos en las ideas generales expuestas en el Cap. 8 y en la analogía mencionada, es muy fácil y conveniente resumir el problema recíproco en el presente capítulo.

13.2. IDEAS GENERALES SOBRE LA RESISTENCIA DE UN CUERPO QUE SE MUEVE EN UN FLUIDO

1. Si el cuerpo se mueve en un *fluido ideal* la resistencia que experimenta es cero: paradoja de D'Alembert (Sec. 8.2). En el problema directo del movimiento de un fluido ideal en una tubería horizontal no se consumiría más energía que la necesaria para acelerar el fluido hasta una velocidad correspondiente al caudal que se quiera transportar.
2. Si el contorno (avión, submarino) está totalmente sumergido en un *fluido real,* por lo menos en la capa límite (Sec. 8.3) se origina una *resistencia de superficie* de la misma naturaleza que la que se origina en conductos cerrados (tuberías: Cap. 9) o en conductos abiertos (canales: Cap. 10).
3. Toda la teoría expuesta sobre la capa límite (Sec. 8.3) es aplicable, pues, tanto al *problema recíproco* (fluido en reposo, contorno en movimiento) como al *directo* (fluido en movimiento, contorno en reposo).
4. En el *problema recíproco* se dan también los dos tipos de *flujo laminar y turbulento* (Sec. 8.4). Se aplica también lo estudiado en esa misma sección referente a la *capa límite laminar y turbulenta* y a la transición de una a otra; así como lo estudiado acerca del número de Reynolds (Sec. 8.6) y del *número crítico de Reynolds* (Sec. 8.7). Nótese, sin embargo, que el valor numérico del número crítico de Reynolds dependerá de la longitud característica que se emplee para definirlo.
5. El fenómeno del desprendimiento de la capa límite, estudiado en conexión con la Fig. 8-3 *c*, juega en el fenómeno de la resistencia de un cuerpo que se mueve un papel fundamental.
6. Con el fenómeno del desprendimiento está íntimamente ligada la resistencia de forma, cuya importancia en el *problema directo* se vio en el Cap. 11, en el que se hizo el estudio de las *pérdidas secundarias.*
7. El *recíproco* de los problemas estudiados en dicho capítulo y en particular lo referente a ensanchamientos bruscos y suaves (Sección 11.3.2) y a las contracciones bruscas y suaves (Sec. (11.3.3) es la diferencia de resistencia entre una forma *roma* y una bien *fuselada*, que la Fig. 8-19 puso ya en evidencia.
8. Si el contorno está sumergido sólo parcialmente en el fluido, aparecen los fenómenos de gravedad, como en el *problema directo*, en casos tales como el flujo sobre vertederos que se estudiarán más adelante (Sec. 14.5). Estos fenómenos aparecen en el *problema recíproco* en la navegación de superficie, o sea en los barcos donde aparece una *tercera resistencia* debida no a la viscosidad, sino a la gravedad. El movimiento del barco engendra *olas* que absorben energía, lo que se traduce en un aumento de resistencia que experimenta el barco al movimiento. Es decir, en este caso existen tres tipos de resistencia:
   — resistencia debida directamente a la viscosidad: *resistencia de superficie;*
   — resistencia debida indirectamente a la viscosidad: *resistencia de forma;*
   — resistencia debida a la gravedad: *resistencia por formación de olas.*
9. En particular las dos ecuaciones de Kármán-Prandtl para tuberías lisas y rugosas [Ecs. (9-20) y (9-25)] están deducidas a partir de las ecuaciones de los mismos autores de distribución de velocidades en la capa laminar, que se aplican al *problema recíproco.* Lo mismo se diga de la ecuación siguiente de Kárman-Schoenherr,

ECUACION DE KÁRMÁN-SCHOENHERR

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{c_w}} = 4{,}13 \log_{10} (\mathrm{Re} c_w)} \qquad (13\text{-}1)$$

(rozamiento de superficie, régimen turbulento)

para el rozamiento de superficie en la capa límite turbulenta.

En los laboratorios de ensayos de modelos se utiliza constantemente la fórmula general, análoga a la ecuación fundamental para el problema directo [Ec. (9-4)], que vamos a deducir en la sección siguiente.

13.3 FORMULA GENERAL DE RESISTENCIA Y COEFICIENTE ADIMENSIONAL DE ARRASTRE

La *fórmula general de resistencia* puede deducirse mediante el método conocido con el nombre de *análisis dimensional.*

La experiencia demuestra que la fuerza de resistencia o *arrastre* W es función de las siguientes variables:

$$W = f(v_\infty, L, A, \rho, \eta) \tag{13-2}$$

donde v_∞ — *velocidad de la corriente imperturbada* teóricamente en el infinito (Fig. 13-1)
L — *longitud característica* que da el tamaño del cuerpo: por ejemplo, la cuerda L en el perfil de ala de avión de la Fig. 13-1
A — área característica del cuerpo: por ejemplo, el área proyectada o producto de la cuerda por la luz en el perfil de ala de avión de la Fig. 13-1
ρ — densidad
η — viscosidad dinámica.

La Ec. (13-2) puede escribirse en la forma siguiente:

$$\frac{W}{A} = C v_\infty^k L^m \rho^n \eta^s \tag{13-3}$$

donde C — constante que depende de la forma (no del tamaño) del cuerpo y de su posición con relación a la corriente: ángulo de ataque, α en la Fig. 13-1.
k, m, n y s — exponentes a determinar por el *análisis dimensional.*

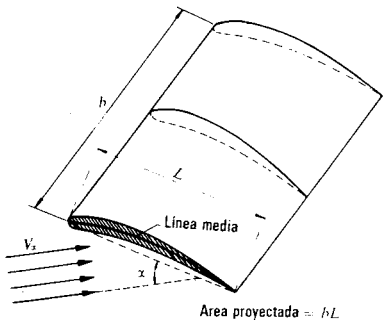


FIG. 13-1. *Perfil de ala de avión* con sus parámetros característicos.

Como la Ec. (13-3), lo mismo que cualquier ecuación física ha de ser *dimensionalmente homogénea*, se tendrá, utilizando como dimensiones fundamentales M, L y T:

$$[M][L]^{-1}[T]^{-2} = [LT^{-1}]^k [L]^m [ML^{-3}]^n [ML^{-1}T^{-1}T^{-1}]^s$$

o sea

$$[M][L]^{-1}[T]^{-2} = [M]^{n+s}[L]^{k+m-3n-s}[T]^{-k-s}$$

y como el primer miembro de esta última ecuación ha de ser *dimensionalmente* igual al segundo:

$$\begin{aligned} n + s &= 1 \\ k + m - 3n - s &= -1 \\ -k - s &= -2 \end{aligned}$$

tres ecuaciones con cuatro incógnitas, que nos permiten despejar tres de ellas en función de la cuarta, por ejemplo de s:

$$n = 1 - s, \quad k = 2 - s \quad \text{y} \quad m = -s$$

llevando estos valores a la fórmula 13-3, se tiene:

$$\frac{W}{A} = C v_\infty^{2-s} L^{-s} \rho^{1-s} \eta^s$$

y

$$\frac{W}{A} = C \frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot 2\left(\frac{v_\infty L \rho}{\eta}\right)^{-s}$$

y, despejando W,

$$W = f(\mathrm{Re})\, CA \frac{\rho v_\infty^2}{2} \tag{13-4}$$

donde Re — número de Reynolds
$f(\mathrm{Re}) = 2\left(\frac{v_\infty L \rho}{\eta}\right)^{-s}$ función desconocida de Re (porque s no es conocido) que se deberá obtener experimentalmente.

Haciendo

$$c_w = C f(\mathrm{Re}) \tag{13-5}$$

donde c_w — coeficiente adimensional de arrastre, se obtiene finalmente la

FORMULA GENERAL DE RESISTENCIA

$$\boxed{W = c_w A \rho \frac{v_\infty^2}{2}} \tag{13-6}$$

donde W — resistencia o arrastre
c_w — coeficiente adimensional de arrastre
A — área característica (bL en la Fig. 13-1)
$\rho \frac{v_\infty^2}{2}$ — presión dinámica.

Observaciones sobre la fórmula general de resistencia [Ec. (13-6)]

1.ª Esta ecuación es análoga a la ecuación de Darcy-Weisbach [Ec. (9-4)] y de fecundas aplicaciones como aquélla.

— c_w juega el papel de $\lambda L/d$, ya que depende de la forma (rugosidad, longitud y diámetro en el caso de la tubería) y del número de Reynolds, Re.
— $\rho v_\infty^2/2$, presión dinámica, juega en la Ec. (13-6) papel análogo a la altura de velocidad, $v^2/2g$ en la Ec. (9-4).

2.ª La Ec. (13-6), recordando la definición de número de Euler, $\mathrm{Eu} = \frac{v}{\sqrt{2\Delta p/\rho}}$ [Ec. 7-10)] y que $\frac{W}{A}$ tiene las dimensiones de una presión y teniendo en cuenta la Ec. (13-5), se puede poner en la forma siguiente

$$\frac{W/A}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{1}{\mathrm{Eu}^2} = C\, f(\mathrm{Re})$$

que tiene la forma de la Ec. (7-4)

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Re})$$

Por tanto, según lo dicho en la Sec. 7-6, el ensayo de modelos para el estudio de la resistencia de los cuerpos que se mueven en un fluido, y están totalmente sumergidos en él, constituye un problema de *semejanza dinámica con predominio de la viscosidad.*

El caso más interesante es el de los ensayos en los túneles aerodinámicos, como el de la Fig. 7-6. En Alemania, Francia, Inglaterra, Estados Unidos y Rusia principalmente se han invertido en el pasado sumas fabulosas en la investigación en estos túneles.

En un túnel aerodinámico se obtiene experimentalmente c_w por el procedimiento siguiente:

— construir un modelo a escala *(semejanza geométrica)*
— ensayar el modelo de manera que el número de Reynolds sea igual en el modelo que en el prototipo *(semejanza dinámica)*. La condición $\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$ fija la velocidad del ensayo
— medir con una balanza aerodinámica el arrastre W.
— medir (tubo de Prandtl, Sec. 6.4) v_∞, que es la velocidad del aire suficientemente aguas arriba del modelo, y medir ρ midiendo para ello la presión, p, y la temperatura absoluta T, y aplicando la ecuación de estado de los gases perfectos: $pv = R_a T$ donde v — volumen específico $= \frac{1}{\rho}$
— aplicar la Ec. (13-6) en la forma

$$c_w = \frac{W/A}{\rho v_\infty^2/2}$$

para obtener c_w.

Como el número de Reynolds se ha mantenido constante, según la Ec. (13-5) c_w será igual en el modelo y en prototipo, e independiente por tanto de la escala. El coeficiente c_w depende solo de la geometría del perfil y del ángulo de ataque, para un mismo valor de Re.

13.4. RESISTENCIA DE LOS BARCOS

El problema de resistencia de los barcos es complicado, porque en él se presentan los tres tipos de resistencia enumerados en la Sec. 13.2, n. 8: *resistencia de superficie, resistencia de forma y resistencia por formación de olas.* El barco en su movimiento produce, como se representa en la Fig. 13-2, dos sistemas de olas divergentes en la proa y en la popa y un sistema de ondas transversales que se propagan perpendicularmente al eje de la nave. En este tipo de resistencia juega un papel preponderante la gravedad, pero también la viscosidad. Por tanto, según lo dicho en la Sec. 7-1, en el ensayo del modelo de un barco habría que investigar experimentalmente la función expresada por la ecuación

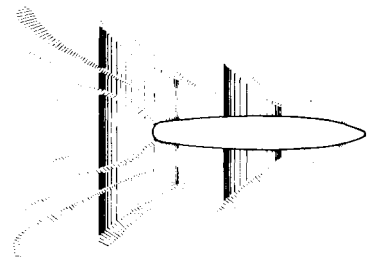


FIG. 13-2. *Sistemas de olas en un barco* en movimiento. Estas olas originan una resistencia, llamada resistencia por formación de olas, debida a la fuerza de la gravedad.

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Fr})$$

Para que hubiera semejanza dinámica entre el modelo y el prototipo tendrían que ser simultáneamente iguales los números de Froude y de Reynolds en el modelo y en el prototipo, lo cual, como vimos en la Sec. 7.6, es imposible, excepto cuando el modelo fuera del mismo tamaño que el prototipo.

En los *canales de experiencias hidrodinámicas* con maquetas de barcos, como el de la Fig. 7-5, suele procederse en el siguiente orden:

1.º Se construye un modelo a escala.
2.º Se arrastra el modelo con el carro del canal y se mide con la balanza de que está equipado el carro la *fuerza total de arrastre del modelo*, W_m.
3.º Utilizando fórmulas como la ecuación de Kármán-Schoenherr [Ec. (13-1)] se calcula la *resistencia debida a la viscosidad en el modelo* W_{vm}.
4.º Se halla la diferencia. Esta será igual a la *resistencia por formación de olas en el modelo* (efecto de la fuerza de la gravedad), W_{gm}. Es decir

W_{gm}	=	W_m	−	W_{gm}
↓		↓		↓
Obtenida por diferencia		Obtenida por un ensayo según la ley de Froude		Obtenida por cálculo mediante una fórmula de resistencia

5.º Se calcula la *resistencia por formación de olas en el prototipo* W_{gp} utilizando la ley de Froude [en concreto la Ec. (7-16)].

6.º Por el mismo método que en el núm. 4 se calcula la resistencia debida a la viscosidad en el prototipo, W_{vp}.
7.º La resistencia total del barco será igual a la suma de ambas

W_p	=	W_{gp}	+	W_{vp}
↓		↓		↓
Obtenida por suma		Obtenida por la ley de Froude		Obtenida por cálculo mediante una fórmula de resistencia

PROBLEMAS

13-1. *En el canal de experiencias hidrodinámicas de El Pardo se ensaya un modelo de barco a escala 20. El barco navegará en el mar a una velocidad de 8 m/s. La longitud del prototipo en la línea de flotación es de 90 m, área transversal sumergida, 1.600 m². Con la balanza instalada en el carro del canal se mide una fuerza de 1.550 N en el modelo. (Supóngase la viscosidad cinemática en el modelo y en el prototipo igual a* $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ *m²/s y la densidad en el modelo y en el prototipo también igual a 1.000 kg/m³.)*

Calcular el arrastre que experimentará el prototipo. Puede tomarse para el coeficiente c_w *en la fórmula del arrastre producido por la viscosidad la expresión*

$$c_w = \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}^{1/5}}$$

14. *Orificios, tubos, toberas y vertederos. Instrumentación de medida de caudales en flujo libre y de nivel*

14.1. INTRODUCCION

Un orificio es una abertura practicada en la pared de un depósito (orificio lateral o de fondo) o en un diafragma en una tubería por donde circula un fluido (orificios para medida de caudales: véase Sec. 6.8.1.1.3).

— La *forma* puede ser cualquiera: circular, rectangular, etc.; aunque la forma más frecuente es la circular.
— El tamaño puede ser desde unos mm² hasta varios m². Ejemplos de estos últimos son la abertura rectangular al extremo de un canal y la abertura de entrada del embalse de una turbina, obturada por una compuerta deslizante o compuerta de rodillos, como la de la Fig. 22-15. (Estas compuertas pueden pesar muchas toneladas.)

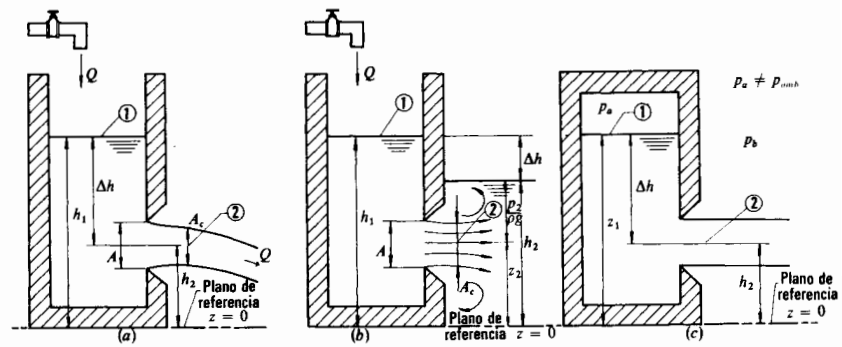


FIG. 14-1. Tres casos de *desagüe de un líquido por un orificio:* (a) depósito con superficie libre a la atmósfera; (*b*) ídem, pero con orificio sumergido; (*c*) depósito no abierto a la atmósfera. En los tres casos el nivel del agua en el depósito debe permanecer constante: en las Figs. (*a*) y (*b*) esto se consigue regulando el caudal de alimentación del depósito, y en el caso (*c*) de una manera análoga o suponiendo la sección transversal del depósito suficiente grande.

— El orificio puede comunicar con la atmósfera (Fig. 14-1 *a*), o bien con otro fluido bajo presión (orificio sumergido), como en la Fig. 14-1 *b*.
— Las paredes del orificio pueden ser de *contorno redondeado*, como en la tabla 14-1 *b*, o con aristas vivas, como en la tabla 14-1 *a*.

— El orificio puede terminar en un *tubo corto cilíndrico* de diversas maneras, como en la tabla 14-1, *c*, *d*; en una *tobera*, como en la tabla 14-1, *f*, *g*; o en un *difusor*, como en la tabla 14-1 *e*.
— Finalmente un *vertedero* viene a ser como un orificio que llega hasta la superficie libre del líquido, es decir, un orificio en que el contorno superior ha desaparecido (véase Sec. 14.5).

Como complemento a lo tratado en el Cap. 6 sobre instrumentación de *medida de caudal en flujo cerrado* se estudia en este capítulo la instrumentación de *medida de caudal en flujo libre*.

Los orificios, tubos, toberas y vertederos, además de realizar otras funciones como la regulación y control de flujo, son también los instrumentos más utilizados para la medición del caudal, por lo cual a ellos dedicaremos principalmente nuestro estudio. El fundamento de estos instrumentos, lo mismo que el del medidor de flujo libre de Venturi que se estudiará a continuación es la relación que existe entre la diferencia de alturas piezométricas antes y después del instrumento y el caudal. Este mismo fundamento tienen los caudalímetros de flujo cerrado, con la diferencia de que en el caso actual las secciones consideradas antes y después del instrumento están en contacto con la atmósfera. A continuación trataremos de otros instrumentos o procedimientos de medidas en flujo libre también muy empleados.

14.2. ORIFICIOS, TUBOS Y TOBERAS

14.2.1. Fórmulas

La Fig. 14.1 *a* representa el caso general de un orificio de forma cualquiera practicado en la pared lateral de un depósito por donde desagua un líquido a la atmósfera. Se trata de averiguar el caudal.

Enseña la teoría y confirma la experiencia que en este caso el chorro a la salida del orificio se contrae. La sección del chorro contraída se llama *vena contracta*, que si el orificio es circular se demuestra empíricamente que tiene lugar a distancia $D/2$ de la pared del depósito.

Estudiamos aquí el régimen permanente (el régimen variable se estudia en la Sec. 14.4), es decir, suponemos $\Delta h = C$, bien sea porque el depósito es de superficie grande, y su nivel no varía sensiblemente en un espacio finito de tiempo; bien sea (caso representado en la figura) porque se hace entrar en el depósito un caudal Q (regulado por la válvula que se muestra en la parte superior de la figura) igual al que desagua el orificio.

Escribamos la ecuación de Bernoulli sin pérdidas entre las secciones 1 y 2, esta última en la «vena contracta», donde (como enseña la teoría y confirma la experiencia) la presión es 0.

$$h_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

donde $v_2 = v_t$ — velocidad teórica en la vena contracta, porque se han despreciado las pérdidas.

Por tanto,

$$v_t = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

La velocidad real en la vena contracta será $v = C_v v_t$, donde C_v — coeficiente de velocidad. Tendremos, por tanto,

$$v = C_v \sqrt{2g\Delta h}$$

El caudal desaguado por el orificio será igual a la sección transversal de la vena contracta multiplicada por la velocidad en esa sección. La sección A_c de la vena contracta será:

$$A_c = C_c A$$

donde C_c — coeficiente de contracción;
A — área del orificio

y el caudal

$$Q = A_c v = C_c C_v A \sqrt{2g\Delta h}$$

y finalmente se obtiene la fórmula siguiente, que llamaremos

ECUACION GENERAL DEL DESAGÜE POR ORIFICIOS, TUBOS Y TOBERAS

$$\boxed{Q = C_q A \sqrt{2g\,\Delta h}} \qquad (14\text{-}1)$$

donde $C_q = C_c C_v$ — coeficiente de caudal
Δh — diferencia de *alturas piezométricas* (no necesariamente coincidente con la diferencia de alturas geodésicas), antes y después del orificio.

Hemos llamado a la Ec. (14-1), deducida para el caso particular de la Fig. 14-1 *a*, *ecuación general del desagüe por orificios, tubos y toberas*, porque siguiendo un camino análogo se llegaría a la misma ecuación en los casos siguientes:

1) Orificio en el fondo del depósito. El problema *esencialmente* es el mismo;
2) Orificio sumergido, Fig. 14-1 *b*. En el punto 2 la altura piezométrica es $h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$;
3) Orificio en depósito a presión que desagua a la atmósfera, Fig. 14-1 *c*, donde $p_a > p_{amb}$. En el punto 1 la altura piezométrica será $h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g}$;
4) Tubos y toberas diversos.

Solo varían en cada caso

C_c — coeficiente de contracción
C_v — coeficiente de velocidad
C_q — coeficiente de caudal

Los valores de estos coeficientes se obtienen experimentalmente. Algunos de los más principales para orificios y tubos diversos *de sección circular* pueden verse en la tabla 14-1.

Advertencias sobre esta tabla:

1.ª El llamado *tubo standard*, tabla 14-1 *c*, tiene una longitud igual a 2,5 veces el diámetro y aristas vivas, y un coeficiente de contracción $C_c = 1$.
2.ª La llamada *boquilla de Borda*, tabla 14-1 *d*, está formada por un tubo que penetra en el depósito, tiene aristas vivas y su longitud es igual a su diámetro.
3.ª La tobera conoidal, tabla 14-1 *g*, tiene un C_q más favorable que la tobera cónica, debido a su forma bien *fuselada*, que ha eliminado las pérdidas de *forma*, quedando únicamente las de *superficie* (véase Secs. 8.3 y 8.9).
4.ª Los valores de C_c, C_v y C_q de esta tabla deben usarse con precaución. Si los diámetros son menores a 25 mm o los Δh menores de 1 m, estos coeficientes ya no son constantes, sino que dependen del número de Reynolds. Los coeficientes para cualquier tubo y orificio pueden obtenerse mediante un tarado «*in situ*».

(Véanse problemas 14-1 y 14-2.)

14.2.2. Aplicaciones

Se pueden agrupar en dos clases: control de flujo y medición de caudales.

14.2.2.1. Control de flujo

Orificios, tubos y toberas de diferentes clases se utilizan en las transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos, a cuyo estudio se consagra el Cap. 28. Con los elementos que figuran en la tabla 14-2 y otros análogos y combinando sus características (longitud, diámetro del tubo, etc.) se puede regular, por ejemplo, la velocidad de un cilindro de aceite a presión que mueve el émbolo de una prensa hidráulica.

En los sistemas hidráulicos de regulación de máquinas, a cuyo estudio se consagra el Cap. 29, empleados en las centrales eléctricas, hidráulicas y térmicas, el problema de sincronización de movimientos se consigue también mediante elementos como los de la tabla 14-2. Por ejemplo, en una turbina Pelton (véase Sec. 29.6) los movimientos del deflector y del inyector están sincronizados, este último con un retraso prefijado para evitar el golpe de ariete (véase Sec. 22.1.2). El *orificio* 10 de la Fig. 29-6 es un verdadero relé hidráulico de tiempo.

TABLA 14-1

COEFICIENTES DE CONTRACCION, DE VELOCIDAD Y DE CAUDAL PARA TUBOS Y TOBERAS DIVERSOS DE SECCION CIRCULAR

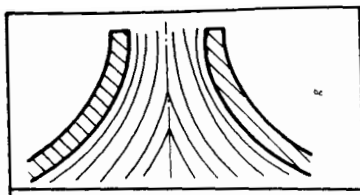
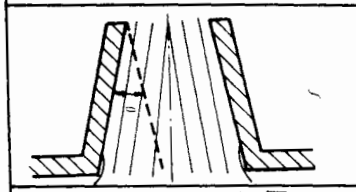
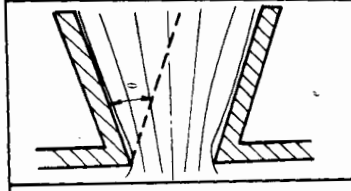
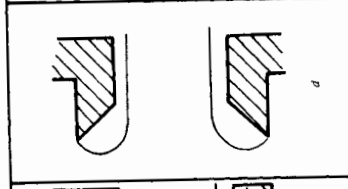
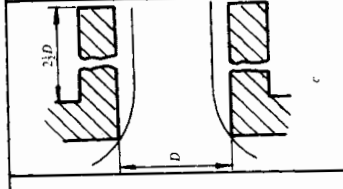
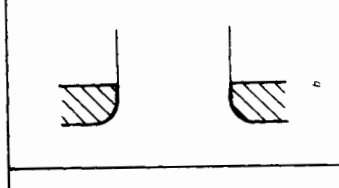
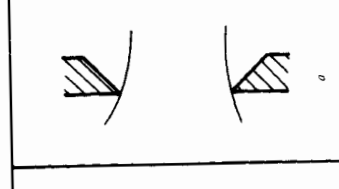
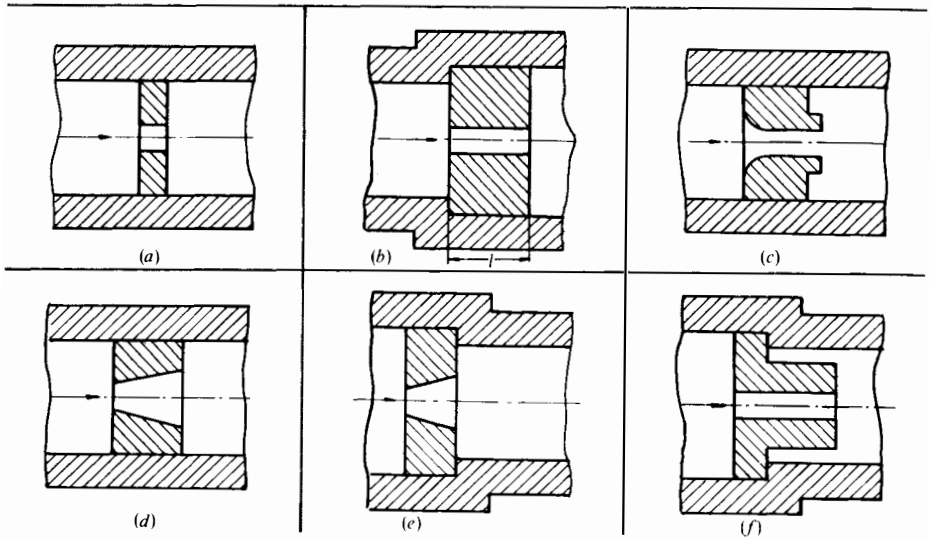
FIGURA	C_c	C_v	C_q
 *g*	1,00	0,98	0,98
 *f*	0,98	0,96	0,94
 *e*	1,00	0,45 a 0,50	0,45 a 0,50
 *d*	0,52	0,98	0,51
 *c*	1,00	0,82	0,82
 *b*	1,00	0,98	0,98
 *a*	0,62	0,98	0,61

TABLA 14-2

RESTRICCIONES USADAS PARA REGULACION DE FLUJO EN LAS CONDUCCIONES DE AIRE Y ACEITE A PRESION

(*a*) Tubo corto, (*b*) tubo largo, (*c*) tobera, (*d*) difusor tronco-cónico largo, (*e*) difusor tronco-cónico corto, (*f*) tubo cilíndrico con cambio de sección del conducto.



14.2.2.2. Medición de caudales

El orificio en particular es un medidor muy barato de flujo. Para medida y control de flujo se utiliza siempre el orificio de *aristas vivas* porque es insensible a la viscosidad, y por tanto su funcionamiento no se altera con la temperatura del fluido.

Cuba Danaide

El aparato antiguo y muy sencillo conocido con el nombre de *cuba Danaide* (1), que se representa en la Fig. 14-2, posee uno o varios orificios en el fondo y mide caudales de 5 a 500 l/s. Si entra un caudal constante de agua en una Danaide, después de un cierto tiempo de estabilización, el nivel se mantendrá constante a una altura que dependerá del caudal y del área disponible para el flujo de salida.

La fórmula general [Ec. (14-1)] particularizada para una Danaide se escribirá así:

$$Q = nC_q \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g\,\Delta h}$$

donde n — número de orificios abiertos. Todos los orificios que se ven en la planta de la figura llevan un tapón roscado para abrir más o menos orificios según el orden de magnitud del caudal;

d — diámetro de un orificio.

(1) Según una leyenda, las Danaides, hijas de Danaos, rey de Argos, fueron castigadas a llenar de agua unos barriles sin fondo con una criba.

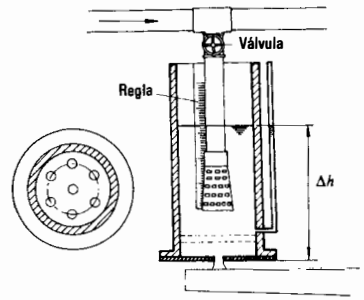


FIG. 14-2. *Cuba Danaide.* Se basa en la fórmula general de salida de líquido por un orificio, Ec. (14-1). Un tarado previo es conveniente para medir caudales con gran precisión.

Las Danaides se han utilizado con frecuencia en los ensayos de bombas hidráulicas.

14.3. DESAGÜE POR UNA COMPUERTA DE FONDO

Una abertura de compuerta, Fig. 14-3, no es más que un orificio rectangular de altura a y de ancho b, que supondremos constante e igual al ancho del canal. En el fondo no hay contracción; pero sí en la lámina superior.

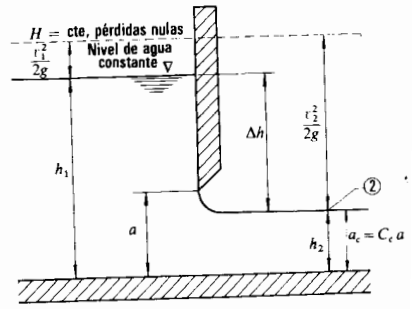


FIG. 14-3. El *desagüe por una compuerta* es un caso particular de desagüe por un orificio.

Escribiendo como en la Sec. 14.2.1 la ecuación de Bernoulli sin pérdidas entre las secciones 1 y 2, esta última elegida en la vena contracta, tendremos:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Por la ecuación de continuidad

$$v_1 = \frac{v_2 h_2}{h_1} = \frac{v_2 C_c a}{h_1}$$

porque b es constante (no hay contracción lateral, y b es el ancho constante del

canal). Siguiendo el procedimiento indicado en dicha Sec. 14.2.1 se llega finalmente a la misma Ec. (14-1):

$$Q = C_q\, ab\, \sqrt{2g\, \Delta h} \tag{14-2}$$

Es fácil ver que una compuerta puede servir también para medir el caudal.

14.4. REGIMEN VARIABLE: TIEMPO DE DESAGÜE DE UN DEPOSITO

Comparando la Fig. 14-1 *a* con la 14-4 se ve que en este segundo caso, al vaciarse el depósito, el nivel de la superficie libre descenderá y el nivel no será ya constante. En el primer caso $\Delta h = C$, gracias a que por la tubería superior entra el mismo caudal Q que sale.

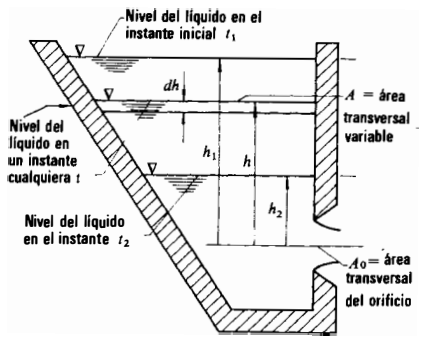


FIG. 14-4. *Tiempo de desagüe de un depósito* por un orificio. En este problema el nivel de la superficie libre varía, así como el área transversal de la misma.

El caso de la Fig. 14-4 es, pues, un caso de *régimen variable* (véase Sec. 5.1). Se trata de un problema práctico interesante: *tiempo de desagüe de un depósito*.

En la figura el depósito es trapezoidal; pero puede tener una forma cualquiera. El orificio puede estar situado en el fondo también, y terminar en un tubo o tobera.

Deduzcamos la fórmula general que nos dé el tiempo que tarda el líquido en descender del nivel h_1 al h_2.

En un instante cualquiera, t, el líquido tiene el nivel h, y transcurrido un tiempo infinitamente pequeño dt el nivel del líquido ha descendido, dh. En el instante t el caudal vendrá dado por la Ec. (14-1):

$$Q = \frac{d\tau}{dt} = C_q A_0 \sqrt{2gh}$$

donde $d\tau$ — diferencial de volumen, desaguado en el tiempo dt
A_0 — área del orificio, constante

y

$$d\tau = C_q A_0 \sqrt{2gh}\, dt \tag{14-3}$$

Por otra parte

$$d\tau = A\, dh \tag{14-4}$$

donde A — área de la sección transversal del depósito en el instante t, variable.

Igualando los segundos miembros de (14-3) y (14-4)

$$-A\, dh = C_q A_0 \sqrt{2gh}\, dt \tag{14-5}$$

donde el signo $-$ significa que en una diferencial de tiempo positiva se produce una dh negativa (la altura de la superficie libre desciende).

Despejando dt en (14-5) tenemos:

$$dt = -\frac{A\, dh}{C_q A_0 \sqrt{2gh}}$$

integrando entre los instantes 1 y 2 tendremos

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = -\int_{h_1}^{h_2} \frac{A\, dh}{C_q A_0 \sqrt{2gh}}$$

Llamando $t = t_2 - t_1$ al tiempo de desagüe tendremos la

ECUACION GENERAL DEL TIEMPO DE DESAGÜE DE UN DEPOSITO

$$t = \int_{h_2}^{h_1} \frac{A}{C_d \sqrt{2gh}}\, dh \tag{14-6}$$

(tiempo de desagüe parcial o completo de un depósito de área transversal variable)

Si se conoce el valor de la función $A = f(h)$, la Ec. (14-6) se podrá integrar analítica o gráficamente.

14.5. VERTEDEROS

Vertedero es un dique o pared que intercepta la corriente, causando una elevación del nivel aguas arriba, y que se emplea para control de nivel o para medición de caudales.

Dos son, pues, las aplicaciones de los vertederos:

— control de nivel, por ejemplo, de un embalse: *vertederos de presas;*
— medición de caudales: *vertederos de medida.* De estos últimos hablaremos sobre todo.

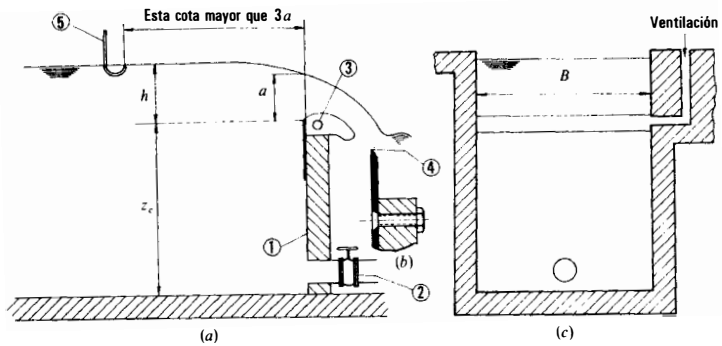


FIG. 14-5. Corte longitudinal (*a*) y transversal (*c*) de un *vertedero rectangular de pared delgada sin contracción lateral.* (*b*) Detalle de la cresta del vertedero.

La Fig. 14-5 representa el vertedero más sencillo: *vertedero rectangular sin contracción lateral.* El dique aquí es sencillamente una pared rectangular de chapa, ladrillo, hormigón, tablones de madera, etc.:

— Aguas arriba del vertedero el canal ha de tener sección uniforme y la pared 1 debe de estar bien lisa;
— 2 es una válvula de drenaje;
— 3 es la ventilación o comunicación con la atmósfera que debe tener todo vertedero sin contracción lateral;
— 4 es la cresta del vertedero, que suele ser de bronce, acero inoxidable, etc., y que debe tener aristas vivas;
— 5 es una regleta graduada con nonius terminada en gancho, que junto con un nivel de burbuja sirven para medir *h*, espesor de la lámina de agua medida desde la cresta del vertedero.

La altura de la lámina conviene medirla a una distancia mínima de 3 *a*, como se indica en la misma figura.

Como veremos,

en los vertederos el caudal es función de la única variable, h, lo que simplifica la medida, así como la adaptación del instrumento a integradores (Fig. 14-16).

14.5.1. Tipos de vertederos

Los vertederos se clasifican

— *según la altura de la lámina aguas abajo*, en vertederos de *lámina libre*, si $z' < z_c$ (Fig. 14-6 *a*), y vertederos *sumergidos*, si $z' > z_c$ (Fig. 14-6 *b*).
— *según la disposición en planta del vertedero con relación a la corriente*, en vertederos *normales* (Fig. 14-7 *a*), *inclinados* (Fig. 14-7 *b*), *quebrados* (Fig. 14-7 *c*) y *curvilíneos* (Fig. 14-7 *d*);
— *según el espesor de la pared*, en vertederos *de pared delgada* (Fig. 14-8 *a*) y vertederos *de pared gruesa* (Fig. 14-8 *b*).

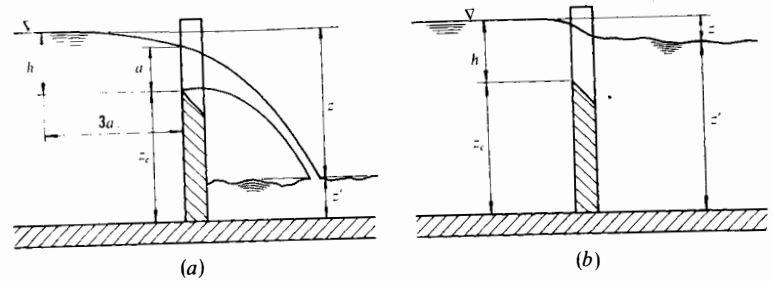


FIG. 14-6. (a) *Vertedero de lámina libre;* (b) *vertedero sumergido.*

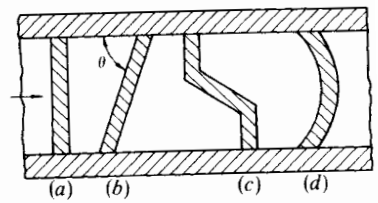


FIG. 14-7. (a) *Vertedero normal;* (b) *inclinado;* (c) *quebrado;* (d) *curvilíneo.*

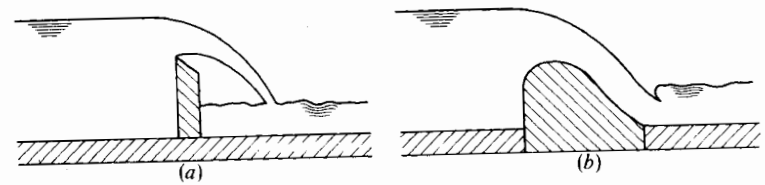


FIG. 14-8. (a) *Vertedero de pared delgada;* (b) *vertedero de pared gruesa.*

Los vertederos *de pared delgada*, con cresta en arista viva sirven para medir caudales con gran precisión; mientras que los vertederos *de pared gruesa* desaguan un caudal mayor. De aquí la diferencia de aplicaciones: los de pared delgada se emplean para *medir caudales* y los de pared gruesa, como parte de una presa u otra estructura hidráulica, para *control de nivel.*

14.5.1.1. Vertederos de pared delgada

En éstos la parte superior del vertedero que está en contacto con la lámina de líquido suele ser una chapa de unos 5 mm de espesor de un material distinto como latón o acero inoxidable, achaflanada como se ve en el detalle núm. 4 de la Fig. 14-5. Técnicamente hablando, esta chapa es el vertedero y en ella se practican las diversas aberturas (triangulares, circulares, etc.) que veremos a continuación.

Los vertederos de pared delgada, según la forma de la abertura, se clasifican en *rectangulares* (Fig. 14-9 *a*), *trapezoidales* (Fig. 14-9 *b*), *triangulares* (Fig. 14-9 *c*), *parabólicos* (Fig. 14-9 *d*), etc.

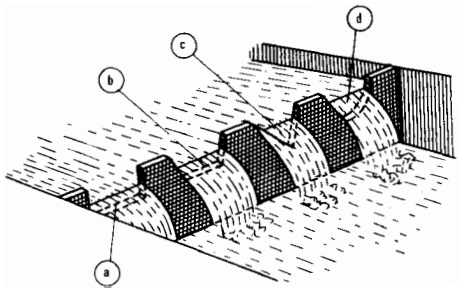


FIG. 14-9. *Vertedero* (a) *rectangular;* (b) *trapezoidal;* (c) *triangular;* (d) *parabólico.*

Los vertederos rectangulares se clasifican en *vertederos sin contracción lateral*, si el ancho de la abertura del vertedero es igual al ancho del canal (Fig. 14-10 *a*), y *vertedero con contracción lateral* en caso contrario (Fig. 14-10 *b*).

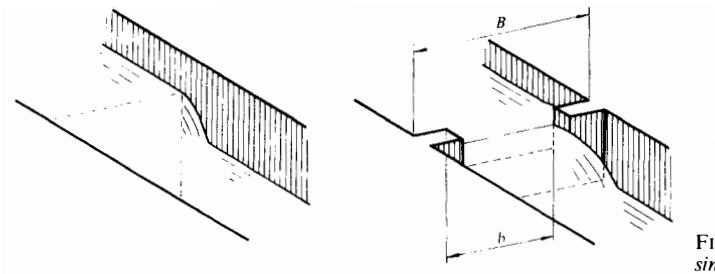


FIG. 14-10. *Vertedero* (a) *sin contracción lateral;* (b) *con contracción lateral.*

Los vertederos de pared delgada se utilizan, como ya hemos dicho, para medir caudales. En los vertederos rectangulares, sobre todo en los vertederos sin contracción lateral, la exactitud de la medida solamente se puede garantizar si el vertedero está bien ventilado. La ventilación, que se muestra en la Fig. 14-5, tiene por objeto introducir aire debajo de la lámina de agua. En la Fig. 14-11 *a* el vertedero está suficientemente *ventilado* gracias a un tubo de ventilación, como el que se muestra en la Fig. 14-5. En la Fig. 14-11 *b* se representa el mismo vertedero *no ventilado*. El agua arrastra el aire que se encuentra debajo de la lámina aguas abajo del vertedero. Allí se crea una succión. La lámina baja y el caudal aumenta, o bien, el caudal se mantiene constante y h disminuye.

La exactitud de la medida del caudal exige que el vertedero esté bien ventilado.

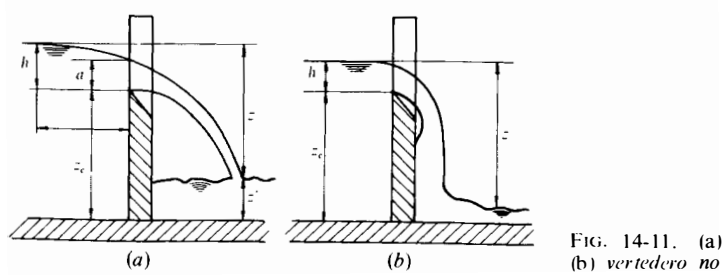


FIG. 14-11. (a) *Vertedero ventilado;* (b) *vertedero no ventilado.*

14.5.1.2. Vertederos de pared gruesa

Las Figs. 14-12 *a*, *b*, *c*, *d*, *e* representan diversos tipos de vertederos de pared gruesa utilizados en los embalses y canales como control. Pueden utilizarse como medidores de flujo; pero dan menos precisión que los de pared delgada, los cuales, como hemos dicho, se prefieren en dicha aplicación. El vertedero parabólico de la Fig. 14-12 *e* ofrece la ventaja de que para desaguar un caudal determinado con un ancho de cresta determinada la altura de lámina h requerida es mínima.

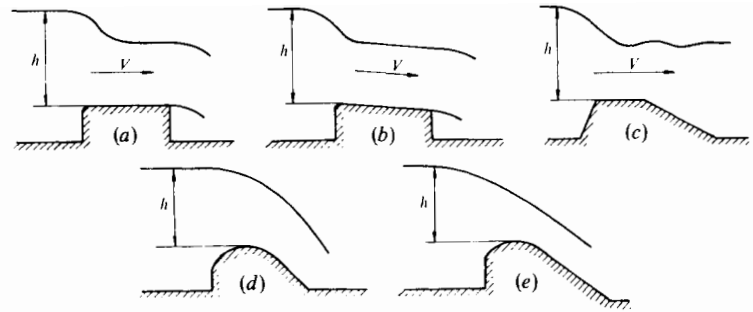


FIG. 14-12. Diversos tipos de *vertederos de pared gruesa* utilizados principalmente como estructuras de control.

14.5.2. Fórmulas de los vertederos de pared delgada

14.5.2.1. Vertedero rectangular

Consideremos (Fig. 14-13) el área elemental $dA = b\,dy$ en el plano del vertedero.

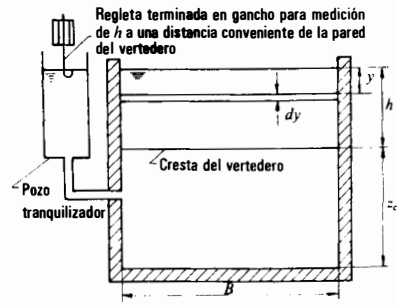


FIG. 14-13. Deducción de la fórmula de desagüe de un *vertedero rectangular.*

donde b — ancho de la abertura, constante. En el vertedero sin contracción lateral $b = B$, donde B = ancho del vertedero.

Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre un punto 1 en la estación de medida de la altura de lámina que, como ya se ha dicho, ha de situarse a una distancia no menor que $3a$, donde a espesor de la lámina en el vertedero (véase

Fig. 14-5 *a*) y un punto cualquiera situado en la lámina y en el plano mismo del vertedero, despreciando las pérdidas, tendremos:

$$h + 0 + 0 = \frac{v^2}{2g} + h - y + 0$$

despreciando la altura de velocidad en la sección 1. Luego

$$v = \sqrt{2gy}$$

Aproximadamente, pues, la velocidad del agua en dicho plano de la lámina será $= \sqrt{2gy}$. El caudal diferencial teórico será:

$$dQ_t = b\,dy\,\sqrt{2gy} = b\sqrt{2g}\,y^{1/2}\,dy$$

y el caudal teórico Q_t que fluye a través de todo el vertedero será

$$Q_t = \sqrt{2g}\,b\int_o^h y^{1/2}\,dy = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\,h^{3/2} = \frac{2}{3}bh\sqrt{2gh}$$

procediendo de manera análoga a la empleada en la deducción de la Ec. (14-1), el caudal real, Q, se obtendrá multiplicando el caudal teórico Q_t por un coeficiente de caudal C_q, es decir,

$$\boxed{Q = C_q\frac{2}{3}bh\sqrt{2gh}} \qquad (14\text{-}7)$$

donde C_q — coeficiente de caudal adimensional, que suele oscilar entre 0,64 y 0,79.

La Ec. (14-7) tiene la misma forma que la Ec. (14-1) del caudal por un orificio, siendo en este caso $A = bh$, lo que confirma lo dicho en la Sec. 14-1: un vertedero no es más que un orificio en que el contorno superior ha desaparecido.

Son muy utilizadas las fórmulas siguientes para calcular el coeficiente C_q en la Ec. (14-7) propuestas por la S. I. A. (Sociedad de Ingenieros y Arquitectos Suizos):

1.ª *VERTEDERO RECTANGULAR SIN CONTRACCION LATERAL* (Figs. 14-5 y 14-10 *a*):

$$\boxed{C_q = 0{,}615\left(1 + \frac{1}{h + 1{,}6}\right)\left[1 + 0{,}5\left(\frac{1}{h + z_c}\right)^2\right]} \qquad (14\text{-}8)$$

[*Coeficiente C_q de la Ec. (14-7), para vertedero sin contracción lateral, longitudes en mm*]

Esta fórmula es válida siempre que 25 mm $< h <$ 800 mm; y $z_c >$ 300 mm, y finalmente $h/z_c \leq 1$.

2.ª *VERTEDERO RECTANGULAR CON CONTRACCION LATERAL* (Fig. 14-10 *b*):

(14-9)

$$\boxed{C_q = \left[0{,}578 + 0{,}037\left(\frac{b}{B}\right)^2 + \frac{3{,}615 - 3\left(\frac{b}{B}\right)^2}{h + 1{,}6}\right]\left[1 + 0{,}5\left(\frac{b}{B}\right)\left(\frac{h}{h + z_c}\right)^2\right]}$$

[*Coeficiente C_q de la Ec. (14-7), para vertedero con contracción lateral, longitudes en mm*]

En las Ecs. (14-8) y (14-9) z_c — cota de la cresta sobre la solera del canal.

De estos dos tipos de vertederos *el vertedero sin contracción lateral* da resultados más precisos. Los vertederos rectangulares se adaptan para medir caudales desde 6 l/s a 10 m³/s.

Las fórmulas (14-8) y (14-9), así como otras análogas que se encuentran en los manuales de Hidráulica, solo dan precisión si se dispone antes del vertedero de un canal de paredes lisas de sección constante en una longitud no inferior a 20 *h*. Por lo demás las dos fórmulas de la S. I. A. dan resultados muy precisos; aunque en general la precisión de los cálculos no depende tanto de la exactitud de la fórmula utilizada cuanto de la duplicación de las condiciones en que la fórmula fue desarrollada, por ejemplo, el mismo material del vertedero, idéntico achaflanado de la cresta, y sobre todo la naturaleza del flujo antes del vertedero.

Se recomienda siempre calibrar los vertederos de cualquier tipo *in situ*.

14.5.2.2. Vertedero triangular

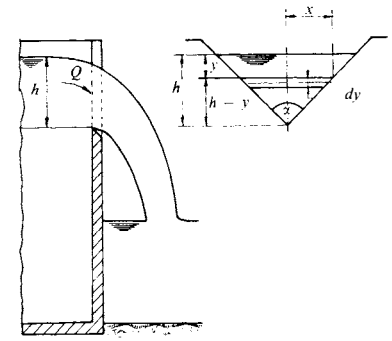


FIG. 14-14. Deducción de la fórmula de desagüe de un *vertedero triangular*.

Este vertedero (Fig. 14-14) se emplea mucho para medir caudales pequeños, inferiores a 6 l/s. El ángulo α puede ser cualquiera. Es muy frecuente el vertedero triangular con $\alpha = 90°$.

Procediendo análogamente a la Sec. 14.5.2.1:

$$dQ_t = \sqrt{2gy}\,dA$$

donde Q_t — caudal teórico; pero

$$dA = 2x\,dy$$

y

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{h - y}$$

luego el *caudal teórico* será

$$Q_t = 2\sqrt{2g}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\int_o^h (h - y)y^{1/2}\,dy$$

Integrando entre o y h, y multiplicando como siempre por C_q para obtener el *caudal real*, Q, tendremos la fórmula siguiente:

VERTEDERO TRIANGULAR

$$\boxed{Q = C_q \frac{8}{15}\sqrt{2g}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}h^{5/2} = C_q\frac{8}{15}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}h^2\sqrt{2gh}} \qquad (14\text{-}10)$$

El coeficiente C_q en la Ec. (14-10) para $\alpha = 90°$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$ y $0{,}05 < h < 0{,}25$ vale aproximadamente

$$\boxed{C_q = 0{,}593}$$

[*valor aproximado del coeficiente C_q de la Ec. (14-10); $\alpha = 90°$*]

Si se toma aproximadamente

$$C_q = C \qquad (14\text{-}11)$$

— la fórmula del caudal del vertedero rectangular con y sin contracción lateral será

$$\boxed{Q = Ch^{3/2}} \qquad (14\text{-}12)$$

donde C — constante para cada vertedero

— la fórmula del caudal para el vertedero triangular será:

$$\boxed{Q = Ch^{5/2}} \qquad (14\text{-}13)$$

donde C — constante para cada vertedero.

14.5.2.3. Otros vertederos

La forma de la abertura del vertedero puede ser cualquiera además de rectangular y triangular: circular, parabólica, etc. Las Ecs. (14-12) y (14-13) tienen la forma:

$$\boxed{Q = Ch^n} \qquad (14\text{-}14)$$

(ecuación aproximada de los vertederos, donde C — constante)

Si suponemos que en todos los vertederos se cumple la Ec. (14-14) (en la práctica C no es constante, sino que varía ligeramente con h), es interesante observar que se puede diseñar un vertedero para que la ecuación del caudal sea aproximadamente la Ec. (14-18), siendo n el número que se desee.

En efecto [como se ve en las Ecs. (14-7) y (14-10)] el caudal es proporcional a una velocidad $\sqrt{2gh}$ y a una sección. Bastará, por tanto, el diseñar la forma de la abertura del vertedero de manera que el área sea proporcional a $h^{n-1/2}$. En efecto,

$$Q \sim \sqrt{2gh}\,h^{n-1/2}$$

y por tanto

$$Q = C\,h^n$$

donde C — constante.

La Fig. 14-15 muestra algunas de estas formas.

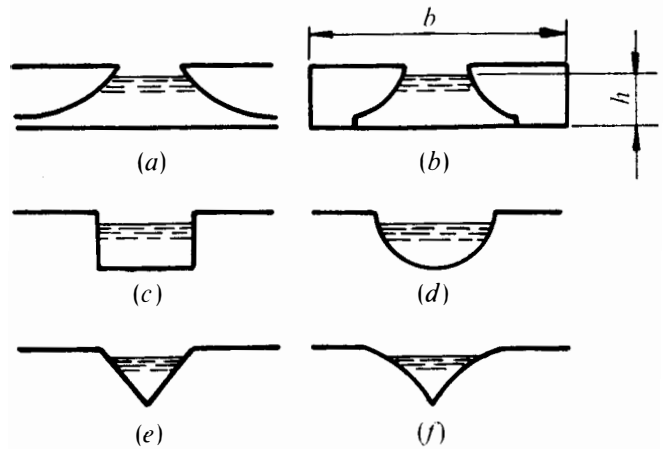


FIG. 14-15. Formas diversas de vertederos de pared delgada de ecuación $Q = Ch^n$. Puede diseñarse un vertedero para cualquier valor de n: a) $Q = Ch$; b) $Q = Ch$; c) $Q = Ch^{3/2}$; d) $Q = Ch^2$; e) $Q = Ch^{3/2}$; f) $Q = Ch^3$.

Por depender el caudal del vertedero de una sola variable se adapta el vertedero al registro del caudal instantáneo, así como a su integración para hallar el gasto horario, por ejemplo. Así en el aparato representado en la Fig. 14-16, siendo

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

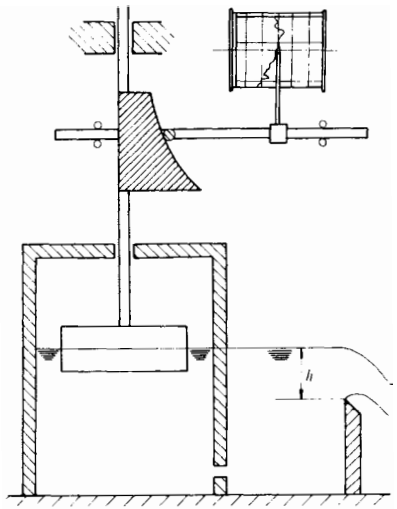


FIG. 14-16. *Vertedero* provisto de flotador y registrador continuo de caudales.

donde V — volumen desaguado,

se tendrá

$$V = \int Q\, dt$$

Los aparatos que realizan esta integración mecánica o eléctricamente se llaman *integradores*.

Existen también tanques de chapa comercializados con vertedero provisto de flotador y registrador, etc., para medir caudales.

14.6. CANAL DE VENTURI

En el *tubo de Venturi* se conseguía un decremento de presión, a expensas de un incremento de altura dinámica, gracias a un estrechamiento. En el *canal de Venturi*, gracias también a una disminución de la sección transversal del canal, se consigue un decremento de la altura piezométrica de la corriente a expensas también de un incremento de la energía cinética. Este decremento proporcional al caudal se emplea para la medición del mismo en flujo abierto.

Existen los tres tipos de canal de Venturi que se representan en la Fig. 14-17: *a*) solera plana, estrechamiento lateral solamente; *b*) solera no plana, sin estrechamiento lateral; *c*) solera no plana y estrechamiento lateral.

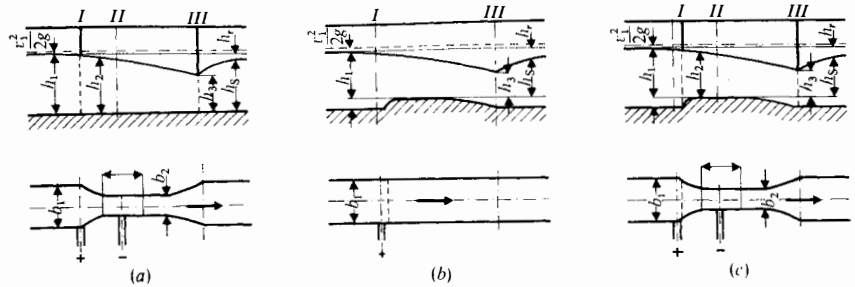


FIG. 14-17. *Canal de Venturi:* (*a*) solera plana, (*b*) y (*c*) solera no plana con y sin estrechamiento lateral.

La Fig. 14-18 corresponde también al primer caso. En él se ha supuesto, además, que el número de Froude

$$\mathrm{Fr} = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} > 1$$

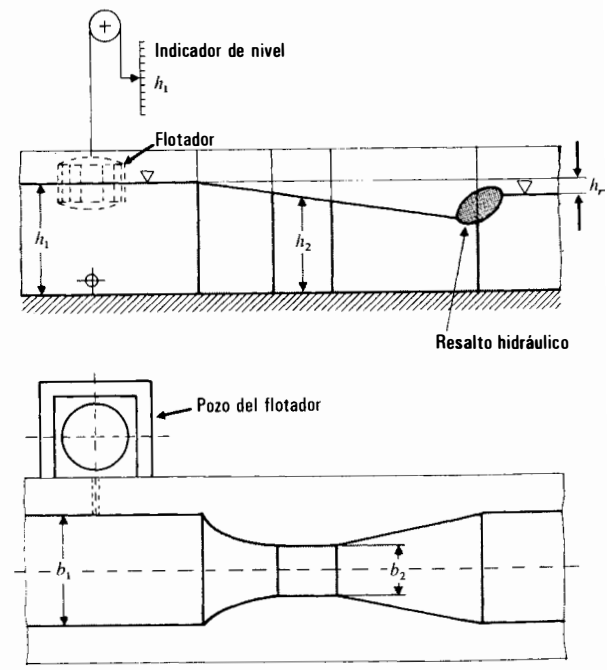


FIG. 14-18. *Canal de Venturi.*

En este caso se demuestra que en 2 tiene lugar corriente rápida (1) y que las alturas h_2 y h_1 guardan entre sí la siguiente relación:

$$h_2 = \frac{2}{3} h_1$$

(1) En un canal un mismo caudal puede darse de dos maneras: con sección transversal pequeña y velocidad elevada, o bien con sección transversal grande y velocidad moderada: en el primer caso el régimen de corriente es *rápido* o *disparado* y en el segundo caso *tranquilo*.

lo cual permite, como veremos a continuación, medir el caudal, efectuando la sola medición de h_1 aguas arriba del Venturi.

Aguas abajo se ha formado un *resalto hidráulico*. La pérdida de carga permanente es de alrededor de 25 % de h_1. En esto reside la ventaja del Venturi sobre el vertedero en que es preciso prever un salto más grande. Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

donde h_1 y h_2 son las alturas piezométricas en las secciones 1 y 2. Ahora bien, según la ecuación de continuidad:

$$v_1\, b_1\, h_1 = v_2\, b_2\, h_2 = v_2\, b_2\, \frac{2}{3} h_1$$

y finalmente

$$Q = \alpha_0\, k\, b_2 \sqrt{g}\, h_1^{3/2}$$

k es función de b_2/b_1 y α_0 es un coeficiente que se obtiene experimentalmente (tarado del Venturi).

14.7. OTROS PROCEDIMIENTOS PARA MEDIR EL CAUDAL EN FLUJO LIBRE

En los canales se pueden utilizar también los tubos de Prandtl (Sec. 6.4.1) y los molinetes hidráulicos (Sec. 6.4.4), que son instrumentos que miden directamente la velocidad y permiten, mediante la integración de productos de velocidad por área transversal convenientemente elegidos, calcular el caudal. Otros procedimientos que se aplican también en hidráulica son:

Pantalla higrométrica de Anderson

El flujo que se quiere medir se conduce a un canal en el cual, como se indica en la Fig. 14-19, se han montado unos raíles sobre los que rueda con rozamiento mínimo un

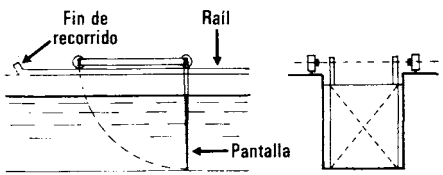


FIG. 14-19. Esquema de *pantalla higrométrica.*

carro, provisto de una pantalla, que es empujada por el líquido. La pantalla se mueve, pues, prácticamente con la misma velocidad media v del fluido. En movimiento uniforme, siendo Δs la distancia recorrida por el carro en el tiempo Δt, se tendrá:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

de donde se obtiene inmediatamente el caudal. Este método es caro, pero de gran precisión. De ahí que se use mucho en los labotatorios de investigación de máquinas hidráulicas. La Fig. 14-20 corresponde a una instalación de este tipo en el Laboratorio de Kristinehamn de la KMW de Suecia.

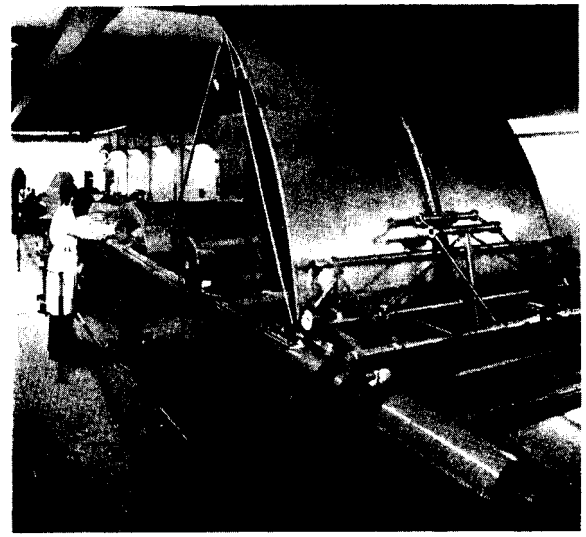


FIG. 14-20. *Pantalla higrométrica* en el laboratorio de ensayo de turbinas hidráulicas de la firma KMW de Suecia.

Método de la disolución salina

Sólo aduciremos el fundamento del método, sin describir los instrumentos empleados para su realización.

Se inyecta una solución concentrada de sal, por ejemplo cloruro sódico, en el agua en la estación 1 y se determina la concentración de la misma en otra estación 2 suficientemente remota.

Supongamos que el agua contenga ya de por sí α_0 gramos de sales por litro, en total $\alpha_0 Q$ gramos y que en 1 se inyecte un caudal q con una concentración α_1, o sea $\alpha_1 q$ gramos. En 2 la concentración α_2 será homogénea e igual a $(Q + q)\,\alpha_2$, mientras que en 1 se tenía $\alpha_0 Q + \alpha_1 q$. Igualando ambas expresiones y despejando Q, se tiene:

$$Q = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_0} q$$

Método de la sal de Allen

Nos contentaremos también aquí con aducir el fundamento del método.

Este método, desarrollado por Allen en Estados Unidos, se ha utilizado mucho en los *ensayos de recepción* de las turbinas hidráulicas. Se basa en el hecho de que la concentración de sales en el agua aumenta su conductividad. Se efectúa una inyección de sal en la estación 1 y se detecta eléctricamente a su llegada a la estación 2. La velocidad con que recorre la sal la distancia entre ambos puntos, que coincide con la velocidad del agua, se calcula dividiendo el espacio por el tiempo transcurrido.

14.8. INSTRUMENTACION DE MEDIDA DE NIVEL

La medida de nivel es, junto con la presión, volumen, velocidad y caudal, de gran importancia en hidrografía, hidráulica y en los procesos industriales. Aplicaciones frecuentes son las medidas de los niveles en tanques y recipientes de todos tipos, en canales, pozos, exclusas, vertederos, etc. Esta medida sirve para determinar el contenido de los tanques, para accionar dispositivos de alarma y seguridad en los recipientes a presión, para el accionamiento de válvulas y vertederos en la regulación de las centrales hidroeléctricas, para la determinación de la altura de la lámina en los vertederos de medidas, etc. En la industria química la medida de nivel se requiere para determinar la cantidad exacta de líquido que hay que administrar en un proceso de mezcla, etc. Finalmente, en la destilación del petróleo, en las centrales termoeléctricas, etc., se requiere con frecuencia la medición del nivel de fluido en los procesos de destilación, calderas, etc.

La medida del nivel puede ser necesaria con mucha o poca precisión, con mera indicación del nivel instantáneo o con registro continuo de la medida, con medición local o con transmisión a distancia de unos centenares o miles de metros. Forzosamente nos limitaremos a dar una breve idea de los instrumentos más importantes, relegando su estudio más detallado a los manuales de instrumentación.

14.8.1. Medición directa

Tubo de vidrio provisto de escala conectado al recipiente (vasos comunicantes).

En un recipiente a presión este método no sería aplicable. En este caso puede medirse el nivel mediante un flotador que acciona una aguja indicadora por el procedimiento desarrollado por la firma Siemens und Haslske AG de Alemania, que se representa esquemáticamente en la Fig. 14-21. El aparato, que se relaciona con el esquema en la Fig. 14-24, consta de un manómetro diferencial de flotador. Sobre la columna del líquido manométrico (generalmente mercurio) actúa por un lado el agua de la caldera y por el otro el agua de otro depósito que puede ser el depósito de condensado mismo de la caldera. Al aumentar el nivel del agua en la caldera (o de cualquier otro líquido en un recipiente a presión) disminuye la diferencia de presiones; mientras que al disminuir dicho nivel aumenta ésta.

La medida directa con flotador y transmisión por cadena a un disco graduado es muy utilizada en vertederos, exclusas, presas, etc. El esquema puede verse en la Fig. 14-23 y una fotografía de este instrumento puede verse en la Fig. 14-22. Amplitud de medida, hasta 20 m.

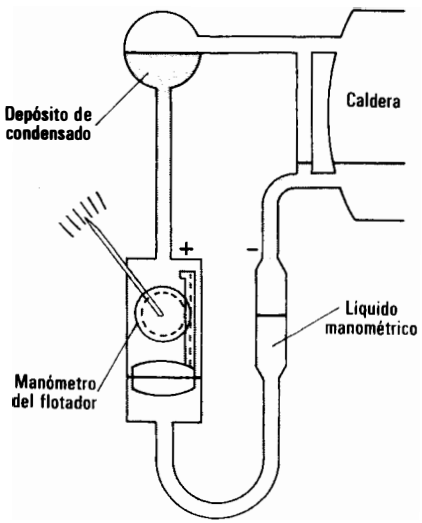
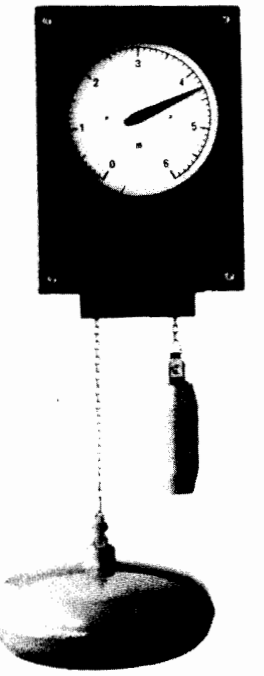


FIG. 14-21. Medición de nivel con *manómetro de flotador* (esquema de la firma Siemens und Halske AG de Alemania).



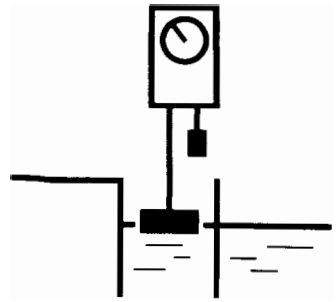


FIG. 14-22. *Flotador* Rittmeyer para la medida de niveles.

14.8.2. Medición hidráulica y neumática

Los aparatos que vamos a describir en ésta y en la sección siguiente se llaman *limnímetros.*

Las Figs. 14-24, 14-25 y 14-26 representan los tres esquemas más frecuentemente empleados:

Fig. 14-24: medida hidrostática de nivel: al aumentar el nivel del agua aumenta la presión que actúa sobre el manómetro. Amplitud de medida, hasta 150 m.

Fig. 14-25: medida de nivel por el empuje de Arquímedes: al aumentar el nivel aumenta el empuje de Arquímedes que se opone al peso de la barilla buzo: la resultante de ambas fuerzas da una medida del nivel del líquido. Amplitud de medida, hasta 50 m.

Fig. 14-26: medida neumática de nivel: al burbujear el aire proveniente de un pequeño compresor o botella a presión, la presión del aire a la salida del tubo sumergido aumenta al aumentar el nivel de líquido. La medida de dicha presión en un manómetro es una medida del nivel del depósito o embalse. Amplitud de medida, hasta 50 m.

Fig. 14-27: la medida de la lámina de agua h de un vertedero necesaria para medir el caudal (véase la Sec. 14.5) puede hacerse por uno cualquiera de los cuatro esquemas de las Figs. 14-23 a 14-26. En conexión con cualquiera de los cuatro métodos descritos puede utilizarse la balanza de presión de la Fig. 6-30, que sirve por lo tanto para medir presiones, caudales y niveles. La balanza mide la presión transmitida por la tubería de detección (Fig. 14-26), el empuje vertical de la varilla de inmersión (Fig. 14-25), etc., e indica la cota de nivel. Las componentes principales de la balanza son el transformador de presión, el fiel de la balanza con el peso corredizo y un servomotor, que mantiene la balanza constantemente en equilibrio. Esta misma balanza puede accionar cuantos dispositivos de mando, regulación, teletransmisión y registro se desee. La precisión de la medida puede llegar hasta el 0,025% del valor máximo de la escala.

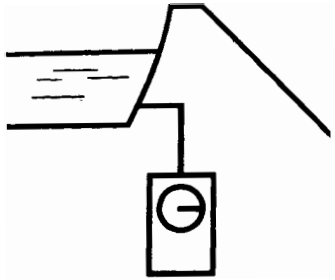


FIG. 14-24. Medida hidrostática de nivel.

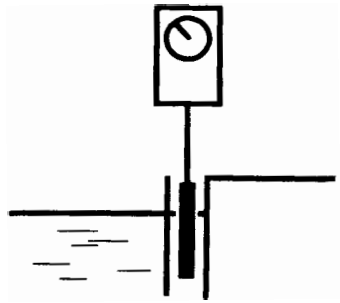


FIG. 14-25. Medida de nivel por varilla de inversión.

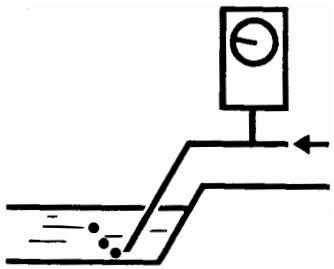


FIG. 14-26. Medida neumática de nivel.

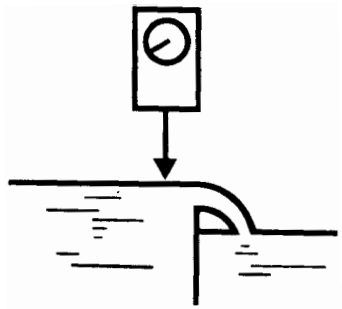


FIG. 14-27. *Medida de caudal* con vertedero.

Limnímetros de precisión dotados de balanza automática, según los esquemas de las Figs. 14-24, 14-25 y 14-26, han sido instalados en chimeneas de equilibrio, embalses, canales de admisión y desagüe, etc., de muchas centrales hidroeléctricas españolas.

14.8.3. Medición eléctrica

Los instrumentos eléctricos para la medición de niveles se clasifican en dos categorías, según el principio en que se basan:

Principio de la variación de resistencia

Utiliza electrodos inmersos en el líquido, que miden la variación de la resistencia. Se emplean para controlar el vacío, llenado, medición o indicación de nivel en toda clase de líquidos. Se emplea corriente alterna para evitar la ionización del líquido. El aparato de control puede estar situado hasta 1 km de distancia. En la Fig. 14-28 puede verse una aplicación con 4 electrodos que controla dos bombas en el vaciado de un depósito.

Principio de la variación de capacidad

Un electrodo inmerso en el líquido, cuyo nivel se quiere medir o controlar, forma con este último un condensador, cuya capacidad varía linealmente con el nivel del líquido en

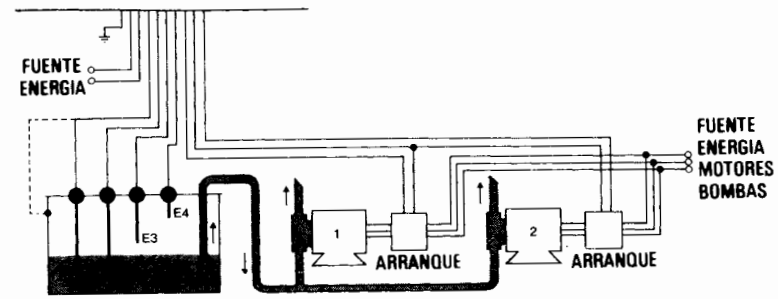


FIG. 14-28. Esquema de control de dos bombas en el vaciado de un depósito (dibujo de la firma Sterling Instruments Ltd. de Inglaterra). Cuando el nivel del líquido alcanza el electrodo E3 arranca la bomba principal y se para cuando el nivel baja por debajo del electrodo E2. Cuando el nivel alcanza E4 la bomba principal se para y arranca la bomba de reserva. Cuando el nivel baja por debajo de E2 se para la bomba de reserva.

el depósito. Se mide la corriente del condensador proporcional a la capacidad que constituye por tanto una medida del nivel del líquido. La Fig. 14-29 constituye un esquema de instalación de dos detectores capacitativos en un depósito que controlan la parada y puesta en marcha de la bomba de llenado del mismo.

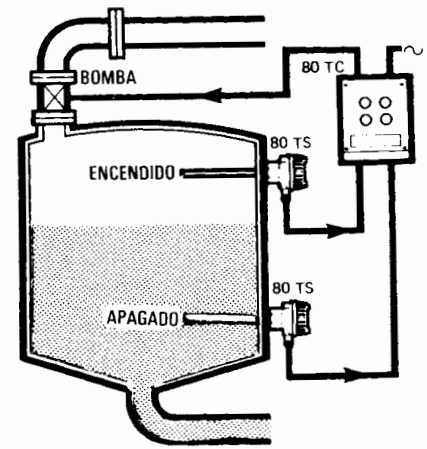


FIG. 14-29. Esquema de control de arranque y parada de una bomba para llenado de un depósito con *control de nivel capacitativo.*

14.8.4. Medición por ultrasonido

El principio de este instrumento es el mismo del *sónar* empleado por los submarinos para medir la profundidad de inmersión. Se mide el tiempo que tarda la onda ultrasónica y su eco en recorrer el espacio entre el emisor, colocado en el fondo del depósito, y el receptor, donde se recibe la onda reflejada, colocado convenientemente también en el fondo del depósito (véase Fig. 14-30). Este instrumento es especialmente apropiado a la medición de niveles en líquidos con peligro de fuego y explosión, donde los instrumentos eléctricos no podrían utilizarse.

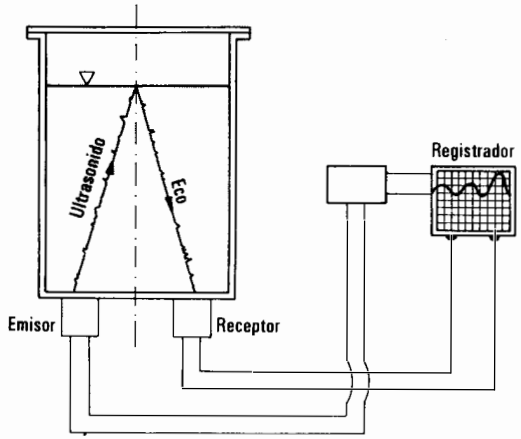


FIG. 14-30. *Medición de nivel por ultrasonido.*

14.8.5. Medición por radiaciones gamma

Se basa en la medida de la radiación remanente de rayos gamma, que se hace incidir sobre el líquido. A un lado del recipiente (Fig. 14-31) se coloca a lo largo de toda la altura ocupada por el líquido un emisor de rayos gamma de intensidad I_0. En el lado opuesto se mide la intensidad I de la radiación residual con un contador de Geiger. La intensidad I es tanto más pequeña cuanto mayor el nivel h del líquido en el depósito, porque al aumentar h aumenta la absorción de rayos gamma por el líquido.

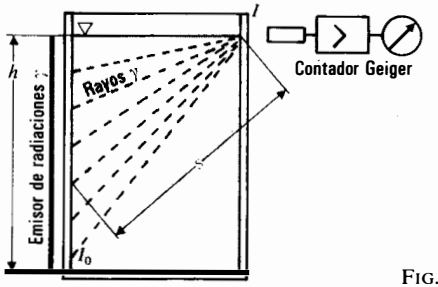


FIG. 14-31. *Medición de nivel por radiaciones gamma.*

PROBLEMAS

14-1. *Por un orificio circular lateral en pared delgada ($C_q = 0{,}61$) de diámetro $d = 20$ mm sale agua.*

Calcular el caudal si el nivel del agua por encima del c. d. g. del orificio se encuentra a una altura $\Delta h = 64$ cm.

Aplicando la Ec. (14-1) tendremos:

$$Q = C_q A \sqrt{2g\,\Delta h} = 0{,}61 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \sqrt{19{,}62 \cdot 0{,}64}$$
$$= 0{,}000679 \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}679 \text{ l/s}$$

14-2. *Sale agua por un tubo cilíndrico standard de diámetro $d = 100$ mm y $\Delta h = 1{,}21$ m. Calcular el caudal.*

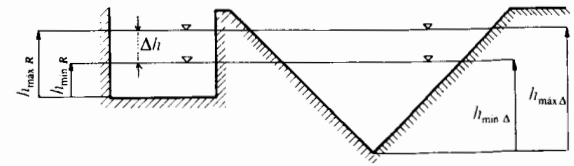
Tomando el coeficiente de caudal para el tubo cilíndrico standard de la tabla 14-1 *c*, y aplicando la misma ecuación general (14-1), tendremos:

$$Q = C_q A \sqrt{2g\,\Delta h} = 0{,}82 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \sqrt{19{,}62 \cdot 1{,}21}$$
$$= 0{,}03138 \text{ m}^3/\text{s} =$$
$$= 31{,}38 \text{ l/s}$$

14-3. *El caudal que transporta un canal oscila entre $1{,}2 \cdot 10^6$ y $1{,}9 \cdot 10^6$ l/h. En una pared transversal al canal se instalan dos vertederos, uno triangular de 90° y otro rectangular de aristas vivas y ventilado. Se quiere que el vertedero triangular no desagüe menos de $9{,}2 \cdot 10^5$ l/h ni más de $1{,}1 \cdot 10^6$ l/h. El resto del caudal será desaguado por el vertedero rectangular. (Tómese para el vertedero rectangular el valor de $C_q = 0{,}715$.)*

Calcular el ancho del vertedero rectangular y la lámina de agua máxima en los vertederos.

Subíndice Δ vertedero triangular
Subíndice R vertedero rectangular



PROB. 14-3

$$h_{\text{máx}\,\Delta} - h_{\text{mín}\,\Delta} = h_{\text{máx}\,R} - h_{\text{mín}\,R} = \Delta h \qquad (1)$$

$$Q_{\text{mín}\,\Delta} = 9{,}2 \cdot 10^5 \text{ l/h} = 0{,}2556 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_{\text{máx}\,\Delta} = 1{,}1 \cdot 10^6 \text{ l/h} = 0{,}3056 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_{\text{mín}\,R} = (1{,}2 \cdot 10^6 - 9{,}2 \cdot 10^5) \text{ l/h} = 0{,}0778 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_{\text{máx}\,R} = (1{,}9 \cdot 10^6 - 1{,}1 \cdot 10^6) \text{ l/h} = 0{,}2222 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

***En** el vertedero triangular:*

$$Q_{\text{mín}\,\Delta} = 0{,}593 \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2g}\, h_{\text{mín}\,\Delta}^{5/2}$$

$$h_{\text{mín}\,\Delta} = \left(\frac{Q_{\text{mín}\,\Delta} \cdot 15}{0{,}593 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \right)^{0{,}4} = 0{,}506 \text{ m}$$

Asimismo:

$$h_{\text{máx}\,\Delta} = \left(\frac{Q_{\text{máx}\,\Delta} \cdot 15}{0{,}593 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \right)^{0{,}4} = 0{,}544 \text{ m}$$

$$\Delta h = 0{,}5439 - 0{,}5064 = 0{,}0375 \text{ m}$$

En el vertedero rectangular:

$$Q_{\min R} = 0{,}715 \frac{2}{3} b\, h_{\min R} \sqrt{2g\, h_{\min R}}$$

$$Q_{\min R} = 0{,}715 \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\, h_{\min R}^{3/2} \tag{2}$$

Asimismo

$$Q_{\max R} = 0{,}715 \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\, h_{\max R}^{3/2} \tag{3}$$

Eliminando $h_{\min R}$ entre las Ecs. (1) y (2) se tiene:

$$Q_{\min R} = 0{,}715 \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\, (h_{\max R} - \Delta h)^{3/2} \tag{4}$$

Despejando b en (3):

$$b = \frac{0{,}1053}{h_{\max R}^{3/2}}$$

y sustituyendo en (4)

$$\frac{0{,}1053}{h_{\max R}^{3/2}} (h_{\max R} - \Delta h)^{3/2} = 0{,}0368$$

14-4. *En un tanque de agua, en el que hay un orificio de 50 mm de diámetro y en el que se mantiene una altura constante de agua de 7,5 m sobre el eje del orificio, se pesan en un depósito gravimétrico 2 toneladas de agua en 2,23 min. Se mide además el diámetro de la vena contracta, que es 40 mm.*
Calcular C_c y C_v para este orificio.

14-5. *Un orificio circular de 100 mm en el extremo de una tubería horizontal de 150 mm deja paso a un caudal de agua de 150 l/s. Aguas arriba del orificio se lee una presión de 4 bar y un tubo de Pitot en la vena contracta marca una presión de 4,20 bar.*
Calcular C_c y C_v.

14-6. *En un vertedero triangular de 90° la altura de la lámina de agua es 200 mm.*
Calcular el caudal.

14-7. *Entre dos tanques abiertos a la atmósfera y comunicados por un orificio circular de aristas vivas de 75 mm de diámetro existe un desnivel de 2 m. $C_c = 0{,}61$ y $C_v = 0{,}95$.*
Calcular el caudal.

14-8. *Un depósito de agua hermético de chapa dividido en dos tiene en la chapa divisoria un orificio de 50 mm de pared delgada. En un lado el nivel de agua está a 2,5 m por encima del eje del orificio y en el otro lado se encuentra el nivel del agua por debajo del orificio. La sobrepresión en el primer depósito es 1,5 bar y la presión absoluta en el segundo depósito es 200 Torr (presión barométrica 760 Torr).*
Calcular el caudal.

14-9. *En un canal rectangular de 10 m de ancho se instala un vertedero rectangular de aristas vivas sin contracción lateral y ventilado. El nivel aguas arriba del vertedero con relación a la solera del canal es 1,50 m, cuando el vertedero desagua un caudal de agua de 4 m^3/s.*
Calcular la altura del vertedero z_c y la altura h de la lámina de agua.

14-10. *Una tubería lisa de 50 mm de diámetro y 300 m de longitud pone en comunicación un tanque abierto a la atmósfera con el fondo de un depósito de agua hermético, en cuyo fondo hay también un tubo standard, con el que se precisa mantener en el depósito un nivel constante de agua de 3 m. El nivel de agua en el tanque superior se encuentra 20 m por encima del fondo del depósito, en cuya parte superior un manómetro mide una presión de 1,5 bar. La temperatura del agua es de 10° C.*
Calcular el diámetro del tubo standard necesario (despréciense las pérdidas secundarias a la salida del tanque y a la entrada del depósito).

14-11. *En un canal rectangular de 8 m de ancho se instala un vertedero rectangular de aristas vivas con contracción lateral y un ancho de 4 m. La altura de la cresta del vertedero sobre la solera del canal es 80 cm. La profundidad del agua en el canal aguas arriba del vertedero es 110 cm.*
Calcular el caudal.

14-12. *Calcular el caudal Q que fluye sobre un vertedero rectangular con contracción lateral, cuyo ancho $b = 2$ m; siendo el ancho del canal de 5 m, si la altura de la lámina por encima de la cresta del vertedero es de 50 cm y la altura de la cresta sobre la solera del canal es de 1 m.*

14-13. *Calcular el tiempo que se necesita para que descienda el agua en un depósito cilíndrico de 2 m de diámetro 3 m, al vaciarse por un orificio de 50 mm de aristas vivas, cuyo coeficiente de caudal es 0,6.*

14-14. *Un depósito desagua por un tubo divergente, cuyo diámetro pasa de 50 a 200 mm practicado en una pared lateral. El nivel del agua sobre el eje del tubo divergente es de 5 m. El coeficiente de velocidad es 0,60.*
Calcular el caudal de agua.

14-15. *Un vertedero rectangular sin contracción lateral y ventilado tiene un ancho $b = 0{,}8$ m; la altura desde la solera del canal hasta la cresta del vertedero es 0,5 m y la altura de la lámina de agua hasta la misma cresta del vertedero es 0,3 m.*
Calcular el caudal.

14-16. *Un vertedero rectangular con contracción lateral tiene un ancho de 3 m y por él desagua un caudal de 96.000 l/h. La cresta del vertedero se encuentra 180 cm por encima de la solera del canal, cuyo ancho es de 6 m.*
Calcular la altura de la lámina sobre la cresta del vertedero.

15. *Sobrepresiones y depresiones peligrosas en estructuras y máquinas hidráulicas: Golpe de ariete y cavitación*

En las tres fases: proyecto, instalación y funcionamiento de ciertas estructuras y máquinas hidráulicas es necesario un control de estos dos fenómenos: golpe de ariete y cavitación, que originan sobrepresiones o depresiones excesivas y que pueden conducir a averías, llegando hasta la destrucción misma de la estructura o de la máquina.

15.1. GOLPE DE ARIETE

15.1.1. Introducción

En el estudio de este fenómeno hay que abandonar las dos hipótesis normalmente utilizadas en este libro: *fluido incompresible, régimen permanente*. El golpe de ariete es un fenómeno transitorio y por tanto de régimen *variable*, en que la tubería ya no es rígida y el líquido es *compresible*.

Este fenómeno se produce en los conductos al cerrar o abrir una válvula y al poner en marcha o parar una máquina hidráulica, o también al disminuir bruscamente el caudal. Un caso importante ocurre en las centrales hidroeléctricas, donde se ha de reducir bruscamente el caudal suministrado a las turbinas hidráulicas acopladas a alternadores, cuando se anula la carga del alternador: en este caso la instalación debe proyectarse de manera que no se produzca un *golpe de ariete excesivo*.

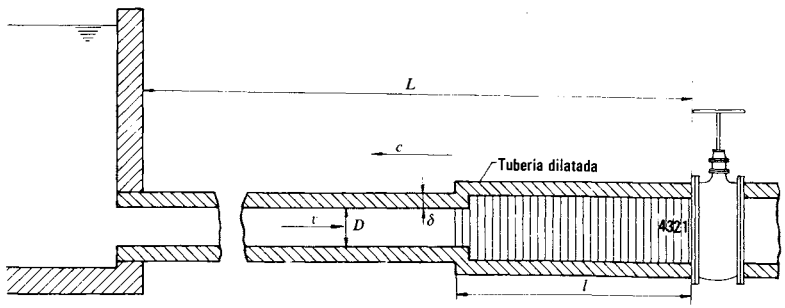


FIG. 15-1. Onda de presión en el *cierre instantáneo de una válvula*: c es la velocidad de propagación de la onda y v la velocidad del fluido. La tubería se dilata (o se contrae) al avanzar la onda de presión (o de depresión).

La Fig. 15-1 representa una tubería de longitud L, espesor δ y diámetro interior D por la que circula agua proveniente de un embalse y que termina en su extremo derecho en una válvula. Si se cierra ésta rápidamente, en virtud del principio de conservación de la energía, al disminuir la energía cinética, ésta se va transformando en un trabajo de compresión del fluido que llena la tubería y en el trabajo necesario para dilatar esta última: se ha producido una sobrepresión, o un *golpe de ariete positivo*.

Por el contrario, al abrir rápidamente una válvula se puede producir una depresión, o *golpe de ariete negativo*.

El estudio de este fenómeno nos hará ver de qué factores depende para poderlo aminorar, para calcular las sobrepresiones que se preveen en la instalación a fin de seleccionar el espesor de la tubería para resistir a esta sobrepresión, etc.

15.1.2. Explicación del fenómeno

Aunque es físicamente imposible cerrar una válvula instantáneamente, el estudio inicial del caso de cierre instantáneo ayuda al estudio de los casos reales.

Al cerrarse por completo instantáneamente la válvula de la Fig. 15-1, si dividimos imaginariamente todo el fluido que llena la tubería en rodajas, como la 1, 2, 3 y 4 indicadas en la figura, se quedará primero en reposo la rodaja 1 y a continuación la 2, 3, 4, etc., necesitando un cierto tiempo. Es decir, en la válvula se ha originado una onda de presión que se propaga con velocidad c, la cual en el instante considerado tiene dirección contraria a la velocidad v del fluido: se ha creado una onda elástica, o sea una onda de presión que se propaga por la tubería, se refleja en el embalse, vuelve a la válvula, de nuevo al embalse, y así sucesivamente; originando sobrepresiones y depresiones en la tubería, la cual se dilata o contrae al paso de la onda. Siendo c la velocidad de la onda y L la longitud de la tubería, el tiempo que tarda la onda en recorrer una vez la distancia entre la válvula y el embalse es $t_0 = L/c$. Al cabo de un tiempo $T = 4\,t_0 = 4\,L/c$ el ciclo se repite.

Consideremos en la Fig. 15-2 la serie de los acontecimientos en la tubería durante un período $T = 4\,L/c$.

1.º *No hay perturbación.* Régimen permanente. El líquido en la tubería se desplaza con velocidad v del embalse a la válvula. Diámetro de la tubería normal.

2.º *Tiempo* 0. La válvula se cierra *instantáneamente*. La velocidad del líquido se anula a partir de la válvula, no instantáneamente, en toda la tubería.

3.º *Tiempo* $t_0/2 = \frac{1}{2}\frac{L}{c}$. La onda de presión se ha propagado hacia el embalse con celeridad c y el frente de onda ha llegado a la mitad de la tubería. Mitad derecha de la tubería dilatada por la sobrepresión. Mitad izquierda, diámetro normal. En esta mitad izquierda el agua sigue circulando con velocidad v hacia la válvula. En la mitad derecha, $v = 0$.

4.º *Tiempo* $t_0 = L/c$. La onda de presión ha llegado al embalse. En toda la tubería el líquido está en reposo, $v = 0$, pero no en equilibrio.

Toda la tubería está dilatada. Como un resorte que se expansiona, el agua en la tubería comienza a moverse con velocidad v, pero dirigida en sentido contrario al de la Fig. 15-2, 1. El líquido empieza a ponerse en movimiento comenzando, por decirlo así, por las rodajas contiguas al estanque.

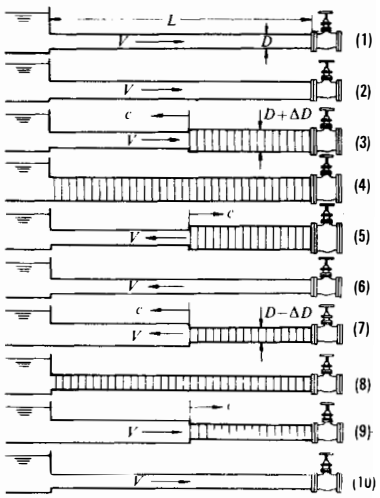


FIG. 15-2. *Cierre instantáneo de una válvula* al final de una tubería que sale de un depósito: 1.º No hay perturbación; 2.º tiempo O en que la válvula queda totalmente cerrada; 3.º tiempo $\frac{L/2}{c}$; 4.º tiempo $\frac{L}{c}$; 5.º tiempo $\frac{3/2L}{c}$; 6.º tiempo $\frac{2L}{c}$; 7.º tiempo $\frac{5/2L}{c}$; 8.º tiempo $\frac{3L}{c}$; 9.º tiempo $\frac{7/2L}{c}$; 10.º tiempo $\frac{4L}{c} = T$ (período).

5.º *Tiempo* $3/2\ t_0 = 3/2\ \frac{L}{c}$. La mitad izquierda de la tubería se ha contraído a su diámetro normal. La onda sigue propagándose hacia la derecha con velocidad c. En la mitad izquierda de la tubería el fluido circula con la velocidad v.

6.º *Tiempo* $2\ t_0 = \frac{2L}{c}$. Diámetro de *toda* la tubería normal. Todo el fluido de la tubería en movimiento desde la válvula hacia el embalse con velocidad v; o sea en dirección contraria a la de las Figs. 15-2, 1, 2 y 3. No hay sobrepresión en ninguna parte de la tubería; pero por la inercia la presión continúa disminuyendo, la onda elástica se sigue propagando, ahora con depresión desde la válvula hacia el embalse con la velocidad c: el diámetro de la tubería irá disminuyendo por debajo de su diámetro normal.

7.º *Tiempo* $5/2\ t_0 = \frac{5}{2}\frac{L}{c}$. La depresión ha alcanzado la mitad de la tubería. La mitad derecha de la tubería contiene agua en reposo y a una presión por debajo de la normal. El diámetro de la tubería en esta mitad es inferior al normal.

8.º *Tiempo* $3\ t_0 = 3\ \frac{L}{c}$. El agua en toda la tubería está en reposo; pero no en equilibrio, y el agua inicia su movimiento desde el embalse a la válvula con velocidad v dirigida hacia la derecha. La depresión reina en toda la tubería. El diámetro de toda la tubería es inferior al normal.

9.º *Tiempo* $7/2\ t_0 = \frac{7}{2}\frac{L}{c}$. En la mitad izquierda de la tubería el fluido está en movimiento con velocidad v hacia la válvula. En la mitad derecha el líquido continúa en reposo y en depresión. El diámetro de la parte izquierda es normal. El de la mitad derecha menor que el normal; c y v tienen el mismo sentido.

10.º *Tiempo* $4\ t_0 = 4\ \frac{L}{c}$. Diámetro de la tubería normal. Todo el fluido en movimiento con velocidad v hacia la válvula. Todo igual que en el tiempo 0. Luego el periodo de este movimiento es:

$$T = 4\ t_0 = 4\ L/c \tag{15-1}$$

Teóricamente este movimiento oscilatorio continuaría indefinidamente.

Prácticamente la deformación de la tubería y la viscosidad del líquido disipa energía y las oscilaciones se amortiguan.

15.1.3. Fórmulas de la presión máxima o sobrepresión

El estudio del golpe de ariete fue hecho en primer lugar por Joukowski, mientras que la solución completa del problema fue dada por Allievi.

El cálculo de la sobrepresión depende del tiempo de cierre t_c de la válvula. El cierre puede ser:

— *Instantáneo:* $t_c = 0$. Caso teórico, físicamente imposible; pero muy interesante porque explica la esencia del fenómeno.

— *Rápido:* $0 < t_c < 2\ t_0 = 2\ \frac{L}{c} = T/2$. La presión máxima es la misma que en el cierre instantáneo; aunque la curva de presiones en la tubería en función del tiempo sea distinta. En el cierre rápido una onda de presión no tiene tiempo de ir al estanque, reflejarse y volver a la válvula, antes de que termine medio ciclo.

— *Lento:* $t_c > 2\ t_0 = 2\ \frac{L}{c} = T/2$. La presión máxima es menor que en los dos casos precedentes, porque la depresión de la onda elástica llega a la válvula antes de que se complete el medio ciclo e impide el aumento ulterior de la presión.

Este último caso es el más frecuente en la práctica. En este libro nos limitaremos a estudiar dos fórmulas fundamentales referentes al primero y último caso.

15.1.3.1. Presión máxima en cierre total o parcial instantáneo de la válvula en una tubería elástica

Supongamos (Fig. 15.1) que el cierre de la válvula es *instantáneo*. El fluido se decelera, lo que da lugar a una fuerza de inercia, F_i, siendo

$$F_i = -m\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{15-2}$$

donde Δt no es el tiempo de cierre de la válvula (por hipótesis $t_c = 0$); sino el tiempo finito que ha transcurrido para que una cierta masa $m = \rho\, lA$ de fluido que ocupa una longitud finita de tubería l reduzca su velocidad un cierto valor finito Δv.

En el *cierre total*

$$\Delta v = -v \tag{15-3}$$

En el *cierre parcial*

$$\Delta v = v' - v \tag{15-4}$$

donde v' — velocidad final del fluido.

Llevando los valores (15-3) y (15-4) a la Ec. (15-2), tendremos:

En el *cierre total*

$$F_i = \rho\, lA \frac{v}{\Delta t} \tag{15-5}$$

En el *cierre parcial*

$$F_i = \rho\, lA \frac{(v - v')}{\Delta t} \tag{15-6}$$

donde l — longitud recorrida por la onda elástica a partir de la válvula en el tiempo Δt (véase Fig. 15-1).

Por otra parte la sobrepresión será

$$\Delta p = F_i/A \tag{15-7}$$

siendo, evidentemente,

$$c = l/\Delta t \tag{15-8}$$

la velocidad de propagación o celeridad de la onda. Llevando, por tanto, los valores (15-7) y (15-8) a las Ecs. (15-5) y (15-6) obtendremos finalmente la

FORMULA DE JOUKOWSKI

$$\boxed{\Delta p = \rho\, cv} \tag{15-9}$$

(sobrepresión en cierre instantáneo total de la válvula)

$$\boxed{\Delta p = \rho\, c(v - v')} \tag{15-10}$$

(sobrepresión en cierre instantáneo parcial de la válvula)

Joukowski, además, descubrió la fórmula siguiente, que permite calcular c, la cual por simplificar aducimos sin demostración:

FORMULA DE JOUKOWSKI PARA LA CELERIDAD DE LA ONDA DE PRESION EN UNA TUBERIA

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{\frac{E_0}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_0 D}{E\delta}}}} \tag{15-11}$$

donde c — celeridad onda elástica del fluido en la tubería, m/s, *SI*
E_0 — módulo de elasticidad de volumen del fluido, N/m^2, *SI*
ρ — densidad del fluido, kg/m^3, *SI*
D — diámetro de la tubería, m, *SI*
E — módulo de elasticidad del material de la tubería
δ — espesor de la tubería, m, *SI*.

El numerador de la Ec. (15-11), como se demuestra en Física, es la celeridad de la onda elástica en el fluido. En el agua

$$c_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}} = 1.425 \text{ m/s} \tag{15-12}$$

(celeridad onda elástica en agua)

Tomando como valor medio del módulo de Young para el acero usado en la construcción de tuberías forzadas (o tuberías a presión de las centrales hidroeléctricas, donde puede producirse el golpe de ariete) un valor de $2{,}5 \times 10^{11}$ N/m^2, *SI*, y llevando este valor, así como el de la Ec. (15-12) a la Ec. (15-11), tendremos la fórmula aproximada:

$$c = \frac{10.000}{\sqrt{50 + 0{,}5D/\delta}} \text{ (m/s)} \tag{15-13}$$

(agua, tubería corriente de acero, SI)

(Véase problema 15-1 .)

15.1.3.2. Presión máxima en cierre lento uniforme total de una válvula en una tubería rígida

En el cierre lento supondremos en primera aproximación para simplificar que la tubería es rígida, o sea indeformable, y que el cierre de la válvula es uniforme.

Consideremos la fuerza de inercia debida a la deceleración del fluido que circula por una tubería de sección A, longitud L con velocidad v en el tiempo de cierre de la válvula t_c:

$$F_i = -m \frac{dv}{dt} = -\rho\, AL \frac{dv}{dt}$$

y análogamente al caso anterior (Sec. 15.3.1) $\Delta p = F_i/A$ y

$$\Delta p = -\rho L \frac{dv}{dt}$$

pero

$$\frac{dv}{dt} = \frac{0 - v}{t_c} = -\frac{v}{t_c} \quad \text{(movimiento uniforme)}$$

luego

$$\boxed{\Delta p = \frac{\rho L v}{t_c}} \qquad (15\text{-}14)$$

(tubería rígida, cierre lento y uniforme)

Modificando esta fórmula con un coeficiente k comprendido entre 1 y 2 (normalmente inferior a 1,5) para tener en cuenta el efecto de la elasticidad de la tubería, no incluido en la Ec. (15-14), tendremos la fórmula de la

SOBREPRESION EN CIERRE LENTO DE UNA VALVULA

$$\boxed{\Delta p = k \frac{\rho L v}{t_c}} \qquad (15\text{-}15)$$

(tubería elástica, cierre lento, k = 1 a 2)

De la Ec. (15-15) se deducen las siguientes consecuencias prácticas: el peligro del golpe de ariete de una instalación es tanto mayor:

- cuanto mayor sea la longitud de la tubería (por ejemplo la tubería forzada de la turbina al embalse);
- cuanto mayor sea la velocidad del líquido en la tubería;
- cuanto más rápido sea el cierre de la válvula (por ejemplo, el cierre demasiado rápido del inyector de una turbina Pelton puede producir *el golpe de ariete*. Véase Sec. 22.11.2).

15.2. CAVITACION

15.2.1. La depresión, causa de la cavitación

La *cavitación* es un fenómeno que se produce siempre que la presión en algún punto o zona de la corriente de un líquido desciende por debajo de un cierto valor

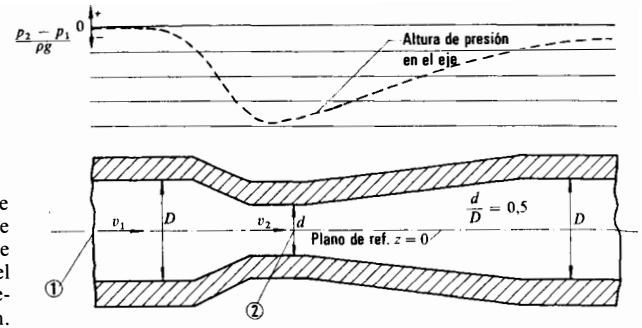


FIG. 15-3. En la garganta de un Venturi, sección 2, puede producirse la *cavitación*, lo que causaría un rápido deterioro del instrumento de medida. La presión es mínima en esta sección.

mínimo admisible. El fenómeno puede producirse lo mismo en estructuras hidráulicas estáticas (tuberías, Venturis, etc.) que en máquinas hidráulicas (bombas, hélices, turbinas). Por los efectos destructivos que en las estructuras y máquinas hidráulicas mal proyectadas o mal instaladas produce la cavitación es preciso estudiar este fenómeno, para conocer sus causas y controlarlo. (Los constructores de bombas hidráulicas, por ejemplo, reciben con frecuencia reclamaciones y encargos de reposición o reparación de rodetes averiados por esta causa.)

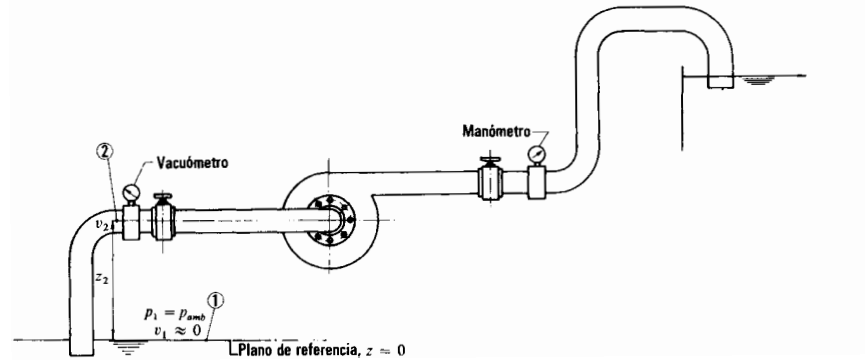


FIG. 15-4. Una altura z_2 demasiado grande, una longitud excesiva de la tubería de aspiración o pérdidas secundarias elevadas en la misma, pueden producir en el interior de la bomba a la entrada del rodete el fenómeno de *cavitación* con la destrucción rápida del rodete, que es el órgano más caro de la misma.

Las Figs. 15-3, 15-4 y 15-5 representan tres ejemplos escogidos entre los más importantes donde puede producirse la *cavitación:* en la garganta de un Venturi, a la entrada del rodete de una bomba centrífuga y a la salida del rodete de una turbina hidráulica de reacción.

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 de cualquiera de las Figs. 15-3 ó 15-4. Resulta más cómodo en el fenómeno que estudiamos considerar presiones absolutas. Por tanto,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - H_{r1-2} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \qquad (15\text{-}16)$$

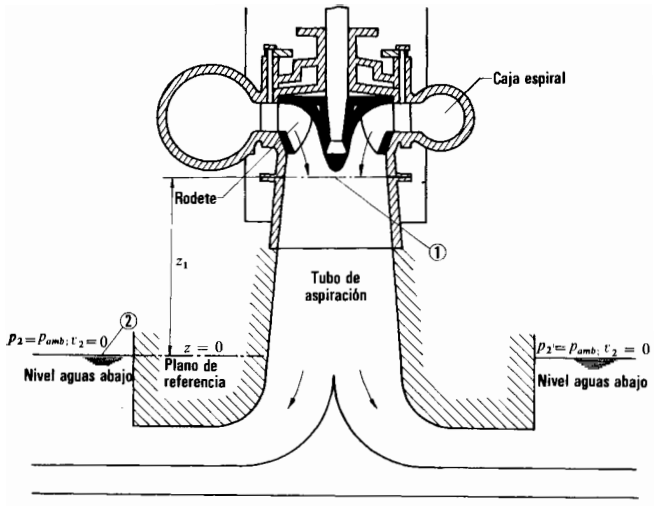


FIG. 15-5. En una turbina de reacción (véase Sec. 22.5) el tubo de aspiración, que es el de evacuación de la turbina, produce una depresión a la salida del rodete que hay que controlar para que no se origine en dicho lugar el fenómeno de *cavitación*.

donde p_1, p_2 — presiones absolutas en los puntos 1 y 2
H_{r1-2} — pérdida de altura entre los puntos 1 y 2
z_1, z_2 — cotas de los puntos 1 y 2, tomando como plano de referencia el plano horizontal que se indica en cada figura

De la Ec. (15-16) se deduce en las dos primeras figuras ($p_1 = p_{amb}$ = presión barométrica):

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{amb}}{\rho g} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - z_2 - H_{r1-2} \qquad (15\text{-}17)$$

[*Venturi, bomba centrífuga (Figs. 15-3 y 15-4)*]

Según la Ec. (15-17) la presión p_2 es menor que la p_{amb}, ya que los tres términos últimos en dicha ecuación son negativos (ei z_2 puede ser nulo, como en la Fig. 15-3). Asimismo, en la tercera figura (Fig. 15-5) ($p_2 = p_{amb}$; $z_2 = 0$; $\frac{v_2^2}{2g} = 0$) se tiene:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{amb}}{\rho g} - z_1 - \frac{v_1^2}{2g} - H_{r1-2} \qquad (15\text{-}18)$$

[*Turbina hidráulica (Fig. 15-5)*]

La presión p_2 en la Ec. (15-17) o la p_1 en la Ec. (15-18):

— *teóricamente* puede bajar solo hasta el 0 absoluto; porque la presión absoluta no puede ser nunca negativa (véase Sec. 3.1, cuarta propiedad).
— *prácticamente* existe un límite inferior de la presión mayor que 0 que es el siguiente:

$$p \geq p_s \qquad (15\text{-}19)$$

donde p_s — *presión de saturación del vapor* a la temperatura en que se encuentre el fluido.

En efecto, la Termodinámica enseña que un líquido entra en ebullición a una presión determinada, llamada *presión de saturación*, p_s, que depende de la temperatura, la cual temperatura correlativamente se llama *temperatura de saturación*, t_s, para dicha presión (véase Sec. 2.6). Así, por ejemplo, el agua a 100° C entra en ebullición, si la presión es $(p_s)_{100°} = 1{,}0133$ bar; pero a 25°,C puede también hervir. Para ello, según la tabla 15-1, basta que la presión absoluta baje hasta el valor $(p_s)_{25°} = 0{,}03166$ bar. Los valores de p_s en función de la temperatura se encuentran en las tablas de vapor del líquido en cuestión. A continuación se aduce la tabla del agua, con la presión p_s de saturación para cada temperatura.

TABLA 15-1

PRESION DE SATURACION p_s DEL VAPOR DE AGUA A DIVERSAS TEMPERATURAS, t_s

t_s (°C)	p_s (bar)	t_s (°C)	p_s (bar)
0,00	0,006108	31	0,04491
0,01	0,006112	32	0,04753
		33	0,05029
1	0,006566	34	0,05318
2	0,007055	35	0,05622
3	0,007575		
4	0,008129	36	0,05940
5	0,008718	37	0,06274
		38	0,06624
6	0,009345	39	0,06991
7	0,010012	40	0,07375
8	0,010720		
9	0,011472	41	0,07777
10	0,012270	42	0,08198
		43	0,08639
11	0,013116	44	0,09100
12	0,014014	45	0,09582
13	0,014965		
14	0,015973	46	0,10086
15	0,017039	47	0,10612
		40	0,11162
16	0,018168	49	0,11736
17	0,019362	50	0,12335
18	0,02062		
19	0,02196	51	0,12961
20	0,02337	52	0,13613
		53	0,14293
21	0,02485	54	0,15002
22	0,02642		
23	0,02808	55	0,15741
24	0,02982	56	0,16511
25	0,03166	57	0,17313
		58	0,18147
26	0,03360	59	0,19016
27	0,03564		
28	0,03778	60	0,19920
29	0,04004	61	0,2086
30	0,04241	62	0,2184

(Continúa)

TABLA 15-1 *(continuación)*

PRESION DE SATURACION p_s DEL VAPOR DE AGUA A DIVERSAS TEMPERATURAS, t_s

t_s (°C)	p_s (bar)	t_s (°C)	p_s (bar)
63	0,2286	85	0,5780
64	0,2391	86	0,6011
		87	0,6249
65	0,2501	88	0,6495
66	0,2615	89	0,6749
67	0,2733		
68	0,2856	90	0,7011
69	0,2984	91	0,7281
		92	0,7561
70	0,3116	93	0,7849
71	0,3253	94	0,8146
72	0,3396		
73	0,3543	95	0,8453
74	0,3696	96	0,8769
		97	0,9094
75	0,3855	98	0,9430
76	0,4019	99	0,9776
77	0,4189		
78	0,4365	100	1,0133
79	0,4547	101	1,0500
		102	1,0878
80	0,4736	103	1,1267
81	0,4931	104	1,1668
82	0,5133		
83	0,5342	105	1,2080
84	0,5557		

En el Apéndice 11 pueden verse las curvas de saturación de líquidos diversos y en la tabla 4-1, pág. 52, la tabla de saturación del mercurio.

El comienzo de la *ebullición* del líquido es también el comienzo del fenómeno de la *cavitación* que se describe en la sección siguiente.

Por tanto de las Ecs. (15-17) y (15-18) se desprende que la presión p_2 o respectivamente p_1 será tanto menor y el *peligro de la cavitación tanto mayor:*

— *cuanto menor sea* p_{amb}, o sea la presión barométrica del lugar;
— *cuanto mayor sea la altura de velocidad* creada en la zona de depresión. (En la Fig. 15-3 *a*, cuanto el diámetro *d* de la garganta del Venturi sea menor, y por tanto la velocidad en la garganta v_2 sea mayor);
— *cuanto mayor sea* z_2 o respectivamente z_1. (En las Figs. (15-4) y (15-5),
— cuanto más se eleve la bomba o la turbina con relación al nivel inferior;
— *cuanto mayores en el caso de la Fig. 15-4 o menores en el caso de la Fig. 15-5 sean las pérdidas,* H_{r1-2}.

Así, por ejemplo, según la tabla 15-1, si las condiciones de la instalación representada en la Fig. 15-4, son tales que la presión en la sección 2 alcanza el valor absoluto de 0,10 bar y se bombea agua fría el agua no hervirá y la bomba funcionará normalmente; pero si se bombea agua caliente a 50° C el agua entrará en ebullición y se producirá el fenómeno de cavitación. El fluido bombeado es ahora una emulsión de líquido y vapor, el caudal másico se reduce

y se reduce también rápidamente el rendimiento de la máquina. Como la presión sigue bajando en el interior de la bomba, o sea aguas abajo del punto 2 la bomba entra en cavitación aun para presiones más altas en la sección 2, como se verá más adelante al estudiar la cavitación en bombas (véase Sec. 19.12.1).

15.2.2. Descripción de la cavitación

Según se ha dicho en la sección anterior, cuando la corriente en un punto de una estructura o de una máquina alcanza una presión inferior a la presión de saturación de vapor, el líquido se evapora y se originan en el interior del líquido «cavidades» de vapor, de ahí el nombre de *cavitación.* Estas cavidades o burbujas de vapor arrastradas por la corriente llegan a zonas en que reina una presión muy elevada, y allí se produce una condensación violenta del vapor. Esta condensación del vapor a su vez produce una elevación local de la presión que puede sobrepasar los 1.000 bar. En el interior del fluido existen, pues, zonas en que reina un gradiente fuerte de presiones que aceleran las burbujas y producen un impacto en el contorno (Venturi, bomba, turbina, etc.).

La hélice de un barco trabajando tres o cuatro meses en condiciones malas de cavitación queda totalmente inutilizada. Un solo viaje trasatlántico era a veces suficiente para destrozar una hélice cuando aún no se había aprendido a luchar contra la cavitación.

El rodete de una bomba centrífuga que ha funcionado con cavitación presenta un aspecto esponjoso, como carcomido o corroído. Asimismo, se da el caso

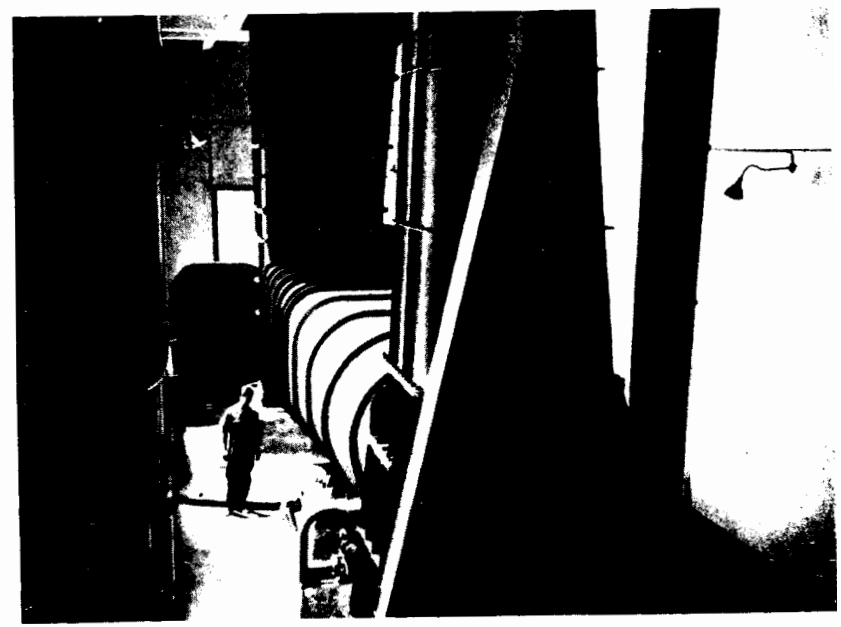


FIG. 15-6. (*a*) Parte baja del *túnel de cavitación* del Pardo. La cámara de observación de este túnel tiene las siguientes dimensiones: 4,7 · 0,9 · 0,9 m. Altura entre ejes de las ramas horizontales, 7 m. Profundidad del absorbedor de burbujas, 13,6 m. Longitud máxima entre ejes de las ramas horizontales, 12 m.

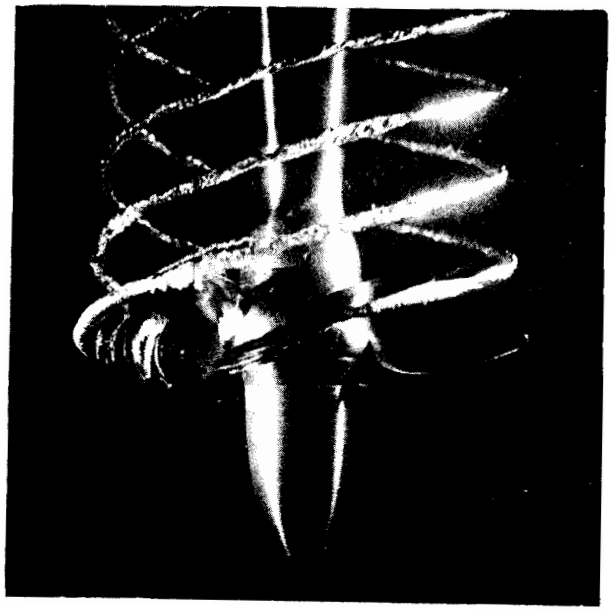


FIG. 15-7. *Fotografía estroboscópica* de una hélice en la cual se está produciendo la cavitación, tomada en el túnel de cavitación del Pardo (véase Figura 15-6).

de que un álabe de una turbina de espesor de 25 mm queda totalmente horadado y erosionado por la cavitación en un solo año.

Antiguamente se creyó que la cavitación no era más que una corrosión química producida por la liberación de aire y de oxígeno disuelto en el líquido a bajas presiones. *Actualmente* se sabe que la cavitación es debida *principalmente* a la acción mecánica de impactos rápidos, a manera de explosiones, de las partículas de líquido, aunque no se descarta la posibilidad de acción química corrosiva, cuya naturaleza no se ha llegado aún a dilucidar por completo.

Estos impactos son además periódicos, es decir, se produce un fenómeno vibratorio que aumenta la *erosión* del material *por fatiga*. A estas vibraciones hay que referir la explicación del fallo de algunas piezas, por ejemplo, de los pernos de sujeción de los cojinetes de los generadores en las centrales hidroeléctricas cuando se está produciendo la cavitación.

15.2.3. Control de la cavitación

Los principales fabricantes de estructuras y máquinas hidráulicas, por ejemplo de turbinas, poseen en sus laboratorios equipo para estudiar este fenómeno. El *estroboscopio* presta grandes servicios para el estudio de la cavitación. La Fig. 15-6 representa el *túnel de cavitación* del Canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo, Madrid, y la Fig. 15-7 es una foto tomada en dicho túnel de una hélice en la cual se está produciendo la cavitación.

El control de la cavitación es doble:

— *Diseñar contra la cavitación*, es decir, diseñar tanto la máquina como la instalación de la misma para que no se produzca este fenómeno.

— *Utilizar materiales resistentes a la cavitación*, si se tolera en el diseño que en algún caso se presente este fenómeno.

En las turbinas hidráulicas, por ejemplo, se han obtenido buenos resultados con aceros inoxidables (18 por 100 de cromo y 8 por 100 de níquel), material con el que se reparan también, mediante soldadura, los rodetes afectados por la cavitación.

La importancia excepcional de los dos fenómenos, *golpe de ariete y cavitación*, estudiados en este capítulo, obliga a volver a tratar de ellos, particularizados a las bombas (Sec. 19.12) y a las turbinas hidráulicas (Sec. 22.11).

PROBLEMAS

15-1. *Al final de una tubería de acero ($E = 2 \cdot 10^7$ N/cm²) de diámetro interior $D = 600$ mm, y de espesor $\delta = 10$ mm, se encuentra una válvula. La velocidad del agua en la tubería es $v = 2{,}50$ m/s. La válvula se cierra instantáneamente.*

Calcular:

a) la velocidad de propagación de la onda de presión;

b) la sobrepresión producida por el golpe de ariete.

Módulo de elasticidad de volumen del agua, $E_0 = 2{,}03 \cdot 10^5$ N/cm².

En el cierre instantáneo de la válvula la sobrepresión Δp viene dada por la Ec. (15-9), donde la velocidad de propagación de la onda de presión, c, viene dada a su vez por la fórmula de Joukowski (15-11):

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E_0}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_0 D}{E\delta}}} = \frac{\sqrt{\frac{2{,}03 \cdot 10^9}{1.000}}}{\sqrt{1 + \frac{2{,}03 \cdot 10^5 \cdot 0{,}6}{2 \cdot 10^7 \cdot 0{,}01}}}$$

$$= 1.112 \text{ m/s}$$

El numerador podría haberse escrito directamente, poniendo el valor 1.425 para el agua de la Ec. (15-12).

La Ec. (15-13) nos hubiera dado solo un valor aproximado porque esta ecuación supone un valor de E algo distinto.

La sopresión será:

$$\Delta p = \rho c v = 1.000 \cdot 1.112 \cdot 2{,}5$$

$$= 2{,}78 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 278 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

15-2. *Una bomba centrífuga aspira agua de un depósito por una tubería de 100 m de longitud y 200 m de diámetro. El eje de la bomba se encuentra 4 m por encima del nivel del agua en el depósito. La bomba impulsa por una tubería de 100 mm de diámetro y 1.000 m de longitud a otro depósito, cuyo nivel se encuentra 50 m por encima del nivel del depósito de aspiración. El coeficiente λ de pérdidas primarias de las dos tuberías es de 0,025. Todas las pérdidas secundarias (incluso la debida a la entrada del agua en el depósito de impulsión) se han tenido en cuenta en el cómputo la longitud de la tubería, que ha de interpretarse como longitud equivalente (véase Sec. 11-5). La temperatura del agua es de 10° C y la presión atmosférica 1 bar.*

Calcular:

a) potencia que la bomba debe comunicar a la corriente para bombear un caudal de 8 l/s;

b) máximo caudal que puede bombearse con esta instalación;

c) máximo caudal que puede bombearse con la instalación anterior, pero sustituyendo la tubería de aspiración por otra de 100 mm.

UNIVERSIDAD BIBLIOTECA

a)

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} - H_{r_{1-2}} + H_B = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{c_2^2}{2g}$$

Haciendo

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = 0 \qquad \frac{c_1^2}{2g} \simeq 0 \qquad \frac{c_2^2}{2g} \simeq 0$$

se tiene

$$H_B = z_2 - z_1 + H_{r_1-2}$$

$$H_{r_1-2} = \lambda \left(\frac{L_a}{D_a} \cdot \frac{v_a^2}{2g} + \frac{L_i}{D_i} \cdot \frac{v_i^2}{2g} \right)$$

$$v_a = v_i \left(\frac{D_i}{D_a} \right)^2 \cdot \frac{v_a^2}{2g} = \frac{v_i^2}{2g} \left(\frac{D_i}{D_a} \right)^4 = \frac{1}{16} \cdot \frac{v_i^2}{2g}$$

$$H_{r_1-2} = \lambda \frac{v_i^2}{2g} \left(\frac{L_a}{D_a} \cdot \frac{1}{16} + \frac{L_i}{D_i} \right) = 0{,}025 \left(\frac{100}{0{,}200} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1.000}{0{,}100} \right) \frac{v_i^2}{2g} =$$

$$= 250{,}781 \frac{v_i^2}{2g}$$

$$v_i = \frac{4Q}{\pi D_i^2} \cdot \frac{v_i^2}{2g} = \frac{16 Q^2}{2g \pi^2 \cdot D_i^4} = \frac{16 \cdot 0{,}008^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}1^4} = 0{,}0529 \text{ m}$$

$$H_{r_1-2} = 250{,}78 \cdot 0{,}0529 = 13{,}262 \text{ m}$$

$$H_B = 50 + 13{,}262 = 63{,}262 \text{ m}$$

$$P = Q \rho g H_B \cdot 10^{-3} = 0{,}008 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 63{,}26 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 4{,}965 \text{ kW}$$

b)

Calculemos la presión absoluta a la entrada de la bomba, p_E, escribiendo la ecuación de Bernoulli entre 1 y E en presiones absolutas

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} - H_{r1-E} = \frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{c_E^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{10^5}{1.000 \cdot 9{,}81} = 10{,}194 \text{ m} \qquad \frac{c_1^2}{2g} = 0$$

$$z_E - z_1 = 4 \text{ m}$$

$$H_{r1-E} = \lambda \frac{L_a}{d_a} \frac{c_E^2}{2g}$$

$$c_E = \frac{4Q}{\pi d_a^2} \left\| \frac{c_E^2}{2g} = \frac{16 Q^2}{2g \pi^2 d_a^4} = 51{,}642 Q^2 \right.$$

$$H_{r1-E} = \frac{0{,}025 \cdot 100 \cdot 51{,}64}{0{,}200} Q^2 = 645{,}522 Q^2$$

$$\frac{p_E}{\rho g} = 10{,}19 - 4 - 645{,}522 Q^2 - 51{,}642 Q^2$$

$$= 6{,}194 - 697{,}164 Q^2$$

Para $t = 10°$ C, según tabla 15-1, $p_s = 0{,}012270$ bar

El caudal máximo es el que hará $\left(\frac{p_E}{\rho g} \right)_{\min} = \frac{p_s}{\rho g}$

$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{0{,}012270 \cdot 10^5}{1.000 \cdot 9{,}81} = 0{,}1251 \text{ m}$$

Se tiene, pues:

$$Q_{máx} = \sqrt{\frac{6{,}194 - 0{,}1251}{697{,}164}} = 0{,}0933 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

c) Si la tubería de aspiración es de 100 mm se tiene:

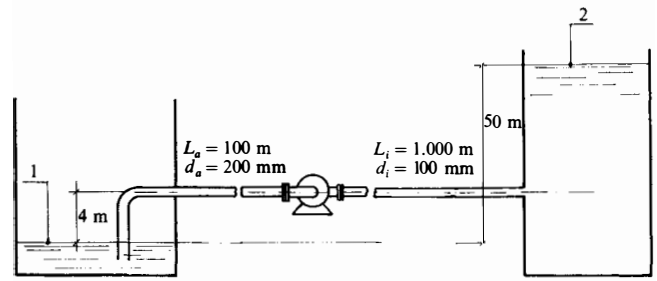
$$\frac{c_E^2}{2g} = \frac{16}{2g \pi^2 \, 0{,}1^4} Q^2 = 826{,}269 Q^2$$

$$H_{r1-E} = \frac{0{,}025 \cdot 100 \cdot 826{,}269}{0{,}1} Q^2 = 20.656{,}7 Q^2$$

$$0{,}1251 = 6{,}19 - 21.483 Q_{máx}^2$$

$$Q_{máx} = \sqrt{\frac{6{,}19 - 0{,}1251}{21.483}} = 0{,}0168 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Se observa el enorme influjo que tiene sobre la cavitación a la entrada de una bomba el diámetro de la tubería de aspiración.



PROB. 15-2

15-3. *Al cerrar instantáneamente una válvula instalada al final de una tubería de acero de 50 mm de diámetro y 8 mm de espesor, que conduce agua, se mide una sobrepresión de 10 bar.*
Calcular aproximadamente el caudal.

15-4. *Por un conducto de ventilación de sección cuadrada de 1/2 m² circula un caudal de aire de 15 m³/s. Se cierra bruscamente el conducto por un panel obturador. Para la celeridad de la onda elástica en el aire tómese el valor c = 335 m/s y para la densidad del aire ρ = 1,29 kg/m³.*
Calcular la fuerza ejercida por el aire sobre el panel.

15-5. *Un sifón está instalado en un lugar en que la presión es 710 Torr y la temperatura 20° C y su punto más alto se encuentra 6 m por encima del nivel del depósito de aspiración. La pérdida de carga entre este depósito y el punto más alto es de 100 mbar y entre el punto más alto y la salida del sifón es de 200 mbar.*
Calcular la distancia en vertical máxima entre el nivel del agua en el tanque y la salida del sifón suponiendo que en el sifón esté a punto de iniciarse la cavitación.

15-6. *La presión de saturación del agua que circula por una tubería de 150 mm de diámetro a la temperatura del ensayo es 20 mbar. En la tubería hay un Venturi de eje horizontal cuyos diámetros máximo y mínimo son 150 y 75 mm respectivamente. En la sección de entrada del Venturi reina siempre una presión absoluta de 3,5 bar.*

Calcular el caudal máximo que puede circular por la tubería sin que se produzca la cavitación. Despréciense las pérdidas en el Venturi.

15-7. *En la hélice propulsora de un submarino hay un punto en que la velocidad relativa del agua con respecto a las paletas de la hélice es máxima e igual a 3 veces la velocidad del submarino. La presión de saturación del agua del mar a la temperatura de la misma es 0,0011 bar y la presión barométrica 760 Torr.*

Calcular:

a) La velocidad del submarino cuando se inicia la cavitación en la hélice, si el punto mencionado anteriormente se encuentra 5 m por debajo de la superficie;

b) lo mismo cuando dicho punto se encuentre a 10 m de profundidad.

15-8. *Un sifón formado por tubería de hierro galvanizado de 300 mm tiene una longitud total de 1.500 m. Funciona a una presión barométrica de 760 Torr y trasvasa agua de un depósito a la atmósfera. El caudal es 500 m^3/h y la temperatura del agua 20° C. La longitud de la tubería desde el depósito al punto más alto del sifón es 250 m. (No se tengan en cuenta las pérdidas en el codo del sifón ni la contracción del chorro a la salida del sifón.)*

Calcular:

a) La cota máxima permisible del punto más elevado del sifón con relación al nivel del agua en el depósito;

b) la distancia vertical desde el nivel del agua en el depósito hasta la salida del sifón.

15-9. *Por una tubería forzada de 2 m de diámetro y 1/2 km de longitud en una central hidroeléctrica circula un caudal de 15 m^3/s.*

Calcular el tiempo mínimo requerido para el cierre lento de la válvula de mariposa situada al final de la tubería forzada sin que la presión suba por encima de los 6 bar.

16. *Teorema del impulso en Mecánica de Fluidos*

16.1. INTRODUCCION

El *teorema del impulso o de la cantidad de movimiento* junto con la *ecuación de continuidad* (Sec. 5.3) y el *teorema de Bernoulli* (Cap. 5) son las tres ecuaciones básicas en la resolución de problemas de Mecánica de Fluidos.

Sea una partícula de fluido de masa m sometida a una fuerza F durante un intervalo de tiempo $t_2 - t_1$. Según la 2.ª *ley de Newton:*

$$\bar{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt} \tag{16-1}$$

Multiplicando los dos miembros de la Ec. (16-1) por dt e integrando tendremos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt = \int_{v_1}^{v_2} m\, d\bar{v}$$

y siendo m constante

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt = m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \tag{16-2}$$

(impulso sobre una partícula de fluido)

donde $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt$ — impulso de la fuerza $\bar{F}$ que en general variará con el tiempo en el intervalo $t_2 - t_1$

$m\bar{v}$ — cantidad de movimiento de la partícula.

La Ec. (16-2) es el teorema del impulso aplicado a una partícula de fluido. El llamado *teorema del impulso en mecánica de fluidos* se obtiene

— integrando entre dos secciones de un tubo de corriente
— expresando la ecuación en función del caudal, Q y de la densidad, ρ.

En casos particulares se puede conocer la fuerza, y el teorema del impulso nos sirve para calcular la variación de la cantidad de movimiento. En otros casos se puede conocer esta variación y el mismo teorema nos permite calcular la fuerza.

Entre las aplicaciones de este teorema citaremos dos muy importantes:

a) en él se basa el cálculo de la fuerza que el fluido ejerce sobre un conducto en un cambio de dirección (codo, por ejemplo) necesaria para el cálculo de los anclajes de una tubería forzada;

b) este teorema es el fundamento para la deducción de la ecuación de Euler, *ecuación fundamental de las turbomáquinas* (véanse Secs. 18.3 y 18-5).

16.2. DEDUCCION DEL TEOREMA DEL IMPULSO O DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Sea el tubo de corriente de la Fig. 16-1 *a*. Consideremos aislada la porción del fluido comprendida entre las *secciones de control* 1 y 2 normales a la corriente. Sean $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ las *velocidades de una partícula* en las secciones 1 y 2. El fluido ha cambiado su cantidad de movimiento al variar la sección del tubo, así como al

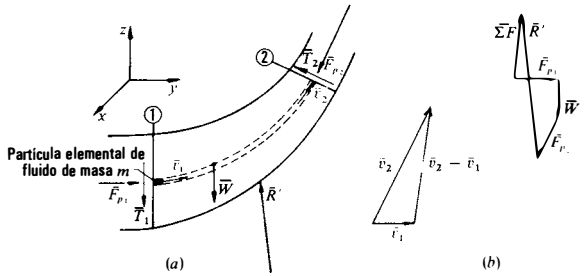


FIG. 16-1. Deducción del *teorema del impulso*. Se aísla el trozo de tubo de corriente comprendido entre las secciones 1 y 2 y se aplica la segunda ley de Newton, integrando primeramente a lo largo del filamento de corriente dibujado en la figura y luego integrando todos los filamentos de corriente comprendidos en el tubo.

variar la dirección de $\bar{v}$, luego ha estado sometido a una fuerza. Se trata de averiguar la relación que existe entre esta fuerza y la variación de la cantidad de movimiento. Las fuerzas que actúan sobre la masa *aislada* de fluido están dibujadas en la Fig. 16-1. Estas fuerzas son:

— *Las fuerzas normales de presión:* $\bar{F}_{p_1}$ ejercida por el fluido eliminado a la izquierda de la sección 1 y $\bar{F}_{p_2}$ a la derecha de la sección 2, sobre la masa aislada.

— Las *fuerzas tangenciales* $\bar{T}_1$ y $\bar{T}_2$ en estas mismas secciones debidas a la viscosidad. Estas fuerzas que se han dibujado en la Fig. 16-1 *a* pueden despreciarse, por lo cual se han omitido en el diagrama de fuerzas de la Fig. 16-1 *b*.

— La *resultante* R' de todas las fuerzas normales y tangenciales ejercidas por las paredes laterales del tubo o por el fluido circundante (según se trate de un tubo material o de un tubo de fluido aislado en el interior del resto del fluido).

— *La fuerza de la gravedad* $\bar{W}$, que es la fuerza de atracción de la tierra sobre el fluido aislado.

En este tubo de corriente aislado aislemos a su vez un filamento de corriente (dibujado con trazos en la figura), y consideremos en este filamento un elemento diferencial de longitud infinitesimal o partícula de fluido de masa m, indicada en la figura.

En la demostración seguiremos los pasos siguientes:

1.º Aplicar, como en la deducción de la Ec. (16-2), la 2.ª ley de Newton a una *partícula*.

2.º Integrar incluyendo todas las partículas de un mismo *filamento de corriente*.

3.º Integrar incluyendo todos los filamentos del *tubo de corriente*.

1.º La segunda ley de Newton expresada vectorialmente dice

$$\bar{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

que es equivalente a las tres ecuaciones cartesianas siguientes:

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$F_y = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$F_z = m\frac{dv_z}{dt}$$

Deduciremos sólo la ecuación según el eje x, ya que las otras dos se deducirán de la misma manera.

Para una partícula

$$dF_x = m\frac{dv_x}{dt} = \rho\, dQ\, dt\frac{dv_x}{dt} = \rho\, dQ\, dv_x$$

donde dF_x — resultante según el eje x de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula

m — masa de la partícula que en realidad es infinitesimal, ya que $m = \rho\, d\tau$ (donde $d\tau$ — volumen de la partícula) = $= \rho\, dQ\, dt$, porque por definición $dQ = \frac{d\tau}{dt}$ (donde dQ — caudal volumétrico que circula por el filamento).

Por tanto,

$$dF_x = \rho\, dQ\, dv_x \qquad (16\text{-}3)$$

2.º Integrando la Ec. (16-3) a lo largo de todo el *filamento de corriente* desde la sección 1 a la 2, y utilizando las hipótesis ordinarias en este

libro: $\rho = C$ (fluido incompresible) y $dQ = C$ (movimiento permanente [véase Ec. (5-7)], se tendrá:

$$\int_1^2 dF_x = \rho\, dQ \int_1^2 dv_x = \rho\, dQ(v_{x_2} - v_{x_1})$$

donde $\int dF_x$ — resultante según el eje x de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del filamento.

3.º Integrando de nuevo sobre todo el *tubo de corriente*, o lo que es lo mismo, sobre todos los filamentos de corriente comprendidos entre las secciones 1 y 2, tendremos:

TEOREMA DEL IMPULSO O DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\boxed{F_x = \rho \int (v_{x_2}\, dQ - v_{x_1}\, dQ)} \qquad (16\text{-}4)$$

donde F_x — resultante de todas las *fuerzas exteriores* a la masa de fluido aislada enumeradas al principio y dibujadas en la Fig. 16-1. Las *fuerzas interiores*, o sea las que unas partículas de la masa aislada ejercen sobre otras de la misma masa aislada, por la 3.ª ley de Newton (principio de acción y reacción) son iguales dos a dos y de signo contrario y se reducen a 0.

En innumerables problemas prácticos que presenta la técnica el teorema de la cantidad de movimiento no se utiliza en la forma (16-4), sino en una forma simplificada, de una manera análoga a las formas simplificadas de la ecuación de continuidad [Ec. (5-9)] y del teorema de Bernoulli [Ec. (5-35)].

En efecto, si suponemos que las secciones 1 y 2 son zonas de régimen uniforme v_{x_1} será constante en la sección 1 y v_{x_2} será constante en la sección 2. En la práctica se escogen las secciones de control de manera que se cumpla lo más aproximadamente posible esta condición. Entonces para todas las partículas en la sección 1

$$v_{x_1} = \text{cte}$$

y para todas las de la sección 2

$$v_{x_2} = \text{cte}$$

Entonces el segundo miembro de la Ec. (16-4) se podrá integrar, obteniéndose finalmente para los tres ejes coordenados:

EXPRESION PRACTICA DEL TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= \rho\, Q(v_{x_2} - v_{x_1}) \\ F_y &= \rho\, Q(v_{y_2} - v_{y_1}) \\ F_z &= \rho\, Q(v_{z_2} - v_{z_1}) \end{aligned}} \qquad (16\text{-}5)$$

(régimen uniforme en las secciones 1 y 2)

o vectorialmente

$$\boxed{\bar{F} = \rho\, Q\, \Delta\bar{v}} \qquad (16\text{-}6)$$

donde $\bar{F}(F_x, F_y, F_z)$ — resultante de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el fluido aislado (limitado por el tubo de corriente y dos secciones de control convenientemente escogidas). Esta resultante incluye también las fuerzas de viscosidad que las paredes del tubo ejercen sobre el fluido aislado.

$\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ — velocidad media de la corriente en la sección respectiva.

La ecuación de la cantidad de movimiento [Ec. (16-6)] *en contraposición a la ecuación de Bernoulli* [Ec. (5-35)] *es aplicable también al fluido real.*

16.3. APLICACIONES

Dejando para la Sec. 18.3 la aplicación del teorema de la cantidad de movimiento a la deducción de la ecuación fundamental de las turbomáquinas, estudiaremos en las tres secciones sucesivas otras tantas aplicaciones de este teorema.

16.3.1. Fuerza sobre un codo

El fluido, al cambiar en un codo su cantidad de movimiento, está sometido a un sistema de fuerzas cuya resultante viene dada por la Ec. (16-6). Según la 3.ª ley de Newton (o principio de acción y reacción) el fluido reacciona contra el conducto con una fuerza igual y de sentido contrario. El cálculo previo de esta última fuerza (reacción) es necesario, por ejemplo, para el proyecto de los anclajes de la tubería forzada que conduce el agua desde el embalse a las turbinas en una estación hidroeléctrica. La Fig. 16-2 representa una tal tubería forzada. El agua cambia su cantidad de movimiento en 1 y 2, precisamente donde se han situado los anclajes.

(Véanse problemas 16-1 y 16-2.)

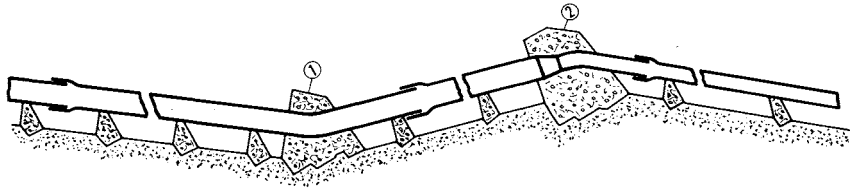


FIG. 16-2. *Tubería forzada.* En los puntos 1 y 2 el agua cambia su cantidad de movimiento y surge una fuerza reacción a la representada por la Ec. (16-6) que hay que compensar con el anclaje.

16.3.2. Fuerza sobre un álabe y potencia de una turbina de acción

La Ec. (16-6) explica el funcionamiento de una turbina de acción (véase Sec. 22.4). En el rodete de una turbina de acción los *álabes*, que tienen forma de *cucharas*, se fijan en su periferia (véase Fig. 22-5). El agua al incidir en uno de estos álabes con una velocidad, por ejemplo, de 100 m/s, como en la Fig. 16-3, es desviada, variando así su cantidad de movimiento. El agua ha estado sometida a una fuerza que viene dada por la Ec. (16-6). El álabe experimenta una fuerza $\bar{F}$ igual y de sentido contrario a la expresada por la misma ecuación.

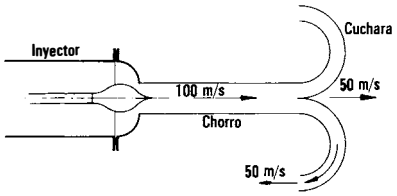


FIG. 16-3. El chorro de agua que sale del inyector varía su cantidad de movimiento al chocar con la cuchara. La fuerza que el chorro ejerce sobre la cuchara es la reacción de la fuerza expresada por la Ec. (16-6).

— Si el rodete está fijo (puesta en marcha del grupo) esta fuerza multiplicada por el radio del rodete es la contribución de dicho álabe al par de arranque.
— Si el rodete gira, el álabe tendrá una velocidad u (50 m/s en el caso de la Fig. 16-3); la misma fuerza multiplicada por u será la contribución de dicho álabe a la potencia del rodete:

$$\boxed{P = Fu} \quad \text{W, } SI \tag{16-7}$$

Estudiemos con más detención los siguientes casos:

1.º Un solo álabe fijo
2.º Un solo álabe en movimiento
3.º Un rodete que consta de muchos álabes.

1.º *Un solo álabe fijo.* (Véase la Fig. 16-4.) El chorro incide en el álabe con la velocidad $\bar{c}_1$. Despreciando el rozamiento $c_2 = c_1$. La fuerza que el fluido ejerce sobre el álabe es la reacción, o sea igual y de sentido contrario a la

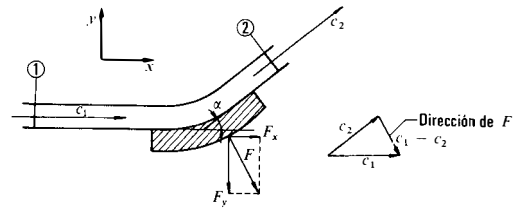


FIG. 16-4. Fuerza $\bar{F}$ ejercida por un chorro desviado por un álabe fijo.

de la Ec. (16-6). Llamando a las componentes de la *fuerza sobre el álabe* F_x y F_y y observando que

$$c_{1x} = c_1, \quad c_{2x} = c_2 \cos \alpha$$
$$c_{1y} = 0, \quad c_{2y} = c_2 \operatorname{sen} \alpha$$

tendremos

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= Q\rho\,(c_1 - c_2 \cos \alpha) \\ F_y &= -Q\rho\, c_2 \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}} \tag{16-8}$$

Suponemos que la desviación del chorro según un eje z normal al plano x, y es nula.

2.º *Un solo álabe en movimiento.* (Véase la Fig. 16-5.) El álabe se mueve con movimiento de traslación y velocidad $\bar{u}$ en la misma dirección que $\bar{c}_1$, que es la velocidad del chorro antes del álabe. La velocidad relativa del agua con

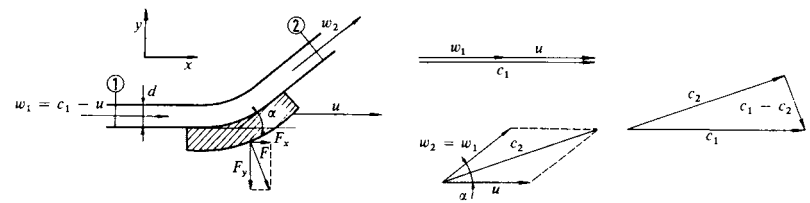


FIG. 16-5. Fuerza sobre un álabe en movimiento. El chorro antes de incidir en el álabe (sección 1) tiene la velocidad c_1; el álabe se mueve con la velocidad u; w_1 es la velocidad del chorro con relación al álabe. Al no haber rozamiento, $w_2 = w_1$. La velocidad absoluta del chorro en la sección 2 es c_2, que se obtiene como se indica en la figura.

respecto al álabe (véase la Sec. 18.4) a la entrada será $\bar{w}_1 = \bar{c}_1 - \bar{u}$. Despreciando el rozamiento la velocidad a la salida $\bar{w}_2$ será igual a $\bar{w}_1$ en módulo; pero formará un ángulo α con $\bar{u}$. En la Ec. (16-6) pueden tomarse tanto las velocidades absolutas como las relativas porque, en nuestro caso.

$$\bar{c}_2 - \bar{c}_1 = (\bar{w}_2 + \bar{u}) - (\bar{w}_1 + \bar{u}) = \bar{w}_2 - \bar{w}_1$$

Por tanto, llamando F_x y F_y, como en el caso anterior, a las *fuerzas que el*

fluido ejerce sobre el álabe, iguales y de sentido contrario a las expresadas por las Ecs. (16-5), considerando además velocidades relativas y teniendo en cuenta que

$$w_{1x} = c_1 - u, \quad w_{2x} = (c_1 - u)\cos\alpha$$
$$w_{1y} = 0, \quad w_{2y} = (c_1 - u)\,\text{sen}\,\alpha$$

y considerando también que el caudal que llega al rodete en este caso no es el caudal Q del chorro, ya que el álabe en este caso se mueve con velocidad u, con lo que el chorro se alarga cada vez más y el caudal que hay que sustituir en la Ec. (16-6) será

$$\frac{\pi d^2}{4}(c_1 - u)$$

donde d — diámetro del chorro

tendremos

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= \pi\frac{d^2}{4}\rho\,(c_1 - u)^2(1 - \cos\alpha) \\ F_y &= -\pi\frac{d^2}{4}\rho\,(c_1 - u)^2\,\text{sen}\,\alpha \end{aligned}} \qquad (16\text{-}9)$$

3.º *Un rodete.* Al aplicar las Ecs. (16-9) a un rodete, que consta de una serie de álabes dotados de la misma velocidad u se aprovecha ya el caudal total del chorro que sale del inyector o caudal total Q de la turbina, y en este caso se tendrá:

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= Q\,\rho\,(c_1 - u)(1 - \cos\alpha) \\ F_y &= -Q\,\rho\,(c_1 - u)\,\text{sen}\,\alpha \end{aligned}} \qquad (16\text{-}10)$$

Como el álabe no se desplaza en la dirección y, la fuerza F_y no realiza trabajo. La potencia teórica de la turbina será, según las Ecs. (16-7) y 1.ª Ec. (16-10):

$$\boxed{P = Q\,\rho\,(c_1 - u)(1 - \cos\alpha)\,u} \qquad (16\text{-}11)$$

(potencia teórica de una turbina de acción)

(Véase problema 16-3.)

16.3.3. Propulsión a chorro

El *turborreactor* de la Fig. 16-6 se desplaza hacia la derecha con velocidad v. El turborreactor acelera al aire creando un chorro en dirección contraria al

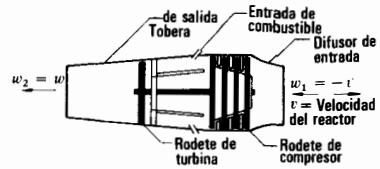


FIG. 16-6. El *turborreactor* es un motor que es a la vez propulsor: consta de difusor de entrada, compresor, cámara de combustión en la que se inyecta el combustible, turbina y tobera de escape. El cálculo de la fuerza de la propulsión se basa también en el teorema de la cantidad de movimiento.

vuelo, cuya velocidad relativa con relación al avión es w. Esta aceleración requiere una fuerza que el turborreactor ejerce sobre el fluido [1.ª Ec. (16-5), tomando como eje x el eje del turborreactor] cuya reacción igual y de sentido contrario es el empuje o fuerza propulsiva del avión. Para deducir el valor del empuje sumemos como otras veces al conjunto aire-reactor una velocidad igual y de sentido contrario a la velocidad del avión. El problema dinámico no se ha alterado. El avión queda entonces en reposo. El aire entra ahora en el difusor del reactor con una velocidad relativa con respecto al reactor $w_1 = -v$, y sale de la tobera de escape con una velocidad relativa con respecto al reactor $w_2 = w$. Llamando $G = Q\,\rho$ al caudal másico del aire que circula por el avión (1) y E al empuje, y aplicando la 1.ª Ec. (16-5), tendremos:

$$E = G\,(w_2 - w_1)$$

y finalmente

$$\boxed{E = G\,(w - v)} \qquad (16\text{-}12)$$

donde w — velocidad del chorro con relación al turborreactor
v — velocidad del turborreactor.

PROBLEMAS

16-1. *Un codo horizontal de 60° reductor de 300 a 150 mm deja pasar un caudal de agua de 1.800 l/min. La presión relativa en la tubería de 300 mm es de 2 bar.*

Calcular la fuerza a que está sometida la brida de la figura. ¿Varía esta fuerza si el flujo va en dirección contraria, manteniéndose la misma presión en la tubería de 300 mm y despreciándose las pérdidas?

Primer caso: flujo de izquierda a derecha (véase figura, flechas de línea continua)

(1) El caudal másico no es constante porque en la cámara de combustión el aire se mezcla con los productos de combustión; pero siendo la relación combustible/aire muy pequeña se puede suponer $G \simeq C$.

Calculemos la presión en la sección 2. La ecuación de Bernoulli, siendo $z_1 = z_2$, $\Delta p_r = 0$, aplicada entre las secciones 1 y 2, es la siguiente [Ec. (5-40)]:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

siendo

$$Q = \frac{1{,}8}{60} = 0{,}03 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}003}{\pi \cdot 0{,}3^2} = 0{,}4244 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}03}{\pi \cdot 0{,}15^2} = 1{,}6977 \text{ m/s}$$

y, por tanto,

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 2 \cdot 10^5 - \frac{1.000}{2}(v_2^2 - v_1^2) =$$
$$= 198.649 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Según el teorema de la cantidad de movimiento [Ec. (16-6)], la resultante $\bar{F}$ de *todas las fuerzas que actúan sobre el fluido*, y que le obligan a variar la cantidad de movimiento será

$$\bar{F} = Q\,\rho(v_2 - v_1)$$

y tendrá como componentes

$$F_x = Q\rho(v_{2x} - v_{1x}) = 0{,}03 \cdot 1.000(v_{2x} \cdot 0{,}95 - v_{1x}) =$$
$$= 12{,}7324 \text{ N}$$
$$F_y = 0{,}03 \cdot 1.000(-\cos 30^\circ\, v_{2y} - 0) =$$
$$= -44{,}1063 \text{ N}$$

Llamemos $\bar{R}'$ (R_x', R_y') a la fuerza que el codo ejerce sobre el fluido. Con esta notación se tendrá:

$$F_x = p_1 A_1 - p_1 A_2 \cos 60^\circ + R_x'$$
$$F_y = p_1 A_2 \cos 30^\circ + R_y'$$

Por tanto

$$R_x' = F_x - 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} + p_2\,\pi \cdot \frac{0{,}150^2}{4} \cos 60^\circ = -12.369 \text{ N}$$

$$R_y' = F_y - p_2\,\pi \cdot \frac{0{,}150^2}{4} \cdot \cos 30^\circ =$$
$$= -3.084 \text{ N}$$

La fuerza $\bar{R}$ que buscamos es la que *el fluido ejerce sobre el codo* y por tanto sobre la brida y será igual a $-R'$ y sus componentes serán, por consiguiente,

$$R_x = 12.369 \text{ N}$$
$$R_y = 3.084 \text{ N}$$

luego

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 12.747 \text{ N (tracción)}$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{R_y}{R_x} = 14^\circ$$

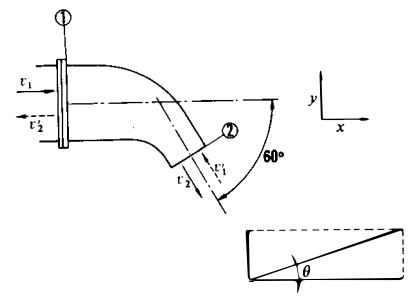
Segundo caso: flujo de derecha a izquierda (véase figura, línea de puntos)

Designando con $\bar{F}'$ y $\bar{v}'$ los valores de la fuerza total y velocidades en este segundo caso, se tendrá vectorialmente:

$$\bar{F}' = Q\rho(v_2' - v_1') = Q\rho[-v_1 - (-v_2)]$$
$$= Q\rho(v_2 - v_1) = \bar{F}$$

Como, además, las fuerzas debidas a las presiones no varían ni en módulo ni en dirección, en un caso y en otro, *las fuerzas $\bar{R}$ serán también idénticas.*

Esto facilita el cálculo de los anclajes de las tuberías forzadas en las centrales de bombeo. En dichas tuberías el flujo tiene sentidos opuestos cuando se está turbinando y cuando se está bombeando. (Véase Sec. 21.4.1 y Fig. 21-3.)



PROB. 16-1

16-2. *Calcular la fuerza a que está sometido el codo horizontal de la figura, si por él circula agua con un caudal de 3.000 l/min, la presión a la salida es la presión atmosférica y la pérdida de carga se desprecia como en el problema anterior.*

Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema anterior, y utilizando la misma nomenclatura, tendremos:

$$p_1 = \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

pero

$$p_2 = 0 \quad \text{luego}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \qquad (1)$$

Además

$$Q = \frac{3}{60} = 0{,}05 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 1{,}592 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}1^2} = 6{,}366 \text{ m/s}$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (1) tendremos:

$$p_1 = \frac{1.000}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 18.998 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Ahora bien

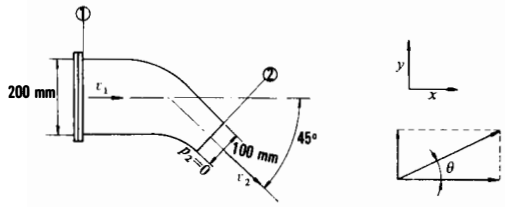
$$F_x = Q\rho(v_{2x} - v_{1x}) = 0{,}05 \cdot 1.000\,(v_2 \cos 45° - v_1) = 145{,}50 \text{ N}$$
$$F_y = Q\rho(v_{2y} - v_{1y}) = 0{,}05 \cdot 1.000\,(v_2 \cos 45° - 0) = -225{,}08 \text{ N}$$

$$F_x = p_1 A_1 + R'_x \qquad R'_x = F_x - p_1 \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} = -451{,}33 \text{ N}$$

$$F_y = R'_y \qquad R'_y = -225{,}08 \text{ N}$$

y finalmente

$$R_x = 451{,}33 \text{ N}$$
$$R_y = 225{,}08 \text{ N}$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 504{,}34 \text{ N}$$
$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{R_y}{R_x} = 26{,}5°$$



PROB. 16-2

16-3. *Un chorro de agua de 50 mm de diámetro y 20 m/s de velocidad choca con un álabe en forma de cuchara, que es una semiesfera de radio 180 mm, fijo a una rueda. El eje del chorro coincide con el eje de la cuchara. Despréciese la fricción en la cuchara.*
Calcular:
a) la fuerza ejercida por el chorro sobre la cuchara, cuando está fija;
b) cuando se mueve en la misma dirección del chorro con velocidad de 8 m/s;
c) sobre una serie de cucharas fijas a la misma rueda, que pasan por delante del chorro moviéndose con velocidad de 8 m/s;
d) la potencia comunicada al álabe por el chorro en este último caso;
e) el rendimiento.

a) La fuerza ejercida por el chorro es la reacción de la fuerza expresada por la Ec. (16-6). Por tanto

$$F_x = Q\rho(c_{1x} - c_{2x})$$

$$c_{1x} = 20 \text{ m/s} \qquad c_{2x} = -20 \text{ m/s} \qquad Q = \frac{20 \cdot \pi \cdot 0{,}050^2}{4} = 0{,}03927 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$F_x = 1.000 \cdot 0{,}03927 \cdot 40 = 1.570{,}8 \text{ N}$$

b) En virtud de la 1.ª Ec. (16-9):

$$F_x = \frac{\pi d^2}{4}\rho(c_1 - u)^2(1 - \cos\alpha)$$

$$c_1 = 20 \text{ m/s} \quad ; \quad u = 8 \text{ m/s} \quad ; \quad \cos\alpha = \cos\pi = -1$$

$$F_x = \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} \cdot 1.000(20 - 8)^2 \cdot 2 = 565{,}5 \text{ N}$$

c) En virtud de la 1.ª Ec. (16-10):

$$F_x = Q\rho(c_1 - u) \cdot 2 = 0{,}03927 \cdot 1.000 \cdot 12 \cdot 2 = 942{,}5 \text{ N}$$

d) En virtud de la Ec. (16-11):

$$P = Q\rho(c_1 - u)(1 - \cos\alpha) \cdot u = 942{,}5 \cdot u = 942{,}5 \cdot 8 = 7.540 \text{ W} = 7{,}540 \text{ kW}$$

e)

$$\eta = \frac{\text{potencia útil}}{\text{potencia chorro}} = \frac{P}{P_c}$$

$$P_c = \frac{c_1^2}{2}\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) Q\left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\rho\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) =$$

$$= Q\rho\,\frac{c_1^2}{2}\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right) = Q\rho\,\frac{c_1^2}{2} \text{ W}$$

$$P_c = 0{,}03927 \cdot 1.000 \cdot \frac{20^2}{2} = 7.854 \text{ W} = 7{,}854 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{7{,}540}{7{,}854}\,100 = 96\%$$

Comprobación: Queda por aprovechar la potencia del chorro a la salida del álabe, a saber

$$\frac{c_2^2}{2} Q\rho$$

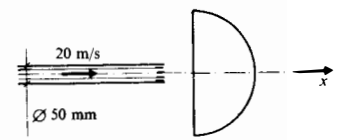
pero

$$\vec{c}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u} \quad ; \quad w_2 = 20 - 8 = 12 \text{ m/s} \quad ; \quad c_2 = 12 - 8 = 4 \text{ m/s}$$

$$c_2^2/2\,Q\rho = \frac{0{,}03927 \cdot 16}{2} \cdot 1.000 = 314 \text{ W}$$

$$7{,}54 + 0{,}314 = 7{,}854$$

(potencia total del chorro a la entrada)



PROB. 16-3

16-4. *Un chorro de agua de 50 mm de diámetro choca contra una placa fija normal al eje del chorro; la velocidad del chorro es 40 m/s.*
Calcular la fuerza que el chorro ejerce sobre la placa.

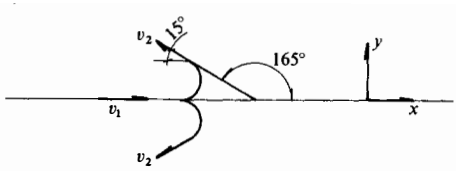
16-5. *Un chorro de agua, cuyo caudal es 45.000 l/h choca contra una placa fija perpendicular a él, ejerciendo sobre ella una fuerza de 100 N.*
Calcular la velocidad del agua.

16-6. *Un chorro de agua de 12,5 mm de diámetro incide en una cuchara inmóvil tangencialmente como se ve en la figura y es desviado por la misma 165°; el caudal del chorro es de 1,52 l/s; mediante una balanza especial se midió una fuerza de 33 N en la dirección del chorro.*

Calcular:

a) relación de la fuerza en la dirección del chorro a la teórica;

b) relación de velocidades a la salida y a la entrada de la placa.



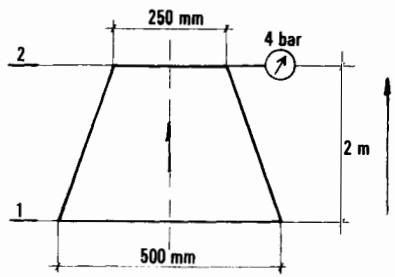
PROB. 16-6

16-7. *Un chorro de agua de 50 mm de diámetro al chocar contra una placa fija inclinada 30° con relación al eje del chorro ejerce sobre ella, si se desprecia el rozamiento, una fuerza de 2.000 N.*

Calcular el caudal.

16-8. *La tobera cónica de eje vertical de la figura de 2 m de longitud realiza una contracción de 500 a 200 mm.*

Calcular, sin tener en cuenta las pérdidas, la fuerza vertical que actúa cuando por la tubería circula un caudal ascendente de 14.000 l/min y un manómetro conectado a la tubería de 250 mm marca una presión de 4 bar.



PROB. 16-8

16-9. *Un chorro de agua de 100 mm de diámetro, en el que la velocidad media es de 10 m/s, choca contra una placa plana, que se mantiene normal al eje del chorro.*

Calcular, despreciando el rozamiento:

a) la fuerza normal a la placa ejercida por el chorro, si la placa se mueve en la misma dirección del chorro con una velocidad de 5 m/s;

b) la fuerza normal a la placa ejercida por el chorro, si en vez de una placa hubiera una serie de placas dispuestas de manera que cada una pasase sucesivamente en frente del chorro en la misma posición, moviéndose siempre con velocidad de 5 m/s.

16-10. *Una tubería horizontal de 200 mm de diámetro termina en una tobera, que produce un chorro de agua de 70 mm de diámetro. El chorro descarga en la atmósfera. En la tubería la presión es de 8 bar y la velocidad media 2 m/s.*

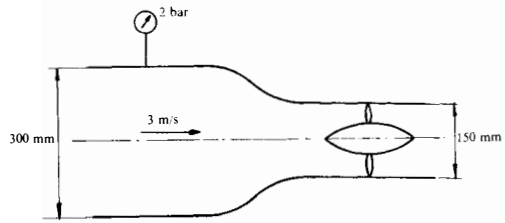
Calcular la fuerza axial que se ejerce sobre la tobera.

16-11. *La velocidad del agua en un chorro de 50 mm de diámetro es de 40 m/s. El chorro entra tangencialmente en una placa curva, que se mueve en la dirección del chorro con una velocidad de 20 m/s. La placa desvía al chorro un ángulo de 120°. Despréciese el rozamiento en la placa y el influjo de la gravedad.*

Calcular la fuerza ejercida por el chorro sobre la placa en la dirección del movimiento.

16-12. *El esquema de la figura representa una turbina, que absorbe una potencia hidráulica de 5 kW.*

Calcular la fuerza total ejercida por el agua sobre la turbina y sobre la contracción de secciones circulares y eje horizontal.



PROB. 16-12

16-13. *Un chorro de agua cuya velocidad es de 50 m/s incide en un álabe que se mueve a una velocidad igual a la mitad del chorro. La dirección del chorro a la entrada forma un ángulo de 30° con la dirección del movimiento del álabe a la entrada y la velocidad relativa del chorro a la salida forma con la misma dirección del álabe un ángulo de 170°. Despréciense las pérdidas.*

Calcular:

a) el ángulo que debería tener el álabe a la entrada para que el chorro entrase sin choque, es decir, tangencialmente;

b) la velocidad absoluta del agua a la salida del álabe;

c) el trabajo específico ejercido sobre el álabe.

16-14. *Un chorro de agua de 50 mm de diámetro con un caudal de 200 l/s incide tangencialmente en un álabe curvado experimentando una desviación en el mismo de 170°. El álabe se mueve en la dirección del chorro con una velocidad de 40 m/s. Despréciese el rozamiento.*

Calcular:

a) la fuerza que el chorro ejerce sobre el álabe;

b) potencia desarrollada por el álabe;

c) rendimiento del sistema.

16-15. *Una tubería recta horizontal de fundición asfaltada de 1 m de diámetro y 500 m de longitud transporta agua a 20° C y a una velocidad de 2 m/s.*

Calcular la fuerza que el agua ejerce sobre la tubería.

17. *Empuje ascensional*

17.1. INTRODUCCION

Cuando un cuerpo cualquiera se mueve en un fluido real experimenta una resistencia al movimiento, que se llama fuerza de *arrastre*. Esta fuerza fue estudiada en la Sec. 13.3. Existen otros casos en que, además de la fuerza de arrastre paralela al movimiento y de sentido contrario, adquiere un papel importante otra fuerza perpendicular a la dirección del movimiento que se llama *empuje ascensional*. Es decir, la resultante de las fuerzas que el fluido ejerce sobre el cuerpo que se mueve en un fluido tiene en general una componente normal a la dirección del movimiento que es el *empuje ascensional* y otra en la misma dirección del movimiento, pero de sentido opuesto, que es la resistencia o *arrastre*.

La fuerza del empuje ascensional es esencial en la transmisión de energía de las turbomáquinas (bombas, ventiladores y turbinas) y en un avión es causa de su sustentación, en contra de la fuerza de la gravedad.

Estudiaremos el empuje ascensional en

— *un cilindro circular*, cuerpo de geometría sencilla, que permite un cálculo fácil del empuje ascensional teórico;
— un *perfil de ala de avión*, cuerpo de geometría «bien fuselada» que se diseña para un empuje ascensional grande con un arrastre mínimo.

Recordemos una vez más que *mecánicamente* el problema es el mismo si el cuerpo se mueve en un fluido en reposo, o el fluido se mueve sobre un cuerpo en reposo; siempre que la velocidad del fluido en el segundo caso sea constante en el infinito (prácticamente a una distancia suficientemente alejada del cuerpo) e igual y de sentido contrario a la velocidad del cuerpo en el primer caso.

17.2. EMPUJE ASCENSIONAL EN UN CILINDRO CIRCULAR

En un cilindro circular es fácil obtener el empuje ascensional, si se supone un *fluido ideal e irrotacional* (Sec. 2.7, nota 1), por el procedimiento siguiente:

1.° Buscar la *distribución de velocidades*.
2.° Buscar la *distribución de presiones*, utilizando la ecuación de Bernoulli.
3.° Integrar para obtener el *empuje ascensional*.

17.2.1. Cilindro circular en corriente ideal, irrotacional y uniforme

Este caso fue ya estudiado en la Sec. 8.2. Resumiendo:

1.° *Distribución de velocidades en el cilindro*

1.° Ec. (8-1): $v_s = 2v_\infty \operatorname{sen} \theta$
Fig. 8-1: líneas de corriente

2.° *Distribución de presiones en el cilindro*

Ec. (8-2): $p_s = p_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 - \frac{\rho}{2} v_s^2$

3.° *Empuje ascensional*

El *empuje ascensional de un cilindro en corriente uniforme de un fluido ideal e irrotacional es nulo*, según demuestra gráficamente la Fig. 8-2.

El arrastre también es nulo: paradoja de D'Alembert.

17.2.2. Cilindro circular en corriente irrotacional y uniforme de un fluido ideal con circulación: fórmula del empuje ascensional

1.° *Distribución de velocidades en el cilindro.*

El cilindro está sometido ahora simultáneamente a dos tipos de corriente (es decir, a una corriente que es la suma de ambas): a una corriente *uniforme* (en el infinito las líneas de corriente son, por tanto, paralelas y equidistantes) y a una circulación. En esta última:

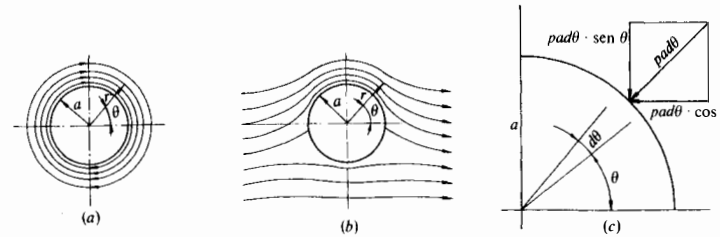


FIG. 17-1. (*a*) Cilindro circular en una corriente circular en la cual la velocidad del fluido en un punto es inversamente proporcional a la distancia del punto al centro; (*b*) en corriente uniforme con circulación; (*c*) fuerza elemental debida a la presión sobre un elemento infinitesimal de superficie en el cilindro.

— Las líneas de corriente son círculos concéntricos con el cilindro, como puede verse en la Fig. 17-1. Se ha escogido como sentido de la circulación el de las agujas del reloj. Así y solo así, si el sentido de la corriente uniforme es como en las Figs. 8-1 y 17-1 *b*, de izquierda a derecha se obtendrá un empuje ascensional positivo.

— La velocidad en cada punto del fluido es inversamente proporcional a su distancia r al centro del cilindro

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{17-1}$$

donde Γ — constante llamada circulación. Al fluir entre cada dos líneas de corriente consecutivas el mismo caudal las circunferencias van aumentando de radio y distanciándose cada vez más en la Fig. 17-1 *a*. Esta configuración de corriente se denomina *torbellino potencial o irrotacional.*

La velocidad en un punto del cilindro *debida al movimiento uniforme* será según la Ec. (8-1)

$$(v_s)_u = 2v_\infty \operatorname{sen} \theta \tag{17-2}$$

(velocidad en un punto del cilindro, corriente uniforme)

La velocidad en un punto del cilindro *debida a la circulación* será, según la Ec. (17-1)

$$(v_s)_c = \frac{\Gamma}{2\pi a} \tag{17-3}$$

(velocidad en un punto del cilindro, corriente de circulación)

donde a — radio del cilindro.

La velocidad en un punto del cilindro *debida a los dos movimientos superpuestos* será, según las Ecs. (17-2) y (17-3)

$$\boxed{v_s = 2v_\infty \operatorname{sen} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}} \tag{17-4}$$

(velocidad en un punto del cilindro, corriente uniforme + torbellino potencial)

2.º *Distribución de presiones en el cilindro.*

De la comparación de la Fig. 8-1 y 17.1 *b* se deduce que en este caso en comparación con el primero (corriente uniforme) la velocidad en la parte superior del cilindro aumenta (velocidad de la circulación igual sentido que velocidad del movimiento uniforme) mientras que en la parte inferior del cilindro disminuye (velocidad de la circulación sentido contrario a la velocidad del movimiento uniforme).

En la Fig. 17-1 *b* están dibujadas las líneas de corriente para este caso. Comparando esta figura con la Fig. 8-1 se ve que subsiste la simetría según el eje y, y por tanto

La fuerza de arrastre es igual a cero.

Pero se ha perdido la simetría según el eje x, y por tanto

La fuerza del empuje ascensional no es igual a cero.

En efecto, al aumento de velocidad en la parte superior del cilindro corresponderá según la ecuación de Bernoulli una depresión, mientras que a la disminución de velocidad en la parte inferior corresponderá una sobrepresión: el resultado es un empuje hacia arriba o *empuje ascensional.*

El empuje ascensional puede fácilmente calcularse utilizando la Ec. (17-4) junto con la ecuación de Bernoulli.

El *empuje ascensional* A, según laFig. 17-1 *c*, será:

$$A = -b \int_0^{2\pi} pa \operatorname{sen} \theta \, d\theta \tag{17-5}$$

donde b — altura del cilindro (normal al plano de la Fig. 17-1 *c*)
p — presión en un punto del cilindro de coordenadas polares (a, θ).

La ecuación de Bernoulli aplicada entre un punto en el infinito y un punto en el cilindro es la Ec. (8-2) repetida en la pág. 345, donde v_s viene dada por la Ec. (17-4). Por tanto la presión p en un punto cualquiera del cilindro será:

$$p = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho}{2}\left(2v_\infty \operatorname{sen} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 \tag{17-6}$$

3.º *Empuje ascensional.*

Sustituyendo la Ec. (17-6) en (17-5), e integrando, se obtiene la

FORMULA DEL EMPUJE ASCENSIONAL

$$\boxed{A = b \Gamma \rho v_\infty} \tag{17-7}$$

17.2.3. Cilindro circular en corriente real uniforme

La corriente ideal estudiada en la sección anterior se puede duplicar experimentalmente con cierta aproximación en un fluido real: en un túnel aerodinámico se instala un cilindro de manera que pueda medirse el empuje ascensional y el arrastre en una balanza. Previamente se hace girar el cilindro mediante un motor.

La *corriente uniforme* es producida por el ventilador del túnel y la viscosidad misma del aire produce una especie de circulación análoga a la considerada en la sección anterior. En efecto, las capas contiguas al cilindro giran a la velocidad de éste, y las demás con una velocidad que disminuye con la distancia, según una ley análoga a la expresada por la Ec. (17-1).

Experimentalmente se comprueba que en un cilindro en corriente real uniforme con circulación el arrastre no es nulo. Este arrastre es debido a la resistencia de superficie y de forma (el cilindro con su forma *roma* provoca el desprendimiento de la capa límite, véase Fig. 8-3 *c*).

17.3. EMPUJE ASCENSIONAL EN UN PERFIL DE ALA DE AVION: FORMULA DE KUTTA-JOUKOWSKI

La fórmula (17-7) del empuje ascensional de un cilindro fue deducida por Kuta-Joukowski, para un *perfil de ala de avión*, como el de la Fig. 13-1, donde la circulación Γ en el caso general viene dada por la ecuación siguiente:

$$\Gamma = v_\infty \pi \, l k \operatorname{sen} \alpha$$

Por tanto,

FORMULA DE KUTTA-JOUKOWSKI

$$\boxed{\begin{array}{l} A = b \, \Gamma \rho v_\infty \\ \text{siendo} \\ \Gamma = v_\infty \, \pi \, l \, k \operatorname{sen} \alpha \end{array}} \qquad (17\text{-}8)$$

donde A — empuje ascensional
b — luz del perfil (Fig. 13-1)
Γ — circulación
l — cuerda del perfil (o sea cuerda geométrica de la *línea media*) (véase Fig. 13-1)
α — ángulo de ataque. En esta fórmula el ángulo de ataque se mide con relación a la línea neutra, o sea a la recta paralela a v_∞ que pasa por el borde de salida del perfil para un ángulo de ataque tal que $A = 0$.
k — coeficiente que idealmente solo depende de la geometría del perfil.

Sustituyendo en (17-8) el valor de Γ en el de A tendremos:

$$A = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 \, S \, 2 \pi \, k \operatorname{sen} \alpha$$

donde $S = l \, b$ (cuerda × luz) — superficie proyectada del perfil

o bien

$$\boxed{A = S \frac{\rho}{2} v_\infty^2 \, c_a} \qquad (17\text{-}9)$$

donde $c_a = 2 \pi \, k \operatorname{sen} \alpha$ — *coeficiente de empuje ascensional* o *coeficiente de sustentación*, que idealmente solo depende de la forma del perfil y del ángulo de ataque.

La fórmula de Kutta-Joukowski [Ec. (17-8)] exige una circulación para que exista empuje ascensional. En un avión en vuelo se crea un empuje ascensional, luego hay *circulación*. Por otra parte las alas no giran como el experimento del cilindro en el túnel aerodinámico descrito en la Sec. 17.1.3. Se pregunta, pues, cómo se sustenta un avión, o cuál es el origen de la circulación.

Origen de la circulación

En un *perfil de ala de avión*, como el de la Fig. 17-2, cuando se inicia el vuelo se distinguen tres tiempos. Para estudiar el fenómeno supondremos como otras veces que el perfil está en reposo:

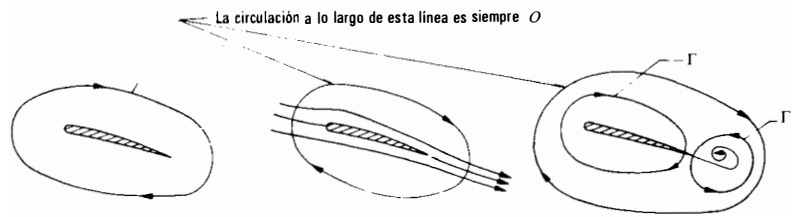


FIG. 17-2. Explicación del origen de la circulación que causa la *sustentación en un perfil de ala:* (*a*) no hay circulación; (*b*) no hay torbellino en el borde de salida; (*c*) circulación Γ y contracirculación $-\Gamma$. Esta última sumada a la corriente uniforme produce la sustentación.

Tiempo 0 (Fig. 17-2 *a*). El fluido también está en reposo $v_\infty = 0$, $\Gamma = 0$: no hay circulación.

Tiempo 1 (Fig. 17-2 *b*). El fluido se mueve con movimiento uniforme y velocidad en el infinito v_∞. Primeros instantes del movimiento. La circulación sigue siendo igual a cero.

Tiempo 2 (Fig. 17-2 *c*). En un fluido real la viscosidad origina en el borde de salida la separación (Sec. 8.8) y ésta un torbellino denominado *torbellino inicial* con circulación Γ no igual a cero. Ahora bien, según un teorema debido a Thomson, en este caso, la circulación a lo largo de una curva cerrada en el fluido no cambia con el tiempo si el observador se mueve con el fluido (1). Es decir, la circulación a lo largo de la curva dibujada en la figura tiene que seguir siendo igual a cero, lo cual exige que se cree una contracirculación, $-\Gamma$, alrededor del perfil.

Tiempo 3 El torbellino inicial es llevado corriente abajo, quedando alrededor del ala establecida la circulación.

(1) Este teorema se cumple en un fluido ideal e irrotacional.

La teoría que acabamos de exponer fue propuesta por Prandtl. La visualización de las líneas de corriente ha permitido fotografiar la corriente con el torbellino inicial y su alejamiento del perfil y comprobar experimentalmente esta teoría de Prandtl de la sustentación.

La Ec. (17-9) define el coeficiente de empuje ascensional, c_a y tiene la misma forma que la (13-6) deducida en la Sec. 13.3, que define el coeficiente de arrastre, c_w. Son dos ecuaciones de excepcional importancia en la experimentación en túneles aerodinámicos con modelos reducidos como el de la Fig. 7-7:

$$A = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 S c_a \qquad W = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 S c_w \tag{17-10}$$

Si el número de Reynolds permanece constante en el modelo y en el prototipo, tanto c_a como c_w son independientes del tamaño, y solo dependen de la geometría del perfil y del ángulo de ataque. Los perfiles aerodinámicos se utilizan no solo en el ala de avión, sino también en las hélices propulsoras de avión y barco y en las turbomáquinas (bombas, ventiladores y turbinas) axiales. El comportamiento de un perfil se conoce cuando se obtienen analítica o experimentalmente c_a y c_w para dicho perfil y diversos ángulos de ataque.

Para ello A y W se miden con una balanza, v_∞, se mide con un tubo de Prandtl, por ejemplo; se calcula la ρ del aire por la ecuación de los gases perfectos en la forma $\rho = \frac{p}{R_a T}$, midiendo p y T. Finalmente, se calculan c_a y c_w mediante las Ecs. (17-10).

17.4. EMPUJE ASCENSIONAL Y PROPULSION POR HELICE: RENDIMIENTO DE LA PROPULSION

La *hélice* se diferencia del ala de un avión en el tipo de movimiento que es de rotación y traslación en la hélice y únicamente de traslación en el avión. Sin embargo, en la hélice de la Fig. 17-4 un corte por un cilindro de radio cualquiera r coaxial con el eje de la hélice nos dará un perfil aerodinámico como el de la Fig. 17-13. Todos los puntos del perfil, por estar situados a un mismo radio r tienen la misma velocidad u en el movimiento de rotación. Una composición de movimientos permitirá reducir para su estudio el problema aparentemente distinto de la hélice y del ala de avión a uno mismo: perfil bañado por una corriente con velocidad en el infinito v_∞. Este método se utiliza en el estudio de las hélices propulsoras de aviones y barcos y en las hélices o paletas de las máquinas axiales: bombas, ventiladores, turbinas hidráulicas y molinos de viento. En el perfil de una hélice (obtenido mediante el corte cilíndrico ya mencionado), Fig. 17-3, que supondremos tiene una luz (dimensión normal al plano del dibujo) Δb, la resultante de las fuerzas que el fluido ejerce sobre el álabe, $\Delta\bar{R}$, tendrá una componente en la dirección del movimiento y opuesta a él, el arrastre, ΔW, y una componente en la dirección perpendicular al movimiento

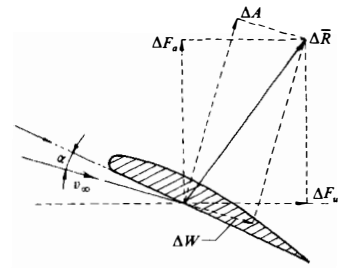


FIG. 17-3. La *hélice* tiene un perfil aerodinámico. Sobre un elemento de luz infinitesimal (perpendicular al plano del dibujo) el fluido ejerce una fuerza resultante $\Delta\bar{R}$, que puede descomponerse en ΔA e ΔW o bien en ΔF_a e ΔF_u.

que es el empuje ascensional, ΔA. Sin embargo, en el estudio de una hélice interesa más descomponer la fuerza total $\Delta\bar{R}$ en la dirección del eje de la hélice (o de la máquina) y en la dirección tangencial, resultando las dos fuerzas ΔF_a e ΔF_u, la primera en la dirección axial y la segunda en la tangencial. Lo dicho constituye el fundamento de la *teoría aerodinámica de la hélice*. En esta teoría:

- ΔF_a produce el empuje.
- Puesto que el par multiplicado por la velocidad angular es la potencia requerida para accionar la hélice, una buena hélice de avión o de barco, de bomba, ventilador o compresor se diseñará en una forma tal que tenga el empuje máximo para un par mínimo.
- Por el contrario, la hélice de una turbina o de un molino de viento se diseñará para que produzca un par máximo con un empuje mínimo. En este caso para la misma dirección de la velocidad v_∞ de la figura, tanto el empuje como el par en la turbina o molino de viento deben tener direcciones opuestas a las marcadas en la figura.
- El arrastre ΔW se opone a la rotación y por tanto supone una pérdida, tanto en las máquinas generadoras: bomba, compresor, ventilador, hélice de avión o barco, como en las máquinas motoras: turbinas hidráulicas y turbinas de aire (molinos de viento).
- El empuje total y el par total de la hélice se obtienen integrando a lo largo de la hélice (en toda la luz b de la misma).

Un desarrollo ulterior de la *teoría aerodinámica de la hélice* excede los límites de esta obra. Sin embargo, una teoría simplificada basada en el *teorema de la cantidad de movimiento* deducido en el capítulo anterior [Ec. (16-6)] permite deducir fácilmente las fórmulas para el empuje, potencia propulsiva y rendimiento de la propulsión de una hélice.

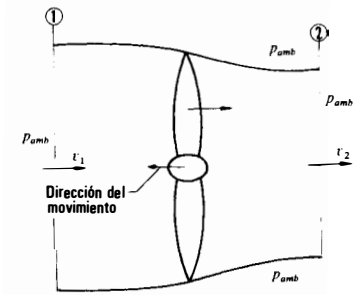


FIG. 17-4. La teoría elemental de la *propulsión de una hélice* es una aplicación interesante del teorema del impulso.

Sea (Fig. 17-4) una hélice de avión o barco moviéndose en un fluido (aire, agua) con velocidad v de derecha a izquierda, o bien (caso representado en la figura) una hélice que no se traslada a través de la cual circula el fluido de izquierda a derecha con velocidad media v_1 antes de la hélice y v_2 después de la hélice en la llamada *estela de deslizamiento*. Esta se ha dibujado en la figura como un tubo de corriente que se estrecha después de la hélice. Siendo $v_2 > v_1$ según la Ec. 16-6 el fluido ha estado sometido a una fuerza hacia la derecha, y por tanto como reacción surge la

FUERZA PROPULSIVA DE LA HELICE

$$F = Q\,\rho\,(v_2 - v_1) \tag{17-11}$$

dirigida hacia la izquierda.

Si el fluido fuera ideal esta fuerza sería el empuje. La *potencia de accionamiento* de la hélice, si el fluido fuera ideal sería igual al aumento de la energía cinética que experimentaría el fluido en la unidad de tiempo. El aumento de energía cinética será

$$\Delta E = \frac{1}{2} m\,(v_2^2 - v_1^2)$$

y por tanto la

POTENCIA DE ACCIONAMIENTO DE LA HELICE

$$P_a = Q\,\frac{\rho}{2}\,(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{W, } SI \tag{17-12}$$

De esta potencia solo una parte contribuye al empuje y se llama *potencia propulsiva*. El empuje [Ec. (17-11)] multiplicado por la velocidad de la hélice en el caso real (fluido en reposo, hélice en movimiento), que es v_1 será la

POTENCIA PROPULSIVA DE LA HELICE

$$P_p = Q\,\rho\,(v_2 - v_1)\,v_1 \tag{17-13}$$

El cociente

$$\frac{P_p}{P_a} = \frac{(v_2 - v_1)\,v_1}{1/2(v_2^2 - v_1^2)}$$

después de simplificado nos dará el

RENDIMIENTO DE LA PROPULSION

$$\eta_p = \frac{2v_1}{v_2 + v_1} \tag{17-14}$$

MAQUINAS HIDRAULICAS

18. *Turbomáquinas hidráulicas: Generalidades*

18.1. DEFINICION DE MAQUINA HIDRAULICA

Una máquina es un transformador de energía.

Una máquina *absorbe* energía de una clase y *restituye* energía de otra clase (un motor eléctrico, por ejemplo, *absorbe* energía eléctrica y *restituye* energía mecánica) o de la misma clase pero transformada (una grúa o un torno, por ejemplo, *absorben y restituyen* energía mecánica).

Las máquinas se clasifican en grupos: máquinas de fluido, máquinas -herramientas, máquinas eléctricas, etc.

Las máquinas hidráulicas pertenecen a un grupo muy importante de máquinas que se llaman *máquinas de fluido.* Aunque rara es la máquina en que no intervienen uno o varios fluidos como refrigerantes, lubricantes, etc.; eso solo no es suficiente para incluir dicha máquina en el grupo de máquinas de fluido.

Máquinas de fluido son aquellas máquinas en que el fluido, o bien *proporciona la energía que absorbe la máquina* (por ejemplo, el agua que se suministra a una turbina posee una energía preferentemente de presión, proveniente de la energía geodésica que poseía en el embalse y que a su vez la turbina transforma en energía mecánica) *o bien aquellas en que el fluido es el receptor de energía, al que la máquina restituye la energía mecánica absorbida.*

En toda máquina de fluido hay un intercambio entre energía de fluido y energía mecánica (por ejemplo, el agua sale de una bomba con más presión que la que tenía a la entrada de la misma, porque la bomba ha restituido al agua la energía absorbida en el eje).

Las máquinas de fluido revisten infinidad de formas y encuentran un sin fin de aplicaciones en la técnica.

Basta ver que dentro de este grupo se hallan comprendidas máquinas tan diversas como la diminuta fresa neumática de un dentista, que gira a 500.000 rpm, y la gigantesca turbina de vapor de 1.200 MW; o como la bomba de membrana para combustible de un automóvil y un cohete de combustible líquido.

Las máquinas de fluido se clasifican en máquinas hidráulicas y máquinas térmicas.

Etimológicamente *máquina hidráulica* es una máquina de fluido en que el fluido es agua y no obstante la turbina de vapor funciona con agua y no

es una máquina hidráulica, sino una máquina térmica. Por el contrario, a pesar de que un ventilador no bombea agua, sino aire, el ventilador es una máquina hidráulica. Las bombas que bombean líquidos distintos del agua (gasolina, ácidos, etc.) también son máquinas hidráulicas. Aunque el líquido bombeado esté caliente la máquina no es una máquina térmica, sino que seguirá siendo hidráulica. Aunque el nombre de máquina hidráulica, según lo dicho, no sea apropiado, la clasificación misma de las máquinas de fluido en máquinas hidráulicas y térmicas es rigurosa y científica.

Máquina hidráulica es aquella en que el fluido que intercambia su energía no varía sensiblemente de densidad en su paso a través de la máquina, por lo cual en el diseño y estudio de la misma se hace la hipótesis de que ρ = cte.

Máquina térmica es aquella en que el fluido en su paso a través de la máquina varía sensiblemente de densidad y volumen específico, el cual en el diseño y estudio de la máquina ya no puede suponerse constante.

La compresibilidad e incompresibilidad del fluido que se traduce en la variación o invariancia de la densidad o volumen específico es fundamental en el diseño de una máquina.

Todo cuerpo sólido, líquido o gas es compresible (véase Sec. 2.3). Sin embargo, el *diseño de una bomba*, por ejemplo, se hace suponiendo que el líquido bombeado es incompresible o de densidad constante: la bomba es, pues, una *máquina hidráulica.*

El *diseño de un turborreactor*, por el contrario, no puede hacerse sin tener en cuenta la variación del volumen específico del aire a través de la máquina: el turborreactor, pues, es una *máquina térmica.*

En un *compresor* el fluido es un gas y un gas es muy compresible, y, por tanto, su volumen específico varía grandemente. Sin embargo, si el incremento de presión es pequeño (inferior a 100 mbar) el diseño del compresor llevado a cabo con la hipótesis de que el volumen específico del gas es constante resulta con frecuencia satisfactorio. En este caso la máquina se llama *ventilador:* el ventilador, pues, es una máquina hidráulica. No obstante, si la relación de compresión es grande (superior a 100 mbar), no puede despreciarse la variación del volumen específico del gas a través de la máquina. En este caso la máquina se llama *compresor:* el compresor, pues, es una máquina térmica (1).

En este libro de *Mecánica de Fluidos* debemos estudiar también las *máquinas de fluido;* pero según la hipótesis establecida al principio del libro (Sec. 2.7), solo estudiaremos las *máquinas hidráulicas;* y no las *máquinas térmicas*, cuyo estudio pertenece a la *Termodinámica.*

(1) La línea divisoria de los 100 mbar entre los ventiladores y compresores es convencional y oscila entre amplios límites según los constructores de estas máquinas.

18.2. CLASIFICACION DE LAS MAQUINAS HIDRAULICAS

Para clasificar las máquinas hidráulicas se atiende al órgano principal de la máquina, o sea al órgano en que se intercambia la energía mecánica en energía de fluido o viceversa. Este órgano, según los casos, se llama rodete (Fig. 19-13), émbolo (Fig. 26-4), etc.

Ahora bien, la clasificación de las máquinas hidráulicas en rotativas y alternativas, según que el órgano intercambiador de energía esté provisto de movimiento de rotación o de movimiento alternativo tiene la ventaja de ser muy clara; pero suele preferirse la siguiente, que considera dos grupos también. Esta clasificación tiene la ventaja de que no se basa en algo accidental, como es el tipo de movimiento del émbolo o rodete, sino en el *principio fundamental de funcionamiento*, que es distinto en los dos grupos.

Las máquinas hidráulicas se clasifican en turbomáquinas y máquinas de desplazamiento positivo.

En las *máquinas de desplazamiento positivo*, también llamadas *máquinas volumétricas*, el órgano intercambiador de energía cede energía al fluido o el fluido a él *en forma de energía de presión* creada por la variación de volumen. Los cambios en la dirección y valor absoluto de la velocidad del fluido no juegan papel esencial alguno.

En las *turbomáquinas*, denominadas también máquinas de corriente, los cambios en la dirección y valor absoluto de la velocidad del fluido juegan un papel esencial.

Al primer grupo pertenece la clase importante de las máquinas alternativas o de émbolo; pero éstas no son ni mucho menos las únicas (véase Cap. 27). Así como en las *turbomáquinas* el órgano transmisor de la energía (rodete) se mueve siempre con movimiento rotativo, en las *máquinas de desplazamiento positivo* el órgano transmisor de la energía puede moverse tanto con movimiento alternativo como con movimiento rotativo. Al grupo de máquinas de desplazamiento positivo pertenece la clase importantísima de las máquinas empleadas en las transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos (Cap. 28).

El principio de funcionamiento de las máquinas de desplazamiento positivo es el principio de desplazamiento positivo que se estudiará en la Sec. 27.1. El principio de funcionamiento de las turbomáquinas es la ecuación de Euler, que se estudia en la sección siguiente.

A estos dos grupos se puede añadir un tercer grupo de máquinas hidráulicas, en que se intercambia energía en forma de energía potencial (elevadores de canjilones, tornillo de Arquímedes, ruedas hidráulicas). Estas máquinas se denominan *máquinas gravimétricas;* pero de ellas no nos ocuparemos en el presente libro, porque su estudio no presenta desde el punto de vista hidráulico mayor dificultad.

Las turbomáquinas y máquinas de desplazamiento positivo se subdividen en motoras y generadoras. Las primeras *absorben* energía del fluido y *restituyen* energía mecánica; mientras que las segundas *absorben* energía mecánica y *restituyen* energía al fluido.

El cuadro siguiente resume lo dicho sobre la *clasificación de las máquinas de fluido* en las dos secciones precedentes.

CLASIFICACION DE LAS MAQUINAS DE FLUIDO

- MAQUINAS DE FLUIDO
  - M. HIDRAULICAS ($\rho = C$)
    - TURBOMAQUINAS (Caps. 18 a 25)
      - GENERADORAS
        - PARA LIQUIDOS: BOMBAS (Cap. 19)
        - PARA GASES: VENTILADORES (Cap. 20)
      - MOTORAS: TURBINAS HIDRAULICAS (Caps. 21 a 23)
    - M. DE DESPLAZAMIENTO POSITIVO (Caps. 26 a 28) (2)
      - GENERADORAS
      - MOTORAS
  - M. TERMICAS ($\rho \neq C$): Su estudio se hace en Termodinámica.

(2) Las M. de desplazamiento positivo son reversibles en general.

18.3. ECUACION FUNDAMENTAL DE LAS TURBOMAQUINAS O ECUACION DE EULER: PRIMERA FORMA

La ecuación de Euler es la ecuación fundamental para el estudio de las turbomáquinas, tanto de las turbomáquinas hidráulicas, que se estudian en este libro, como de las turbomáquinas térmicas. Constituye, pues, la ecuación básica tanto para el estudio de las bombas, ventiladores, turbinas hidráulicas (turbomáquinas hidráulicas), como para el estudio de los turbocompresores, turbinas de vapor y turbinas de gas (turbomáquinas térmicas). Es la ecuación que expresa la energía intercambiada en el rodete de todas estas máquinas.

18.3.1. Planos de representación de una turbomáquina

Los dos planos de representación de una turbomáquina son el *plano o corte meridional* y el *plano o corte transversal*. Estos planos para una bomba radial (véase Sec. 18.7) se representan en la Fig. 18-1.

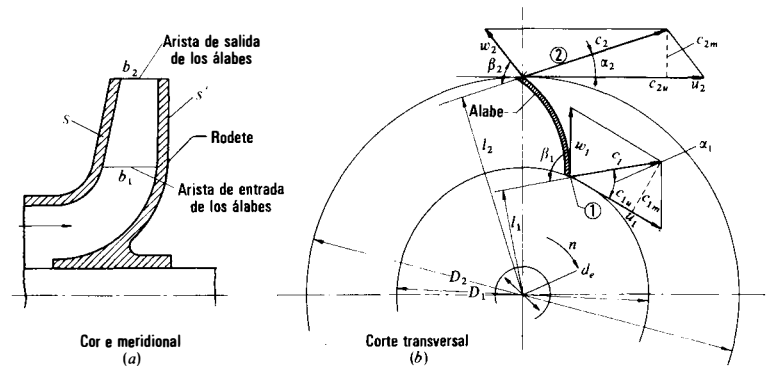


FIG. 18-1. *Rodete de una bomba centrífuga:* (*a*) corte meridional, (*b*) corte transversal. En este último se han dibujado los triángulos de velocidad a la entrada y a la salida. En la deducción de la ecuación de Euler se supone que todas las partículas de fluido que entran en los álabes sufren una misma desviación. (Método unidimensional de estudio.)

En la Fig. 18-1 *a* se representa el corte por un plano que contiene el eje de la máquina, que se llama *corte meridional*, porque en él se representan en su verdadera forma las meridianas de las superficies de revolución de la máquina, como son las superficies anterior y posterior del rodete (*s* y *s'* en la figura). En este corte se ven también las aristas de entrada y de salida de los *álabes*, los cuales imparten (bomba) o absorben (turbina) energía del fluido. Estas aristas de entrada y salida en nuestro caso son paralelas al eje de la máquina. Los anchos del rodete a la entrada b_1 y a la salida b_2 de los álabes se acotan también en este plano.

En la Fig. 18-1 *b* se representa el *corte transversal* por un plano perpendicular al eje. En el corte transversal de una bomba radial se ve el álabe del rodete en su verdadera forma: el álabe es una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje de la máquina. Los *diámetros de entrada y salida* de los álabes D_1 y D_2 se acotan también en este plano, así como el diámetro del eje, d_e.

18.3.2. Deducción de la ecuación de Euler

Esta deducción se hará con relación a la misma Fig. 18-1, que representa, como ya hemos dicho, el rodete de una bomba centrífuga (o de un ventilador centrífugo que esencialmente sólo se diferencia de una bomba en que el fluido bombeado no es líquido, sino gas: véase Sec. 20.3); pero todo el razonamiento y por tanto la fórmula de Euler deducida mediante él, será válido para todas las turbomáquinas.

Supondremos que la bomba funciona en régimen permanente y que al girar crea una depresión en el rodete penetrando el fluido en el interior de la bomba. Sea c_1 la *velocidad absoluta* de una partícula de fluido *a la entrada* de un álabe (punto 1 en la figura). El rodete accionado por el motor de la bomba gira a una velocidad n, rpm. En el punto 1 el rodete tiene una *velocidad periférica* $u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60}$. Con relación al álabe el fluido se mueve con una velocidad w_1, llamada *velocidad relativa a la entrada.* Las tres velocidades c_1, u_1 y w_1 están relacionadas según la mecánica del movimiento relativo, por la ecuación vectorial:

$$\boxed{\bar{w}_1 = \bar{c}_1 - \bar{u}_1} \qquad (18\text{-}1)$$

Suponemos que el álabe (o su tangente) tiene la dirección del vector $\bar{w}_1$, con lo que la partícula entra sin choque en el álabe (3). La partícula guiada por el álabe sale del rodete con una *velocidad relativa a la salida* $\bar{w}_2$, que será tangente al álabe en el punto 2. En el punto 2 el álabe tiene la velocidad periférica $\bar{u}_2$. La misma composición de velocidades de la Ec. (18-1) nos proporciona la *velocidad absoluta a la salida*, $\bar{c}_2$:

$$\boxed{\bar{c}_2 = \bar{w}_2 + \bar{u}_2} \qquad (18\text{-}2)$$

La partícula de fluido ha sufrido, pues, en su paso por el rodete un cambio de velocidad de $\bar{c}_1$ a $\bar{c}_2$.

Del *teorema de la cantidad de movimiento* (Sec. 16.2) se deduce el *teorema del momento cinético* o del momento de la cantidad de movimiento. En efecto, la Ec. (16-6), aplicada al hilo de corriente a que pertenece la partícula de fluido considerada, será:

$$d\bar{F} = dQ\rho(\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \qquad (18\text{-}3)$$

Tomando momentos en la Ec. (18-3) con relación al eje de la máquina tendremos:

$$dM = dQ\rho(l_2 c_2 - l_1 c_1) \qquad (18\text{-}4)$$

que es el *teorema del momento cinético.*

(3) En la práctica esto sucede cuando la bomba funciona en su *punto nominal* o punto para el cual la bomba ha sido diseñada. Si la velocidad de giro es mayor o menor que la velocidad nominal u_1 es mayor o menor y se produce un choque a la entrada y disminución del rendimiento en la bomba real.

donde dM — momento resultante con relación al eje de la máquina de todas las fuerzas que el rodete ha ejercido sobre las partículas que integran el filamento de corriente considerado para hacerle variar su momento cinético;
dQ — caudal del filamento;
l_2, l_1 — brazos de momento de los vectores c_2 y c_1 respectivamente (véase Fig. 18-1 *b*).

Suponemos ahora que todas las partículas de fluido entran en el rodete a un diámetro D_1 con la misma velocidad c_1, y salen a un diámetro D_2 con la misma velocidad c_2. Esto equivale a suponer que todos los filamentos de corriente sufren la misma desviación, lo cual a su vez implica que el número de álabes es infinito para que el rodete guíe al fluido perfectamente. Aplicando esta hipótesis llamada *teoría unidimensional*, o *teoría del número infinito de álabes*, al hacer la integral de la Ec. (18-4) el paréntesis del segundo miembro será constante, obteniéndose finalmente

$$M = Q\rho(l_2 c_2 - l_1 c_1)$$

donde M — momento total comunicado al fluido o momento hidráulico;
Q — caudal total de la bomba;

pero, de la Fig. 18-1 *b*, se deduce fácilmente que

$$l_1 = r_1 \cos \alpha_1 \quad \text{y} \quad l_2 = r_2 \cos \alpha_2$$

luego

$$\boxed{M = Q\,\rho\,(r_2 c_2 \cos \alpha_2 - r_1 c_1 \cos \alpha_1)} \qquad (18\text{-}5)$$

Este momento multiplicado por ω será igual a la potencia que el rodete comunica al fluido (4). Por tanto,

$$P_u = M\omega = Q\,\rho\omega(r_2 c_2 \cos \alpha_2 - r_1 c_1 \cos \alpha_1) \qquad \text{W, } SI \qquad (18\text{-}6)$$

donde $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ — velocidad angular del rodete, rad/s.

Por otra parte, si llamamos Y_u a la energía específica intercambiada entre el rodete y el fluido, en nuestro caso la energía específica que el rodete de la bomba comunica al fluido, y G al caudal másico que atraviesa el rodete, se tendrá en el *SI:*

$$P_u\,(\text{W}) = G\left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right) Y_u\left(\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right) = Q\left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \rho\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) g\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) H_u\,(\text{m}) \qquad (18\text{-}7)$$

(4) La potencia que el motor de accionamiento comunica al eje (potencia de accionamiento) es mayor porque éste debe vencer las pérdidas mecánicas.

donde H_u — altura equivalente a la energía intercambiada en el fluido:

$$Y_u\left(\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right) = Y_u\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) = H_u\,(\text{m})\,g\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

Igualando las dos expresiones de la potencia de las Ecs. (18-6) y (18-7) se tiene

$$Q\,\rho\,Y_u = Q\,\rho\omega(r_2 c_2 \cos\alpha_2 - r_1 c_1 \cos\alpha_1) \tag{18-8}$$

Pero

$$r_1\omega = u_1 \qquad r_2\omega = u_2$$
$$c_1 \cos\alpha_1 = c_{1u} \qquad c_2 \cos\alpha_2 = c_{2u}$$

donde c_{1u}, c_{2u} — proyecciones de c_1 y c_2 sobre u_1 u_2, o *componentes periféricas de las velocidades absolutas* a la entrada y a la salida de los álabes.

Sustituyendo estos valores en la Ec. (18-8), y simplificando, se obtiene la *ecuación de Euler:*

$$Y_u = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} \tag{18-9}$$

(Ecuación de Euler: bombas, ventiladores y turbocompresores)

Las bombas, ventiladores y compresores (estos últimos son máquinas térmicas) son máquinas generadoras: el *rodete imparte energía al fluido*. La Ec. (18-5) expresa el momento comunicado al fluido y la Ec. (18-6) la potencia comunicada al fluido, y por tanto el valor de Y_u en la Ec. (18-9) es la energía específica comunicada al fluido, que se expresa en $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$ o equivalentemente en $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ en el *SI*.

Sin embargo en el rodete existen dos pares iguales y de sentido contrario: el par comunicado al fluido y el par de reacción que el fluido ejerce sobre el rodete. Las *turbinas hidráulicas*, *turbinas de vapor* y *turbinas de gas* (estas dos últimas son máquinas térmicas) son máquinas motoras: *el fluido imparte energía al rodete*. Por eso al tratar de deducir la ecuación de Euler para las máquinas motoras se procedería análogamente; pero escribiendo el momento que el fluido ejerce sobre el rodete, con lo que el segundo miembro de la Ec. (18-5) tendría los signos cambiados y lo mismo los segundos miembros de las Ecs. (18-6) y (18-9).

Y_u ya no será la energía específica que *da* la máquina al fluido, sino la que *absorbe* la máquina.

Por tanto:

$$Y_u = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}$$

(Ecuación de Euler: turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas)

Sin embargo en ambos casos Y_u será la energía específica *intercambiada* entre el rodete y el fluido. Por tanto, para todas las turbomáquinas hidráulicas y térmicas, tanto motoras como generadoras, se tendrá:

PRIMERA FORMA DE LA ECUACION DE EULER
(Expresión energética)

$$\boxed{Y_u = \pm(u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u})} \tag{18-10}$$

(Ecuación de Euler, primera forma: bombas, ventiladores, turbocompresores, turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas: signo + máquinas motoras y signo − máquinas generadoras; unidades $\frac{m^2}{s^2}$ SI)

En las turbomáquinas hidráulicas se prefiere utilizar la ecuación de Euler en forma de altura, y así lo haremos nosotros; de la misma manera que hemos utilizado en hidrodinámica la ecuación de Bernoulli en la forma de la Ec. (5-35) con preferencia a la expresión energética de la Ec. (5-31). En las máquinas hidráulicas la altura es una variable de gran significado físico: altura bruta de un salto de agua, altura neta de una turbina hidráulica, altura de elevación de una bomba, etc. (5).

De la variable Y se pasa a la variable H por la ecuación:

$$Y\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) = g\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) H\,(\text{m}) \tag{18-11}$$

Por tanto, dividiendo los dos términos de la Ec. (18-10) por g se tendrá:

PRIMERA FORMA DE LA ECUACION DE EULER
(Expresión en alturas)

$$\boxed{H_u = \pm\frac{u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}}{g}} \tag{18-12}$$

(Ecuación de Euler, primera forma: bombas, ventiladores, turbocompresores, turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas: signo + máquinas motoras y signo − máquinas generadoras; unidades m, SI)

Notas a la ecuación de Euler

1.ª) Así como la ecuación de Bernoulli es la *ecuación fundamental de la hidrodinámica*, la ecuación de Euler es la *ecuación fundamental de las turbomáquinas.*

2.ª) La altura H_u de la Ec. (18-12) en las turbomáquinas hidráulicas se denomina también *altura hidráulica.*

3.ª) En la Fig. 18-1, empleada para deducir la ecuación de Euler, tanto el vector $\bar{c}_1$ como el $\bar{c}_2$ se encuentran en el plano del dibujo (plano transversal. Como veremos en la Sec. 18.7 esto solo sucede en las

(5) En las turbomáquinas térmicas la variable altura carece de significado físico importante y se prefiere utilizar la ecuación de Euler en la forma de la Ec. (18-10). Véase C. Mataix, *Termodinámica térmica y máquinas térmicas*, Ediciones I.C.A.I., Madrid 1978.

máquinas radiales. En general, en una turbomáquina la velocidad en cada punto puede tener tres componentes, según los ejes r, u y a, que tienen la dirección del radio en dicho punto, la tangente y el eje de la máquina.

Sin embargo, al plantear la ecuación del momento cinético se llegaría a la misma Ec. (18-5), porque el momento de la componente axial c_a con relación al eje es nulo por ser paralela a él y el momento de la componente según el eje r c_r también, porque su dirección corta al eje, quedando solo el momento de c_u, igual a $c_{1u}\, r_1$ y $c_{2u}\, r_2$ a la entrada y salida, respectivamente.

4.ª) $Y_u(H_u)$ representa, como se comprenderá mejor después de estudiadas las Secs. 19.10 (bombas) y 22.8 (turbinas):
- — en las *bombas*, *ventiladores* y *compresores* (turbomáquinas generadoras): la energía (altura) teórica comunicada al fluido;
- — en las *turbinas hidráulicas*, *de vapor* y *de gas* (turbomáquinas motoras): la energía (altura) útil aprovechada por el rodete;
- — en *todas las turbomáquinas:* la energía (altura) intercambiada en el rodete.

5.ª) En el diseño de las turbomáquinas a la altura expresada por la Ec. (18-12) en la hipótesis de la teoría unidimensional o número infinito de álabes se denomina $H_{u\infty}$ y a la altura intercambiada en un rodete con número finito de álabes se denomina H_u. En las turbinas hidráulicas ambas alturas son prácticamente iguales, no así en las bombas. Sin embargo, con la definición que daremos de rendimiento hidráulico no será preciso hacer esta distinción, lo que contribuirá a la simplificación de nuestro estudio.

18.4. TRIANGULOS DE VELOCIDADES: NOTACION INTERNACIONAL

Las ecuaciones vectoriales (18-1) y (18-2):

$$\bar{c}_1 = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$$
$$\bar{c}_2 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$$

se representan mediante dos triángulos, que se llaman *triángulo de entrada* y *triángulo de salida*, respectivamente.

En estos triángulos se utiliza en la Fig. 18-2, la notación que llamamos internacional por ser la más utilizada en casi todos los países (Alemania, Estados Unidos, Francia, Rusia, España, etc.). En dichos triángulos

- u_1 — *velocidad absoluta del álabe a la entrada* o *velocidad periférica a la entrada;*
- c_1 — *velocidad absoluta del fluido a la entrada;*
- w_1 — *velocidad relativa a la entrada* (del fluido con respecto al álabe);
- c_{1m} — *componente meridional* de la velocidad absoluta del fluido a la entrada;

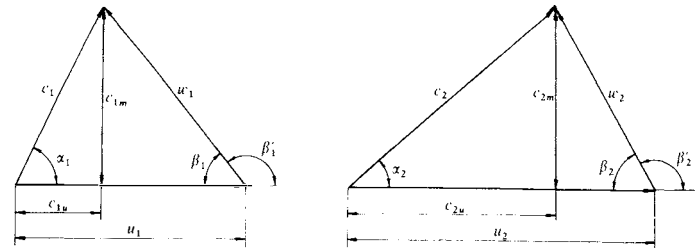


FIG. 18-2. *Triángulos de velocidad* de entrada y salida de los álabes de un rodete de una bomba o ventilador con la *notación internacional* para ángulos, velocidades y componentes de velocidades, corrientemente empleada en el estudio de todas las turbomáquinas hidráulicas y térmicas.

- c_{1u} — *componente periférica* de la velocidad absoluta del fluido a la entrada;
- α_1 — ángulo que forman las dos velocidades c_1 y u_1;
- β_1 — ángulo que forma w_1 con $(-u_1)$. Nótese que el ángulo que forma w_1 con $+u_1$ es el β_1' suplementario del β_1;

y lo mismo en el triángulo de salida, sustituyendo el subíndice 1 por el 2.

18.5. SEGUNDA FORMA DE LA ECUACION DE EULER

Del triángulo de entrada se deduce trigonométricamente que

$$w_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2\,u_1 c_1 \cos\alpha_1 = u_1^2 + c_1^2 - 2u_1 c_{1u}$$
$$u_1 c_{1u} = 1/2(u_1^2 + c_1^2 - w_1^2) \qquad (18\text{-}13)$$

Asimismo, del triángulo de salida se deduce que

$$u_2 c_{2u} = 1/2(u_2^2 + c_2^2 - w_2^2) \qquad (18\text{-}14)$$

Llevando a la ecuación de Euler (18-10) los valores de $u_1 c_{1u}$ y $u_2 c_{2u}$ de las Ecs. (18-13) y (18-14) y ordenando los términos, tendremos:

SEGUNDA FORMA DE LA ECUACION DE EULER
(Expresión energética)

$$Y_u = \pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2}\right) \qquad (18\text{-}15)$$

(Signo + : máquinas motoras: turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas; signo − : máquinas generadoras: bombas, ventiladores y compresores; unidades: $\frac{m^2}{s^2}$, *SI)*

Asimismo dividiendo por g ambos miembros de la Ec. (18-15), tendremos:

SEGUNDA FORMA DE LA ECUACION DE EULER
(Expresión en alturas)

$$H_u = \pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\right) \qquad (18\text{-}16)$$

(Signo +: máquinas motoras: turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas; signo −: máquinas generadoras: bombas, ventiladores y compresores; unidades: m, SI)

Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre la entrada y salida del rodete —puntos 1 y 2—, sin tener en cuenta las pérdidas en el mismo, se tendrá:

$$H_u = \pm\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\right)$$

Por otra parte, según la ecuación de Euler:

$$H_u = \pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\right)$$

Igualando las dos expresiones de H_u se tendrá:

$$\pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\right) = \pm\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\right)$$

El término $\pm\frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}$ es evidentemente la altura dinámica que da el fluido al rodete (turbinas hidráulicas) o el rodete al fluido (bombas y ventiladores). Por tanto, los dos primeros términos del segundo miembro de (18-16) serán la altura de presión del rodete. Es decir:

ALTURA DE PRESION DEL RODETE

$$H_p = \pm\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g}\right) = \pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right) \qquad (18\text{-}17)$$

(Signo +: turbinas; signo −: bombas)

ALTURA DINAMICA DEL RODETE

$$H_d = \pm\frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} \qquad (18\text{-}18)$$

(Signo +: turbinas; signo −: bombas)

18.6. GRADO DE REACCION

El *grado de reacción* de una turbomáquina se refiere al modo cómo trabaja el rodete. Así, por ejemplo, en una bomba se debe distinguir la *altura de presión que da la bomba* y *la altura de presión que da el rodete de la bomba*, H_p. La primera normalmente es mayor que H_p porque la bomba tiene además de un rodete un *sistema difusor*, que se estudiará en la Sec. 19.7 y que transforma la energía dinámica que da el rodete, H_d en energía de presión, que sumada a la energía de presión del rodete constituye la energía de presión que da toda la bomba. Análogamente sucede en una turbina. Por tanto:

GRADO DE REACCION TEORICO

$$\sigma = \frac{H_p}{H_u} \qquad (18\text{-}19)$$

es decir, el cociente de la altura que da (bomba) o absorbe (turbina) *el rodete* en forma de presión por la *altura total* que da (bomba) o que absorbe (turbina) *el rodete* (el denominador es la altura de Euler, H_u, en ambos casos).

Siendo H_u siempre positivo:

— Si $H_p < 0$, el grado de reacción es negativo;
— Si $H_p = 0$, el grado de reacción es 0;
— Si $0 < H_p < H_u$ el grado está comprendido entre 0 y 1, que es el caso normal;
— Si $H_p > H_u$, el grado de reacción es mayor que 1.

Las máquinas en que el grado de reacción es igual a cero se llaman de acción. Todas las bombas son de reacción; las bombas de acción no suelen construirse. Las turbinas de acción constituyen la clase importante de las turbinas Pelton, que se estudiará en la Sec. 22.4. Si el rodete da (bomba) o absorbe (turbina) la mitad de su energía en forma de presión y la otra mitad en energía dinámica, el grado de reacción es igual a 1/2. (Es muy frecuente construir las turbinas de vapor y las turbinas de gas con grado de reacción igual a 1/2.)

18.7. CLASIFICACION DE LAS TURBOMAQUINAS SEGUN LA DIRECCION DEL FLUJO EN EL RODETE

En las Figs. 18-3 *a*, *b*, *c* se representa con línea continua y una flecha la trayectoria de una partícula que atraviesa el rodete en los tres casos siguientes:

— En la Fig. 18-3 *a* se representa la trayectoria de una partícula en una *máquina radial.*
— En la Fig. 18-3 *b*, lo mismo en una *máquina axial.*

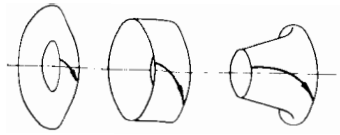


FIG. 18-3. Trayectoria de una partícula de fluido en el rodete de una máquina: (*a*) radial; (*b*) axial; (*c*) semiaxial (radio-axial o de flujo mixto).

—En la Fig. 18-3 *c*, lo mismo en una *máquina radioaxial*, llamada también de *flujo mixto*, o *semi-axial*.

En cualquier punto de la trayectoria de una partícula se pueden dibujar tres ejes: *r*, *u*, *a*, dirigidos según el radio, la tangente y el eje de la máquina:

—*En la máquina radial* la velocidad en ningún punto (del rodete) tiene componente axial (según el eje *a*); solo tiene dos componentes: tangencial y radial.

—*En la máquina axial* la velocidad en ningún punto tiene componente radial (según el eje *r*); sólo tiene dos componentes: axial y periférica. En las máquinas axiales $u_1 = u_2$. El efecto de la fuerza centrífuga es nula. *Una bomba axial no es una bomba centrífuga.*

—*En la máquina radio-axial* la velocidad tiene las tres componentes según los tres ejes.

—En ninguna máquina falta la componente periférica, c_u, cuya variación a su paso por la máquina, según la ecuación de Euler, es esencial en la transmisión de la energía.

—Las *turbinas hidráulicas Pelton* (Sec. 22.4) constituyen una clase especial, porque en ellas el flujo es meramente tangencial.

—Las turbinas de vapor de las centrales térmicas modernas son máquinas axiales.

—Las turbinas hidráulicas son rara vez radiales. Las turbinas hidráulicas más frecuentes son las turbinas Francis (Sec. 22.5), que son máquinas radio-axiales.

—La bomba radial es una máquina muy frecuente; pero son también frecuentes las bombas axiales y semi-axiales.

19. *Turbomáquinas hidráulicas: Bombas rotodinámicas*

19.1. DEFINICION Y CLASIFICACION DE LAS BOMBAS

Bomba es una máquina que absorbe *energía mecánica* y restituye al líquido que la atraviesa *energía hidráulica*.

Las bombas se emplean para impulsar toda clase de líquidos (agua, aceites de lubricación, combustibles, ácidos; líquidos alimenticios: cerveza, leche, etc.; estas últimas constituyen el grupo importante de las *bombas sanitarias*). También se emplean las bombas para bombear líquidos espesos con sólidos en suspensión, como pastas de papel, melazas, fangos, desperdicios, etc.

Las bombas se clasifican en:

1) *Bombas rotodinámicas.* Todas y solo las bombas que son *turbomáquinas* pertenecen a este grupo, del cual nos ocuparemos en el presente capítulo.
   — Estas son siempre rotativas. *Su funcionamiento se basa en la ecuación de Euler;* y su órgano transmisor de energía se llama rodete.
   — Se llaman *rotodinámicas* porque su movimiento es rotativo y la dinámica de la corriente juega un papel esencial en la transmisión de la energía (véase Sec. 18.2).

2) *Bombas de desplazamiento positivo.* A este grupo pertenecen no solo las bombas alternativas, sino las rotativas llamadas *rotoestáticas* porque son rotativas, pero en ellas la dinámica de la corriente no juega un papel esencial en la transmisión de la energía. *Su funcionamiento se basa en el principio de desplazamiento positivo* (Sec. 26.2). De estas bombas nos ocuparemos en los Caps. 26 a 28.

19.2. CLASIFICACION DE LAS BOMBAS ROTODINAMICAS

— *Según la dirección del flujo:* bombas de flujo radial, de flujo axial y de flujo radioaxial (véase Sec. 18.7).
— *Según la posición del eje:* bombas de eje horizontal, de eje vertical y de eje inclinado.
— *Según la presión engendrada:* bombas de baja presión, de media presión y de alta presión.

— *Según el número de flujos en la bomba:* de simple aspiración o de un flujo y de doble aspiración, o de dos flujos.
— *Según el número de rodetes:* de un escalonamiento o de varios escalonamientos.

19.3. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

En la Fig. 19-1 se representa una *bomba radial de eje horizontal* en la cual pueden verse los elementos siguientes:

— *Rodete* (1), que gira solidario con el eje de la máquina y consta de un cierto número de álabes que imparten energía al fluido en forma de energía cinética y energía de presión.
— *Corona directriz* (2) o corona de álabes fijos, que recoge el líquido del rodete y transforma la energía cinética comunicada por el rodete en energía de presión, ya que la sección de paso aumenta en esta corona en la dirección del flujo. Esta corona directriz no existe en todas las bombas; porque encarece su construcción; aunque hace a la bomba más eficiente.

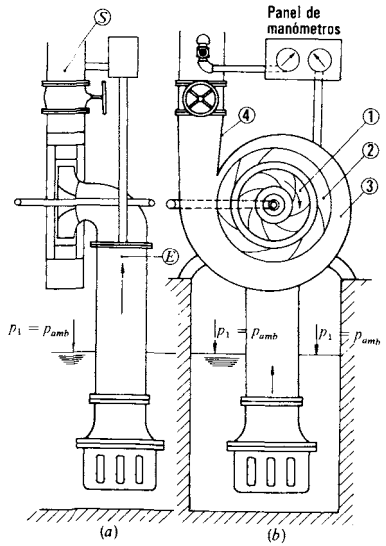


FIG. 19-1. Elementos constitutivos de una bomba centrífuga.

— *Caja espiral* (3), que transforma también la energía dinámica en energía de presión, y recoge además con pérdidas mínimas de energía el fluido que sale del rodete, conduciéndolo hasta la tubería de salida o tubería de impulsión.
— *Tubo difusor troncocónico* (4), que realiza una tercera etapa de difusión o sea de transformación de energía dinámica en energía de presión.

19.4. ¿DONDE EMPIEZA Y DONDE TERMINA LA MAQUINA?: SECCIONES DE ENTRADA *E* Y DE SALIDA *S*

Norma: La sección de entrada de una bomba se toma antes de la brida de conexión del tubo de aspiración, sección *E* (Fig. 19-1 *a*). *La sección de salida* se toma después de la brida de conexión del tubo de impulsión, sección *S* (Fig. 19-1 *a*). *La bomba empieza en la sección E y termina en la sección S.* Todas las pérdidas de energía que tienen lugar entre las secciones *E* y *S* son imputables a la bomba y disminuyen *el rendimiento de la bomba;* pero las pérdidas que tienen lugar antes de la sección *E* (en el tubo de aspiración) y después de la sección *S* (en el tubo de impulsión) son imputables a la instalación y disminuyen *el rendimiento de la instación* (no el de la bomba).

En la explotación de las máquinas pueden surgir pleitos entre la casa explotadora y la constructora sobre mal funcionamiento, bajo rendimiento e incumplimiento de garantías (1). *El constructor es responsable de cuanto sucede entre las secciones E y S y el instalador de cuanto sucede antes y después de dichas secciones.*

19.5. TIPOS CONSTRUCTIVOS

He aquí algunos más interesantes:

1) *Bomba de carcasa seccionada.* La Fig. 19-2 representa una de estas bombas construida por la casa Sulzer. Esta bomba está dividida por un plano axial horizontal. Las tuberías de aspiración y descarga, así como el conducto de conexión entre el primero y segundo escalonamiento se encuentran en la parte inferior de la carcasa. El acceso al interior

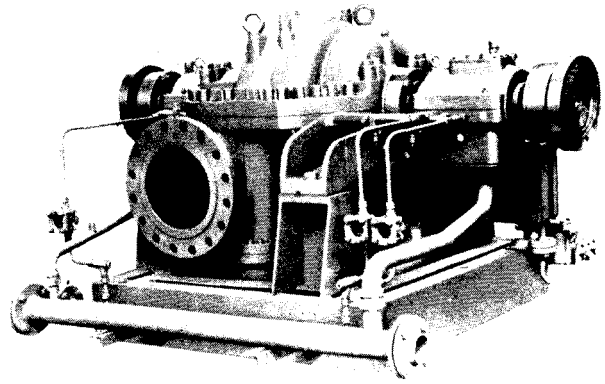


FIG. 19-2. *Bomba centrífuga de eje horizontal*, tipo HZZM de dos escalonamientos con carcasa seccionada horizontalmente, construida por la casa Sulzer de Suiza, para procesos a presiones elevadas de la industria petroquímica, química, etc. Caudales hasta 1.200 metros cúbicos/hora, alturas útiles entre 200-600 m con presiones de servicio hasta 100 bar y temperaturas de $-20°$ C a $+130°$ C.

(1) Las bombas modernas de cierta potencia y elevado precio (bombas de alimentación de calderas de las centrales térmicas) suelen venderse con un contrato de garantía, que implica una penalidad a satisfacer por la casa constructora en caso de incumplimiento de la garantía.

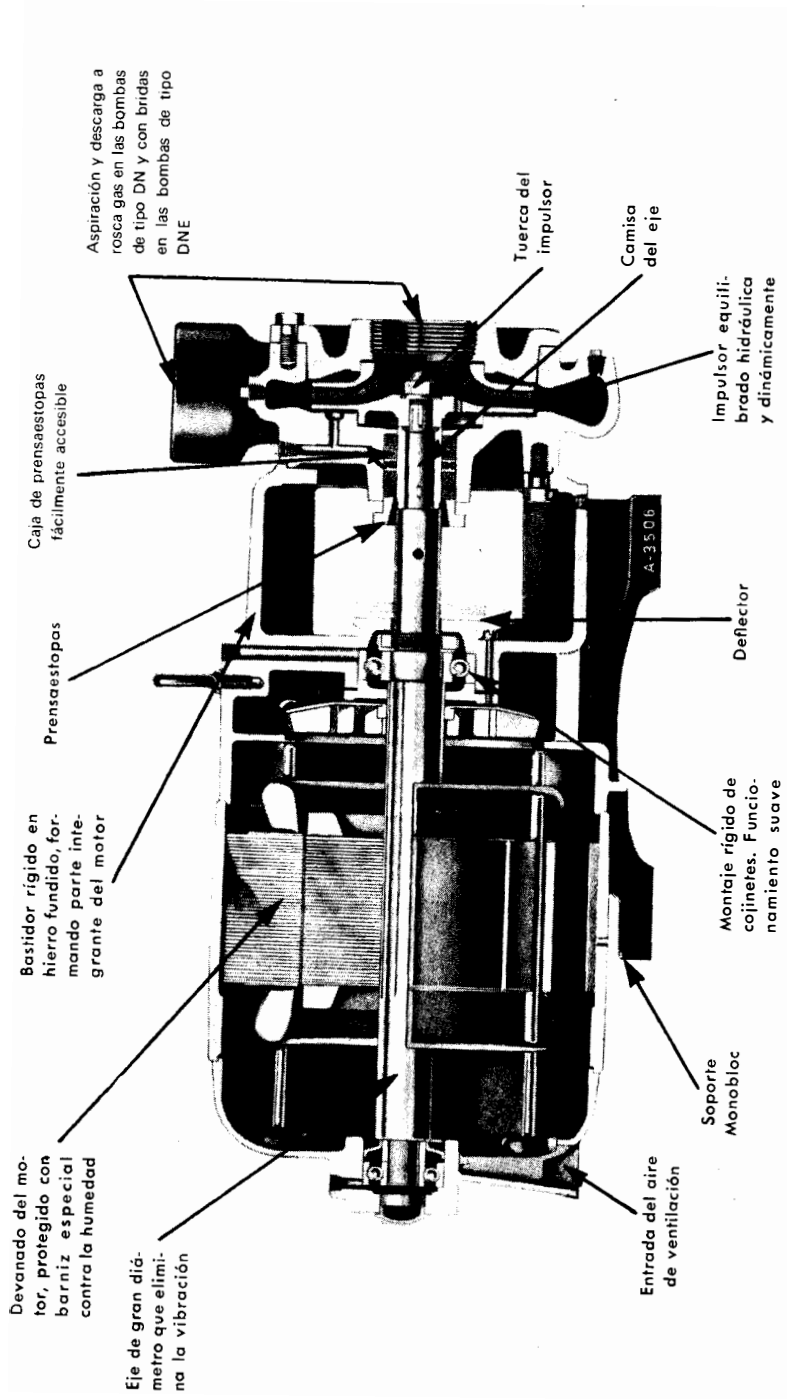


FIG. 19-3. *Corte axial de una bomba* monobloc Worthington mostrando sus características más importantes. *(Por cortesía de WORTHINGTON.)*

de la bomba para su inspección se consigue desmontando la mitad superior de la carcasa, sin tocar para nada las tuberías de aspiración y descarga, ni los manómetros, ni alterar el alineamiento de la bomba. Por esta razón las bombas de cámara seccionada han tenido en los últimos años mucha aceptación.

2) *Bomba monobloc*, como la construida también por la casa Worthington y representada en la Fig. 19-3. Si la anterior es muy popular por su accesibilidad, ésta también lo es en grupos pequeños por formar un grupo compacto con un solo apoyo para el motor eléctrico y la bomba, la cual está instalada en voladizo, como se ve en la figura.
3) *Bomba de doble aspiración* como la construida por la misma casa y representada en la Fig. 19-4 (véase Sec. 19.6). Esta bomba es semiaxial o de flujo mixto y resulta adecuada para grandes caudales, lo que se consigue gracias a la doble aspiración sin aumentar mucho las dimensiones de la máquina.
4) *Bomba axial.* La de la Fig. 19-5 es una bomba de riego y está construida por la casa Escher Wyss para Egipto. Suministra un caudal de unos 6.000 l/s. El rodete tiene forma de hélice y es adecuada para grandes caudales y pequeñas alturas de elevación.

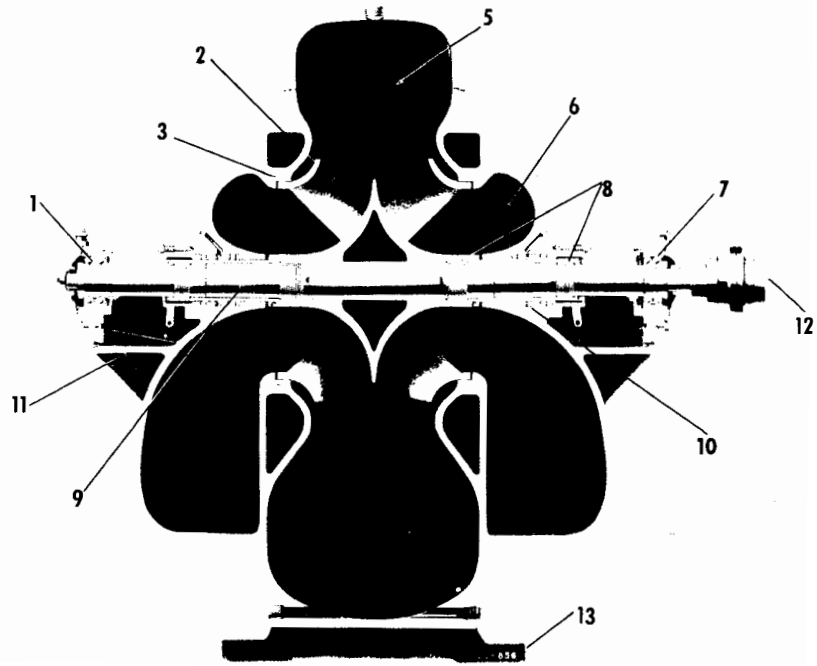


FIG. 19-4. Corte axial de una *bomba centrífuga de doble aspiración* tipo *LC* de la casa Worthington: 1. Cojinete de empuje de bolas. 2. Rodete de bronce de doble aspiración, tipo cerrado. 3. Anillo de desgaste sujeto a la carcasa. 5. Carcasa de hierro fundido. 6. Voluta de aspiración. 7. Cojinete de bolas. 8. Tuerca de cierre. 9. Eje de acero protegido con camisa de bronce a lo largo de la caja del prensaestopas. 10. Cierre hidráulico. 11. Soporte del cojinete fundido en una sola pieza con la carcasa. 12. Acoplamiento flexible. 13. Base rígida fundida con la parte inferior de la carcasa. *(Por cortesía de WORTHINGTON.)*

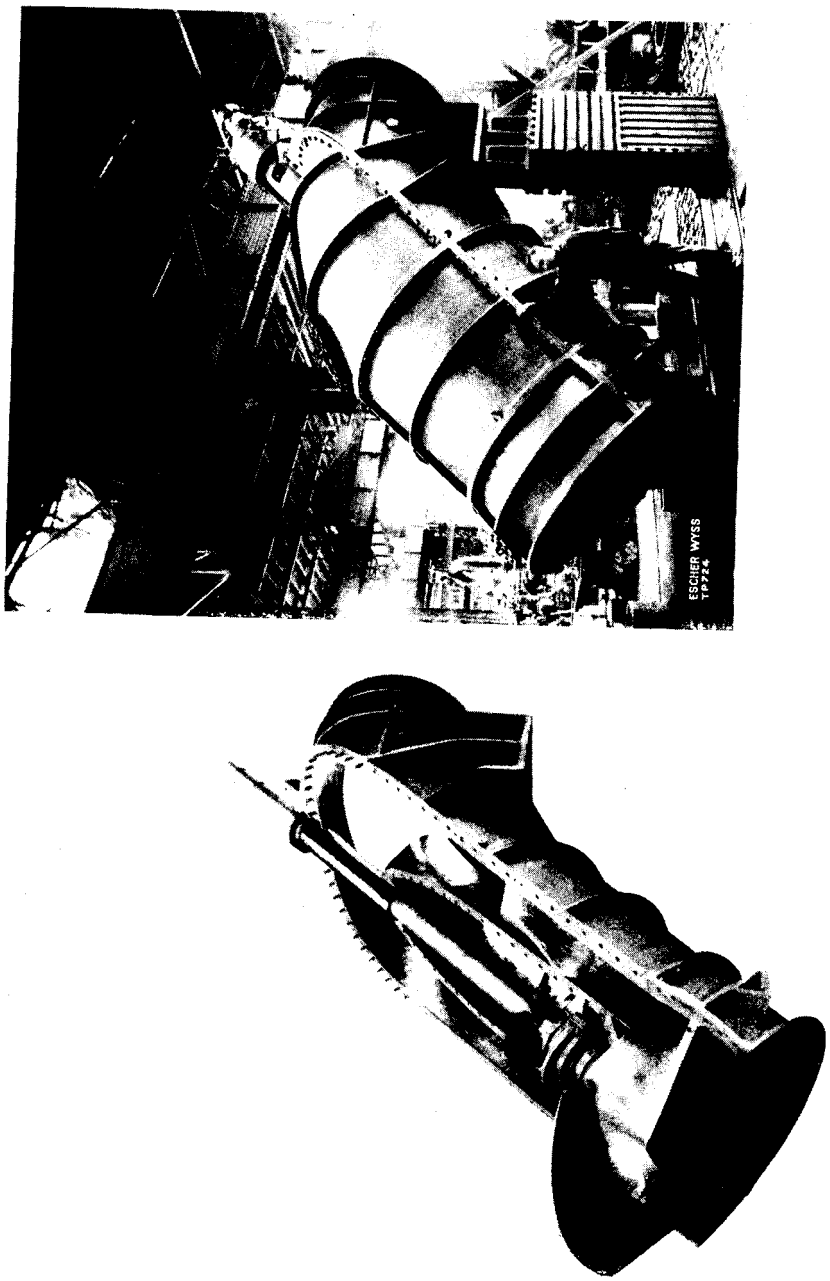


FIG. 19-5. Aspecto interior y exterior de una *bomba hélice* de riego construida para Egipto por la firma Escher Wyss, Suiza. Los álabes del rodete son orientables; pero para cambiar su orientación es preciso parar la máquina. El caudal oscila entre 7.000 y 5.000 l/s.

5) *Bomba horizontal de múltiples escalonamientos.* La bomba de múltiples escalonamientos de la Fig. 19-6, construida por la casa KSB de Alemania es en contraste con las dos anteriores más adecuada para pequeños caudales y grandes alturas efectivas. Las bombas de alimentación de calderas se construyen para presiones por encima de 300 bar. En este campo de aplicación las bombas rotodinámicas han desplazado modernamente casi por completo a las bombas de émbolo.

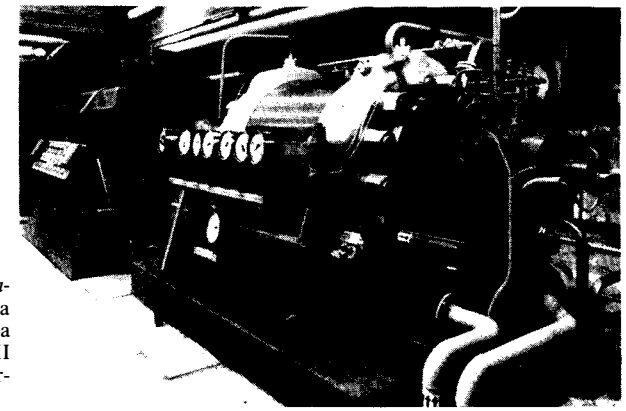


FIG. 19-6. *Bomba de alimentación* de caldera de vapor a media carga, construida por la firma KSB de Alemania para el grupo II de 500 MW de la central de Moorburg, cerca de Hamburgo.

6) *Bombas verticales de múltiples escalonamientos.* La Fig. 19-7 representa una de estas bombas. Está construida por la casa Weise und Monski, Alemania, que las ofrece para caudales hasta de 400 m^3/h y presiones superiores a los 300 bar.
7) *Bombas de pozo profundo.* Son análogas a las anteriores y se instalan en el interior del pozo, y a veces sumergidas. El motor eléctrico de accionamiento se instala fuera del pozo, pudiendo tener el eje varios metros de longitud, con apoyos de trecho en trecho en cojinetes intermedios.
8) *Grupo moto-bomba sumergible.* Estos grupos, como el de la Fig. 19-8 de la casa alemana Pleuger, gracias a los modernos progresos en la técnica de los aislamientos, se instalan totalmente sumergidos, sin excluir el motor eléctrico. Estas bombas permiten la extracción de agua sin la construcción del pozo ancho convencional, pues basta una perforación de diámetro suficiente para introducir la bomba.
9) *Pequeños grupos de bombeo* con motor de gasolina o Diesel. Estos grupos son autónomos y, por tanto, muy prácticos en granjas, etc. La Fig. 19-9 representa una bomba DIA accionada por motor industrial Wolkswagen, para caudales hasta de 2.400 l/min y alturas efectivas hasta 50 m.

Citemos, para terminar, dos campos de progreso de las bombas rotodinámicas: el campo de las grandes velocidades de rotación y el de las grandes potencias.

El progreso en el campo de las grandes velocidades de rotación puede verse en la Fig. 9-10, en la que se comparan los rotores de dos bombas construidas por la casa Worthington, que giran a 3.465 rpm y 9.000 rpm, respectivamente,

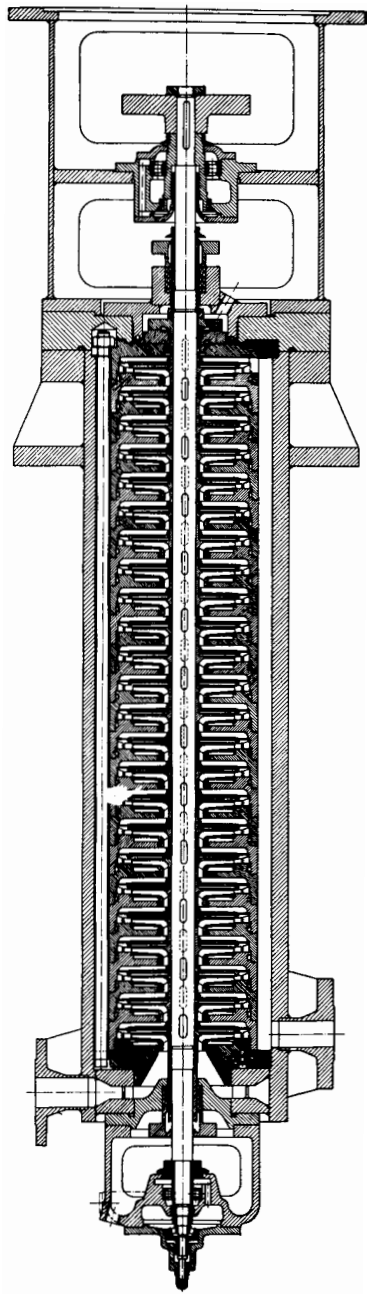


FIG. 19-7. Corte de una *bomba vertical de múltiples escalonamientos* construida por la firma Weise und Monski, Alemania.

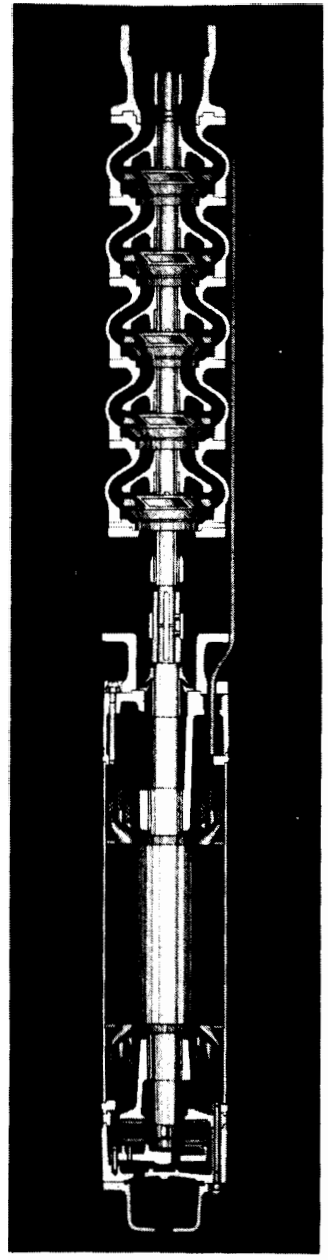


FIG. 19-8. *Bomba sumergible* de la firma Ritz alemana. En estas bombas tanto el motor eléctrico (parte inferior) como la bomba (parte superior) se instalan totalmente sumergidos en un pozo que puede tener una sección transversal muy pequeña, con considerable ahorro de obra civil.

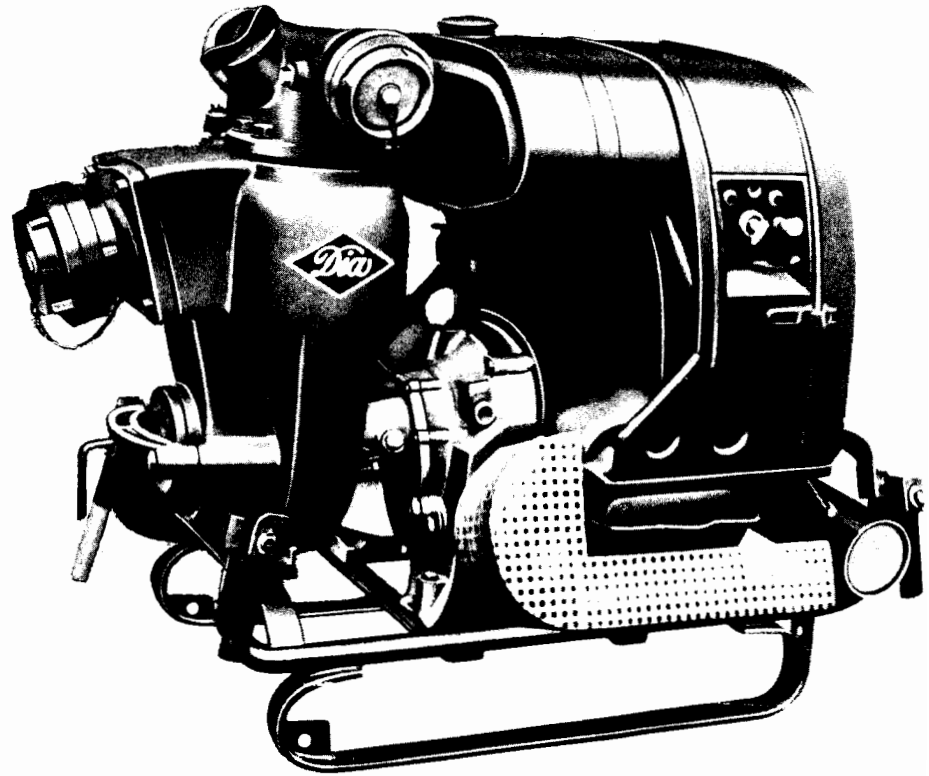


FIG. 19-9. Pequeño *grupo transportable de bombeo* DIA construido por Hammelrath und Schwenzer, Alemania, con motor de accionamiento industrial Wolkswagen.

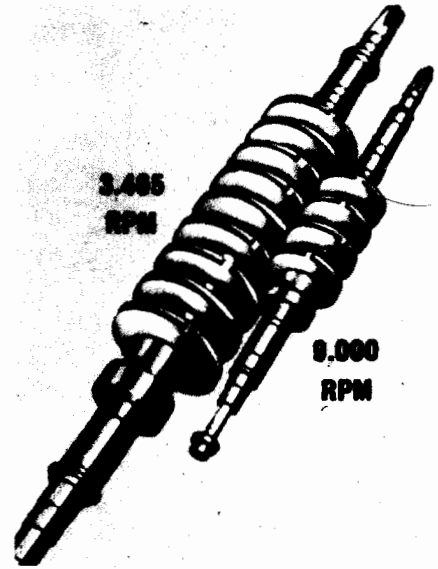


FIG. 19-10. Comparación de rotores de dos *bombas de alimentación de calderas* de la firma Worthington, U.S.A., para el mismo caudal y altura útil. El rpm elevado permite reducir las dimensiones y el número de rodetes.

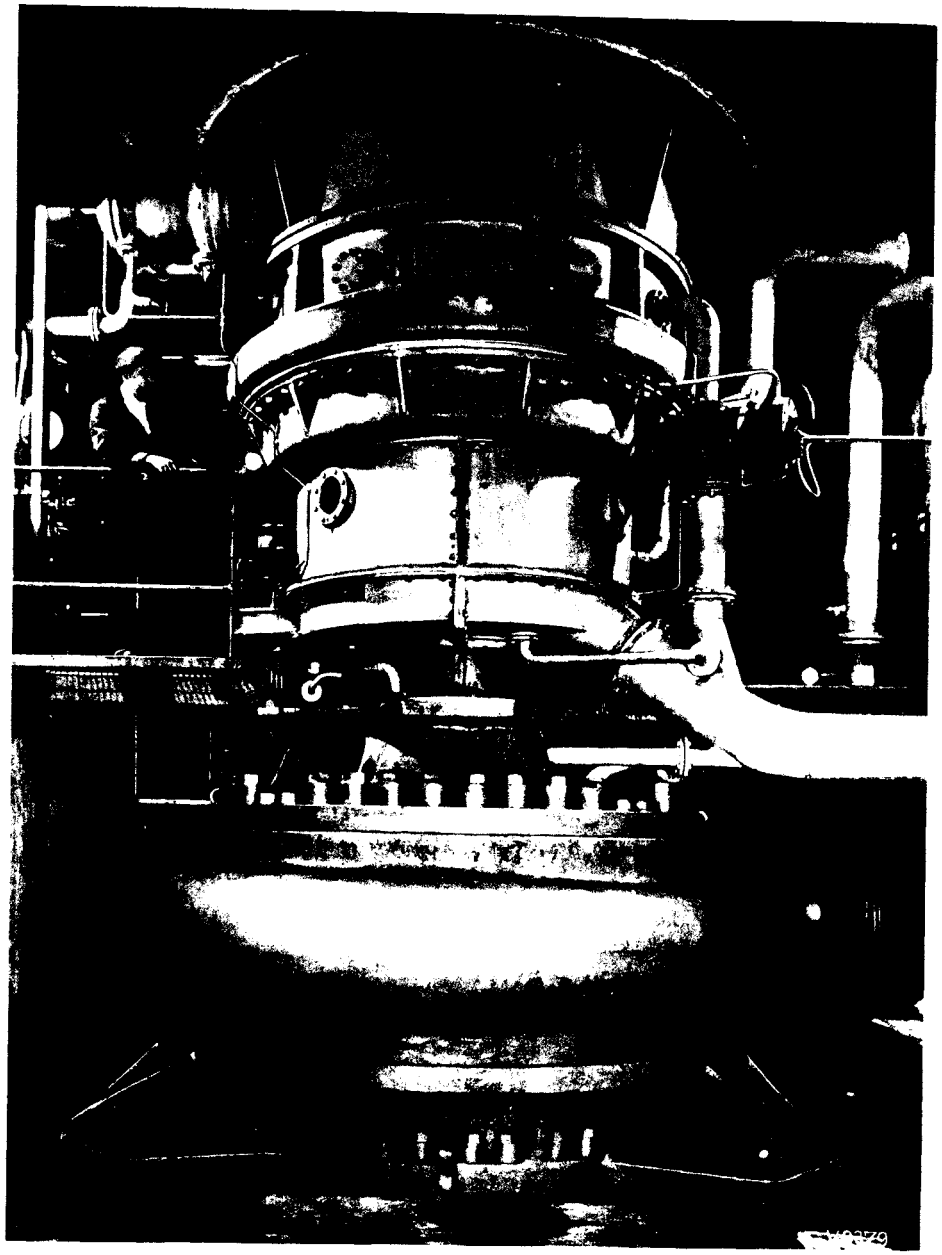


FIG. 19-11. *Bomba de 5 escalonamientos* (parte inferior de la figura) para la central de bombeo del Lünersee construida por la firma Voith, Alemania. El grupo tiene un convertidor de par para sincronización y un acoplamiento por engranajes (parte superior). Hecha la sincronización y verificado el acoplamiento, es drenado el convertidor de par, quedando así éste fuera de servicio. *(Por cortesía de J. M. Voith GMBH.)*

ambas para el mismo caudal y la misma presión. La disminución del diámetro del rodete y del número de escalonamientos en el último caso es espectacular en esta figura. Se utilizan como *bombas de alimentación de calderas.*

El progreso en el campo de las grandes potencias puede verse en las bombas destinadas a las centrales hidroeléctricas denominadas *centrales de acumulación por bombeo* (véase Sec. 21.4.1). En estas centrales que se multiplican en la actualidad en muchos países, entre otros España, se utiliza con frecuencia una máquina reversible que sirve de turbina y de bomba; pero otras veces se utilizan dos máquinas distintas, una turbina y una bomba. La Fig. 19-11 representa este último caso. La bomba tiene cinco escalonamientos. El grupo incorpora también un *convertidor de par hidrodinámico* (véase Sec. 24.3) para el arranque de la bomba hasta la velocidad de sincronismo. Está instalado en la central de bombeo de Lünersee. Su potencia asciende a 28.000 kW.

19.6. EL RODETE: CLASIFICACION DE LAS BOMBAS POR EL NUMERO ESPECIFICO DE REVOLUCIONES

El rodete reviste formas muy variadas y aun caprichosas, cuando la aplicación particular lo requiere. El rodete de la Fig. 19-12 es de tipo semicerrado y solo tiene dos álabes para evitar obstrucciones por las materias fibrosas y sólidos en suspensión que arrastra la corriente. Tipos análogos de rodetes se emplean para bombear pasta de papel, para achique de aguas sucias, etc. Análogos son los rodetes de las bombas de que están provistos algunos barcos pesqueros modernos que bombean desde la red hasta la cubierta el agua del mar con los peces, los cuales atraviesan vivos el rodete de la bomba.

FIG. 19-12. *Rodete semiabierto* de una bomba radial de dos álabes en forma de «S» construida por la casa Sulzer de Suiza, empleada para el bombeo de líquidos con elevado contenido de aire y gas, así como de materias fibrosas y sólidas en suspensión. La ejecución abierta de los álabes permite una cómoda limpieza.

Los rodetes se clasifican en cuatro tipos según la forma de sujeción de los álabes. Estos cuatro tipos se representan en la Fig. 19-13 y son:

a) *Rodete cerrado de simple aspiración:* las caras anterior y posterior forman una caja: entre ambas caras se fijan los álabes.
b) *Rodete cerrado de doble aspiración.*

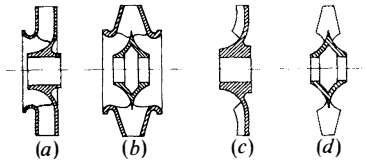


FIG. 19-13. *Tipos de rodetes:* (*a*) rodete cerrado de simple aspiración; (*b*) rodete cerrado de doble aspiración; (*c*) rodete semiabierto de simple aspiración; (*d*) rodete abierto de doble aspiración.

c) *Rodete semiabierto de simple aspiración:* sin la cara anterior, los álabes se fijan solo en la cara posterior.

d) *Rodete abierto de doble aspiración sin cara anterior ni posterior:* los álabes se fijan en el núcleo o cubo de rodete.

Si la bomba tiene varios escalonamientos, de manera que el caudal recogido a la salida de un rodete se dirige al siguiente (rodetes en serie) el montaje que representa la bomba de la Fig. 19-14 *b*, de cuatro escalonamientos, es preferible al de la Fig. 19-14 *a*, porque el empuje axial que se crea a causa de la distribución de presiones sobre el rodete que actúa sobre el eje de la máquina, cuyo equilibrio constituye un problema, se elimina en este diseño, ya que los empujes axiales de cada rodete se anulan dos a dos.

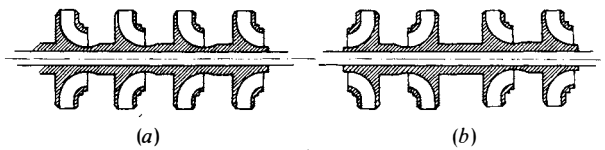


FIG. 19-14. En (*a*) los empujes axiales se suman, mientras que en (*b*) se eliminan dos a dos.

— El *rodete* de una bomba rotodinámica se ha de proyectar de manera que para la Q y H requeridas se obtenga el óptimo rendimiento. En la práctica, los Q y H necesarios varían entre amplios límites, y dentro de ellos puede requerirse cualquier combinación Q y H con diferentes valores de n, buscando siempre el óptimo rendimiento. La consecuencia de esto es la siguiente:

> *El rodete de las bombas rotodinámicas va cambiando insensiblemente de forma para adaptarse a las diferentes condiciones de servicio.*

Así, los rodetes de la Fig. 19-15 se van poco a poco adaptando a caudales mayores y alturas efectivas más pequeñas. Las Figs. (*a*) a (*e*) están dibujadas a la misma escala y todas requerirían la misma potencia.

— En la Fig. 19-15 *a* el flujo es totalmente *radial*, y la diferencia de diámetros de entrada, D_1 y salida, D_2 es máxima.
— En las Figs. 19-15 *b* a *d* el flujo es cada vez más *axial*.
— En la Fig. 19-15 *d* se representa un rodete claramente *semiaxial* o rodete de flujo mixto.
— En la Fig. 19-15 *e* el flujo es totalmente *axial*.

Cada uno de los cinco rodetes de la figura representa una familia de rodetes geométricamente semejantes. El tamaño se ajustará a la potencia. Así el

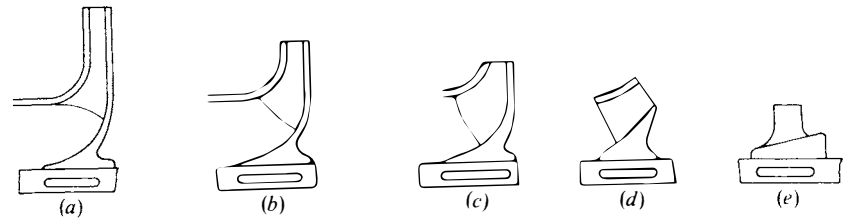


FIG. 19-15. El rodete de una bomba rotodinámica se adapta a las exigencias de Q, H y n. De (*a*) a (*e*) las bombas se adaptan a caudales relativamente mayores y a alturas efectivas menores. Los números específicos de revoluciones son: (*a*) n_s = 40 a 80: rodete marcadamente radial (lento); (*b*) n_s = 80 a 140; (*c*) n_s = 140 a 300; (*d*) n_s = 300 a 600: rodete semiaxial o de flujo mixto; (*e*) n_s = 600 a 1.800: rodete axial (rápido).

tipo *e* podría construirse para 1 kW o para 10.000 kW. Naturalmente se han seleccionado unos pocos tipos solamente. Entre cada dos tipos consecutivos podrían haberse intercalado otros muchos. Es decir, todas las *bombas rotodinámicas* pueden someterse a esta clasificación.

Cada rodete corresponde a un valor de un parámetro de excepcional interés en las turbomáquinas hidráulicas, n_s o *número específico de revoluciones*, que se estudiará en las Secs. 25.2 y 25.3. Allí se demostrará que todas las bombas (o turbinas) geométricamente semejantes tienen el mismo n_s, independientemente del tamaño. Por tanto:

> *La clasificación más precisa de las bombas rotodinámicas es una clasificación numérica, asignando a toda la familia de bombas geométricamente semejantes un número, a saber, el NUMERO ESPECIFICO DE REVOLUCIONES.*

Ese número se definirá en la Sec. 25.2 así:

$$n_s = n\, P^{1/2}\, H^{-5/4} \tag{19-1}$$

En las bombas este número oscila entre 35 y 1.800 aproximadamente, expresado en las unidades que se dicen a continuación.

El *número específico de revoluciones*, n_s, no es adimensional. Las unidades de n_s que se utilizan en la práctica son muy variadas. En el *SI* se debería expresar n en rps, P en W y H en m. Sin embargo, hasta el momento presente, en los países del sistema métrico las unidades más frecuentemente utilizadas para expresar n_s son: n en rpm, P en CV (no en W o kW) y H en m. En este libro hemos creído conveniente seguir utilizando estas últimas unidades, a fin de que los valores numéricos coincidan con los más usuales en la técnica. Ahora bien [Ec. (19-17)]:

$$P = Q\rho g\, H\ (\mathrm{W}) =$$

$$= Q\rho\, H \left(\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{s}}\right) =$$

$$= \frac{Q\rho\, H}{75}\ (\mathrm{CV})$$

(expresando Q, ρ, H en el *SI*, P viene expresado en esta fórmula en CV).

El número específico de revoluciones de una bomba se suele computar suponiendo que el fluido es agua, con lo cual:

$$n_s = n\, P^{1/2}\, H^{-5/4} = n \left(\frac{Q\rho\, H}{75}\right)^{1/2} H^{-5/4}$$

$$n_s = 3{,}65 n\, Q^{1/2}\, H^{-3/4} \qquad (19\text{-}2)$$

ya que

$$\sqrt{\frac{1.000}{7{,}5}} = 3{,}65$$

19.7. EL SISTEMA DIFUSOR

El sistema difusor de una bomba, como se vio en la Fig. 19-1, consta de tres elementos:

— *Corona directriz*
— *Caja espiral*
— *Cono difusor.*

No siempre existen los tres elementos: en la Fig. 19-16 *a* solo existe la caja espiral; en la Fig. 19-16 *b* existe la caja espiral y el cono difusor; en la Fig. 19-16 *c*, así como en las bombas de alta calidad, existen los tres elementos.

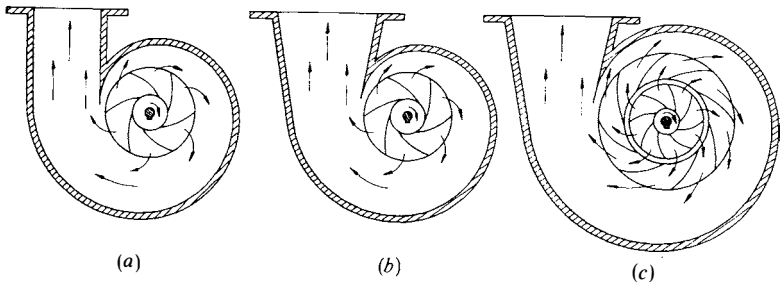


FIG. 19-16. El *sistema difusor* de una bomba puede ser más o menos completo: (*a*) bomba con solo caja espiral; (*b*) bomba con caja espiral y cono difusor; (*c*) bomba con caja espiral, corona directriz y cono difusor.

El papel de estos tres elementos es el mismo: transformar la energía dinámica que da el rodete en energía de presión con el mínimo posible de pérdidas. El nombre de *caja espiral* se deriva de una construcción especial de la misma que consiste en una caja formada por dos planos paralelos y cerrada por una superficie cilíndrica cuya directriz es una espiral logarítmica. En este caso las secciones por planos axiales serían rectángulos de área creciente como corresponde a la difusión que se pretende. La Fig. 9-17 representa otras secciones de *cajas espirales o volutas* más frecuentes.

FIG. 19-17. Secciones de *volutas* de uso más frecuente.

19.8. CEBADO DE LA BOMBA

Las bombas rotodinámicas no son autocebantes. Las bombas de émbolo y en general todas las de desplazamiento positivo, sí.

Explicación: El fundamento de la explicación de esta diferencia de comportamiento es que en las primeras el principio de funcionamiento es la *ecuación de Euler*, y en las segundas el *principio de desplazamiento positivo*.

En efecto, las bombas rotodinámicas funcionando a un n determinado, proporcionan una altura H máxima, que con frecuencia no siempre coincide con el punto para el cual $Q = 0$. Esta altura, según la ecuación de Euler, no depende de la densidad del fluido. Así, por ejemplo, una bomba de agua que da una altura máxima de 100 m dará esa misma altura si está llena de aire o llena de agua. Ahora bien:

— Si la bomba está llena de aire *(bomba descebada)* el incremento de presión creada por la bomba, suponiendo en el aire la densidad normal $\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m^3, será

$$\Delta p = \rho_{aire} \cdot g \cdot H = 1{,}29 \cdot 9{,}81 \cdot 100 = 1.265{,}5 \text{ Pa}$$

equivalente a una columna de agua de $\dfrac{1.265{,}5}{1.000 \cdot 9{,}81} = 0{,}129$ m que sería la altura máxima a que subiría el agua por la tubería de aspiración.

— Si la bomba está llena de agua *(bomba cebada)* el incremento de presiones creado por la bomba será:

$$\Delta p = \rho_{agua} \cdot g \cdot H = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 100 = 981.000 \text{ Pa}$$

equivalente a una columna de agua de $\dfrac{981.000}{1.000 \cdot 9{,}81} = 100$ m y la bomba ya podrá aspirar.

En la Fig. 19-18 puede verse la tubería de cebado, que tomando agua de la ciudad llena el tubo de aspiración y el cuerpo de la bomba, lo que constituye el procedimiento normal de cebado de la bomba.

Los seis esquemas más utilizados en el cebado de las bombas pueden verse en la Fig. 19-30.

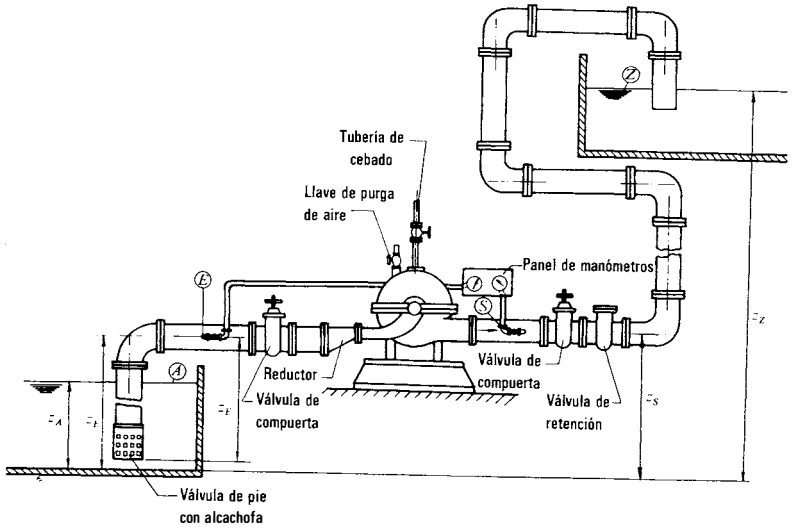


FIG. 19-18. *Instalación de una bomba centrífuga.* La bomba centrífuga requiere cebado. Este puede hacerse llenando la bomba y la tubería de aspiración con agua de la calle por la tubería de cebado indicada en la figura o bien conectando esta tubería con una bomba de vacío que extrae el aire de la bomba, encargándose la presión atmosférica de que la bomba se llene de líquido. Por la llave de purga del aire, indicada en la figura, que se abre durante el cebado, se elimina el aire que llenaba la bomba.

19.9. INSTALACION DE UNA BOMBA

La Fig. 19-18 representa una instalación de bombeo destinada a elevar agua desde un pozo de aspiración hasta un depósito elevado. En esta instalación pueden verse:

— *La alcachofa y válvula de pie* (véase también Fig. 19-19 *a*): La primera evita la entrada de suciedades (ramas, hierbas, papeles, etc.) que pueden obstruir la bomba, y la segunda hace posible, reteniendo el líquido, el cebado de la bomba. Ambos elementos originan una importante pérdida de carga. Si fuera preciso evitar esta pérdida para que no se produzca cavitación (Sec. 19.12.1) no se instalan estos elementos. Entonces el cebado se hace mediante una bomba de vacío que elimina el aire de la tubería de aspiración y del cuerpo de la bomba con lo que al crearse un vacío la presión atmosférica eleva el agua hasta el interior de la bomba (véase Fig. 19-30).

— *Las dos válvulas de compuerta en la aspiración y en la impulsión:* a veces no se instala la primera; pero de la segunda no se prescinde nunca porque sirve para la regulación del caudal de la bomba.

— *La válvula de retención en la impulsión:* impide el retroceso del fluido, cuando la bomba se para. Es imprescindible si la tubería de impulsión es muy larga o se encuentra a gran presión.

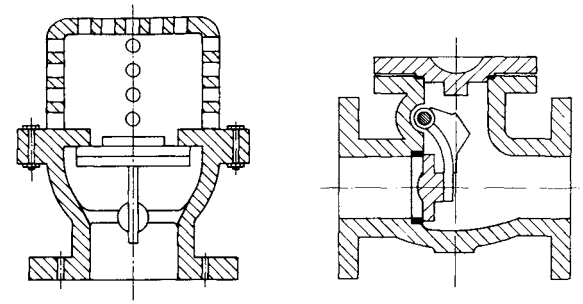


FIG. 19-19. (a) *Válvula de pie con alcachofa;* (*b*) *válvula de retención.*

(*a*) (*b*)

— *El reductor en la aspiración.* Para mejorar la aspiración de la bomba y evitar la cavitación (véase Sec. 19.12.1) se aumenta a veces el diámetro de la tubería de aspiración. La reducción se hace con un accesorio como el de la figura para evitar la formación de bolsas de aire en la parte superior.

Las válvulas de pie y de retención mencionadas tienen formas como las representadas en la Fig. 19-19.

Para el estudio de la bomba y de la instalación es importante considerar las secciones siguientes que se han indicado en la misma Fig. 19-18:

— Sección A: nivel superior del agua en el pozo de aspiración.
— Sección Z: nivel superior del agua en el depósito de impulsión.
— Sección E: entrada a la bomba.
— Sección S: salida de la bomba.

Una instalación consta de una serie de metros de tubería y de accesorios (codos, contracciones, etc.); en los tramos rectos hay pérdidas *primarias* (Cap. 9) y en los accesorios pérdidas *secundarias* (Cap. 11). El conjunto de estas pérdidas constituye las pérdidas exteriores a la bomba, $H_{r-\text{ext}}$. Además se originan pérdidas de superficie y de forma en el interior de la bomba, $H_{r\,\text{int}}$.

La altura teórica que da la bomba es la expresada por la ecuación siguiente (véase Ec. 18-12):

ECUACION DE EULER DE LAS BOMBAS

$$H_u = \frac{u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}}{g} \tag{19-3}$$

donde los puntos 1 y 2 se refieren a la entrada y salida del rodete.

H_u es la altura que el rodete imparte al fluido. Si no hubiera pérdidas en el interior de la bomba, H_u sería también el aumento de altura que experimentaría el fluido entre la entrada y salida de la bomba (secciones E y S). Sin embargo, en el interior de la bomba (entre las secciones E y S, por tanto) se producen,

como ya hemos dicho, pérdidas hidráulicas $H_{r\,\text{int}}$, que se estudiarán en la Sec. 19.11.1.1.

19.10. ALTURA UTIL O EFECTIVA DE UNA BOMBA

Altura útil o altura efectiva H que da la bomba es la altura que imparte el rodete o la altura teórica, H_u, menos las pérdidas en el interior de la bomba, $H_{r-\text{int}}$:

$$H = H_u - H_{r-\text{int}} \quad (2) \qquad (19\text{-}4)$$

19.10.1. Primera expresión de la altura útil y de la energía útil

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre las Secs. *E* y *S* (Fig. 19-18):

$$\frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{v_E^2}{2g} + H = \frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g} \quad (3)$$

Despejando H tendremos:

$$H = \left(\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{v_E^2}{2g}\right) \qquad (19\text{-}5)$$

el primer paréntesis es la altura total del fluido a la salida y el segundo la altura total del mismo a la entrada. Luego:

Altura útil es la diferencia de alturas totales entre la salida y la entrada de la bomba. Esta diferencia es el incremento de altura útil comunicada por la bomba al fluido.

Reordenando los términos de la Ec. (19-5) tendremos:

PRIMERA EXPRESION DE LA ALTURA UTIL (4)

$$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g} + z_S - z_E + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} \qquad (19\text{-}6)$$

(2) H_{r-int} no es solamente la pérdida debida a la fricción, sino también la originada porque la bomba con número finito de álabes proporciona menos altura teórica que la H_u expresada por la ecuación de Euler [Ec. (19-3)].

(3) Esta ecuación podría también escribirse poniendo en vez de H, $H_u - H_{r-int}$, porque entre las secciones *E* y *S* hay una energía comunicada, H_u y unas pérdidas H_{r-int}; pero como según la Ec. (19-4) $H = H_u - H_{r-int}$, las dos expresiones son equivalentes.

(4) A la altura útil de una bomba se la llama frecuentemente *altura manométrica;* pero esta expresión debe evitarse, porque es incorrecta: altura manométrica sería la altura indicada por los manómetros que es $(p_S - p_E)/\rho g$ que no coincide con la altura útil de la Ec. (19-6). El nombre de *altura manométrica* se debe a que los manómetros graduados frecuentemente en *m* de columna de agua, dan directamente el término $\frac{p_S - p_E}{\rho g}$, que es el término principal de la altura efectiva; pero esto tampoco es cierto si el líquido bombeado no es agua.

Por tanto:

Altura útil es igual al incremento de altura de presión que experimenta el fluido en la bomba + el incremento de altura geodésica + el incremento de altura dinámica (5)

La bomba incrementa la altura total que tiene la corriente a la entrada de la misma en un valor que es igual a la altura útil; o equivalentemente aumenta la energía específica de la bomba en un valor que es igual a la energía útil. Para pasar de la altura útil a la energía útil basta aplicar la Ec. (18-11):

PRIMERA EXPRESION DE LA ENERGIA UTIL

$$Y = \frac{p_S - p_E}{\rho} + (z_S - z_E)\, g + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2} \qquad (19\text{-}7)$$

La energía útil es igual al incremento de energía de presión que experimenta el fluido en la bomba + el incremento de energía geodésica + el incremento de energía dinámica (5).

Notas a la primera expresión de la altura útil [Ec. (19-6)]:

— El término $z_S - z_E$ suele ser o muy pequeño o incluso igual a 0 en las bombas de eje vertical.

— El término $\frac{v_S^2 - v_E^2}{2g}$ suele ser también muy pequeño o igual a 0: positivo, aunque pequeño si el diámetro de la tubería de aspiración se hace mayor que el de la tubería de impulsión, para evitar la cavitación (véase Sec. 19.12.1); igual a 0, si $D_S = D_E$.

Luego exactamente algunas veces y muy aproximadamente en la mayoría de los casos:

$$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g} = M_S + M_E \qquad (19\text{-}8)$$

$$\left(\frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} \simeq 0;\ z_S - z_E \simeq 0,\ \text{bomba en aspiración}\right)$$

donde M_S — lectura del manómetro a la salida; el signo + suma de los valores absolutos de las lecturas; porque la presión a la entrada suele ser negativa: vacuómetro;

M_E — lectura del manómetro a la entrada.

(5) A la altura y energía (específica) útil se la denomina también *altura o energía entre bridas* y equivale en las bombas o generadores hidráulicos a la tensión entre bornes de un alternador o generador eléctrico.

— La fórmula (19-8) es muy sencilla y suele dar una buena aproximación del valor de H.
— No se debe utilizar sin ver si se cumplen al menos con aproximación las hipótesis en que se funda. Si, por ejemplo, la bomba no está instalada en aspiración, sino *en carga* (eje de la bomba en cota inferior al nivel del depósito de aspiración) el manómetro a la entrada marcará una presión positiva y en la fórmula anterior figurará el signo $-$ en vez del $+$.

Como en las instalaciones normales no suele existir vacuómetro a la entrada, conviene advertir que *la altura útil H no es igual a la lectura del manómetro* [véase nota (5) en pág. 387].

La altura útil para las condiciones óptimas de servicio de la bomba debe figurar, junto con el caudal Q y el número de revoluciones n en la *placa de características de la máquina.*

La *primera expresión de H*, deducida en esta sección [Ec. (19-6)], *mira a la bomba* misma y sirve para calcular H en una bomba en funcionamiento, leyendo M_E y M_S, y midiendo el caudal para calcular las velocidades. La segunda expresión de H, que deduciremos en la sección siguiente [Ec. (19-12)], *mira a la instalación* y sirve para calcular H, estudiando el proyecto mismo de instalación, con miras a encargar la bomba más adecuada para la instalación que se proyecta, ya que para calcular H no se requiere que la bomba esté funcionando.

19.10.2. Segunda expresión de la altura útil y de la energía útil

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre las Secciones A y Z de la Fig. 19-18 (recuérdese que al deducir la primera expresión de la altura manométrica escribimos la misma ecuación; pero entre las secciones E y S):

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - H_{r-\text{ext}} + H = \frac{p_Z}{\rho g} + z_z + \frac{v_Z^2}{2g} \tag{19-9}$$

donde $H_{r-\text{ext}}$ — pérdidas exteriores a la bomba.

En el caso de la Fig. 19-18 $p_A = p_Z = 0$; pero si el depósito de aspiración o impulsión no están a la presión atmosférica, esto no se cumple.

Si, como sucede de ordinario, las áreas del pozo de aspiración y del depósito de impulsión son suficientemente grandes para que $\frac{v_A^2}{2g}$ y $\frac{v_Z^2}{2g}$ puedan despreciarse, tendremos:

$$\frac{p_A}{\rho g} + 0 + z_A - H_{r-\text{ext}} + H = \frac{p_Z}{\rho g} + z_Z + 0$$

y

$$H = \frac{p_Z - p_A}{\rho g} + z_Z - z_A + H_{r-\text{ext}} \tag{19-10}$$

Por otra parte

$$H_{r-\text{ext}} = H_{ra} + H_{ri} + \frac{v_t^2}{2g} \tag{19-11}$$

donde $H_{r-\text{ext}}$ — pérdida total exterior a la bomba;
H_{ra} — pérdida en la aspiración (o sea entre los puntos A y E);
H_{ri} — pérdida en la tubería de impulsión;
$\frac{v_t^2}{2g}$ — pérdida secundaria en el desagüe en el depósito (véase Sec. 11.3.1: coeficiente $\zeta = 1$). Esta pérdida podría considerarse incluida en el término H_{ri}; pero como suele olvidarse es costumbre explicitarla en una fórmula de uso frecuente en instaladores, que no siempre poseen suficiente formación técnica. De esta manera H_{ri} son las pérdidas por fricción en la tubería misma y $\frac{v_t^2}{2g}$ (donde v_t — velocidad final en la tubería de impulsión) la pérdida en la entrada del fluido en el depósito de impulsión, siendo $H_{ri} + v_t^2/2g$ las pérdidas entre los puntos S y Z.

Llevando el valor de $H_{r-\text{ext}}$ de la Ec. (19-11) a la Ec. (19-10) se obtiene finalmente:

SEGUNDA EXPRESION DE LA ALTURA UTIL

$$H = \frac{p_Z - p_A}{\rho g} + z_Z - z_A + H_{ra} + H_{ri} + \frac{v_t^2}{2g} \tag{19-12}$$

Aplicando de nuevo la Ec. (18-11), se tiene:

SEGUNDA EXPRESION DE LA ENERGIA UTIL

$$Y = \frac{p_Z - p_A}{\rho} + (z_Z - z_A)\,g + g(H_{ra} + H_{ri}) + \frac{v_t^2}{2} \tag{19-13}$$

Notas a la segunda expresión de la altura útil [Ec. (19-12)]:

— Para aplicar la Ec. (19-12):
a) es necesario conocer el caudal (porque las pérdidas son función de él), así como las características de la instalación (metros de tubería, material de la misma y accesorios);
b) no es necesario conocer las lecturas del manómetro y del vacuómetro. Es decir, hay que mirar a la instalación, no a la bomba.

— Con mucha frecuencia el pozo de aspiración y el depósito de impulsión están abiertos a la atmósfera (como en la Fig. 19-18), entonces $\frac{p_Z - p_A}{\rho g} = 0$.
— Al hacer el pedido de una bomba se ha de especificar a la casa suministradora el caudal y la altura efectiva. Un ingeniero no debe encargar una bomba sin haber estudiado minuciosamente el esquema de la instalación y aplicado la Ec. (19-12), previa fijación del caudal que se ha de garantizar.
— En muchas instalaciones de bombeo realizadas se ha comprobado que el rendimiento de la instalación es a veces menos de la mitad del que se hubiera obtenido si la bomba se hubiera elegido adecuadamente y la instalación se hubiera realizado mejor.

19.11. PERDIDAS, POTENCIAS Y RENDIMIENTOS

19.11.1. Pérdidas

Todas las pérdidas en la bomba (entre las secciones E y S: Fig. 19-18) se pueden clasificar en tres grupos:

— *Pérdidas hidráulicas.*
— *Pérdidas volumétricas.*
— *Pérdidas mecánicas.*

19.11.1.1. Pérdidas hidráulicas

Las *pérdidas hidráulicas* disminuyen la *energía específica útil* que la bomba comunica al fluido y consiguientemente la *altura útil*. Son de dos clases: pérdidas de superficie y pérdidas de forma (Secs. 8.3 y 8.8): las *pérdidas de superficie* se producen por el rozamiento del fluido con las paredes de la bomba (rodete, corona directriz...) o de las partículas del fluido entre sí; las *pérdidas de forma* se producen por el *desprendimiento de la capa límite* (Sec. 8.8) en los cambios de dirección y en toda forma difícil al flujo, en particular a la entrada del rodete si la tangente del álabe no coincide con la dirección de la velocidad relativa a la entrada, o a la salida del rodete si la tangente del álabe de la corona directriz no coincide exactamente con la velocidad absoluta a la salida. Las pérdidas hidráulicas se originan, pues:

— Entre el punto E (Fig. 19-18) y la entrada del rodete.
— En el rodete.
— En la corona directriz, si existe.
— En la caja espiral.
— Desde la salida de la caja espiral hasta la salida de la bomba, o punto S.

19.11.1.2. Pérdidas volumétricas

Estas pérdidas, que se denominan también pérdidas intersticiales, son pérdidas de caudal y se dividen en dos clases: *pérdidas exteriores* q_e y *pérdidas interiores* q_i. En la Fig. 19-20, que representa una bomba radial de aspiración única, se han indicado los lugares de la bomba en que tienen lugar las pérdidas q_e y q_i.

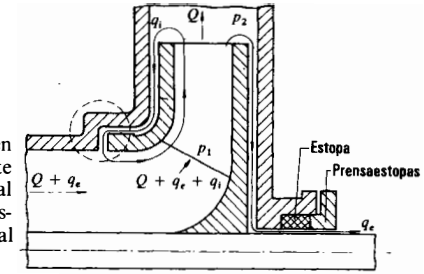


FIG. 19-20. *Pérdidas volumétricas* en una bomba (y en un ventilador): El caudal útil es Q; pero el rodete bombea $Q + q_e + q_i$; q_e sale por el prensaestopas al exterior (goteo de la bomba); q_i retrocede por el intersticio; por la tubería de aspiración circula un caudal $Q + q_e$ menor que por el rodete.

— *Las pérdidas volumétricas exteriores* q_e constituyen una salpicadura de fluido al exterior, que se escapa por el juego entre la carcasa y el eje de la bomba, que la atraviesa. Para reducirlas se utiliza la caja de *empaquetadura*, que se llena de *estopa* o *material de cierre*, provista de su correspondiente tapa o *prensaestopas* con pernos, que permiten comprimiendo el prensaestopas contra el eje de la máquina mejorar el cierre. Esta presión, sin embargo, no puede ser excesiva para no aumentar las pérdidas mecánicas. Como material de cierre se utiliza mucho el amianto grafitado.

Si la máquina ha de bombear líquidos calientes, o las presiones son grandes, o los líquidos corrosivos, radiactivos, etc., existen multitud de soluciones a base de anillos de cierre, resortes, etc., que reducen las pérdidas q_e a un mínimo y hasta a 0, si es necesario. El cierre de la bomba evidentemente se encarece.

En la Fig. 19-21 se ven las ocho piezas de un prensaestopas de calidad construido por la casa Danfoss para compresores, bombas de émbolo y bombas centrífugas. En los prensaestopas se originan pérdidas mecánicas que elevan su temperatura, por lo cual en algunas máquinas, sobre todo en las de gran potencia, se prevé una refrigeración de los mismos.

— *Las pérdidas volumétricas interiores*, q_i, son las más importantes y reducen mucho el rendimiento volumétrico de algunas bombas; aunque q_e se haya reducido prácticamente a 0 por un prensaestopas de alta calidad. En la bomba de la Fig. 19-20 se ha indicado el lugar donde se producen. La ex-

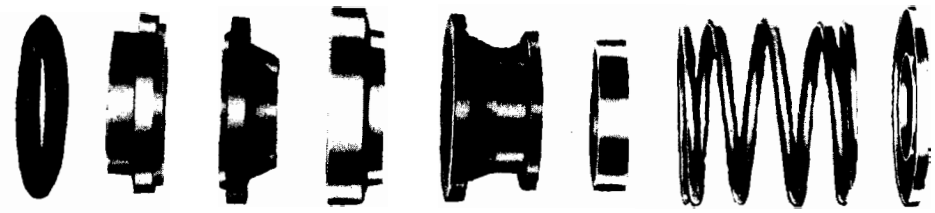


FIG. 19-21. Los modernos *prensaestopas*, como el de la figura de la casa Danfoss, Dinamarca, producen un estrangulamiento perfecto, eliminando el caudal de fugas q_e, aun en condiciones difíciles (altas presiones y temperaturas, elevado número de revoluciones, etc.).

plicación de estas pérdidas es la siguiente: a la salida del rodete de una bomba o de un ventilador hay más presión que a la entrada. Luego parte del fluido en vez de seguir a la caja espiral retrocederá, por el conducto que forma el juego del rodete con la carcasa, a la entrada del rodete, para volver a ser impulsado por la bomba. Este caudal, llamado *caudal de cortocircuito*, absorbe energía del rodete.

Para reducir las pérdidas q_i se construye en el lugar marcado con un círculo de puntos en la Fig. 19-20 un laberinto que aumenta fuertemente las pérdidas hidráulicas disminuyendo consiguientemente el caudal q_i.

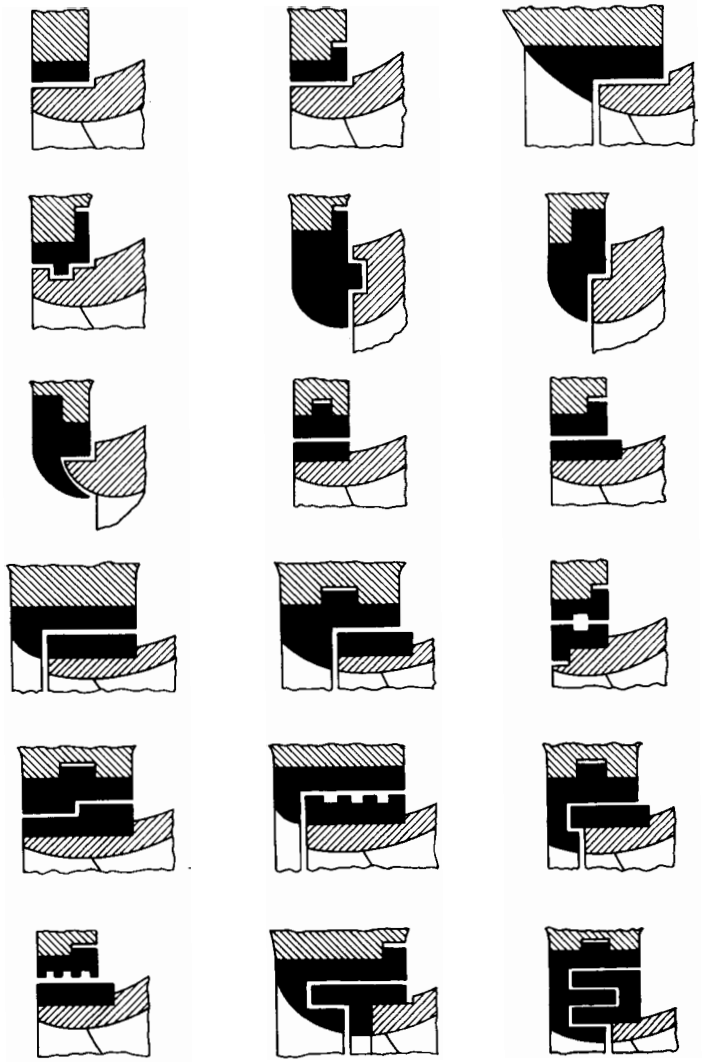


FIG. 19-22. Formas diversas de *cierres laberínticos*. Estos cierres se construyen en el lugar designado con un círculo de puntos en la Fig. 19-20. Con ellos se reduce el caudal q_i. Se instalan también en los ventiladores y turbinas hidráulicas en los lugares donde se pueden producir las pérdidas q_i.

En la Fig. 19-22 pueden verse dieciocho soluciones para este laberinto, que constituyen sólo una selección entre la multitud de formas que suelen emplearse.

19.11.1.3. Pérdidas mecánicas

Las pérdidas mecánicas incluyen las pérdidas por

— rozamiento del prensaestopas con el eje de la máquina;
— rozamiento del eje con los cojinetes;
— accionamiento de auxiliares (bomba de engranajes para lubricación, cuentarrevoluciones, etc.);

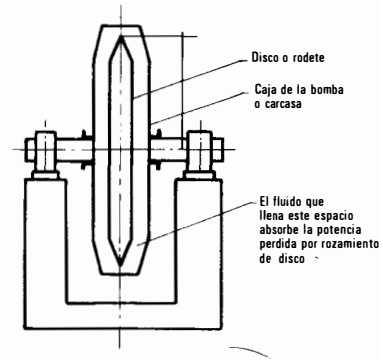


FIG. 19-23. El rodete esquemáticamente es un disco que gira en el interior de una caja en la que no hay vacío. El fluido que llena esta caja absorbe la *potencia perdida por rozamiento de disco*.

— *rozamiento de disco*. Se llama así el rozamiento de la pared exterior del rodete con la atmósfera de fluido que le rodea. Es decir, el rodete de una bomba en esquema, como puede verse en la Fig. 19-23, es un disco o mejor una caja en cuyo interior circula el fluido; pero en el exterior, o sea en el juego entre el rodete y la carcasa, inevitablemente penetra también el fluido: el disco no gira, pues, en el vacío, sino en una atmósfera viscosa donde se produce un rozamiento que incluimos en las pérdidas mecánicas y se denomina *pérdida por rozamiento de disco*.

En la Fig. 19-24 se han señalado los lugares en que tienen lugar las diferentes pérdidas mecánicas.

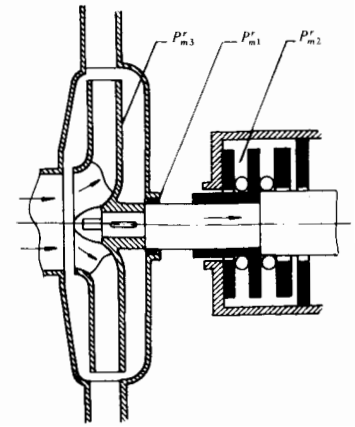


FIG. 19-24. Esquema de bomba radial con cojinete de bolas para contrarrestar el empuje axial. Se han indicado los lugares donde tienen lugar las pérdidas de potencia mecánica P^r_{m1}, P^r_{m2} y P^r_{m3} (prensaestopas, cojinetes y disco, respectivamente).

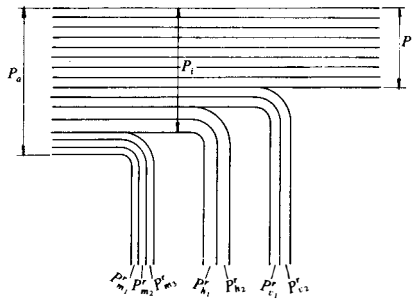


FIG. 19-25. Esquema de potencias en una bomba (o ventilador). La potencia comunicada a la bomba es P_a: por rozamientos mecánicos se pierden las potencias P^r_{m1}, P^r_{m2} y P^r_{m3} (véase Fig. 19-24); por rozamientos hidráulicos se pierden las potencias P^r_{h1} y P^r_{h2}; por fugas de caudal se pierden las potencias P^r_{v1}, P^r_{v2} y el incremento de potencia que experimenta el fluido en la máquina es P.

19.11.2. Potencias y rendimientos

En el gráfico de potencias de la Fig. 19-25 se utiliza la nomenclatura siguiente:

P_a — *potencia de accionamiento* = potencia absorbida = potencia al freno = potencia en el eje. Los cuatro nombres se utilizan en la práctica. Así, en un grupo moto-bomba (motor eléctrico-bomba) P_a no es la potencia absorbida de la red, sino la potencia libre en el eje (potencia absorbida de la red multiplicada por el rendimiento del motor eléctrico).

P_i — *potencia interna:* potencia suministrada al rodete, igual a la potencia de accionamiento menos las pérdidas mecánicas.

P — *potencia útil:* incremento de potencia que experimenta el fluido en la bomba.

En el mismo gráfico se representan además los equivalentes en potencia de las pérdidas siguientes:

P^r_h — *pérdidas hidráulicas:* P^r_{h1} — pérdidas por rozamiento de superficie; P^r_{h2} — pérdidas por rozamiento de forma.

P^r_v — *pérdidas volumétricas:* P^r_{v1} — pérdidas por caudal al exterior; P^r_{v2} — pérdidas por *cortocircuito*.

P^r_m — *pérdidas mecánicas:* P^r_{m1} — pérdidas por rozamiento en el prensaestopas; P^r_{m2} — pérdidas por rozamiento en los cojinetes y accionamiento de auxiliares; P^r_{m3} — pérdidas por rozamiento de disco.

Potencia de accionamiento, P_a

Es la potencia en el eje de la bomba o potencia mecánica que la bomba absorbe. Esta potencia según la mecánica tiene la siguiente expresión:

$$P_a = M\omega = \frac{2\pi}{60} nM \quad \text{W, } SI \tag{19-14}$$

o también

$$P_a = 0{,}1047\, nM \quad \text{W, } SI$$
$$[n(rpm),\ M(m \cdot N)]$$

expresión muy útil en los ensayos de bombas realizados en los bancos de prueba (véanse Figs. 25-5 y 25-6), donde se mide n con un cuentarrevoluciones y M con un torsiómetro o midiendo el par de reacción con un motor de accionamiento basculante.

Potencia interna, P_i

Es la potencia total transmitida al fluido, o sea la potencia de accionamiento, descontando las pérdidas mecánicas:

$$P_i = P_a - P^r_m \tag{19-15}$$

Es fácil hallar una expresión hidráulica de P_i en función de las pérdidas llamadas internas, que son las pérdidas hidráulicas y las pérdidas volumétricas. En efecto, el rodete entrega al fluido una energía específica equivalente a una altura $H_u = H + H_{r-\text{int}}$ [Ec. (19-4)] y esta altura la entrega al caudal bombeado por el rodete, que es $Q + q_e + q_i$. Luego:

$$P_i = (Q + q_e + q_i)\, \rho g (H + H_{r-\text{int}}) =$$
$$= (Q + q_e + q_i)\, \rho g\, H_u \tag{19-16}$$

Potencia útil, P

Es la potencia de accionamiento descontando todas las pérdidas de la bomba o equivalentemente la potencia interna descontando todas y sólo las pérdidas internas (hidráulicas y volumétricas). Luego:

$$P = P_a - P^r_m - P^r_v - P^r_h =$$
$$= P_i - P^r_v - P^r_h$$

La potencia útil por otra parte será la invertida en impulsar el caudal útil Q a la altura útil H. Luego

$$\boxed{P = Q\, \rho g\, H} \tag{19-17}$$

Rendimiento hidráulico, η_h

Tiene en cuenta todas y sólo las pérdidas de altura total, $H_{r-\text{int}}$ (6) en la bomba. Como, según la Ec. (19-4), $H = H_u - H_{r-\text{int}}$, el valor de η_h es:

$$\boxed{\eta_h = H/H_u} \tag{19-18}$$

(6) Nótese que H_{r-int} son las pérdidas de altura total hidráulica expresadas en m, *SI*, mientras que P^r_h son las mismas pérdidas hidráulicas expresadas en W, *SI*, de manera que

$$P^r_h = Q\, \rho g\, H_{r-int}$$

y análogamente q_e, q_i son las pérdidas volumétricas en m^3/s, *SI*; mientras que P^r_v son las mismas pérdidas expresadas en W, *SI*.

Rendimiento volumétrico, η_v

Tiene en cuenta todas y sólo las pérdidas volumétricas, y su valor es:

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + q_e + q_i} \tag{19-19}$$

donde Q — caudal útil o caudal efectivo impulsado por la bomba;
$Q + q_e + q_i$ — caudal teórico o caudal bombeado por el rodete (véase Fig. 19-20).

Rendimiento interno, η_i

Tiene en cuenta todas y sólo las pérdidas internas, o sea las hidráulicas y volumétricas y engloba ambos rendimientos hidráulico y volumétrico

$$\eta_i = \frac{P}{P_i} \tag{19-20}$$

Ahora bien, según la Ec. (19-16)

$$P_i = (Q + q_e + q_i)\,\rho g\, H_u = \frac{Q\,\rho g\, H}{\eta_v\,\eta_h}$$

y teniendo en cuenta la Ec. (19-17) se tendrá:

$$\eta_i = \frac{P}{P_i} = \frac{Q\,\rho g\, H\,\eta_h\,\eta_v}{Q\,\rho g\, H}$$

y finalmente:

$$\eta_i = \eta_h\,\eta_v \tag{19-21}$$

Rendimiento mecánico, η_m

Tiene en cuenta todas y sólo las pérdidas mecánicas, y su valor (véase Figura 19-25) es:

$$\eta_m = P_i/P_a \tag{19-22}$$

Rendimiento total, η_{tot}

Tiene en cuenta todas las pérdidas en la bomba, y su valor (véase la Fig. 19-25) es:

$$\eta_{tot} = \frac{P}{P_a} \tag{19-23}$$

Relación entre los rendimientos

Teniendo en cuenta las Ecs. (19-20), (19-21), (19-22) y (19-23) se tendrá:

$$\eta_{tot} = \frac{P}{P_a} = \frac{P}{P_i}\frac{P_i}{P_a} = \eta_i\,\eta_m = \eta_v\,\eta_h\,\eta_m \tag{19-24}$$

Por tanto

$$\eta_{tot} = \eta_i\,\eta_m = \eta_h\,\eta_v\,\eta_m$$

El rendimiento total de una bomba es el producto del rendimiento interno por el rendimiento mecánico, o también el producto de los tres rendimientos: hidráulico, volumétrico y mecánico.

Es útil ahora expresar la potencia de accionamiento en función de Q y de H [expresión hidráulica de la potencia de accionamiento, en contraposición a la expresión mecánica de la Ec. (19-14)]:

$$P_a = \frac{Q\,\rho g\, H}{\eta_i\,\eta_m} = \frac{Q\,\rho g\, H}{\eta_v\,\eta_h\,\eta_m} = \frac{Q\,\rho g\, H}{\eta_{tot}} \tag{19-25}$$

Asimismo la potencia interna en función de los rendimientos hidráulico y volumétrico se expresa, como ya hemos visto, así:

$$P_i = \frac{Q\,\rho g\, H}{\eta_v\,\eta_h} \tag{19-26}$$

19.12. CAVITACION Y GOLPE DE ARIETE DE UNA BOMBA

19.12.1. Cavitación

En la técnica son innumerables los problemas hidrodinámicos relacionados con la cavitación, fenómeno que fue ya estudiado en la Sec. 15.2. Hasta en la circulación sanguínea se puede producir la cavitación, la cual puede conducir a enfermedades del corazón y de las arterias. En la sección presente se estudia este fenómeno en las bombas rotodinámicas y en la Sec. 22.11.1 en las turbinas hidráulicas, por ser su conocimiento de excepcional importancia para el diseño, instalación y explotación de las máquinas hidráulicas, incluso de las hélices propulsoras de los barcos y las transmisiones hidrodinámicas, aunque nuestro estudio de la cavitación se limitará a las bombas y turbinas.

La cavitación en las bombas (y en las turbinas) produce dos efectos perjudiciales: disminución del rendimiento y erosión. La aparición de la cavitación en las bombas está íntimamente relacionada *a*) con el tipo de bomba (en general el peligro de cavitación es tanto mayor cuanto mayor es el número específico de revoluciones, n_s, que se deducirá más adelante en la Sec. 25.2); *b*) con la

instalación de la bomba (la altura de suspensión de la bomba, H_s, o cota del eje de la bomba sobre el nivel del líquido en el depósito de aspiración, debe ser escogida cuidadosamente para evitar la cavitación); *c*) con las condiciones de servicio de la bomba (el caudal de la bomba nunca debe exceder el máximo permisible para que no se produzca la cavitación).

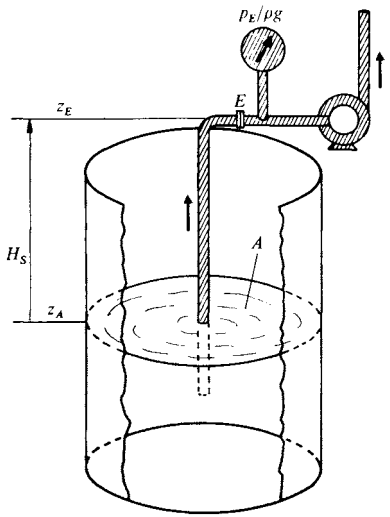


FIG. 19-26. Determinación de la *altura de aspiración* de una bomba.

El NPSH necesario y la altura de suspensión o aspiración, H_s, de una bomba

Refiriéndonos a la Fig. 19-26, *A* es el nivel del líquido en el depósito de aspiración, en el cual puede reinar la presión atmosférica, una sobrepresión o una depresión y *E* la entrada de la bomba. Se llama (véase figura) altura de suspensión o altura de aspiración al valor $H_s = z_E - z_A$ (cota de la entrada de la bomba sobre el nivel del depósito de aspiración). $H_s > 0$ si el eje de la bomba está más elevado que el nivel del líquido *(bomba en aspiración*, caso de la figura); $H_s < 0$ si la entrada de la bomba está más baja que dicho nivel *(bomba en carga)*. En todas las fórmulas de esta sección todas las presiones se tomarán absolutas.

La altura total a la entrada de la bomba referida a la cota z_E será:

$$H_E = \frac{p_E}{\rho g} + \frac{c_E^2}{2g} \tag{19-27}$$

En el interior de la bomba hasta que el líquido llegue al rodete que le comunica un incremento de altura, H_E disminuirá a causa de las pérdidas; si además la corriente se acelera localmente y/o aumenta la altura geodésica, la presión p_E disminuirá. Como esta presión debe mantenerse igual o mayor que la presión de saturación del líquido a la temperatura de bombeo para que no se produzca la cavitación (véase la Sec. 15.2), la altura total en la aspiración disponible H_{Ed} será:

$$\boxed{H_{Ed} = \frac{p_E - p_s}{\rho g} + \frac{c_E^2}{2g}} \tag{19-28}$$

Por otra parte aplicando la ecuación generalizada de Bernoulli entre *A* y *E* (Fig. 19-26), despreciando, como siempre, la energía cinética en el pozo de aspiración ($c_A^2/2g \simeq 0$), se tiene:

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A - H_{r\,A-E} = \frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{c_E^2}{2g}$$

pero $z_E - z_A = H_s$ (véase Fig. 19-26); luego:

$$\frac{p_A}{\rho g} - H_s - H_{rA-E} = \frac{p_E}{\rho g} + \frac{c_E^2}{2g} \tag{19-29}$$

De las Ecs. (19-28) y (19-29) resulta otra expresión para la altura de aspiración disponible:

$$\boxed{H_{Ed} = \frac{p_A - p_s}{\rho g} - H_s - H_{rA-E}} \tag{19-30}$$

La *altura de aspiración disponible* H_{Ed} se denomina en los países de habla inglesa el *NPSH disponible* (NPSH — Net Positive Suction Head), expresión que se ha generalizado mucho en la técnica en otros muchos países.

Para evitar la cavitación se ha de verificar que:

$$H_{Ed} \geq \Delta h$$

donde Δh es un parámetro de excepcional importancia en el estudio de la cavitación de las turbomáquinas hidráulicas que se denomina *caída de altura de presión en el interior de la bomba.* Esta caída de presión, cuyas causas fueron aducidas en el texto que sigue a la Ec. (19-27), depende del tipo de bomba y de su construcción. La cavitación se iniciará, pues, siempre que la H_E alcance el valor mínimo:

$$H_{Ed\,min} = \Delta h$$

que es la *altura de aspiración necesaria* y se denomina también el $NPSH_{necesaria}$.

Según las Ecs. (19-28) y (19-30) se tienen las dos expresiones siguientes:

$$\boxed{NPSH_{necesaria} = \Delta h = H_{Ed\,min} = \left(\frac{p_A - p_s}{\rho g} - H_s - H_{rA-E}\right)_{min}} \tag{19-31}$$

$$\boxed{NPSH_{necesaria} = \Delta h = H_{Ed\,min} = \left(\frac{p_E - p_s}{\rho g} + \frac{c_E^2}{2g}\right)_{min}} \tag{19-32}$$

Δh varía con el punto de funcionamiento de la bomba. Generalmente interesa el Δh correspondiente al *caudal nominal* de la bomba, o caudal para el cual la bomba funciona con $\eta_{tot\ max}$.

Aunque la evaluación teórica de Δh es hoy por hoy imposible, Δh puede calcularse experimentalmente con ayuda de la Ec. (19-31) o (19-32).

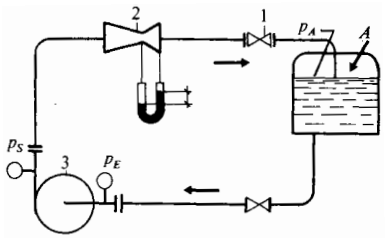


FIG. 19-27. Esquema de *banco de cavitación* de bombas.

En la Fig. 19-27 se aduce el esquema simplificado de una instalación que permite evaluar todos los términos del segundo miembro de la Ec. (19-31) y calcular $\Delta h = H_{Ed\ min}$. En 3 se instala la bomba que se desea experimentar. El banco debe estar instrumentado con todos los aparatos necesarios para calcular en cualquier punto de funcionamiento, Q, H, n, P_a, de donde se calcula η_{tot}, alguno de los cuales se ha incluido en el esquema: el Venturi 2 para medir el caudal y los manómetros para medir p_S y p_E y calcular H. El ensayo se repite para una serie de puntos de funcionamiento caracterizados por un caudal Q y un número de revoluciones n. En la Fig. 19-28 se aduce el resultado de uno de estos ensayos (ensayo elemental) de cavitación: en el ensayo elemental se fija Q, H y se varía H_{Ed} [véase Ec. (19-30)], variando la presión en el depósito p_A mediante una bomba de vacío. Al disminuir H_{Ed} mediante la disminución de p_A no varía H porque la presión en todo el sistema disminuye en el mismo incremento, ya que se trata de un sistema cerrado y el caudal Q no varía, ya que no varía la posición de la válvula de impulsión 1 ni el número de revoluciones n. Sin embargo, para un cierto valor de H_{Ed} se produce el ruido y trepidación, signo del comienzo de la cavitación; pero aún Q, H y η_{tot} se mantienen prácticamente constantes. Si se sigue disminuyendo H_{Ed} aumenta el ruido y

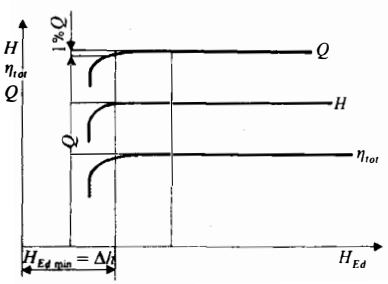


FIG. 19-28. Curvas características de la *cavitación* de una bomba.

Q, H y η_{tot} disminuyen (véase Fig. 19-28) y una disminución ulterior de H_{Ed} conduce a la interrupción total de la corriente. Cuando la cavitación está plenamente desarrollada el ruido se hace menos intenso. A fin de convenir en algo que determine exactamente la cavitación, se ha establecido que $H_{Ed\ min}$ será

aquel (véase figura) para el cual el caudal Q disminuye en un 1% de su valor inicial. Recordemos:

$$H_{Ed\ min} = \Delta h = NPSH_{necesaria}$$

En la Fig. 22-23 puede verse un banco de cavitación moderno de baja presión de la firma Escher-Wyss cuya descripción se encuentra al pie de la figura. Dicho banco está destinado a ensayos de cavitación con modelos de turbinas hidráulicas y bombas/turbinas reversibles para las modernas instalaciones de acumulación por bombeo. La instrumentación de estos bancos es cada vez más precisa y automatizada (véase Fig. 22-24).

Coeficiente de cavitación, σ

Los ensayos de cavitación tanto de las bombas como de las turbinas hidráulicas se llevan a cabo en modelos a escala reducida (véanse los Caps. 7 y 25).

La semejanza dinámica en estos ensayos queda garantizada si se hace en el modelo y en el prototipo igual el coeficiente de cavitación σ, o coeficiente de Thoma, que se define así:

$$\sigma = \frac{\Delta h}{H} \tag{19-33}$$

donde Δh se ha de tomar de la Ec. (19-31) ó (19-32).

Se ha comprobado experimentalmente que Δh en las bombas geométricamente semejantes es proporcional a H, lo cual equivale a decir que el coeficiente σ es el mismo para toda la serie de bombas geométricamente semejantes entre sí.

El Δh depende de la forma geométrica de la bomba, sobre todo de la forma de la boca de entrada del rodete y de la curvatura del álabe.

Como vamos a ver a continuación en la instalación de una bomba, a fin de determinar la altura H_s (véase la Fig. 19-26) es preciso conocer Δh. El valor de Δh, o equivalentemente el valor de σ, suele ser suministrado por el constructor de la bomba, que a su vez lo ha obtenido experimentalmente mediante un ensayo de cavitación análogo al anteriormente descrito.

La Fig. 19-29 construida por el Hydraulic Institute de U.S.A. nos puede servir para una evaluación de σ.

Por otra parte, Stepanoff sugiere el empleo de la siguiente fórmula (7) para una estimación aproximada de σ:

$$\sigma = 2{,}14 \cdot 10^{-4}\, n_S^{4/3} \tag{19-34}$$

donde n_S — número específico de revoluciones (véase la Sec. 25.2), que viene dado por la ecuación:

$$n_S = 3{,}65 \frac{n\, Q^{1/2}}{H^{3/4}}$$

(7) Otras fórmulas y curvas sugeridas por otros autores dan resultados un tanto diferentes, lo que indica que este tipo de ecuaciones sólo puede servir para un tanteo preliminar.

donde n, Q y H son las características nominales de la bomba (o características para η_{tot} máximo) expresadas en rpm, m^3/s y m, respectivamente.

Altura de aspiración máxima de la bomba

El valor que hace mínimo el segundo miembro de la Ec. (19-31) para unos mismos valores de p_A, p_s y $H_{r\,A-E}$ es el que hace máximo a H_s. Despejando, pues, este valor máximo de la Ec. (19-31) se tiene:

$$H_{s\,max} = \frac{p_A - p_s}{\rho g} - H_{r\,A-E} - \Delta h \qquad (19\text{-}35)$$

donde p_A — presión absoluta en el nivel superior del depósito de aspiración;
p_s — presión de saturación del vapor del líquido bombeado para la temperatura de bombeo (para el agua, véase tabla 15-1, pág. 321);
$H_{r\,A-E}$ — pérdida de carga en la tubería de aspiración;
Δh — caída de altura de presión en el interior de la bomba, cuyo valor suministra el fabricante y que puede estimarse por la Fig. 19-29 o por la Ec. (19-34).

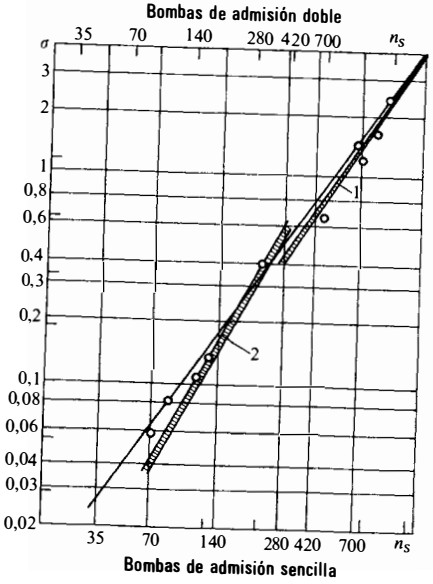


FIG. 19-29. *Coeficiente de cavitación* σ de las bombas en función de n_s: 1, bombas de admisión sencilla; 2, bombas de admisión doble.

De la Ec. (19-35) se deduce que la *altura de aspiración máxima*, H_s, o distancia en vertical desde el nivel del depósito al eje de la bomba, será tanto menor o equivalentemente *el peligro de cavitación* será tanto mayor cuanto:

— *la presión barométrica sea menor* en el lugar de la instalación, si el depósito de aspiración está abierto a la atmósfera;
— *la presión en el depósito de aspiración sea menor*, si éste no está abierto a la atmósfera;
— *la temperatura del líquido bombeado sea menor*. Los líquidos calientes exigen una altura de aspiración más pequeña (peligro de cavitación en las bombas de alimentación de calderas de las centrales termoeléctricas con precalentamiento del agua de alimentación).

Así, por ejemplo (véase la tabla 15-1 de la pág. 321), el agua a 15° C hierve a una presión absoluta de 0,017039 bar; pero a la temperatura de 80° C dicha presión asciende a 0,4736 bar, lo que significa, según la Ec. (19-35) una disminución notable de $H_{s\,max}$.

— *las pérdidas en la tubería de aspiración, $H_{r\,A-E}$ sean mayores.* Por tanto, si hay peligro de cavitación se realizará la tubería de aspiración con diámetro grande, sin incluir más de un codo y si esto no basta no se instalará alcachofa, ni válvula de pie: el cebado se hará en este último caso con bomba de vacío o con eyector (véase Fig. 19-30, esquemas *d* y *e*).
— *el caudal sea mayor.* En efecto, al aumentar el caudal aumentan los términos $H_{r\,A-E}$ e Δh en la Ec. (19-35). Por esta razón, si se inicia la cavitación y se reduce el caudal, cerrando parcialmente la válvula de impulsión, la cavitación cesará.

19.12.2. Golpe de ariete

La sobrepresión que origina el *golpe de ariete* estudiado de una manera general en la Sección 15.1 no puede producirse *en el arranque* de una bomba porque la presión producida por la bomba no puede exceder el valor máximo que indica su curva característica, curva $H - Q$ (véanse Secs. 19.8 y 25.5.1). *En la parada* de una bomba se ha de tener la precaución de cerrar antes la válvula de impulsión. Si esto se hace a mano, el cierre es lento, la columna de líquido que llena la tubería se decelera gradualmente, y el golpe de ariete no se produce.

El golpe de ariete puede producirse

— si se para el motor de la bomba sin cerrar previamente la válvula de impulsión;
— si hay un corte imprevisto de corriente, en el funcionamiento de la bomba.

Los medios empleados para reducir el golpe de ariete son:

— *cerrar lentamente la válvula de impulsión;*
— escoger el *diámetro de la tubería de impulsión grande*, para que la velocidad en la tubería sea pequeña;
— instalar la bomba con un *volante* que en caso de corte de la corriente reduzca lentamente la velocidad del motor y por consiguiente la velocidad del agua en la tubería;
— *inyectar aire con un compresor* para producir un muelle elástico durante la sobrepresión;
— utilizar uno de los esquemas de la Fig. 19-31 *a*, *b*, *c*.

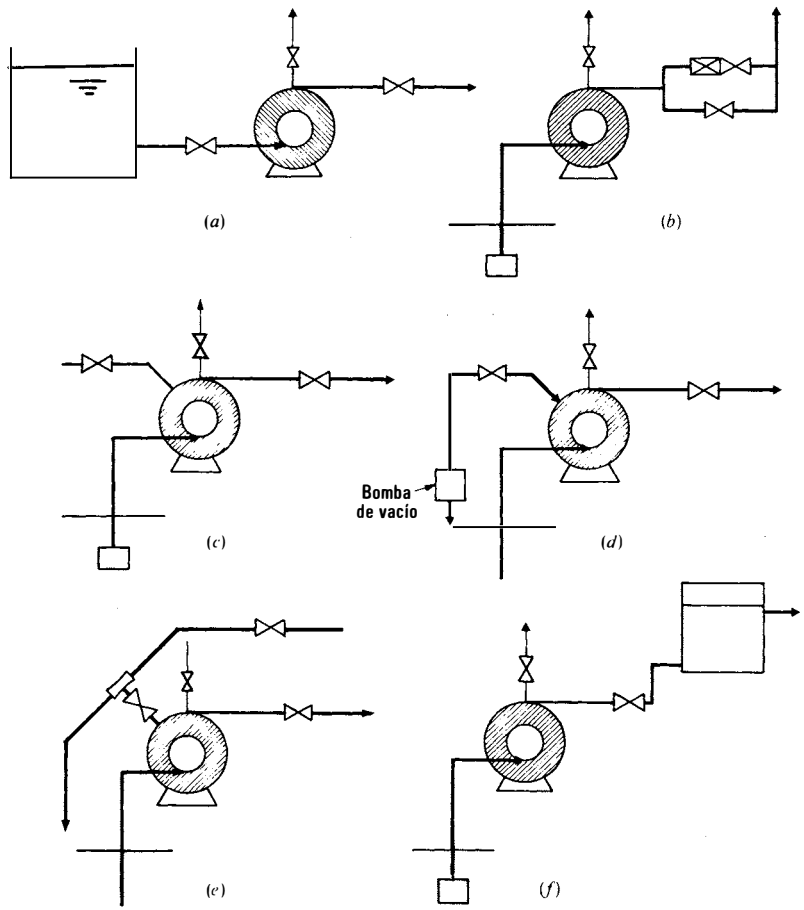


FIG. 19-30. Seis esquemas utilizados en el *cebado de las bombas rotodinámicas:* (*a*) la bomba se ceba abriendo la válvula dispuesta en la línea de aspiración (este esquema exige que la bomba esté instalada en carga: eje de la bomba por debajo del nivel del depósito de aspiración); (*b*) en la tubería de impulsión en paralelo con la válvula de impulsión y de retención se dispone la válvula de cebado: gracias a la válvula de retención, la tubería retiene el líquido cuando la bomba se para; (*c*) la válvula situada a la izquierda es la válvula de cebado y la pequeña válvula dispuesta verticalmente es un grifo de purga que deja escapar el agua durante el cebado; los esquemas (*b*), (*c*) y (*f*) precisan una válvula de pie; (*d*) cebado con bomba de vacío; (*e*) cebado con eyector; los esquemas (*d*) y (*e*) al eliminar la válvula de pie disminuyen el riesgo de cavitación (véase la Sec. 19.12.1); (*f*) depósito intercalado en la tubería de impulsión que retiene el líquido necesario para el cebado.

19.13. ALGUNAS TENDENCIAS ACTUALES EN LA CONSTRUCCION DE LAS BOMBAS ROTODINAMICAS

1. *Materiales plásticos.* Un mismo diseño se realiza frecuentemente con gran variedad de materiales, según el líquido bombeado y según las condiciones de servicio. En los últimos años se han introducido más y más los materiales plásticos de tres maneras distintas:

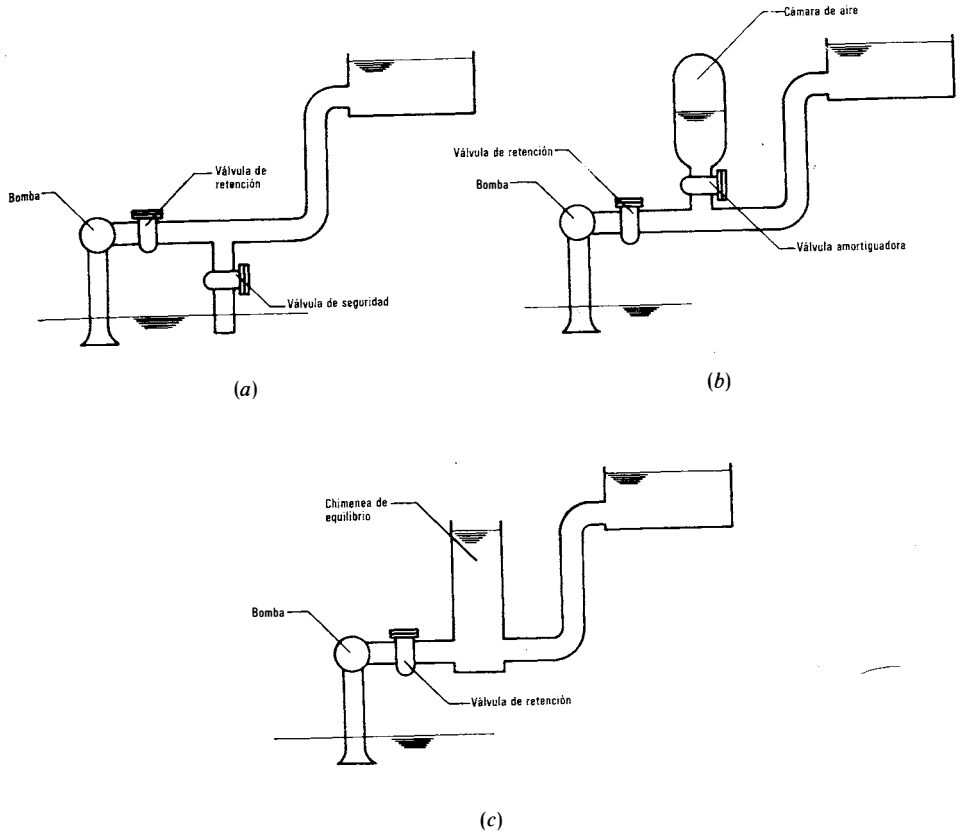


FIG. 19-31. Tres métodos para control del *golpe de ariete* en una bomba: (*a*) By-pass a través de válvula de seguridad; (*b*) cámara de aire con válvula amortiguadora; (*c*) chimenea de equilibrio.

a) gran variedad de *capas protectoras* sobre el material metálico básico;
b) *piezas de plástico especiales* en una bomba básicamente de metal (polivinidoruro, polipropileno y gran variedad de plásticos con nombres comerciales: Teflon, Nylon, Hypalon, Kynar, Nordel, Viton, etc.;
c) *bombas totalmente de plástico* (para bombeo, por ejemplo de HF, HCl, H_2SO_4, $FeCl_3$ y H_3PO_4 a elevadas temperaturas) (8).

2. *Bombas de procesos.* La producción industrial aumenta, con lo cual *aumenta la velocidad de rotación y el tamaño de las bombas.* Tal sucede, por ejemplo, en el *proceso de fabricación del papel*, en el que además antiguamente se utilizababan bombas con rodetes de fundición o de bronce y hoy de *acero inoxidable.*

3. *Bombas sanitarias.* La industria alimenticia moderna utiliza una gran variedad de estas bombas con caudales desde algunos ml/h hasta varios m^3/min,

(8) Véase E. Margus, *Pumps achieve new levels of dependibility with introduction of engineered plastics*, en «Pumps, Pompes, Pumpen», julio (1975), 805-809.

para bombear líquidos con viscosidad pequeña como el agua o grande, para bombear semisólidos o líquidos con sólidos en suspensión como cebolla, almendras, fruta, etc. En estas bombas «sanitarias» se exige un grado de higiene elevado y se utilizan materiales tales como aceros inoxidables, plásticos, etc., que permiten el uso de detergentes fuertes altamente corrosivos (9).

4. *Bombas de alimentación de calderas.* En el decenio 1969-1979, debido al aumento creciente de las potencias unitarias de las centrales térmicas con combustible fósil y nuclear (grupos hasta 1.200-1.300 MW), se ha desarrollado la investigación en la construcción de bombas de gran potencia más que en el decenio 1959-1969 en que la situación estuvo un tanto estacionaria (10). Para los grupos de turbinas de vapor de alrededor de 700 MW las bombas de alimentación tienen potencias de accionamiento de 22 a 30 MW; presiones de 230 a 360 bar; caudales másicos, que ascienden a 2.300 t/h; temperaturas del agua, entre 160 y 180°, y número de revoluciones de 4.000 a 6.000 rpm. Innumerables investigaciones para resolver los problemas de cavitación, cierres, etc., han sido necesarias para desarrollar estas bombas, que suelen tener de 4 a 5 escalonamientos, con incremento de presión por escalonamiento de 80 bar.

La mayor bomba de alimentación construida hasta el presente (1979) pertenece a una turbina de vapor de 1.200 MW y tiene una $P_a = 52.000$ kW.

5. *Bombas de centrales nucleares.* Al comienzo se utilizaron en las centrales nucleares bombas convencionales de alimentación de calderas de 2 ó 3 escalonamientos. Hoy se utilizan bombas de un solo escalonamiento y de doble flujo, en las que las alturas efectivas oscilan entre los 600-800 m, los caudales másicos entre los 2.000-4.000 t/h y el número de revoluciones alrededor de 5.000 rpm.

(9) Véase J. A. Soper, *Pumps for the food and beverage industry*, en «Pumps, Pompes, Pumpen, abril (1975), 677-682».

(10) Los campos de aplicación característicos de las bombas de gran potencia son el campo de las bombas de alimentación de calderas y el campo de las bombas de las centrales de acumulación por bombeo, de las que trataremos más adelante. Las potencias en juego en este último caso pueden superar los 200 MW.

PROBLEMAS

19-1. *Una bomba de agua que proporciona un caudal de 1.200 m³/h tiene una tubería de aspiración de 400 mm y una de impulsión de 375 mm. El vacuómetro conectado en la tubería de aspiración situado 80 mm por debajo del eje de la máquina marca una depresión de 2 m de columna de agua y el manómetro situado 500 mm por encima del eje de la bomba marca una sobrepresión de 12 m columna de agua.*
Calcular la altura útil que da la bomba.

Con los datos del problema, tratándose de una bomba que está funcionando, es inmediato el cálculo de la altura útil por la Ec. (19-6):

$$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g} + z_S - z_E + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} \tag{1}$$

$$Q = \frac{1.200}{3.600} = 0{,}3333 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_S = \frac{4Q}{\pi D_S^2} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot 0{,}375^2} = 3{,}0180 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_S^2}{2g} = \frac{v_S^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}4643 \text{ m}$$

$$v_E = \frac{4Q}{\pi D_E^2} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot 0{,}400^2} = 2{,}6526 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_E^2}{2g} = 0{,}3586 \text{ m}$$

Sustituyendo las alturas dinámicas obtenidas, así como los otros datos del problema en la Ec. (1), tenemos:

$$H = (12 + 2) + (0{,}5 + 0{,}08) + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} = 14{,}686 \text{ m}$$

El primer paréntesis en el segundo miembro es la *altura de presión* que da la bomba; el segundo paréntesis, la *altura geodésica*, y el tercero la *altura dinámica*.

Se ve en este ejemplo [véase Ec. (19-8)] que

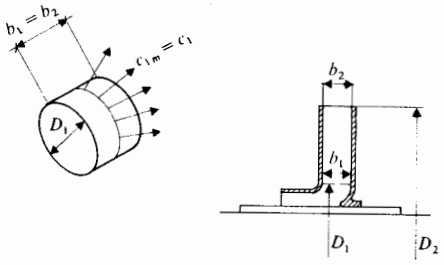
$$H \simeq \frac{p_S - p_E}{\rho g} = M_S + M_E = 14 \text{ m}$$

ya que los dos últimos paréntesis suelen ser pequeños, como en este caso, o nulos.

19-2. *Una bomba centrífuga, en que no se consideran las pérdidas ni se tiene en cuenta el estrechamiento del flujo producido por el espesor de los álabes, tiene las siguientes dimensiones: $D_1 = 75$ mm; $D_2 = 300$ mm; $b_1 = b_2 = 50$ mm; $\beta_1 = 45°$; $\beta_2 = 60°$. La entrada en los álabes es radial (caso ordinario en las bombas centrífugas). La bomba gira a 500 rpm. El fluido bombeado es agua.*
Calcular:
a) el caudal;
b) la altura que da la bomba;
c) el par transmitido por el rodete al fluido;
d) la potencia de accionamiento.

a) El caudal de una bomba en régimen permanente es el mismo en cualquier sección de la bomba [ecuación de continuidad: véase Ec. (5-9)]. La sección de entrada en los álabes del rodete es (véase figura adjunta) la superficie lateral de un cilindro, si no se tiene en cuenta el espesor de los álabes, y la velocidad normal a dicha sección es la componente radial $c_{1m} = c_1$ (entrada de la corriente radial). Es decir,

$$Q = \pi b_1 D_1 c_{1m} \tag{2}$$



PROB. 19-2, 1

El espesor de los álabes se tendrían en cuenta por medio de un coeficiente de obstrucción a la entrada $\tau_1 < 1$, de manera que:

$$Q = \tau_1 \pi b_1 D_1 c_{1m}$$

En nuestro caso $\tau_1 = 1$.

Asimismo a la salida:

$$Q = \tau_2 \pi b_2 D_2 c_{2m}$$

Si los álabes son afilados a la salida (caso normal):

$$\tau_2 = 1$$

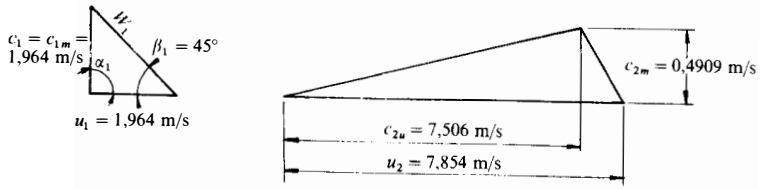
Triángulo de velocidades a la entrada (véase figura):

$$u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}075 \cdot 500}{60} = 1{,}964 \text{ m/s}$$

$$c_{1m} = c_1 = u_1 \operatorname{tg} 45° = u_1 = 1{,}964 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la Ec. (2)

$$Q = \pi \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}075 \cdot c_{1m} = 0{,}0231 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$= 23{,}11 \text{ l/s}$$



PROB. 19-2, 2

b) Si no hay pérdidas

$$H_{r-\text{int}} = 0$$

y según las Ecs. (19-4) y 19-3)

$$H = H_u = \frac{u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}}{g} = \frac{u_2 c_{2u}}{g}$$

ya que $c_{1u} = 0$ (entrada en los álabes radial).

Triángulo de velocidades a la salida:

$$Q = \pi b_2 D_2 c_{2m} = \pi b_1 D_1 c_{1m} \qquad (\tau_2 = 1)$$

y

$$c_{2m} = \frac{b_1 D_1}{b_2 D_2} c_{1m} = \frac{50 \cdot 75}{50 \cdot 300} \cdot c_{1m} = 0{,}4909 \text{ m/s}$$

$$u_2 = \frac{D_2}{D_1} u_1 = \frac{300}{75} \cdot u_1 = 7{,}854 \text{ m/s}$$

Además

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} 60°} = 7{,}506 \text{ m/s}$$

luego

$$H_u = H = \frac{u_2 c_{2u}}{9{,}81} =$$
$$= 6{,}061 \text{ m}$$

c) El par transmitido por el rodete al fluido viene dado por la Ec. (18-5):

$$M = Q\rho(r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) = Q \cdot 1.000 \cdot 0{,}15 \cdot c_{2u} = 26{,}268 \text{ m} \cdot \text{N}$$

d) De la Ec. (19-25), siendo

$$\eta_v = \eta_h = \eta_m = 1$$

se deduce que

$$P_a = P = Q\rho g H = Q \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H =$$
$$= 1.375{,}4 \text{ W} =$$
$$= 1{,}3754 \text{ kW}$$

19-3. *Entre el pozo de aspiración y el depósito de impulsión de una bomba de agua hay un desnivel de 20 m. La tubería de aspiración es de 300 mm de diámetro y de 6 m de longitud. Está provista de alcachofa, válvula de pie y de un codo de 90°. La tubería de impulsión es de 250 mm de diámetro y de 140 m de longitud. Las tuberías de aspiración e impulsión son de hierro galvanizado. La tubería de impulsión tiene una válvula de compuerta y dos codos de 90°. El caudal bombeado es de 4.800 l/min. El rendimiento hidráulico de la bomba = 70%. El rendimiento volumétrico = 1 y el rendimiento mecánico = 85%. Todos los codos de las tuberías tienen una relación* $\frac{r}{D} = 0{,}25$.

Calcular la potencia en el eje del motor eléctrico de accionamiento de esta bomba.

Según la Ec. (19-25):

$$P_a = \frac{Q\rho g H}{\eta_h \eta_v \eta_m} = \frac{1.000 \cdot 9{,}81 \cdot QH}{0{,}7 \cdot 1 \cdot 0{,}85} = 16.487\ QH \qquad (3)$$

$$Q = \frac{4{,}8}{60} = 0{,}08 \text{ m}^3/\text{s}$$

Designaremos con subíndice *a* los valores correspondientes a la aspiración, y con subíndice *i* los correspondientes a la impulsión.

$$v_a = \frac{4Q}{\pi d_a^2} = \frac{4 \cdot 0{,}08}{\pi \cdot 0{,}300^2} = 1{,}132 \text{ m/s}$$

$$v_i = \frac{4Q}{\pi d_i^2} = \frac{4 \cdot 0{,}08}{\pi \cdot 0{,}250^2} = 1{,}630 \text{ m/s}$$

La velocidad de aspiración en las bombas se mantiene con frecuencia más baja que la de impulsión para evitar la cavitación (véase Sec. 19.12.1).

$$\frac{v_a^2}{2g} = 0{,}065 \text{ m}$$

$$\frac{v_i^2}{2g} = 0{,}135 \text{ m}$$

Para obtenr H en este problema se ha de recurrir a la *segunda expresión* de la altura útil [Ec. (19-12)] en vez de la primera, como en el problema 19-1.

$$H = z_Z - z_A + H_{ra} + H_{ri} + \frac{v_t^2}{2g} \tag{4}$$

$$\frac{v_t^2}{2g} = \frac{v_i^2}{2g} \qquad z_Z - z_A = 20 \text{ m}$$

Cálculo de las pérdidas en la tubería de aspiración, H_{ra}

$$H_{ra} = \left(\zeta_a' + \zeta_a'' + \lambda_a \frac{L_a}{d_a}\right) \frac{v_a^2}{2g} \tag{5}$$

donde $\zeta_a' = 3{,}7$ (alcachofa y válvula de pie)

$\zeta_a'' = 0{,}4$ $\left(\text{codo } 90°, \frac{r}{D} = 0{,}25\right)$

$$\text{Re}_a = \frac{v_a d_a}{\nu} = \frac{v_a \cdot 0{,}300}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} = 3{,}372 \cdot 10^5$$

(ν_{H_2O} a 20° C $= 1{,}007 \cdot 10^{-6}$ m^2/s)

$$\frac{k}{d_a} = \frac{17 \cdot 10^{-5}}{0{,}300} = 0{,}000567$$

(k para hierro galvanizado $= 17 \cdot 10^{-5}$ m).

Con los valores de Re_a y $\frac{k}{d_a}$ se lee en el diagrama de Moody (véase Apéndice)

$$\lambda_a = 0{,}01844$$

Sustituyendo los diversos valores en la Ec. (5) tendremos:

$$H_{ra} = \left(3{,}7 + 0{,}4 + 0{,}01844 \frac{6}{0{,}300}\right) v_a^2/2g =$$

$$= 0{,}292 \text{ m}$$

Cálculo de las pérdidas en la tubería de impulsión, H_{ri}

$$H_{ri} = \left(\zeta_i' + 2\zeta_i'' + \lambda_i \frac{L_i}{d_i}\right) \frac{v_i^2}{2g} \tag{6}$$

donde $\zeta_i' = 0{,}2$ (válvula compuerta abierta)

$\zeta_i'' = 0{,}4$ $\left(\text{codo } 90°, \frac{r}{D} = 0{,}25\right)$

$$\text{Re}_i = \frac{v_i d_i}{\nu} = \frac{v_i \cdot 0{,}250}{1{,}007 \cdot 10^{-6}} = 4{,}046 \cdot 10^5$$

$$\frac{k}{d_i} = \frac{17 \cdot 10^{-5}}{0.250} = 0{,}000680$$

En el mismo diagrama de Moody se lee

$$\lambda_i = 0{,}01887$$

Sustituyendo los diversos valores en la Ec. (6) tendremos:

$$H_{ri} = \left(0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}01887 \frac{140}{0{,}250}\right) v_i/2g = 1{,}566 \text{ m}$$

Sustituyendo en la Ec. (4) se obtiene:

$$H = 21{,}993 \text{ m}$$

Finalmente la potencia en el eje del motor eléctrico de accionamiento será [Ec. (19-25)]

$$P_a = \frac{Q \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H}{0{,}7 \cdot 1 \cdot 0{,}85} =$$

$$= 29{,}009 \cdot 10^3 \text{ W} =$$

$$= 29{,}009 \text{ kW}$$

19-4. *Una bomba centrífuga radial de agua está diseñada para girar a 1.450 rpm y para entrada radial en los álabes del rodete. El caudal en el punto nominal (rendimiento óptimo) es 160.000 l/h. De esta bomba se conocen las siguientes características geométricas: relación de diámetros de salida y entrada de los álabes: $D_2/D_1 = 2$. Diámetro exterior del rodete $D_2 = 300$ mm. Ancho a la salida del rodete: $b_2 = 20$ mm. Angulo de los álabes a la salida: $\beta_2 = 45°$. Se sabe además que para el punto de óptimo rendimiento:*

rendimiento hidráulico, 80 %;
rendimiento volumétrico, 90 %;
rendimiento mecánico, 85 %.

Se despreciará el espesor de los álabes. La bomba se ha diseñado para que la componente radial de la velocidad absoluta sea constante a la entrada y salida de los álabes. Las tuberías de aspiración e impulsión de la bomba son iguales y los ejes de las bridas de entrada y salida de la bomba se hayan a la misma cota. El manómetro conectado a la entrada de la bomba marca una presión absoluta de 305 Torr cuando el caudal es el arriba indicado.

Calcular:

a) ángulo de entrada en los álabes; velocidades u_2 y u_1; velocidad c_2; componente radial de la velocidad absoluta a la entrada y salida de los álabes; ángulo de los álabes a la entrada de la corona directriz de que está provista la bomba;
b) altura de Euler y altura útil;
c) potencia interna de la bomba;
d) potencia de accionamiento;
e) alturas de presión y dinámica del rodete y grado de reacción de la bomba;
f) presión absoluta del agua a la salida de la bomba.

a) El caudal de la bomba es

$$Q = \frac{160}{3.600} = 0{,}0444 \text{ m}^3/\text{s}$$

Según lo dicho en la Sec. 19.11.2, en la Fig. 19-20 se ve que el caudal bombeado por el rodete es [Ec. (19-19)]:

$$Q + q_e + q_i = \frac{Q}{\eta_v}$$

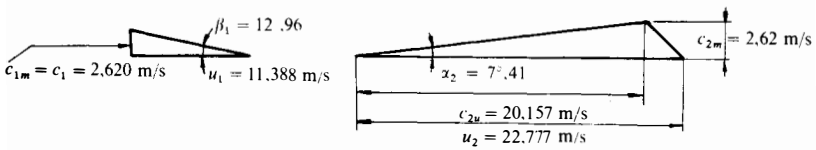
Además

$$c_1 = c_{1m} = c_{2m} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2 \eta_v} = \frac{Q}{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}9} = 2{,}62 \text{ m/s}$$

$$u_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 1.450}{60} = 22{,}777 \text{ m/s}$$

$$u_1 = \frac{D_1}{D_2} u_2 = 11{,}388 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \text{arc tg} \frac{c_{1m}}{u_1} = 12°{,}96$$



PROB. 19-4

Además como en el problema anterior

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\text{tg } \beta_2} = u_2 - c_{2m} = 20{,}157 \text{ m/s}$$

$$c_2 = \sqrt{c_{2m}^2 + c_{2u}^2} = 20{,}326 \text{ m/s}$$

En el triángulo de velocidad de salida (véase figura)

$$\alpha_2 = \text{arc tg} \frac{c_{2m}}{c_{2u}} = 7°{,}41$$

(para que no haya choque a la entrada de la corona directriz el álabe directriz deberá estar construido con este ángulo α_2 a la entrada de la misma).

b) La *altura de Euler* o altura teórica se deduce de la Ec. (19-3), haciendo $u_1 c_{1u} = 0$ (entrada radial, según enunciado del problema). Es decir:

$$H_u = \frac{u_2 c_{2u}}{g} = 46{,}799 \text{ m}$$

La *altura útil*, en virtud de la Ec. (19-18), será:

$$H = \eta_h H_u = 0{,}8 \cdot H_u = 37{,}439 \text{ m}$$

c) Según la Ec. (19-16)

$$P_i = (Q + q_e + q_i)(H + H_{r-\text{int}}) \rho g$$

$$= \frac{Q \rho g \cdot H}{\eta_v \eta_h} = \frac{Q \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H}{0{,}9 \cdot 0{,}8} = 22{,}671 \cdot 10^3 \text{ W} =$$

$$= 22{,}671 \text{ kW}$$

d) Según la Ec. (19-22) la *potencia de accionamiento* será:

$$P_a = \frac{P_i}{\eta_m} = \frac{P_i}{0{,}85}$$

$$= 26{,}672 \text{ kW}$$

e) *Altura dinámica del rodete* [Ec. (18-18)]:

$$H_d = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} =$$

$$= 20{,}708 \text{ m}$$

Altura de presión del rodete: Según lo dicho en la Sec. 18.5:

$$H_p = H_u - H_d = 26{,}091 \text{ m}$$

Grado de reacción de la bomba [Ec. (18-19)]:

$$\sigma = \frac{H_p}{H_u} \cdot 100 = 55{,}75\%$$

f) La presión absoluta a la entrada de la bomba, teniendo en cuenta el enunciado del problema, será:

$$p_E = 0{,}305 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 = 40.692 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Ahora bien, siendo $\frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} = 0$, por ser las tuberías de aspiración e impulsión de igual diámetro y $z_S - z_E = 0$, por estar los puntos S y E a la misma cota, en virtud de la Ec. (19-6):

$$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g}$$

y

$$p_S = p_E + \rho g H = 407.972 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 4{,}07972 \text{ bar}$$

19-5. *Una bomba funcionando a 2.520 rpm y suministrando un caudal de 16 l/s proporciona una altura útil de 26 m. De sus curvas características (véase Fig. 25-2) se deduce que en dicho punto de funcionamiento el rendimiento total de la bomba es 81%.*

Determinar la potencia de accionamiento de la bomba en estas condiciones.

$$P_a = \frac{Q \rho g H}{\eta_{\text{tot}}} = \frac{0{,}016 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 26}{0{,}81} = 5{,}038 \cdot 10^3 \text{ W} = 5{,}038 \text{ kW}$$

19-6. *Una bomba centrífuga de agua tiene las siguientes características: $D_1 = 150$ mm; $D_2 = 450$ mm; $b_1 = 40$ mm; $b_2 = 20$ mm; $\beta_1 = 10°$; $\beta_2 = 30°$; $n = 1.500$ rpm. Entrada en los álabes radial; $\eta_h = 88\%$; $\eta_{\text{tot}} = 82\%$; despréciese el espesor de los álabes; $\eta_v = 1$.*

Calcular:

a) caudal;
b) altura teórica o altura de Euler;
c) potencia hidráulica comunicada por el rodete al fluido;
d) altura útil;
e) altura hidráulica perdida en la bomba;
f) potencia de accionamiento de la bomba.

a) $Q = \pi b_1 D_1 c_{1m}$

$c_{1m} = u_1 \operatorname{tg} 10^\circ \ (\tau_1 = 1)$

$$u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}15 \cdot 1.500}{60} = 11{,}781 \text{ m/s}$$

$c_{1m} = u_1 \operatorname{tg} 10^\circ = 2{,}077$ m/s

$Q = \pi \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}15 \cdot c_{1m} =$

$= 0{,}0392 \text{ m}^3/\text{s}$

b) $H_u = \frac{u_2 c_{2u}}{g}$ (entrada en los álabes radial)

$$u_2 = \frac{D_2}{D_1} u_1 = \frac{450}{150} \cdot u_1 = 35{,}43 \text{ m/s}$$

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

Por la ecuación de continuidad:

$$c_{2m} = \frac{b_1 D_1}{b_2 D_2} c_{1m} = \frac{40 \cdot 150}{20 \cdot 450} \cdot c_{1m} = 1{,}385 \text{ m/s}$$

$$c_{2u} = 32{,}944 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$H_u = 118{,}690$ m

c) La *potencia hidráulica comunicada por el rodete al fluido* es la potencia interna:

$$P_i = Q \rho g H_u = Q \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H_u =$$
$$= 45{,}591 \cdot 10^3 \text{ W} = 45{,}591 \text{ kW}$$

d) *La altura útil* es:

$$H = \eta_h H_u = 0{,}88 \ H_u$$
$$= 104{,}447 \text{ m}$$

e) La *altura hidráulica perdida* en la bomba, según la Ec. (19-4), es:

$$H_{r-\text{int}} = H_u - H =$$
$$= 14{,}243 \text{ m}$$

f) La *potencia de accionamiento* de la bomba [Ecs. (19-23) y (19-17), será:

$$P_a = \frac{P}{\eta_{\text{tot}}} = \frac{Q \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot H}{0{,}82} =$$
$$= 48{,}927 \cdot 10^3 \text{ W} = 48{,}927 \text{ kW}$$

19-7. *En una instalación de bomba centrífuga de agua la altura desde el pozo de aspiración hasta el eje de la bomba es de 4 m y desde el eje de la bomba hasta el nivel superior del depósito de impulsión 56 m. Las tuberías de aspiración e impulsión son de 150 mm. La pérdida de carga en la tubería de aspiración asciende a 2 m y en la tubería de impulsión (sin incluir las pérdidas a la salida de la misma y entrada en el depósito) a 7 m. Las dimensiones del rodete son: $D_2 = 400$ mm; $b_2 = 25$ mm; $\beta_2 = 30^\circ$. La bomba gira a 1.450 rpm. La entrada en los álabes es radial. El rendimiento hidráulico es 82 %. Despréciese el influjo del espesor de los álabes.*

Calcular:
a) caudal;
b) la presión del agua junto a la brida de aspiración;
c) la presión del agua junto a la brida de la tubería de impulsión.

La velocidad periférica del rodete a la salida es:

$$u_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}4 \cdot 1.450}{60} = 30{,}369 \text{ m/s}$$

Por la ecuación de continuidad el caudal es el mismo a la salida del rodete y en la tubería; llamando v_t a la velocidad del agua en la tubería, tendremos:

$$Q = \pi D_2 b_2 c_{2m} = \frac{\pi d_t^2}{4} v_t$$

$$c_{2m} = \frac{d_t^2}{D_2 b_2} \cdot \frac{1}{4} v_t = \frac{0{,}150^2}{0{,}4 \cdot 0{,}025 \cdot 4} v_t$$
$$= 0{,}563 \ v_t$$

Por el triángulo de velocidades a la salida:

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} =$$
$$= 30{,}369 - 0{,}974 \ v_t$$

La altura teórica (o altura de Euler) será:

$$H_u = \frac{u_2 c_{2u}}{g} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 c_{2m}}{g \operatorname{tg} \beta_2} =$$
$$= 94{,}0122 - 3{,}016 \ v_t$$

La altura útil por una parte será:

$$H = H_u \eta_h = H_u \cdot 0{,}82 = 77{,}090 - 2{,}473 \ v_t \qquad (7)$$

Por otra parte [segunda expresión de la altura útil, Ec. (19-12)]:

$$H = z_Z - z_A + H_{ra} + H_{ri} + \frac{v_t^2}{2g} = 60 + 2 + 7 + \frac{v_t^2}{2g}$$

$$= 69 + \frac{v_t^2}{2g} \qquad (8)$$

donde v_t – velocidad del agua en la tubería.

Igualando las dos expresiones para la altura útil, Ecs. (7) y (8) se obtiene:

$$v_t^2 + 48{,}524 \ v_t - 158{,}723 = 0$$

Resolviendo tenemos

$$v_t = 3{,}076 \text{ m/s}$$

y

$$\frac{v_t^2}{2g} = 0{,}482 \text{ m}$$

(se observará a continuación que este término influye muy poco en la altura útil).

Sustituyendo en (8), obtenemos:

$$H = 69 + \frac{v_t^2}{2g} =$$

$$= 69{,}482 \text{ m}$$

a) El caudal será:

$$Q = \frac{\pi d_t^2}{4} v_t$$

$$= 0{,}0544 \text{ m}^3/\text{s} = 55{,}4 \text{ l/s}$$

b) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el pozo de aspiración (punto A) y la entrada de la bomba (punto S):

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - H_{ra} = \frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{v_E^2}{2g}$$

es decir,

$$0 + 0 + 0 - 2 = \frac{p_E}{\rho g} + 4 + \frac{v_E^2}{2g}$$

y

$$\frac{p_E}{\rho g} = -6{,}482 \text{ m}$$

$$p_E = -63.591 \text{ Pa} =$$

$$= -0{,}63591 \text{ bar}$$

c) Apliquemos la ecuación de Bernoulli entre las secciones S y el nivel superior del depósito de impulsión Z:

$$\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g} - H_{ri} - \frac{v_t^2}{2g} = 0 + 0 + z_Z$$

$$\frac{p_S}{\rho g} = 56 + 7 = 63 \quad \text{ya que} \quad v_S = v_t$$

El mismo resultado se obtiene aplicando la misma ecuación de Bernoulli entre el pozo de aspiración (punto A) y la salida de la bomba (punto S)

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - H_{ra} + H = \frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g}$$

pero $v_S = v_t$, y suponiendo $z_S = z_E$, tendremos:

$$0 + 0 + 0 - 2 + 69{,}482 = \frac{p_S}{\rho g} + 4 + 0{,}482$$

$$\frac{p_S}{\rho g} = -2 + 69{,}482 - 4 - 0{,}482 =$$

$$= 63 \text{ m}$$

$$p_S = 63 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 = 618.030 \text{ Pa} = 6{,}18030 \text{ bar} \quad (*)$$

(*) Véase esta nota de pie de página en la página siguiente.

19-8. *En la tubería de aspiración de 150 mm de una bomba centrífuga de agua hay los siguientes elementos: un codo de 90°, cuya pérdida de carga equivale a la de 10 m de tubería recta y otro codo de 90°, cuya pérdida de carga equivale a la de 5 m de tubería recta. La pérdida de carga en la alcachofa y válvula de pie es el triple de la altura de velocidad en la tubería de aspiración. La longitud total de los trozos de tubería recta es 8 m. El agua tiene una temperatura de 50° C y el caudal de la bomba es 2.500 l/min. La presión absoluta en la brida de aspiración de la bomba ha de mantenerse 100 mbar por encima de la presión de saturación del vapor. La tubería es de fundición asfaltada. La presión barométrica es 750 Torr.*

Estimar la altura máxima permisible del eje de la bomba por encima del nivel de agua en el depósito de aspiración.

En la tabla 15-1 (pág. 321) se lee:

$$p_S \text{ (a } t = 50° \text{ C)} = 0{,}12335 \text{ bar}$$

$$\rho_{H_2O} (50° \text{ C}) = 988{,}20 \text{ kg/m}^3$$

$$p_{E\,\min} = 0{,}12335 + 0{,}100 = 0{,}22335 \text{ bar}$$

$$p_{amb} = 750 \text{ Torr} = 750 \cdot 13{,}6 \cdot 9{,}81 = 1{,}0006 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$Q = \frac{2{,}5}{60} = 0{,}04167 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$c_E = \frac{4Q}{\pi d_E^2} = \frac{4 \cdot 0{,}04167}{\pi \cdot 0{,}150^2} = 2{,}358 \text{ m/s} \qquad \frac{c_E^2}{2g} = \frac{2{,}358^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}283 \text{ m}$$

Ecuación de Bernoulli entre A y E (en presiones absolutas)

$$\frac{1{,}0006 \cdot 10^5}{988{,}20 \cdot 9{,}81} + 0 + 0 - 3 \cdot 0{,}283 - \lambda \left(\frac{10 + 5 + 8}{0{,}150} \cdot 0{,}283 \right) =$$

$$= \frac{0{,}22335 \cdot 10^5}{988{,}20 \cdot 9{,}81} + H_s + 0{,}283 \qquad H_s = 6{,}8856 - 43{,}3933\lambda$$

$$\frac{k}{d} = \frac{0{,}1}{150} = 0{,}00066667 \qquad \text{Re} = \frac{cd}{\nu} = \frac{2{,}358 \cdot 0{,}150}{0{,}556 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 636.151$$

En el diagrama de Moody se lee: $\lambda = 0{,}0185$

$$H_s = 6{,}8856 \cdot 43{,}3933 \cdot 0{,}0185 = 6{,}0828 \text{ m}$$

(*) Como comprobación se puede ahora calcular la altura útil H [Ec. (19-6)]:

$$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g} + z_S - z_E + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g}$$

haciendo

$$v_S = v_E \quad \text{y} \quad z_S = z_E$$

se obtiene

$$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g} = 63 - (-6{,}482) =$$

$$= 69{,}482 \text{ m}$$

que coincide con el valor anteriormente hallado.

Otro procedimiento más sencillo, pero menos directo para resolver este problema sería calcular primero las preguntas *a)* y *b)*; luego calcular H, escribir la Ec. (8) y calcular v_t y el caudal.

19-9. *Se bombea gasolina desde un tanque hasta un depósito nodriza situado 50 m por encima del tanque con un caudal de 80 l/min. Densidad relativa = 0,84. Viscosidad dinámica = $0,8 \cdot 10^{-3}$ Pa · s. La longitud total de la tubería de aspiración y de impulsión y longitud equivalente es de 70 m. La tubería es de acero soldado oxidado de 75 mm. Despréciense las pérdidas secundarias.*

Calcular la potencia en el eje del motor eléctrico si el rendimiento total de la bomba es de 50%.

19-10. *Un manómetro conectado a la entrada de una bomba centrífuga indica una altura de presión de 5,5 m por debajo de la presión atmosférica. En este instante la bomba proporciona un caudal de 4.000 l/min. La tubería de aspiración es de 150 mm de diámetro y 15 m de longitud y está provista de válvula de pie y alcachofa y un codo. La pérdida en el codo es equivalente a $8 \cdot 10^{-2}$ m. El coeficiente de pérdida de carga de la tubería es $\lambda = 0,025$.*

Calcular la cota del punto en que está conectado el vacuómetro.

19-11. *En una bomba que trabaja con agua fría el manómetro de impulsión situado 10 m por encima del eje de la bomba marca una altura de presión de 80 m c. a. El vacuómetro situado 50 cm por debajo del eje de la bomba marca una presión relativa de 200 Torr. Por la diferencia de diámetros entre las tuberías de aspiración e impulsión se crea una altura dinámica de 1/2 m.*

Calcular la altura útil de la bomba.

19-12. *Una bomba centrífuga, cuyo coeficiente de cavitación $\sigma = 0,11$, desarrolla una altura útil de 90 m. La presión barométrica es 1 bar. La presión de saturación del líquido bombeado ($\delta = 1,4$) para la temperatura de funcionamiento es 0,030 bar. Las pérdidas en la tubería de aspiración ascienden a 1,5 m.*

Calcular la altura máxima permisible a que puede colocarse la bomba con respecto al nivel del agua en el depósito de aspiración.

19-13. *En una bomba centrífuga de agua las tuberías de aspiración y de impulsión son de 300 mm de diámetro. La tubería de aspiración tiene 10 m de longitud y la de impulsión 150 m de longitud. Ambas tuberías son de hierro galvanizado. En la tubería de aspiración hay una válvula de pie y un codo en la tubería de impulsión una válvula de compuerta. El caudal bombeado es de 6.000 l/min y la diferencia de niveles entre el pozo de aspiración y el depósito de impulsión es de 10 m. El rendimiento de la bomba es 65%.*

Calcular la potencia de accionamiento.

19-14. *Una bomba centrífuga proporciona un caudal de agua de 1.000 l/min a 1.000 rpm. Diámetro del rodete, 600 mm. Ancho a la salida, 10 mm. Entre las bridas de entrada y salida crea la bomba una diferencia de presión de 3 bar $z_S - z_E = 1$ m; $d_E = d_S$; rendimiento manométrico 70%. Entrada en el rodete radial.*

Calcular: a) potencia útil; b) altura efectiva; c) β_2.

19-15. *Una bomba centrífuga de agua proporciona una altura útil de 22 m a una velocidad de 1.200 rpm. $D_1 = 180$ mm; $D_2 = 300$ mm. Entrada en los álabes del rodete radial; c_m constante en todo el rodete; $c_{2u} = 25$ m/s. Las pérdidas hidráulicas en la bomba son iguales a $0,027\ c_2^2$ m (c_2 en m/s).*

Calcular:

a) el rendimiento hidráulico;

b) los ángulos de los álabes a la entrada y a la salida, β_1 y β_2.

19-16. *Una bomba centrífuga provista de corona directriz tiene una altura geométrica de aspiración de 2 m y de impulsión de 14 m referidas al eje de la bomba. La velocidad del agua en la tubería de impulsión es 2 m/s y c_m es constante en todo el rodete e igual a 3 m/s; $\beta_2 = 60°$. Se despreciarán las pérdidas en el interior y fuera de la bomba. La entrada en los álabes es radial.*

Calcular:

a) velocidad periférica a la salida del rodete;

b) altura de presión a la salida del rodete;

c) altura de velocidad a la salida del rodete;

d) ángulo que deberá haber a la entrada de los álabes directrices.

19-17. *Una bomba centrífuga que proporciona un caudal de 25 m^3/h sirve para elevar agua a una altura de 25 m. La resistencia total de la tubería de aspiración y de impulsión es 6 m. El rendimiento total de la bomba es 0,7 y el rendimiento del motor eléctrico de accionamiento es 0,95.*

Calcular la potencia absorbida de la red.

19-18. *Una bomba centrífuga, cuyo rendimiento total es 60%, bombea 2.000 l/min de aceite creando un incremento de presión efectiva de 2 bar.*

Calcular la potencia de accionamiento.

19-19. *El eje de una bomba centrífuga está situado 2 m por encima del nivel del agua en el pozo de aspiración y 40,6 m por debajo del nivel del pozo de impulsión. Las pérdidas en las tuberías de aspiración e impulsión (incluyendo en esta última la pérdida en el desagüe en el depósito) son 1 y 7,4 m, respectivamente. Diámetro del rodete, 300 mm y ancho a la salida del rodete, 18 mm. La bomba gira a 1.700 rpm. Entrada del agua en el rodete radial. Angulo de salida de los álabes, 32°; $\eta_h = 77\%$; $\eta_m = 72\%$.*

Calcular:

a) potencia de accionamiento;

b) caudal;

c) altura efectiva.

19-20. *Entre las bridas de entrada y salida de una bomba se coloca un manómetro en U de mercurio. De él se ha extraído el aire de manera que al funcionar el resto del tubo manométrico se encuentra lleno de agua. La bomba da un caudal de agua de 300 m^3/h. La tubería de aspiración es de 250 mm y la de impulsión de 200 mm. El eje de la bomba es horizontal. Entre los ejes de la tubería en las tomas manométricas de aspiración e impulsión hay un desnivel de 35 cm. El manómetro indica un incremento de altura de mercurio de 20 cm (más elevada en la rama unida al tubo de aspiración).*

Calcular la potencia útil que da la bomba.

19-21. *Una bomba centrífuga de agua suministra un caudal de 50 m^3/h. La presión a la salida de la bomba es 2,6 bar. El vacuómetro de aspiración indica una depresión de 250 Torr. Las diferencias de cotas entre los ejes de las secciones, donde se conectan las tomas manométricas, es de 0,6 m. Los diámetros de las tuberías de aspiración e impulsión son iguales. El rendimiento total de la bomba es 62%.*

Calcular la potencia de accionamiento de esta bomba.

19-22. *Una bomba se emplea para impulsar agua a 10° C entre dos depósitos abiertos, cuyo desnivel es de 20 m. Las tuberías de aspiración y de impulsión, cuyas longitudes son de 4 y 25 m respectivamente, son de fundición de 300 y 250 mm respectivamente. Las pérdidas secundarias pueden despreciarse. El caudal bombeado es de 800 m^3/h; $\eta_{tot} = 75\%$.*

Calcular:

a) la altura efectiva de la bomba;

b) potencia de accionamiento.

19-23. *Una bomba centrífuga gira a 750 rpm. El desnivel geodésico entre los depósitos de aspiración e impulsión, abiertos a la atmósfera, junto con todas las pérdidas de carga exteriores a la bomba asciende a 15 m. El ángulo $\beta_2 = 45°$. La velocidad media del agua en las tuberías, así como la velocidad meridional en el interior de la bomba, se mantiene constante e igual a 2 m/s. La entrada de la corriente en los álabes es radial. El rendimiento manométrico de la bomba es 75%. Ancho del rodete a la salida 15 mm.*

Calcular:

a) diámetro exterior del rodete;

b) altura dinámica del rodete que se ha de transformar en altura de presión en la caja espiral;

c) si el diámetro del rodete a la entrada es 0,4 el diámetro del rodete a la salida, calcular el caudal y el ancho del rodete a la entrada;

d) β_1;

e) rendimiento de la bomba, si $\eta_m = 0,9$ y $\eta_v = 1$.

19-24. *Una bomba centrífuga de agua tiene las siguientes características: $D_1 = 100$ mm; $D_2/D_1 = 2$; $b_1 = 20$ mm; $\beta_1 = 15°$; $\beta_2 = 30°$; $n = 1.500$ rpm. Las tomas de presión en la aspiración e impulsión tienen el mismo diámetro. El manómetro de aspiración marca una altura de presión relativa de -4 m c. a. El rendimiento total de la bomba es 65%; $\eta_m = 96\%$; $\eta_v = 0,9$. Supóngase la entrada en los álabes radial.*

Calcular:

a) triángulos de velocidad a la entrada y salida del rodete (los tres lados y los dos ángulos característicos);

b) el caudal (supóngase rendimiento volumétrico igual a 1);

c) la potencia en el eje de la bomba;

d) la presión en bar del manómetro de impulsión.

19-25. *El rodete de una bomba centrífuga de gasolina ($\delta = 0{,}7$) de 3 escalonamientos tiene un diámetro exterior de 370 mm y un ancho a la salida de 20 mm; $\beta_2 = 45°$. Por el espesor de los álabes se reduce un 8 % el área circunferencial a la salida; $\eta = 85\,\%$; $\eta_m = 80\,\%$.*

Calcular:

a) altura efectiva cuando la bomba gira a 900 rpm, suministrando un caudal másico de 3.500 kg/min;

b) potencia de accionamiento en estas condiciones.

19-26. *En este problema se despreciarán las pérdidas. Una bomba centrífuga de agua tiene las siguientes características: $n = 500$ rpm. $D_1 = 100$ mm. $D_2 = 400$ mm. Area útil del rodete a la entrada = 200 cm². Area útil del rodete a la salida = 500 cm². $\beta_1 = 45°$; $\beta_2 = 60°$. Entrada en los álabes del rodete radial.*

Calcular w_1, w_2, y la potencia de la bomba.

19-27. *Una bomba de agua da un caudal de 7.500 l/min. Aspira en carga de un depósito abierto por una tubería de 200 mm estando el eje de la bomba 5 m por debajo del nivel de agua en el depósito. Despréciense las pérdidas en la bomba y en las tuberías. La potencia de la bomba es de 5,4 kW.*

Calcular:

1) la lectura de un manómetro situado en la brida de aspiración 5 m por debajo del nivel del depósito;

2) la lectura de otro manómetro situado en la tubería de impulsión 20 m por encima del nivel de agua en el depósito.

19-28. *En este problema se despreciarán las pérdidas. Una bomba centrífuga que produce un caudal de agua de 300 m³/h tiene las siguientes características: $D_1 = 150$ mm; $D_2/D_1 = 3$; $b_1 = 40$ mm; $b_2/b_1 = \frac{1}{2}$; $\beta_1 = 60°$; $\beta_2 = 40°$. Entrada radial.*

Calcular:

a) rpm;

b) altura de la bomba;

c) par;

d) potencia;

e) incremento de presión que se produce en el rodete.

19-29. *Una bomba centrífuga de agua que gira a 1.000 rpm tiene las siguientes dimensiones: $D_1 = 180$ mm; $D_2/D_1 = 2$; $b_1 = 30$ mm; $b_2 = 20$ mm; $\beta_1 = 20°$; $\beta_2 = 30°$. Entrada en los álabes radial; $\eta_h = 81\,\%$, $\eta_m = 95\,\%$; $\eta_{motor\ eléct.} = 0{,}85$; las bridas de entrada y salida se encuentran a la misma cota; diámetro de la tubería de entrada 220 mm; ídem de la tubería de salida 200 mm. El desnivel entre el depósito de aspiración abierto a la atmósfera y la brida de aspiración asciende a 1,2 m.*

Calcular:

a) los triángulos de velocidad a la entrada y salida del rodete (c, u, w, c_u, c_m, α) a la entrada y salida;

b) caudal de la bomba;

c) altura de Euler;

d) altura de presión a la entrada de la bomba;

e) energía eléctrica consumida en 6 horas de funcionamiento de la bomba;

f) altura de presión a la salida de la bomba.

19-30. *Una bomba centrífuga, que aspira directamente de la atmósfera ($p_{amb} = 740$ Torr) da un caudal $Q = 555$ l/s a una altura efectiva $H = 13{,}5$ m, girando a 730 rpm. El $NPSH_{necesario}$ es 3,33 m; la temperatura del agua es 20° C; las pérdidas en el tubo de aspiración ascienden a 0,54 m.*

Calcular:

a) altura geodésica máxima de aspiración de esta bomba;

b) número específico de revoluciones.

19-31. *Una bomba centrífuga bombea gasolina de densidad relativa 0,7 a razón de 200 m³/h. Un manómetro diferencial mide una diferencia de presiones entre la entrada y salida de la bomba de 4,5 bar. El rendimiento total de la bomba es 60 %. Las tuberías de aspiración e impulsión tienen el mismo diámetro y los ejes de las secciones en que está conectado el manómetro tienen la misma cota.*

Calcular:

a) la altura útil de la bomba;

b) la potencia de accionamiento.

19-32. *Una bomba centrífuga de agua gira a 1.490 rpm y absorbe una potencia de 300 kW; $d_2 = 500$ mm; $b_2 = 25$ mm; $\beta_2 = 45°$. La entrada en los álabes es radial. El rendimiento total se supondrá igual a 1.*

Calcular el caudal de la bomba.

19-33. *El eje de una bomba centrífuga de agua se encuentra 3,5 m por encima del nivel del pozo de aspiración. La altura efectiva que da la bomba para caudal 0 es 21,4 m. Se abre la válvula de impulsión sin cebar la bomba.*

Estimar la altura a que se elevará el agua en la tubería de aspiración.

19-34. *En este problema se despreciarán las pérdidas. Una bomba centrífuga de agua cuyo diámetro exterior es de 200 cm y su velocidad periférica a la salida del rodete es 10 m/s da un caudal de 3.000 l/min. La entrada en los álabes es radial. $\eta_m = 92\,\%$; $c_{2m} = 1{,}5$ m/s; $\beta_2 = 30°$.*

Calcular el momento motor del grupo.

19-35. *Una bomba centrífuga proporciona una altura útil de 40 m con un rendimiento hidráulico de 80 %. Las tuberías de aspiración e impulsión son de 150 mm. $d_2 = 350$ mm; $b_2 = 25$ mm; $\beta_2 = 25°$; $n = 1.400$ rpm. Pérdida de carga en las tuberías de aspiración e impulsión (incluyendo las pérdidas secundarias) = 10 m.*

Calcular:

a) el caudal de la bomba;

b) la diferencia de cotas entre los niveles de los depósitos de aspiración e impulsión, si ambos están abiertos a la atmósfera.

19-36. *Una bomba centrífuga, cuyo rodete tiene 300 mm de diámetro gira a una velocidad de 1.490 rpm; $\beta_2 = 30°$; $c_{2m} = 2$ m/s. La entrada en los álabes es radial.*

Calcular:

a) el triángulo de velocidades de salida de la bomba;

b) la altura teórica de Euler.

19-37. *Una bomba centrífuga, en la que se despreciarán las pérdidas, tiene las siguientes dimensiones: $d_1 = 100$ mm; $d_2 = 300$ mm; $b_1 = 50$ mm; $b_2 = 20$ mm. La bomba da un caudal de agua de 175 m³/h y una altura efectiva de 12 m a 1.000 rpm.*

Calcular:

a) la forma de los álabes, o sea β_1 y β_2;

b) la potencia de accionamiento.

19-38. *Una bomba centrífuga bombea un caudal de salmuera ($\delta = 1{,}19$) de 190 m³/h. Un manómetro diferencial colocado entre las tuberías de aspiración e impulsión marca 4,5 bar. La tubería de aspiración es de 150 mm y la de impulsión de 125 mm. La diferencia de cotas entre los ejes de las dos secciones a que están conectadas las tomas manométricas es de 1 m.*

Calcular:

a) la altura efectiva de la bomba;

b) la potencia de accionamiento si el rendimiento total de la bomba es de 60 %.

19-39. *Calcular la altura teórica desarrollada por una bomba centrífuga de la que se conocen los datos siguientes: $c_1 = 4{,}0$ m/s; $d_1 = 150$ mm; $\alpha_1 = 75°$; $n = 1.450$ rpm; $c_2 = 24$ m/s; $d_2 = 350$ mm; $\alpha_2 = 12°$.*

19-40. *Una bomba centrífuga suministra un caudal de agua $Q = 100$ m³/h. Los diámetros de las tuberías de aspiración e impulsión son de 150 mm y el desnivel entre los depósitos de aspiración e impulsión abiertos a la atmósfera, es de 32 m. La potencia en el eje de la bomba es 14,0 kW. El coeficiente total de pérdidas (Sec. 11.4), $\zeta_t = 10{,}5$.*

Calcular el rendimiento total de la bomba.

19-41. *Calcular las dos características principales de un rodete (diámetro exterior y ángulo de los álabes a la salida del rodete), si girando a 1.500 rpm, desarrolla una altura manométrica de 23 m, proporcionando un caudal de 13.500 l/min. Supóngase: a) $\eta_h = 75\,\%$; b) pérdida total en la bomba = $= 0{,}033 c_2^2$ m (c_2 en m/s); c) área total para el flujo a la salida del rodete = $1{,}2\ D_2^2$; d) entrada radial de la corriente en el rodete.*

19-42. *En este problema se despreciarán las pérdidas. Una bomba centrífuga tiene las siguientes características: $\beta_2 = 30°$; $d_2 = 250$ mm; $d_1 = 100$ mm; $c_{1m} = c_{2m} = 1{,}5$ m/s; $n = 1.000$ rpm. La entrada en los álabes del rodete es radial.*

Calcular:

a) β_1;
b) altura que da la bomba;
c) altura de velocidad del agua a la salida del rodete.

19-43. *Una bomba centrífuga para alimentación de una caldera de vapor, que desarrolla una altura efectiva de 80 m bombea agua a 90° C desde el depósito de aspiración, abierto a la atmósfera, hasta la caldera. La pérdida de carga en la tubería de aspiración es de 0,5 m. La presión barométrica es de 725 Torr. El caudal de la bomba es 0,25 m^3/s. El diámetro de la tubería de aspiración es de 400 mm. El coeficiente de cavitación de la bomba $\sigma = 0{,}10$.*

a) ¿a qué altura geodésica máxima se podrá colocar esta bomba?;
b) esquema de la instalación con indicación de la cota del eje de la bomba con respecto al nivel superior del pozo.
c) Si la presión de la caldera es 8,2 bar y el eje de la bomba se encuentra 6 m por debajo del nivel del agua en la caldera, ¿cuáles son las pérdidas totales en la impulsión de la bomba?

19-44. *Una bomba centrífuga tiene las siguientes características: $d_2 = 250$ mm; $d_1 = 150$ mm; $b_1 = 15$ mm; $\beta_2 = 45°$; c_m = constante en todo el rodete; caudal 1.500 l/min; $n = 1.000$ rpm.*

Calcular:

a) ángulo de los álabes del rodete a la entrada;
b) ángulo de los álabes de la corona directriz a la entrada.

19-45. *Un grupo moto-bomba de agua tiene las siguientes características: caudal 2.000 m^3/h; diámetros de las tuberías de aspiración e impulsión iguales; entre los ejes de las tuberías de aspiración e impulsión hay un desnivel de 1 m; presión en la impulsión 15 bar; temperatura del agua bombeada 60° C; depresión en la aspiración 200 mbar; rendimiento global del grupo 68 %; rendimiento total de la bomba 80 %.*

Calcular:

a) potencia absorbida de la red;
b) potencia de accionamiento de la bomba.

20. *Turbomáquinas hidráulicas: Ventiladores*

20.1. DEFINICION DE LOS VENTILADORES

Un ventilador esencialmente es una bomba de gas en vez de líquido. Por tanto:

Ventilador es una turbomáquina hidráulica generadora para gases.

Los líquidos son poco compresibles y los gases muy compresibles. La compresibilidad puede o no afectar al diseño de la máquina y repercutir o no en la aplicabilidad de las fórmulas desarrolladas en el Capítulo 19 para las bombas a los ventiladores, según que la variación de la densidad, y por tanto de volumen específico, sea o no importante. Si el gas puede considerarse prácticamente incompresible a su paso por la máquina, la teoría y funcionamiento de la *bomba de gas* será idéntica a la de la *bomba de líquido* estudiada en el capítulo anterior. Esto sucede cuando el *incremento de presiones* Δp (= presión a la salida − presión a la entrada en la máquina) es pequeña.

Si el gas no puede considerarse incompresible, las fórmulas desarrolladas en el capítulo anterior para las bombas no serán aplicables a los ventiladores. Si el gas puede considerarse incompresible, la máquina se llama *ventilador* y si el gas ha de considerarse compresible, la máquina se llama *turbocompresor*.

La línea de separación entre el ventilador y compresor es convencional. Antiguamente se decía que si $\Delta p \leq 1.000$ mm de columna de agua, el efecto de la compresibilidad podría despreciarse y la máquina era un ventilador. Este límite sigue siendo válido para los ventiladores industriales de poca calidad, en que no se busca un rendimiento grande, sino un precio reducido; pero al crecer las potencias de los ventiladores con el desarrollo de las técnicas de ventilación, refrigeración y aire acondicionado, en los ventiladores de calidad dicho límite hay que establecerlo más bajo. *Convencionalmente* podemos establecer:

Máquinas de poca calidad: $\Delta p \leq 100$ mbar, ventilador
$\Delta p > 100$ mbar, turbocompresor

Máquinas de alta calidad: $\Delta p \leq 30$ mbar, ventilador
$\Delta p > 30$ mbar, turbocompresor

Ventilador es la turbomáquina que absorbe energía mecánica y restituye energía a un gas, comunicándole un incremento de presión tal que el influjo de la compresibilidad puede despreciarse.

Compresor es la turbomáquina, análoga a la anterior, pero que comunica al gas un incremento de presión tal que el influjo de la compresibilidad no puede despreciarse. En resumen:

— En el cálculo y funcionamiento del *ventilador* el gas se supone incompresible.
— En el cálculo y funcionamiento del *compresor* el gas se supone compresible.
— El ventilador es una *máquina hidráulica.*
— El compresor es una *máquina térmica.*
— El ventilador nunca se refrigera porque al ser la compresión pequeña (teóricamente despreciable), el gas no se calienta.
— El compresor con mucha frecuencia es refrigerado.

Para ventilación de las salas de trabajo y reuniones, así como de minas, túneles y barcos; para exhaustación de humos, aire con alto contenido de polvo, etc.; para el secado en procesos industriales; para la refrigeración y acondicionamiento de aire, etc., se necesitan grandes caudales de aire; pero con frecuencia las presiones son relativamente pequeñas. Por tanto, las máquinas para este tipo de servicio muchas veces *se calculan como ventiladores* (máquinas hidráulicas) *sin tener en cuenta la compresibilidad* del gas y por tanto sin tener en cuenta la variación de densidad y volumen específico. Por el contrario, en las acererías y altos hornos se requieren presiones mucho mayores, de 2 a 4 bar, para vencer la resistencia al flujo a través de las conducciones, toberas, etc. Por tanto, las máquinas para este tipo de servicio *se calculan como compresores* (máquinas térmicas), *teniendo en cuenta la compresibilidad* del gas, y por tanto teniendo en cuenta la variación de densidad y volumen específico.

20.2. CLASIFICACION DE LOS VENTILADORES

20.2.1. Clasificación según la presión total desarrollada

(La presión total desarrollada se definirá más adelante en la Sec. 20.3.)

— *Ventiladores de baja presión:* presión total desarrollada inferior a 10 mbar.
— *de media presión* presión total desarrollada superior a 10 e inferior a 30 mbar.
— *de alta presión:* presión total desarrollada superior a 30 e inferior a 100 mbar. (En estos últimos el efecto de la compresibilidad ya es apreciable.) Esta clasificación es meramente convencional.

20.2.2. Clasificación según la dirección del flujo

(Véase Sec. 18.7.)

— *Ventiladores centrífugos* (1): Los ventiladores centrífugos se adaptan a los tres tipos mencionados en la Sec. 20.2.1 de baja, media y alta presión. Los de baja presión a veces son de tipo Sirocco o de tambor.

La Fig. 20-1 representa un *ventilador centrífugo Sirocco* de baja presión (5 mbar) con rodete *de tipo de tambor*, construido por la casa Sulzer, para $Q = 8.000$ m^3/h, $n = 720$ rpm; $D_2 = 500$ mm. En este ventilador: los álabes están curvados hacia adelante ($\beta_2 > 90°$); la *embocadura de entrada* es una tobera de perfil aerodinámico para reducir las pérdidas; la sección transversal de la *caja espiral*, construida de chapa reforzada con angulares, es rectangular; el rodete está instalado en voladizo. Carece de prensaestopas porque la presión es baja.

La Fig. 20-2 representa un *ventilador centrífugo* de alta presión (70 mbar) construido también por la casa Sulzer, para $Q = 16.000$ m^3/h, $n = 2.950$ rpm; $D_2 = 700$ mm. En este ventilador: los álabes están curvados hacia atrás ($\beta_2 < 90°$); la *caja espiral* es de fundición; el rodete también está instalado en voladizo. Tiene prensaestopas, porque las presiones son más elevadas.

— *Ventiladores axiales:* La Fig. 20-3 representa un *ventilador axial* construido por la casa Siemens para ventilación de minas, con motor eléctrico refrigerado por aire, $n = 2.900$ rpm. Su rendimiento es elevado, 80 %, gracias a que los ocho álabes de que consta su rodete de siluminio antideflagrante están diseñados como *perfil de ala de avión.*

20.3. INFLUJO DE LA VARIACION DE LA DENSIDAD DEL GAS EN EL COMPORTAMIENTO DE LOS VENTILADORES

No siendo el ventilador más que una bomba de gas, *todas las fórmulas desarrolladas en el Cap. 19 para las bombas son también aplicables a los ventiladores.*

Hay, sin embargo, una excepción: el fenómeno de la cavitación, estudiado en la Sec. 19.2.1, ya que dicho fenómeno se produce al entrar el líquido en ebullición y es exclusivo, por tanto, de los líquidos.

La densidad del aire y la de cualquier gas varía mucho con la presión, aunque luego no varíe sensiblemente en su paso por el ventilador y la temperatura, no así la de los líquidos; tanto la presión que da un ventilador como la potencia de accionamiento del mismo son influenciadas grandemente por las variaciones de densidad en el aire o gas impulsado.

Un ensayo de un ventilador es inadmisible si no se conoce la densidad del gas con la cual se ha verificado el ensayo, o no se ha reducido el ensayo mediante las leyes de semejanza a las condiciones normales (véase Sec. 25.4).

Afortunadamente, el aire y prácticamente todos los gases impulsados por los ventiladores obedecen con suficiente aproximación para los problemas

(1) Los ventiladores centrífugos abarcan los dos tipos radiales y semiaxiales descritos en la Sec. 18.7.

UNIVERSIDAD DE LEON BIBLIOTECA

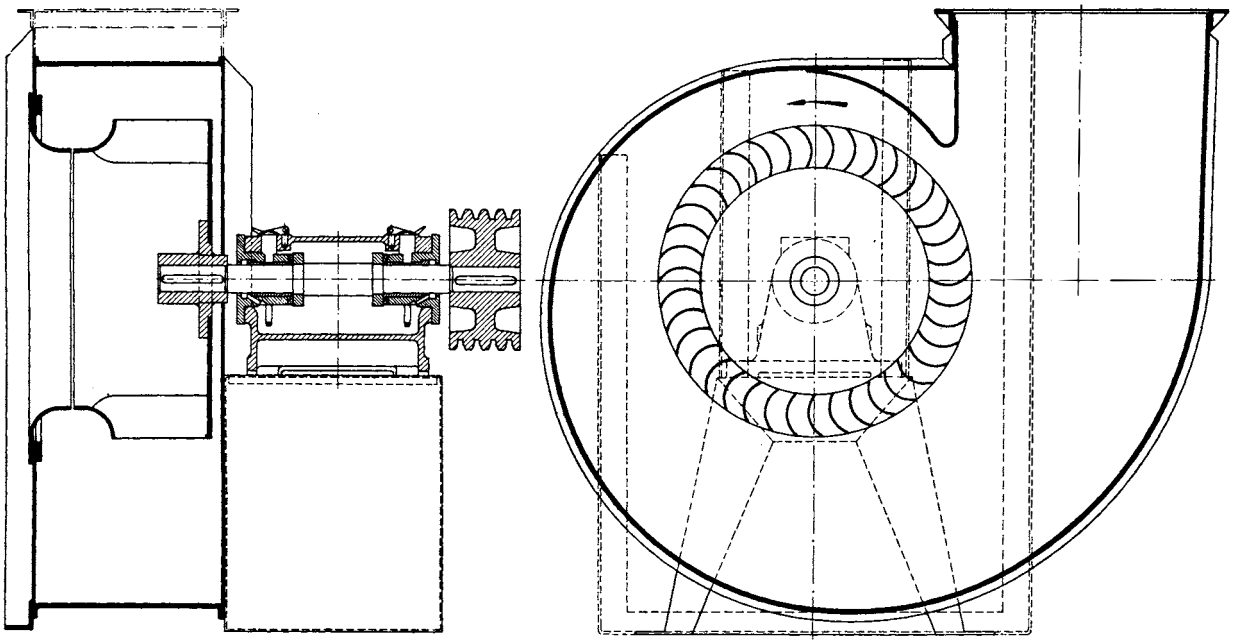


FIG. 20-1. *Ventilador de baja presión* de rodete de tambor de 500 mm de diámetro construido por la casa Sulzer para 8.000 m^3/h, 720 rpm y 5 mbar de presión.

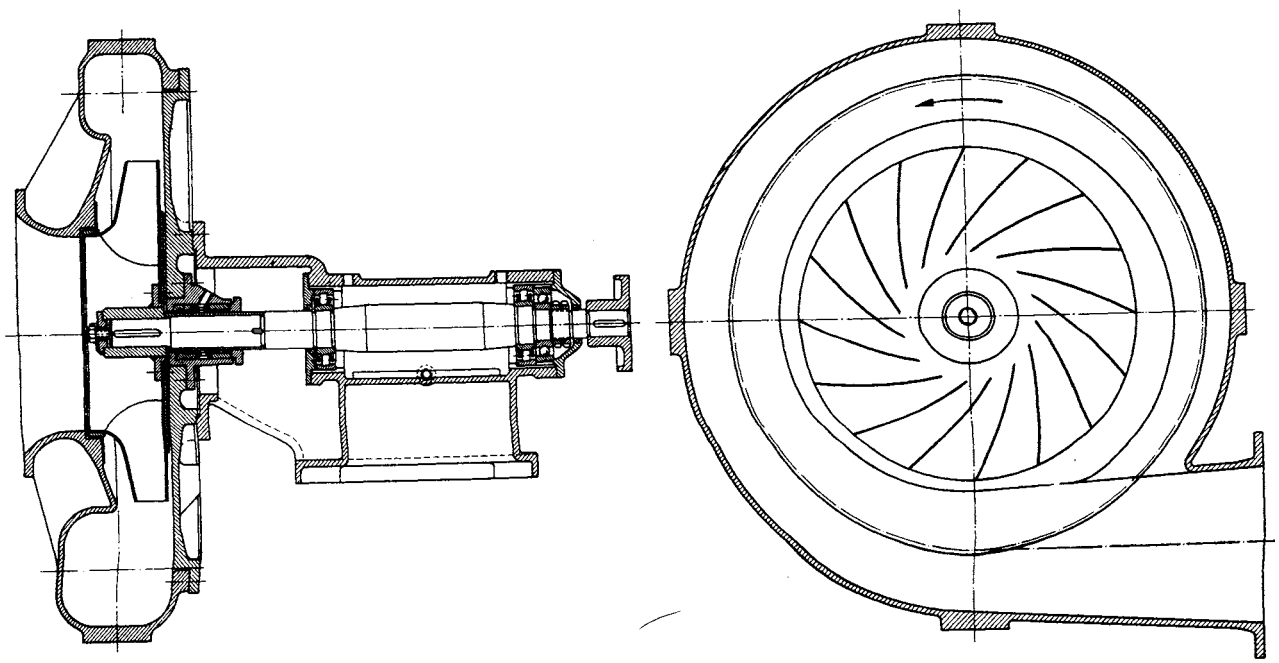


FIG. 20-2. *Ventilador de alta presión* construido por la casa Sulzer para 2.950 rpm con un caudal de 16.000 m^3/h y una presión de 70 mbar con un diámetro exterior del rodete de 700 mm.

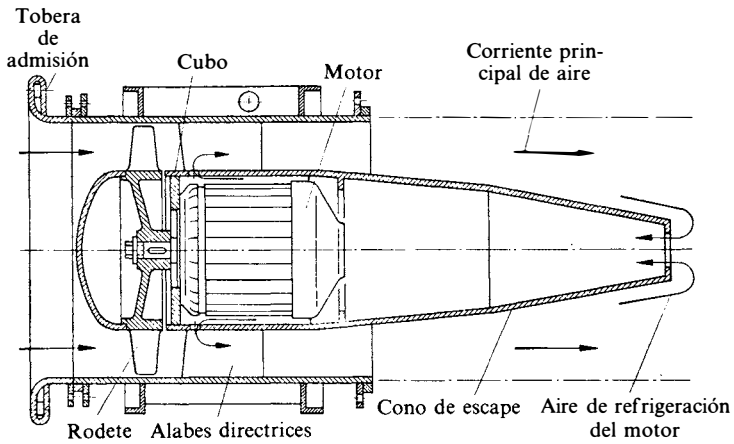


FIG. 20-3. *Ventilador axial* de aire construido por la casa Siemens para ventilación de minas para 2.900 rpm y elevado rendimiento (80 %).

prácticos a la ecuación de los gases perfectos. Esta ecuación sencilla permite determinar la densidad del gas en cada problema, a partir de la presión y de la temperatura. En efecto:

de $$pv = R_a T \tag{20-1}$$

se deduce

$$\frac{p}{\rho} = R_a T$$

y

$$\rho = \frac{p}{R_a T} \tag{20-2}$$

donde p — presión absoluta, $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, *SI*.

R_a — constante particular del gas, $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, *SI*.

T — temperatura absoluta, K, *SI* (2).

(2) La densidad del aire se calcula en la sala donde se realiza el ensayo, leyendo la presión en un barómetro, que marca exactamente la presión en el lugar y día del ensayo y asimismo la temperatura. Pero, insistimos una vez más, en el ventilador mismo la densidad prácticamente no varía.

Para el aire

$$R_a = 286{,}9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Por tanto, si el ventilador aspira y/o impulsa de una atmósfera a la presión barométrica p_{amb} y temperatura absoluta T_{amb} se tendrá:

$$\boxed{\rho = \frac{p_{amb}}{286{,}9\ T_{amb}}} \tag{20-3}$$

Por el contrario, una bomba es prácticamente insensible a la variación de la densidad con la presión barométrica y mucho menos sensible que el ventilador a la variación de la densidad con la temperatura.

El *estado normal* de un gas es el estado termodinámico que corresponde a una presión de 760 Torr y a una temperatura de 0° C. Aplicando la Ec. (20-3), la densidad normal del aire será:

$$\rho_n = \frac{0{,}760 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81}{286{,}9 \cdot 273{,}15} = 1{,}294 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

20.4. FORMULAS DE LOS VENTILADORES

Aunque, como ya hemos dicho, todas las fórmulas de las bombas aducidas en el Cap. 19 son aplicables a los ventiladores, en la práctica en lugar de dichas fórmulas se emplean otras que sólo se diferencian de aquéllas en que en lugar de venir expresadas en alturas vienen expresadas en presiones. Por tanto, para pasar de las fórmulas del Cap. 19 para las bombas a las fórmulas de los ventiladores basta tener en cuenta que para una altura cualquiera h se verifica:

$$h = \frac{p}{pg}$$

Con ayuda de esta ecuación es inmediata la construcción de la Tabla 20-1, que sigue.

TABLA 20-1

FORMULAS DE LAS BOMBAS Y DE LOS VENTILADORES

N.º de la ecuación	*Bombas (aplicables también a los ventiladores)*	*Ventiladores (utilizadas corrientemente con preferencia a las de la columna de la izquierda)*	*N.º de la ecuación*
(19-3)	$H_u = \frac{u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}}{g}$	Δp_u (presión periférica, presión de Euler o presión teórica) $= \rho(u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u})$ (1)	(20-4)
(18-16)	$H_u = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$	$\Delta p_u = \rho\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}\right)$	(20-5)
(18-18)	$H_p = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$	Δp_{eR} (presión estática del rodete) $= \frac{\rho}{2}[(u_2^2 - u_1^2) + (w_1^2 - w_2^2)]$	(20-6)
—	$H_d = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$	Δp_{dR} (presión dinámica del rodete) $= \frac{\rho}{2}(c_2^2 - c_1^2)$	(20-7)
(18-30)	$\epsilon = \frac{H_p}{H_u}$	$\epsilon \equiv$ (grado de reacción) $\frac{\Delta p_{eR}}{\Delta p_u}$	(20-8)
(19-4)	$H = H_u - H_{r-int}$	Δp_{tot} (presión total útil del ventilador) $= \Delta p_u - \Delta p_{r-int}$	(20-9)
(19-6)	$H = \frac{p_S - p_E}{\rho g} + z_S - z_E + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g}$	$\Delta p_{tot} = p_S - p_E$ (incremento de presión estática) $+ \frac{\rho}{2}(v_S^2 - v_E^2)$ (incremento de presión dinámica; el término $\rho g(z_S - z_E)$ se desprecia: véase la Sec. 5.15).	(20-10)
(19-12)	$H = \frac{p_Z - p_A}{\rho g} + z_Z - z_A + H_{ra} + H_{ri} + \frac{v_i^2}{2g}$	$\Delta p_{tot} = p_Z - p_A + \Delta p_{ra} + \Delta p_{ri}$ (2)	(20-11)
(19-18)	$\eta_h = \frac{H}{H_u}$	$\eta_h = \frac{\Delta p_{tot}}{\Delta p_u}$	(20-12)
(19-16)	$P_i = (Q + q_e + q_i) H_u \rho g$	$P_i = (Q + q_e + q_i) \Delta p_u$	(20-13)
(19-17)	$P = Q \rho g H$	$P = Q \Delta p_{tot}$	(20-14)
(19-25)	$P_a = \frac{Q H \rho g}{\eta_v \eta_h \eta_m}$	$P_a = \frac{Q \Delta p_{tot}}{\eta_v \eta_h \eta_m}$	(20-15)

(1) Basta multiplicar ambos miembros de la ecuación correspondiente de las bombas por ρg y análogamente se procede en la deducción de las restantes fórmulas.

(2) El término $\rho \frac{v_i^2}{2}$ se incluye en Δp_{ri}.

Nota final. Las Ecs. (19-17), (19-18), (19-19), (19-24) y (19-26) no experimentan variación alguna en los ventiladores.

PROBLEMAS

20-1. *¿Qué volumen ocupan 6.000 kg de aire a la temperatura $t = 15°$ y presión barométrica $p_{amb} = 735$ Torr?*

Llamando m a la masa total del gas, y multiplicando los dos miembros de la Ec. (20-3) por m tendremos:

$$V = \frac{R_a T_{amb} m}{p_{amb}}$$

donde V — volumen total ocupado por el gas.

Ahora bien, en nuestro caso:

$$m = 6.000 \text{ kg}$$
$$T_{amb} = 273{,}15 + 15 = 288{,}15 \text{ K}$$
$$p_{amb} = 0{,}735 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 = 98.061 \text{ Pa}$$

luego

$$V = \frac{286{,}9 \cdot 288{,}15 \cdot 600}{p_{amb}} =$$
$$= 5.058 \text{ m}^3$$

20-2. *En este problema no se consideran las pérdidas. Un ventilador centrífugo tiene paletas rectas y un ancho constante en el rodete de 600 mm. Gira a 500 rpm. Da un caudal de aire ($\rho = 1{,}2$ kg/m^3) de 300 m^3/min. La entrada de la velocidad absoluta en los álabes es radial. $D_2 = 650$ mm; $D_1 = 600$ mm.*

Calcular:

a) los ángulos β_1 y β_2;
b) la presión producida por el ventilador;
c) la potencia del ventilador.

Este problema, como cualquier otro sobre ventiladores, puede ser resuelto según la Tabla 20-1, utilizando bien las fórmulas de las bombas, bien la de los ventiladores. Como ejemplo de esta «solución dual» daremos ambos métodos en este problema. Muchas de las fórmulas son únicas para bombas y ventiladores.

a) Angulos β_1 y β_2

El triángulo de entrada es recto (entrada radial, $c_{2u} = 0$):

$$u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}6 \cdot 500}{60} = 15{,}08 \text{ m/s}$$

$$Q = \pi D_1 b_1 c_{1m} \quad \text{(despreciando el influjo del espesor de los álabes y de las pérdidas volumétricas)}$$

$$Q = \frac{300}{60} = 5 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$c_{1m} = c_1 = \frac{5}{\pi \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6} = 4{,}421 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \text{arc tg} \frac{c_1}{u_1} =$$
$$= 15°{,}72$$

En el triángulo de velocidades de salida

$$u_2 = \frac{D_2}{D_1} u_1 = 17{,}017 \text{ m/s}$$

Es fácil ver que siendo las paletas del ventilador rectas,

$$\frac{R_2}{\cos \beta_1} = \frac{R_1}{\cos \beta_2} \qquad \cos \beta_2 = \frac{R_1}{R_2} \cos \beta_1 = \frac{300}{325} \cos 15°,72 = 0,8886$$

$$\beta_2 = 27°,31$$

b) Presión producida por el ventilador

Por la ecuación de continuidad

$$Q = \pi D_1 b_1 c_{1m} = \pi D_2 b_2 c_{2m}$$

$$c_{2m} = \frac{D_1 b_1}{D_2 b_2} c_{1m} = \frac{600 \cdot 600}{650 \cdot 600} \cdot 4,421 = 4,081 \text{ m/s}$$

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\text{tg } \beta_2} = 17,017 - \frac{4,081}{\text{tg } 27°,31} = 9,111 \text{ m/s}$$

	como bomba	*como ventilador*
[Ec. (19-3)]	$H = H_u = \frac{u_2 c_{2u}}{g}$	
[Ec. (20-4)]		$\Delta p_{tot} = \Delta p_u = \rho u_2 c_{2u}$
	ya que $u_1 c_{1u} = 0$	
	$H = \frac{17,017 \cdot 9,111}{9,81} =$	$\Delta p_{tot} = 1,2 \cdot 17,017 \cdot 9,111 =$
	$= 15,805$ m columna de aire	$= 186$ Pa
	$(\Delta p_{tot} = 15,805 \cdot 1,2 \cdot 9,81 =$	
	$= 186$ Pa)	

c) Potencia

	como bomba	*como ventilador*
[Ec. (19-25)]	$P_a = P = Q\rho g H$	
[Ec. (20-15)]		$P_a = P = Q\Delta p_{tot}$
	$P_a = 5 \cdot 1,2 \cdot 9,81 \cdot 15,805 =$	$P_a = 5 \cdot 186 = 930$ W
	$= 930$ W	

20-3. *Un ventilador centrífugo de aire ($\rho = 1,2$ kg/m^3) tiene las siguientes dimensiones: $D_2 = 1/2$ m; ancho del rodete constante e igual a 75 mm. El caudal suministrado es de 3 m^3/s; la velocidad 900 rpm. Un manómetro diferencial inclinado mide una presión de 3,5 mbar entre la entrada y la salida del ventilador. La presión dinámica producida por el ventilador es despreciable. La potencia en el eje de la máquina es 1,84 kW. El rendimiento mecánico es 93 %. La entrada en el rodete es radial. Se despreciará el espesor de los álabes y no se tendrán en cuenta las pérdidas volumétricas.*

Calcular:

a) Rendimiento hidráulico;
b) Rendimiento total;
c) Pérdida de presión en el ventilador;
d) Angulo que forman los álabes a la salida.

a) Según la Ec. (20-12), el *rendimiento hidráulico* será:

$$\eta_h = \frac{\Delta p_{tot}}{\Delta p_u}$$

Siendo la presión dinámica del ventilador despreciable, tendremos, según la Ec. (20-10):

$$\Delta p_{tot} = p_S - p_E = 350 \frac{N}{m^2}$$

Por otra parte, siendo P_a la potencia de accionamiento, o potencia en el eje [Ec. (20-15)]:

$$P_a = \frac{Q \Delta p_u}{\eta_m}$$

$$\Delta p_u = \frac{1,84 \cdot 10^3 \cdot 0,93}{3} = 570,4 \frac{N}{m^2}$$

Sustituyendo los valores de Δp_{tot} e Δp_u en la Ec. (20-12) tendremos:

$$\eta_h = \frac{350}{570,4} \cdot 100 = 61,36\,\%$$

b) Siendo $\eta_v = 1$, de la Ec. (19-24) se deduce:

$$\eta_{tot} = \eta_h \eta_v \eta_m = \eta_h \cdot 0,93 = 0,571 \quad \text{ó} \quad 57,1\,\%$$

c) Según la Ec. (20-9):

$$\Delta p_{tot} = \Delta p_u - \Delta p_{r\text{-int}}$$

Luego

$$\Delta p_{r\text{-int}} = \Delta p_u - \Delta p_{tot} = 570,4 - 350 = 220,4 \frac{N}{m^2}$$

d) En el triángulo de salida (Fig. 18-2) se verifica:

$$\beta_2 = \text{arc tg} \frac{c_{2m}}{u_2 - c_{2u}} \qquad (1)$$

De la ecuación

$$Q = \pi D_2 b_2 c_{2m}$$

se deduce

$$c_{2m} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{3}{\pi \cdot 0,5 \cdot 0,075} = 25,46 \text{ m/s}$$

Además

$$u_2 = \frac{\pi D_2 n}{50} = \frac{\pi \cdot 0,5 \cdot 900}{60} = 23,56 \text{ m/s}$$

Finalmente de la Ec. (20-4) se deduce

$$c_{2u} = \frac{\Delta p_u}{\rho u_2} = \frac{570,4}{1,2 \cdot u_2} = 20,174 \text{ m/s}$$

Y sustituyendo los valores hallados en la Ec. (1) tendremos:

$$\beta_2 = 82°,42$$

20-4. *Un ventilador aspira de una habitación grande que se encuentra a una temperatura de 20° C y a una presión de 725 Torr. El aire es impulsado a través de un conducto rectangular de 1/4 m². A la salida del ventilador un manómetro de agua marca un presión equivalente de 75 mm c.a. y un tubo de Prandtl marca una presión equivalente de 88 mm c.a.*

Calcular:

a) La presión estática, dinámica y total reales del ventilador;
b) Velocidad del aire en el conducto de salida;
c) Caudal de aire que proporciona el ventilador;
d) Potencia suministrada por el ventilador al aire.

Calculemos la densidad del aire en las condiciones de la entrada, que se supondrá constante en todo el ventilador (hipótesis de incompresibilidad). Basta aplicar la Ec. (20-3):

$$\rho = \frac{p_{amb}}{286{,}9 \cdot T_{amb}}$$

donde $p_{amb} = 0{,}725 \cdot 13.600 \cdot 9{,}81 = 96.727 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

$T_{amb} = 20 + 273{,}15 = 293{,}15$ K

con lo cual

$$\rho = \frac{p_{amb}}{286{,}9 \cdot 293{,}15} = 1{,}150 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

a) La presión estática será:

$$\Delta p_e = p_S - p_E = p_S - 0 = 0{,}075 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 = 735{,}75 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

La presión dinámica será:

$$\Delta p_d = \frac{\rho}{2}(v_S^2 - v_E^2) = \frac{\rho v_S^2}{2} = 0{,}068 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 = 863{,}28 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

La presión total será:

$$\Delta p_{tot} = \Delta p_e + \Delta p_d = 1.599 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

b) Siendo

$$\rho \frac{v_S^2}{2} = \Delta p_d$$

se tendrá

$$v_S = \sqrt{\frac{2\,\Delta p_d}{\rho}} = 38{,}746 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) $$Q = A_S v_S = 0{,}25 \cdot v_S = 9{,}687 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

d) La potencia suministrada por el ventilador al aire es la potencia útil, que en virtud de la Ec. (20-14) es:

$$P = Q\,\Delta p_{tot} = 15{,}489 \cdot 10^3 \text{ W} = 15{,}489 \text{ kW}$$

20-5. *La potencia en el eje de un ventilador es 15 kW. El área transversal del conducto de entrada es 1,5 m². A la entrada misma del ventilador hay una depresión de 2,5 mbar. El conducto de impulsión es de 0,5 m² de superficie, y la presión estática a la salida del ventilador es de 7,5 mbar. El caudal del ventilador es 540 m³/min. Tómese para la densidad del aire ρ = 1,29 kg/m³.*

Calcular:

a) Presión total producida por el ventilador;
b) Potencia comunicada al aire por el ventilador;
c) Rendimiento total del ventilador.

a) $$\Delta p_{tot} = \Delta p_e + \Delta p_d \qquad (2)$$

$$\Delta p_e = p_S - p_E = 7{,}5 - (-2{,}5) = 10 \text{ mbar}$$

$$\Delta p_d = \frac{\rho}{2}(v_S^2 - v_E^2) \qquad (3)$$

$$Q = \frac{540}{60} = 9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_S = \frac{Q}{A_S} = \frac{9}{0{,}5} = 18 \text{ m/s}$$

$$v_E = \frac{Q}{A_E} = \frac{9}{1{,}5} = 6 \text{ m/s}$$

Sustituyendo los valores de v_S y v_E hallados en la Ec. (3) tenemos

$$\Delta p_d = \frac{1{,}29}{2}(18^2 - 6^2) = 185{,}76 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1{,}8576 \text{ mbar}$$

Por tanto, la presión total, según la Ec. (2), será:

$$\Delta p_{tot} = 10 + 1{,}8576 = 11{,}8576 \text{ mbar}$$

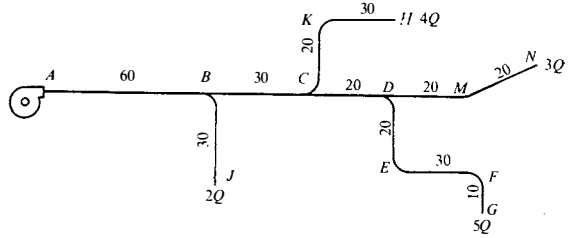
b) Aplicaremos la Ec. (20-14):

$$P = Q\,\Delta p_{tot} = 9 \cdot 1.185{,}76 = 10{,}672 \cdot 10^3 \text{ W} = 10{,}672 \text{ kW}$$

c) Aplicaremos la Ec. (19-23):

$$\eta_{tot} = \frac{P}{P_a} = \frac{10{,}672}{15} = 0{,}7115$$

20-6. *Se trata de escoger el ventilador para alimentación de la red de la figura, donde se han indicado en m las longitudes de los diferentes tramos. Para todas las tuberías tómese el coeficiente $\lambda = 0{,}03$. La red lleva tres «T» en los puntos B, C y D. Tómese para estas «T» $\zeta = 0{,}7$. Para los dos codos E y F se tomará el coeficiente $\zeta = 0{,}2$. El caudal es $Q = 1.000\ m^3/h$. Determinar la presión total que debe tener el ventilador así como los diámetros de los diferentes tramos ($\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$).*



PROB. 20-6

Para determinar los diámetros escogeremos una velocidad conveniente en los conductos, por ejemplo, $c = 10$ m/s:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot c \qquad d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \cdot c}} = \sqrt{\frac{4}{\pi \cdot c}} \cdot \sqrt{Q} = \sqrt{\frac{4}{\pi \cdot 10}} \cdot \sqrt{Q} = 0{,}3568\sqrt{Q}$$

$$\boxed{d = 0{,}3568\sqrt{Q}}$$

— Tramo *A-B*

$$Q_{A\text{-}B} = 14 \cdot Q = 14 \cdot 10^3\ m^3/h = 3{,}889\ m^3/s$$
$$d_{A\text{-}B} = 0{,}3568\sqrt{3{,}889} = 0{,}703\ m \qquad d_{A\text{-}B} = 0{,}703\ m$$

— Tramo *B-J*

$$Q_{B\text{-}J} = 2Q = 2 \cdot 10^3\ m^3/h = 0{,}556\ m^3/s$$
$$d_{B\text{-}J} = 0{,}3568\sqrt{0{,}556} = 0{,}2659\ m \qquad d_{B\text{-}J} = 0{,}2659\ m$$

— Tramo *B-C*

$$Q_{B\text{-}C} = 12Q = 12 \cdot 10^3\ m^3/h = 3{,}333\ m^3/s$$
$$d_{B\text{-}C} = 0{,}3568\sqrt{3{,}333} = 0{,}651\ m \qquad d_{B\text{-}C} = 0{,}651\ m$$

— Tramo *C-H*

$$Q_{C\text{-}H} = 4Q = 4 \cdot 10^3\ m^3/h = 1{,}111\ m^3/s$$
$$d_{C\text{-}H} = 0{,}3568\sqrt{1{,}111} = 0{,}376\ m \qquad d_{C\text{-}H} = 0{,}376\ m$$

— Tramo *C-D*

$$Q_{C\text{-}D} = 8Q = 8 \cdot 10^3\ m^3/h = 2{,}222\ m^3/s$$
$$d_{C\text{-}D} = 0{,}3568\sqrt{2{,}222} = 0{,}5318\ m \qquad d_{C\text{-}D} = 0{,}5318\ m$$

— Tramo *D-G*

$$Q_{D\text{-}G} = 5Q = 5 \cdot 10^3\ m^3/h = 1{,}389\ m^3/s$$
$$d_{D\text{-}G} = 0{,}3568\sqrt{1{,}389} = 0{,}4205\ m \qquad d_{D\text{-}G} = 0{,}4205\ m$$

— Tramo *D-N*

$$Q_{D\text{-}G} = 3Q = 3 \cdot 10^3\ m^3/h = 0{,}833\ m^3/s$$
$$d_{D\text{-}G} = 0{,}3568\sqrt{0{,}833} = 0{,}325\ m \qquad d_{D\text{-}N} = 0{,}325\ m$$

La presión total del ventilador será la necesaria para vencer las pérdidas por el conducto en que éstas sean máximas, a saber por el conducto *A-G*.

$$H_{r\,A\text{-}G} = \left[\lambda\left(\frac{L_{A\text{-}B}}{d_{A\text{-}B}} + \frac{L_{B\text{-}C}}{d_{B\text{-}C}} + \frac{L_{C\text{-}D}}{d_{C\text{-}D}} + \frac{L_{D\text{-}G}}{d_{D\text{-}G}}\right) + 2\,\zeta_{codos} + 3\,\zeta_T + 1\right]\frac{c^2}{2g} =$$
$$= \left[0{,}03\left(\frac{60}{0{,}703} + \frac{30}{0{,}651} + \frac{20}{0{,}5318} + \frac{60}{0{,}4205}\right) + 0{,}4 + 2{,}1 + 1\right]\frac{10^2}{2 \cdot 9{,}81} = 65{,}504\ m$$
$$\Delta p_{tot} = 65{,}504 \cdot 1{,}29 \cdot 9{,}81 = 828{,}95\ Pa$$

Calculado Δp_{tot} se pueden recalcular los diámetros de las diversas ramas o bien se pueden mantener los mismos diámetros; pero instalando en los puntos *B*, *C* y *D* válvulas de estrangulamiento que permitan reduciendo la presión convenientemente conseguir la distribución de caudales que se busca, según los datos del problema.

20-7. *La presión estática de un ventilador equivale a 20 mm c.a. y la presión dinámica a 5 mm c.a.*

Calcular la presión total producida por el ventilador.

20-8. *Un ventilador centrífugo impulsa aire de la atmósfera a razón de 240 m^3/min, a través de una salida rectangular de chapa, cuyas dimensiones son 800 × 400 mm. El ventilador gira a 750 rpm. El diámetro de entrada del rodete es 500 mm y el de salida 800 mm. El aire entra radialmente en el rodete a 15 m/s. $\beta_2 = 70°$. $b_2 = 100$ mm. En la caja espiral se consigue un aumento de presión equivalente al 30 % de altura de velocidad a la salida del rodete, en el cual las pérdidas ascienden a un 25 % de la misma altura de velocidad. Densidad del aire 1,2 kg/m^3; $\eta_v = 1$; $\eta_m = 0{,}92$. Despréciese el influjo del espesor de los álabes. (Despréciense las pérdidas en la embocadura e inclúyanse las pérdidas desde la salida del rodete hasta la salida del ventilador en las pérdidas en la caja espiral.)*

Calcular:

a) rendimiento hidráulico del ventilador;
b) potencia de accionamiento;
c) presión estática en mbar a la salida del ventilador.

20-9. *En un túnel de viento de circuito cerrado la corriente de aire necesaria para los ensayos de los modelos se hace por medio de un ventilador que da un caudal de 50 m^3/s ($\rho = 1{,}2$ kg/m^3). La pérdida de carga en el túnel aerodinámico asciende a 2.000 Pa. El rendimiento total del ventilador es 70 %.*

Calcular la potencia de accionamiento del ventilador.

20-10. *Calcular el caudal de un ventilador que ha de producir 10 renovaciones de aire a la hora en una planta industrial que mide 50 × 20 × 8 m.*

20-11. *Un ventilador impulsa aire a través de un conducto de sección circular de 250 mm de diámetro, en el que se ha instalado un orificio de 150 mm de diámetro concéntrico con la tubería para medir el caudal. Un manómetro diferencial conectado antes y después del diafragma indica una caída de presión de 8 mbar. El diafragma tiene un coeficiente de caudal $C_q = 0{,}65$.*

Calcular el caudal del ventilador.

20-12. *La presión estática a la entrada de un ventilador es 0,5 mbar por debajo de la presión atmosférica y la presión dinámica 0,4 mbar. A la salida del ventilador la presión estática vale 10 mbar, la dinámica 0,8 mbar.*

Calcular la presión total del ventilador.

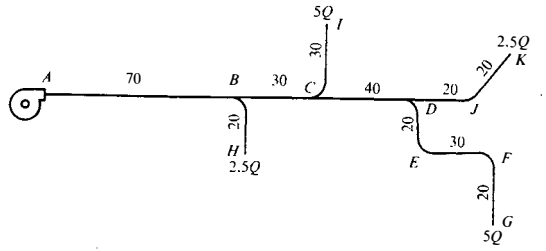
20-13. *En aplicaciones tales como aulas de Universidad se estima un consumo de 30 m^3 de aire por persona y hora.*

Calcular el caudal de un ventilador que ha de renovar el aire de una sala de 30 alumnos.

20-14. *Un exhaustor aspira de una habitación 6 m^3/s de aire. La habitación se encuentra a 30° C y la presión barométrica es de 740 Torr. El conducto de impulsión del exhaustor es rectangular y de 1 m^2 de sección. Al comienzo de él se mide una presión estática de 10 mbar. El rendimiento total del ventilador es 65 %.*

Calcular la potencia en el eje del ventilador.

20-15. *En la red de la figura determinar la presión total que debe tener el ventilador que la alimente y los diámetros de los diferentes tramos. En la figura se han indicado las longitudes de los tramos en m. $Q = 1.000$ m^3/h. Los codos y red como en el problema 20-6.*



PROB. 20-15

20-16. *Un ventilador en condiciones normales genera una presión estática de 20 mbar y una presión dinámica de 2 mbar. La potencia de accionamiento es de 75 kW. El rendimiento total del ventilador es 0,75.*

Calcular el caudal del ventilador.

20-17. *Un ventilador para tiro forzado tiene que trabajar contra una presión estática de 8 mbar. La velocidad de los gases calientes a la salida y entrada del ventilador puede suponerse igual. El caudal es de 5 m^3/s. El rendimiento total del ventilador es 65 %.*

Calcular la potencia de accionamiento.

20-18. *Para renovar el aire de una habitación se instala un exhaustor en una tubería corta de 600 mm de diámetro de sección circular en orificio practicado en la pared. El ventilador proporciona un caudal de 140 m^3/min. El rendimiento total del ventilador es 50 %; $\rho = 1{,}2$ kg/m^3.*

Calcular:

a) potencia que hay que prever en el motor eléctrico de accionamiento;
b) ahorro de potencia que se obtendría si se abocinase la entrada en el conducto.

20-19. *Un exhaustor tiene una pérdida en la embocadura equivalente a 10 m c.a. El caudal del ventilador es de 3 m^3/s. La aspiración al fin de la contracción de la embocadura, así como la impulsión, tiene 1 m^2 de sección. Un manómetro conectado en la brida de salida del ventilador y abierto por el otro extremo a la atmósfera marca un desnivel de 100 mm c.a. La máquina aspira de una sala, en la que la presión barométrica es de 740 Torr y la temperatura 30° C y expulsa a través de un conducto a la atmósfera.*

Calcular:

a) la presión total del ventilador;
b) la potencia que hay que suministrar al eje del ventilador si el rendimiento global de éste es de 60 %.
c) la velocidad del aire en el tubo de aspiración después de la embocadura;
d) la presión en el mismo punto.

20-20. *Un ventilador centrífugo tiene las siguientes características: ancho del rodete constante e igual a 150 cm; $D_2 = 150$ cm. El ventilador girando a 300 rpm suministra un caudal de 2.000 m^3/min.; $\beta_2 = 30°$; entrada radial; rendimiento total del ventilador 60 %; rendimiento mecánico 88 %; rendimiento volumétrico = 1.*

Calcular:

a) la presión total del ventilador;
b) la potencia en el eje del ventilador.

20-21. *Un ventilador produce una presión estática (incremento) equivalente a 400 mm c.a. y un caudal de 1.000 m^3/min. en condiciones normales. La salida del ventilador tiene una superficie de 8.500 cm^2. El rendimiento total del ventilador es 0,65.*

Calcular la potencia de accionamiento.

20-22. *Un ventilador está instalado en un conducto circular de 1/2 m de diámetro, donde reina una velocidad producida por el ventilador de 10 m/s. El rendimiento del ventilador es 60 %. La entrada y salida del ventilador es a la presión atmosférica: temperatura y presión atmosféricas 30° C y 710 Torr.*

Calcular la potencia en el eje del ventilador.

20-23. *Un soplante de un hogar tiene que trabajar contra una presión estática de 8 mbar. El hogar necesita 15 kg de aire ($\rho = 1{,}29$ kg/m^3) por cada kg de carbón quemado y se queman 40 toneladas de carbón por hora. El rendimiento total del ventilador es 65 %. La velocidad del aire impulsado es 10 m/s.*

Calcular la potencia necesaria en el motor eléctrico para accionamiento de este ventilador.

20-24. *Un ventilador que aspira directamente de la atmósfera desarrolla una presión estática de 5 mbar. La tubería de impulsión es de 150 mm. El rendimiento del ventilador es el 75 %. El caudal es de 750 m^3/h. El ventilador está instalado en un conducto circular de 250 mm.*

Calcular:

a) potencia en el eje;
b) presión en la tubería de aspiración, en la que se despreciarán las pérdidas.

21. *Centrales hidroeléctricas*

21.1. SALTOS NATURALES: POTENCIAL HIDROELECTRICO

Como se vio en la Sec. 10.1, si 1 y 2 en la Fig. 10-2 son dos puntos de un río situados en las cotas z_1 y z_2, siendo $z_1 - z_2 = \Delta z$ el desnivel entre ambas, el río fluye por su cauce natural con una velocidad tal que según la rugosidad del mismo (guijarros, hierbas, meandros) las pérdidas hidráulicas, que son proporcionales al cuadrado de la velocidad, son tales que se cumple la ecuación

$$H_r = \Delta z \tag{21-1}$$

Se llama *salto natural* o *altura bruta*, H_b, al desnivel entre la estación 1 y 2 de un río

$$\boxed{H_b = z_1 - z_2 = \Delta z} \tag{21-2}$$

El río desde su fuente hasta su desembocadura pierde energía potencial geodésica, la cual se gasta íntegramente en vencer los rozamientos.

Explotar un salto de altura bruta, $H_b = \Delta z$, es reducir a un mínimo la altura perdida [véase la Ec. (21-1)] a fin de aprovechar la altura de salto así recuperada (1) en una o varias turbinas hidráulicas. Para ello existen dos métodos principales:

Primer método: interceptación de la corriente con un dique o presa (véase Fig. 22-14).

La presa eleva el nivel del río, con lo cual disminuyen la velocidad media de la corriente y las pérdidas. Las centrales hidroeléctricas de este tipo se denominan *centrales de agua fluyente* (véase Sec. 21.4).

Segundo método: desviación de la corriente (Fig. 21-2).

Para desviar el curso natural de la corriente se intercepta el río con un dique y se construye un canal y/o conducto cerrado (tubería forzada), que lleva el agua a la central (conducto de llegada) y otro conducto que devuelve el agua al río, después de haber accionado las turbinas (conducto de salida).

(1) Esta altura remanente de salto después de descontar las inevitables pérdidas, se denominará más adelante *altura o salto neto* (Sec. 22.8).

La Tabla 21-1 muestra los quince ríos más importantes del mundo clasificados según el caudal medio en la desembocadura y según la longitud total de su curso.

TABLA 21-1

LOS QUINCE RIOS MAS IMPORTANTES DEL MUNDO

N.º de orden	*Río*	*Caudal medio en la desembocadura (m^3/s)*	*N.º de orden*	*Río*	*Longitud (km)*
1	Amazonas	185.000	1	Amazonas	7.025
2	Zaire	42.000	2	Nilo	6.607
3	Yangtsé	35.000	3	Ob	5.150
4	Orinoco	31.000	4	Yangtsé	4.989
5	Brahmapoutra	19.000	5	Zaire	4.667
6	Mississippi	18.000	6	Amor	4.667
7	Yenisséi	17.000	7	Mackenzie	4.600
8	Paraná	16.000	8	Léna	4.506
9	Mékong	15.500	9	Yenisséi	4.506
10	Léna	15.500	10	Hwang-Ho (Río	
11	Gange	14.000	11	Amarillo)	4.345
12	Irrawadi	13.000	12	Mississippi	4.200
13	Ob	12.500	13	Níger	4.184
14	Si-Kiang (Río Occidental)	12.000	14	Mékong	4.023
15	Amor	11.000	14	Sant Laurent	3.800
			15	Volga	3.701

El *potencial hidroeléctrico mundial* está sólo parcialmente explotado. Este potencial ha sido estimado con frecuencia. Puede distinguirse entre *potencial hidroeléctrico bruto* (estimación a base del salto bruto H_b), *potencial hidroeléctrico técnico* o técnicamente explotable, obtenido del anterior descontando las pérdidas hidráulicas previsibles en su explotación (estimación a base del salto neto H) y *potencial hidroeléctrico económico*, o económicamente explotable en las condiciones actuales. Las Conferencias Mundiales de la Energía celebradas hasta el presente han hecho diversas valoraciones (2) de este potencial, así como otros muchos autores. No es de extrañar que exista una gran discrepancia en los datos, provenientes de fuentes diversas, a causa de la deficiencia de la información y de la indeterminación misma de los criterios seguidos.

En el año 1972, Schavelev hizo la estimación que muestra la Tabla 21-2 y en 1969, el Informênergo de la U.R.S.S. publicó la Tabla 21-3 (pág. 442).

Al concluir el año 1974 había en el mundo en servicio o en construcción 63 centrales hidroeléctricas de una potencia superior a 1.000 MW (3), de las cuales 16 en la U.R.S.S., 12 en Estados Unidos, 12 en Canadá, 10 en Brasil, etc. Las 10 más importantes (el asterisco indica en construcción en el año 1978; la cifra entre paréntesis corresponde a la potencia total que se prevé instalar) figuran en la Tabla 21-4 (pág. 443).

(2) Véase Claudio Mataix, *Turbomáquinas Hidráulicas*, Ediciones I.C.A.I., Madrid, 1975, 1.371 págs, Sec. 6.2.

(3) La mayor central hidroeléctrica española, Aldeadávila, tiene una potencia instalada de 900 MW.

TABLA 21-2

POTENCIAL HIDROELECTRICO BRUTO MEDIO MUNDIAL

Continente o país	*Potencia media (GW) (*)*	*Energía media anual (GW · h)*	*% en relación con el total del mundo*	*kW/km² de superficie terrestre*
Europa	240	2.100	6,4	25
Asia	1.340	11.750	35,7	30
Africa	700	6.150	18,7	23
Norteamérica	700	6.150	18,7	34
América del Sur	600	5.250	16,0	33
Australia	170	1.500	4,5	19
U.R.S.S.	450	3.900	11,7	19
Total del mundo	3.750	32.900	100,0	28

(*) 1 GW = 1 Gigawatio = 10^9 W = 10^6 kW = 10^3 MW.

TABLA 21-3

POTENCIAL HIDROELECTRICO TECNICO EN EL MUNDO Y SU UTILIZACION

País	*Potencial hidroeléctrico técnico TW · h (*)*	*Grado de utilización en 1966 %*	*Producción de energía eléctrica en 1969*			*kW · h per cápita*
			Total TW · h	*Producción hidroeléctrica*		
				TW · h	*%*	
U.R.S.S.	2.106	4,4	545	92	17,0	2.310
U.S.A.	648	32,2	1.320	210	15,8	6.680
Canadá	218	61,0	161	133	83,0	8.086
Japón	130	61,5	215	80	37,2	2.150
Noruega	105	46,0	49	48	99,5	13.020
Suecia	85	55,0	51	47	90,0	6.500
Francia	76	71,0	111	54	48,5	2.245
Italia	60	74,0	90	44	49,4	1.698
Alemania Federal	25	68,0	175	17	9,7	3.020

(*) 1 TW · h = 1 Terawatio · hora = 10^{12} W · h.

Instalaciones notables

Instalaciones, que en un tiempo fueron excepcionales, han quedado ya superadas. Así sucede con las centrales del Tennessee en U.S.A. y la de Bratsk en la U.R.S.S., pioneras de las grandes centrales gigantes modernas. Las centrales del Tennessee son en total 9, con una potencia total instalada de 1.960 MW. Bratsk (18 grupos de 225 MW), símbolo de la potencia rusa, victoria del hombre sobre la naturaleza, vitrina de la Siberia soviética, actualmente es sólo la tercera en el mundo por la potencia instalada después de la Krasnoyarsk (12 grupos de 500 MW, U.R.S.S.) y Churchill Falls (11 grupos de 475 MW, U.S.A.) y pronto será la novena, después de Itaipu, Guri, Sayan Suchensk, Grand Coulee, Krasnoyarsk, LG 2, Churchill Falls y Ust Ilim. Bratsk sigue siendo el mayor lago artificial del mundo por el volumen de agua embalsada (169 km^3).

TABLA 21-4

LAS DIEZ CENTRALES MUNDIALES DE MAYOR POTENCIA INSTALADA

N.º de orden	*Central*	*Potencia (MW)*
1	Itaipu (río Paraná)	12.870 (21.500)
2	Guri* (Venezuela)	6.525
3	Gran Coulee* (U.S.A.)	6.480 (10.230)
4	Sayan Suchensk* (U.R.S.S.)	6.360
5	Krasnoyarsk (U.R.S.S.)	6.000
6	LG2* (río La Grande)	5.328
7	Churchill Falls (U.S.A.)	5.225
8	Ust Ilim* (río Angara)	4.050 (4.500)
9	Bogoutchany* (río Angara)	4.000
10	Paulo Alfonso (Brasil)	3.675 (6.650)

Instalaciones en Brasil

El Brasil desarrolla rápidamente su enorme potencial hidroeléctrico. Actualmente (1979) se hayan en servicio, ampliación o construcción las siguientes centrales de más de 1.000 MW: Itaipu (río Paraná, 12.600 MW), Tucurui (3.960 MW), Paulo Alfonso IV (2.462 MW), Itapauca (río Saõ Francisco, 2.430 MW), Santiago (1.998 MW), Foz de Areia (1.955 MW), Itumbiara (2.080 MW) y São Simão (2.680 MW).

La longitud total del río Paraná (4) es comparable con la del Volga, aunque algo menor; pero su caudal medio en la desembocadura (16.000 m^3/s) es el doble que el del Volga. La potencia equipable del Paraná se estima en 73.000 MW, con una productividad anual prevista de 300 TWh. Se prevé que la productividad en 1985 será superior a los 200 TWh con 40 centrales en servicio.

En la central de Itaïpu, gracias al enorme caudal medio de 9.000 m^3/s, se alcanzará entre 1985 y 1990 una productividad anual récord de 1985. Será entonces la primera central del mundo por su productividad anual y su potencia instalada (12.870 MW).

Central de Grand Coulee (río Columbia, U.S.A.).

En esta central, que es en la actualidad (1978) la central de mayor potencia instalada en el mundo (6.480 MW), están instalados los grupos hidroeléctricos de mayor potencia (700 MW). La potencia final instalada en esta gigantesca central será de 10.230 MW.

Central de Inga (río Zaire, en el Zaire)

El Zaire es el segundo río en el mundo por su caudal medio en la desembocadura (42.000 m^3/s) después del Amazonas (185.000 m^3/s). El Inga es el punto del globo, gracias a sus rápidos, en que se halla concentrado el mayor potencial hidroeléctrico del mundo: 370 TWh anuales (5) que se disipan anualmente casi en su totalidad en estos saltos. En la actualidad hay poco más de 1.000 MW instalados.

La energía eléctrica aumenta en todos los países. En muchos aumenta también la energía hidroeléctrica; pero en general la relación entre la última y la primera disminuye, como muestra la Tabla 21-5, que se refiere al año 1974, si se compara con la Tabla 21-3, de cinco años antes.

(4) El río Paraná atraviesa primero la parte meridional del Brasil, después hace frontera entre el Brasil y Paraguay y por último entre la Argentina y Paraguay.

(5) Esta cifra deja muy atrás al Itaïpu y al proyecto chino (240 TWh anuales) de Timpa-Yortong en el río Brahmapoutra.

TABLA 21-5

PORCENTAJE DE ENERGIA HIDRAULICA Y ELECTRICA TOTAL EN EL AÑO 1974 POR ORDEN DECRECIENTE

País	*H/E %*	*País*	*H/E %*
Noruega	99,9	Méjico	41
Zaire	96	Venezuela	40
Brasil	95	España	38
Rodesia del Sur	90	India	36
Nueva Zelanda	84	Perú	32
Suiza	77	Francia	31
Suecia	76	China	30
Canadá	75	Italia	26
Colombia	75	Turquía	25
Portugal	74	Australia	19
Austria	66	Japón	18
Chile	65	Rumanía	17
Egipto	63	Argentina	17
Corea del Norte	62	U.S.A.	15
Paquistán	52	U.R.S.S.	13
Yugoslavia	52	Checoslovaquia	7
Finlandia	47	República Federal Alemana	6
Irán	44	Reino Unido	1,7

No todos los países muestran la misma tendencia. Así, por ejemplo, en Argentina que en el año 1970 tenía un porcentaje $H/E \cdot 100 = 9$; este porcentaje ascendía a 17 en 1974, a 20 en 1976 y se espera que llegue al 73 % en el año 2000.

En general, en todos los países existe actualmente la tendencia de explotar al máximo los recursos hidráulicos, incluso con microcentrales, o bien empleando unidades estandarizadas, automatizadas, ampliando centrales ya existentes e instalando turbinas en presas previamente construidas para otros fines (riego, regulación de caudal, etc.).

China tiene inmensos recursos hidroeléctricos entre los que se cuentan las centrales en proyecto de Yang-tsé-Kiang, de 20.000 MW y la de Bramapoutre, de 5.000 MW (6) con un salto esta última de 2.400 m.

Rusia está intensificando el desarrollo de su enorme potencial energético en los últimos años. Citemos las grandes centrales en los ríos Volga, Kama, Dnieper, Sulaka, Irtish, Angara, Yenisséi, etc. He aquí algunos ejemplos: Central del Volga de Lenin, 2.300 MW; del Volga «Congreso XXII», 2.530 MW; Bratskaja, en el Angara, 4.500 MW; Krasnojarskaja, en el Yenisséi, 6.000 MW. Actualmente se construyen en los Talleres Metalúrgicos de Leningrado 10 turbinas de 650 MW (máximo 735 MW) cada una para la central de Sayano-Sushenk, en el río Yenisséi, 6.300 mW, etc. En el Volga, el primer río europeo por su longitud (3.700 km) y su caudal, hay instaladas nueve centrales, que actualmente pueden desarrollar una potencia de 7.100 MW y que se prevé serán ampliadas hasta 10.270 MW.

Los datos publicados por el Ministerio de Investigación y Tecnología de la República Federal Alemana (7) en 1975 cifran el potencial hidroeléctrico mundial en unos $2{,}9 \cdot 10^6$ MW. A este potencial hay que añadir, según la misma fuente, otros 64.000 MW que podrían aprovecharse en las centrales mareomotrices (véase la Sec. 23.2).

(6) Esta central tendría una potencia instalada 55 veces mayor que la central española de Aldeadávila de 900.000 kW, que fue en un tiempo la de mayor potencia de la Europa Occidental, hoy superada por la de Vianden.

(7) Bundesministerium für Forschung und Technologie, *Auf dem Wege zu neuen Energiesystemen*, Teil I, Bonn 1975, pág. 32.

Los seis países de mayor potencial equipable en el mundo se muestran en la Tabla 21-6 siguiente (8).

TABLA 21-6

PAISES DE MAYOR POTENCIAL EQUIPABLE

N.º de orden	*País*	*Potencial equipable (TW · h anuales)*	*Potencial equipable en 1974 (TW · h anuales)*	*% del potencial equipable*
1	China	1.320	35	2,65
2	U.R.S.S.	1.095	132	12,05
3	U.S.A.	701,5	304	43,62
4	Zaire	660	3,850	0,58
5	Canadá	535,2	210	39,23
6	Brasil	519,3	66,96	12,89

Energía hidroeléctrica en España

La Tabla 21-7 muestra algunos datos pertenecientes a las últimas estadísticas españolas publicadas por la Jefatura de Servicios Eléctricos de Obras Públicas (9).

TABLA 21-7

POTENCIA INSTALADA Y PRODUCCION DE ENERGIA ELECTRICA EN LAS CENTRALES ESPAÑOLAS EN 1970 (10)

Cuenca	*N.º de ríos*	*N.º de centrales*	*Producción en 1970 kW · h*	*Potencia instalada kW*	*Horas de utilización*
Norte	314	630	7.704.795.035	3.050.319	2.526
Ebro	155	439	7.692.218.464	2.621.569	2.934
Duero	57	186	5.706.611.622	2.106,831	2.709
Júcar	26	96	1.583.606.382	416.385	3.803
Tajo	52	152	2.980.385.310	1.876.953	1.588
Guadalquivir	49	99	826.612.325	369.205	2.239
Guadiana	7	25	506.252.076	165.085	3.067
Pirineo Oriental	41	246	481.186.346	211.406	2.276
Sur	23	36	259.702.817	84.113	3.088
Segura	11	47	199.192.320	75.455	2.640
Canarias	5	5	7.712.443	1.933	3.990
Baleares	2	2	0	114	0

(8) Resumen de la tabla VI.7 de la «Enquête sur les ressources énergétiques». En dicha tabla España ocupa el lugar 26 con un potencial equipable de 65 TWh anuales y un potencial equipado de 30,7 TW · h anuales, que constituyen el 45,48 %.

(9) M.O.P., Jefatura S.E.O.P., *Estadística sobre embalses y producción de energía hidroeléctrica en 1970 y años anteriores y tracción eléctrica en 1970 y años anteriores y tracción eléctrica en 1973*, 488 págs.

(10) Libro citado, pág. 306.

TABLA 21-8

EVOLUCION DEL PORCENTAJE DE ENERGIA HIDROELECTRICA ESPAÑOLA EN RELACION CON LA PRODUCCION TOTAL DE ENERGIA ELECTRICA DURANTE LOS AÑOS 1939-1970 (*)

Año	*Porcentaje de producción hidroeléctrica en relación con la total*
1939	91,42
1940	92,71
1941	94,06
1942	91,59
1943	91,00
1944	85,09
1945	76,56
1946	84,93
1947	87,13
1948	84,77
1949	71,53
1950	73,45
1951	83,89
1952	83,01
1953	77,36
1954	72,56
1955	76,33
1956	81,84
1957	66,62
1958	69,23
1959	82,51
1960	83,76
1961	76,40
1962	70,03
1963	81,68
1964	69,89
1965	62,06
1966	72,34
1967	55,72
1968	53,25
1969	58,90
1970	49,48
Media 1939-1970	68,24

(*) Libro citado, pág. 432.

El *Duero* es el río más importante de la península Ibérica, con un caudal medio en la desembocadura de 600 m^3/s, superior al del Ebro y al del Tajo. La potencia instalada en el Duero hasta el momento presente es la siguiente:

—en el Duero español	1.140 MW
—en la parte adjudicada a España del Duero internacional (frontera entre España y Portugal)	2.200 »
—en el Duero portugués	1.600 »
—en la parte adjudicada a Portugal del Duero Internacional	2.150 »
Potencia total instalada en el Duero	4.350 MW

TABLA 21-9

CUADRO RESUMEN DEL POTENCIAL HIDROELECTRICO ESPAÑOL ESTUDIADO EN 31-XII-1970 (*)

Centrales hidroeléctricas	*Potencia kW*	*% sobre la potencia total prevista*	*Producción en año medio GW · h*	*% sobre la producción total prevista*
En explotación en 31-XII-1970	10.975.358	40,63	33.804,1	53,72
Con concesión otorgada	5.623.284	20,80	11.236,3	17,85
Suma	16.598.642	61,43	45.040,4	71,57
Con concesión en trámite	4.468.130	16,57	7.765,6	12,35
Suma	21.066.772	78,00	52.805,0	83,92
Otros estudios	5.940.274	22,00	10.116,3	16,08
Total	27.007.046	100,0	62.921,3	100,00

(*) Libro citado, pág. 455.

En España, como en la mayor parte de los países desarrollados o en vías de desarrollo, la demanda creciente de energía eléctrica se ha cubierto en estos últimos años principalmente con un aumento creciente de la energía termoeléctrica clásica o de combustible fósil y en los últimos con energía termoeléctrica con combustible nuclear. Recientemente se ha despertado un interés nuevo en nuestro país por explotar al máximo el potencial hidroeléctrico aún no explotado (11).

En Europa se está llegando ya a una saturación en la explotación de los recursos hidráulicos, excepto en los siguientes países: Noruega, España, Portugal, Austria, Checoslovaquia, Hungría, Yugoslavia, Grecia y Turquía, sobre todo en la U.R.S.S.; pero en general los grandes recursos hidráulicos mundiales se encuentran en los países menos desarrollados.

Al final del año 1978 la potencia total instalada en España era de 28.198,270 kW, distribuidos del modo siguiente: 47,89 %, centrales hidroeléctricas; 48,14 %, centrales termoeléctricas clásicas, y 3,97 % termoeléctricas nucleares.

21.2. EXPLOTACION DE LOS SALTOS NATURALES: CAUDAL INSTALADO

Una vez adquiridos los derechos de explotación de un salto natural, cuya altura bruta es H_b, se hace un estudio detenido del caudal máximo del río que han de absorber las turbinas. Este caudal no puede ser ni el caudal máximo, o caudal de crecida del río en un año lluvioso, ni el caudal mínimo de un año seco.

En el primer caso estarían las *turbinas sobredimensionadas* y durante largos períodos un tanto por ciento grande del capital invertido en las mismas improductivo.

En el segundo caso estarían las *turbinas infradimensionadas* y un tanto por ciento grande de la energía del salto quedaría sin explotar.

(11) He aquí algunos datos, que reflejan el interés que recientemente se ha despertado en España por incrementar la potencia hidroeléctrica instalada: ampliación de la *central de Villarino* con dos grupos más de 135 MW cada uno, hasta totalizar 810 MW; instalación del tercer grupo de 75 MW en la *central de Conso* en el río Camba; proyecto de la central de *Muela de Cortes*, de 4 × 110 MW, y *central de Gabriel y Galán*, con un grupo reversible de 110 MW y 2 grupos de 20 MW cada uno.

Los datos necesarios para este estudio se han de recoger a lo largo de muchos años, cuantos más mejor, en los diferentes meses del año, y en todos los emplazamientos previsibles de centrales (el caudal de un río varía naturalmente de un lugar a otro por las aportaciones de los afluentes). La insuficiencia de datos, recogidos por los equipos destacados en todos los cauces fluviales del país, hace prácticamente imposible una previsión acertada.

La Fig. 21-1 representa una curva *hidrógrafa anual* típica. Con las mediciones de caudal realizadas se construyen las *hidrógrafas* de los lugares en que se preven aprovechamientos hidroeléctricos. En ella se toman como abscisas los meses del año y como ordenadas los caudales. Este ejemplo particular corresponde a un lugar en que los caudales son máximos en los meses de junio y julio, mientras que en los meses de diciembre, enero, febrero y marzo son mínimos. Este tipo de hidrógrafa es característica de los ríos con *régimen de nieves* (alimentados por fuentes comprendidas entre los 1.000 y 2.000 m, o con *régimen glacial* (alimentados con fuentes de más de 2.000 m de altura). Las estaciones de los ríos con *régimen fluvial* (alimentados por fuentes de 500 a 1.000 m) se caracterizan, por el contrario, por tener caudales fuertes en invierno y débiles en verano.

Un estudio energético y económico de varias hidrógrafas correspondientes a diferentes años secos, normales o húmedos en una misma estación fluvial, o mejor de la *hidrógrafa media* construida con los caudales medios en 15 ó 20 años (cuantos más años mejor), conduce finalmente a la selección del *caudal instalado* que se ha representado con una raya horizontal en la figura.

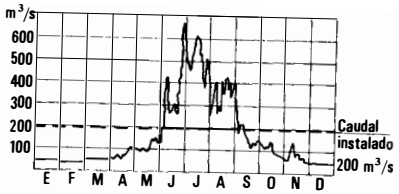


FIG. 21-1. Hidrógrafa anual en una estación hidráulica. En el eje de abscisas se han indicado los meses del año. El *caudal instalado*, en este caso de 200 m³/s, se determina haciendo un estudio energético y económico global de la explotación. En los meses de enero a mayo y septiembre a diciembre en este caso las turbinas no funcionarían a plena potencia (estiaje).

Caudal instalado es el caudal total que absorberán todas las turbinas de la futura central en su carga nominal.

En los meses secos la central no funcionará a plena potencia y en los meses muy lluviosos la central aprovechará toda la energía disponible.

Si la altura del salto oscila se hará también un estudio de dicha oscilación antes de fijar la altura neta (véase Sec. 22.8) para la cual se han de diseñar las turbinas.

21.3. CENTRALES HIDROELECTRICAS

Cada *central hidroeléctrica* constituye un proyecto distinto de los demás. La central se ha de adaptar a la configuración del terreno y a las características que ofrece el salto en la naturaleza. Porque la naturaleza no ofrece simplemente una potencia hidráulica bruta, por ejemplo, de 100.000 kW, sino que esta misma potencia en veinte sitios distintos del globo la ofrece en configuraciones de terreno

distintas y con caudales y saltos brutos distintos: por ejemplo (potencia bruta $\simeq QH \cdot 10$): $Q = 10$ m³/s y $H_b = 1.000$ m; $Q = 50$ m³/s y $H_b = 200$ m; $Q = 100$ m³/s y $H_b = 100$ m, e tcPor tanto, ni las centrales, ni las turbinas de estos veinte lugares pueden ser iguales.

Es interesante ver en cambio lo que sucede en una *central térmica.* Estas pueden desplazarse donde más convenga, puede multiplicarse un proyecto idéntico; por ejemplo, en veinte centrales, todas ellas de idéntica potencia, por ejemplo, 100.000 kW. En las veinte centrales las turbinas pueden ser idénticas. En efecto, en las centrales térmicas, la naturaleza ofrece el combustible (carbón, fuel, etc.); pero el *salto térmico* se crea en la caldera en las condiciones de *caudal* y *salto entálpico* (el salto entálpico equivale al salto hidráulico en las centrales hidráulicas), que se estimen más convenientes.

El *coste absoluto* de una central hidroeléctrica orientativamente podría en algunos casos repartirse así: 55 por 100, la presa; 20 por 100, el equipo o maquinaria; 15 por 100, el terreno, y 10 por 100, las estructuras de la central; pero estos porcentajes pueden oscilar muchísimo, según el tipo de instalación.

Como el *coste absoluto* de una central depende de la potencia, para comparar costes se atiende al *coste por kW instalado.* Este disminuye al aumentar la potencia instalada en la central. Así *orientativamente* podemos decir que si el coste por kW en una central grande es 1, en una central pequeña será 3 y en una central muy pequeña, 6.

Es interesante también comparar el coste por kW instalado en una central hidroeléctrica con el de una central térmica de igual potencia. En general el *coste de instalación* es mayor; aunque la oscilación es grande, pudiendo ser igual el coste por kW instalado en una central hidroeléctrica y valer hasta tres veces más que el de una central térmica; pero el *coste de funcionamiento* es siempre mucho menor en una central hidráulica (se ahorra el precio del combustible).

Para acelerar el ritmo de la electrificación de un país en desarrollo las centrales térmicas tienen dos ventajas: menor inversión de capital inicial, porque el precio por kW instalado es menor, y posibilidad de multiplicar el mismo proyecto de central y de turbina, fabricando, por ejemplo, 50 turbinas exactamente iguales de 300.000 kW. Por el contrario:

Las turbinas hidráulicas no pueden fabricarse en serie porque en la naturaleza no se dan prácticamente dos saltos iguales.

21.4. CLASIFICACION DE LAS CENTRALES

21.4.1. Según el tipo de embalse

Las centrales se clasifican en:

1.º *Centrales de agua fluyente*

No tienen embalse propiamente tal. El agua o se utiliza en las turbinas o se derrama por el aliviadero de la central. Son las más frecuentes y entre ellas se cuentan las centrales de más potencia. Son centrales de llanura. Se caracterizan por gran caudal y poca altura. La central se instala en el curso

mismo del río o en un canal desviado, como puede verse en la Fig. 22-14, después de interceptar el mismo por un dique de contención. Se pueden subclasificar en centrales con reserva, diaria o semanal (la reserva no supone propiamente un embalse) o sin reserva. En las primeras se ensancha algo el curso del río para una cierta acumulación de agua.

2.° *Centrales con embalse*

La Fig. 21-2 es un esquema de una de estas centrales con presa, canal de derivación, que aprovecha un meandro del cauce natural del río, tubería forzada (o tubería en la cual el agua se encuentra bajo presión) y central.

El canal se construye con poca pendiente y gran sección transversal para disminuir las pérdidas y aprovechar al máximo la energía, que perdería en el lecho natural tortuoso del río. [Véase Ec. 21-1).]

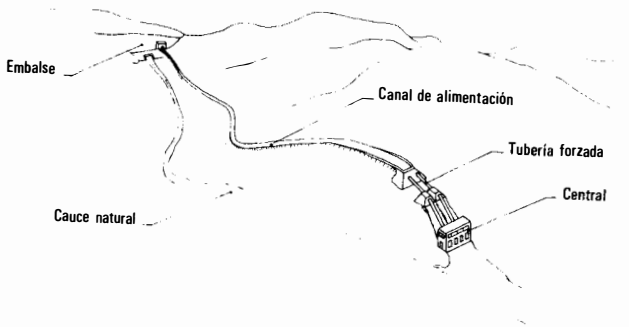


FIG. 21-2. Central con embalse, canal de alimentación y tubería forzada.

El embalse tiene por objeto regular las aportaciones del caudal de los ríos. Los embalses pueden ser destinados por su capacidad de acumulación a regulación mensual, anual o hiperanual. La acertada selección económica de la capacidad de un embalse depende de un gran número de factores y en particular del coste de la obra, que depende en primer lugar de la configuración natural del terreno.

En una estadística de las grandes presas europeas en servicio en el año 1974, España figura en primer lugar con 573 presas, de las cuales el 42 % son utilizadas en conexión con centrales hidroeléctricas (11 bis).

En relación con los embalses españoles es interesante la siguiente Tabla 21-10 (12).

3.° *Centrales de acumulamiento por bombeo*

El principio básico de una *central de acumulamiento por bombeo* es el siguiente: en los períodos de poca demanda de energía, por ejemplo, en las horas nocturnas, se utiliza energía sobrante de la red, proveniente de otras centrales conectadas eléctricamente con la central de bombeo, para bombear agua del nivel de aguas abajo al nivel de aguas arriba.

(11 bis) En el Congreso de las Grandes Presas, celebrado en Madrid en el año 1973, un representante de China comunicó que entre los años 1940 a 1972 China puso en servicio 13.517 presas de más de 15 m de altura. Según esta comunicación, China contaría con la mitad de las presas existentes en el mundo.

(12) Libro citado, tabla VII-3-5, pág. 446.

TABLA 21-10

CENTRALES ESPAÑOLAS ALIMENTADAS POR EMBALSES CON CAPACIDAD SUFICIENTE PARA ASEGURAR EL CAUDAL A PLENA CARGA DE MODO CONTINUO DURANTE EL TIEMPO QUE SE INDICA Y COMPARACION CON EL TOTAL HIDROELECTRICO NACIONAL
(1970)

Grupo	*Intervalo*	*N.° de centrales*	*Producción*		*Potencia*		*Horas de utilización*
			Total del grupo (kW · h)	*% del total*	*Total del grupo (kW)*	*% del total*	
1	Más de 2.160 horas (90 días)....	28	1.055.610.853	3,77	989.427	9,01	1.057
2	Entre 2.160 horas (90 días) y 720 horas (30 días).....	39	5.848.940.433	20,93	2.843.053	25,89	2.057
3	Entre 720 horas (30 días) y 360 horas (15 días).....	19	2.345.489.155	8,39	960.321	8,75	2.442
4	Entre 360 horas (15 días) y 160 horas (7 días).....	14	2.142.788.460	7,67	679.208	6,19	3.155
5	Menos de 168 horas (centrales de agua fluyente).....	1.863	16.555.446.239	59,24	5.507.359	50,16	3.006
	Total hidroeléctrico nacional..	1.963	27.948.275.140	100,00	10.979.368	100,00	2.546

Dos hechos han contribuido a la proliferación actual de este tipo de centrales: la interconexión de todas las centrales de una misma nación en una red nacional única y el desarrollo espectacular de las centrales térmicas convencionales y nucleares conectadas a la misma red. La economía de la explotación de las centrales térmicas de ambos tipos exige gran regularidad de marcha reduciendo a un mínimo las paradas y arranque de los grupos. De ahí que en los períodos de bajo consumo hay un excedente de energía considerable. La acumulación en un embalse superior constituye el mejor método conocido hasta el presente para acumular dicha energía sobrante. Las centrales de acumulación por bombeo funcionan entre dos embalses superior e inferior, acumulando energía con el bombeo y produciendo energía con la turbinación.

En algunos casos, las centrales de acumulación (13) por bombeo constituyen un buen negocio de compra y venta porque en ellas se compra energía barata nocturna, que se acumula en el embalse superior y se vende energía cara diurna o energía de punta obtenida en la turbinación.

Las centrales de acumulación por bombeo se han construido en multitud de variantes, que pueden reducirse a las seis siguientes:

1.ª Centrales separadas para bombeo y generación.

2.ª Centrales con *grupos cuaternarios:* en la misma central, grupos motor-bomba exclusivamente para bombeo y grupos turbina-generador exclusivamente para generación.

(13) En Estados Unidos se estudia la posibilidad de centrales de acumulación empleando un *embalse superior* en el nivel del suelo y un embalse subterráneo, que podría estar a 1.200 m de profundidad.

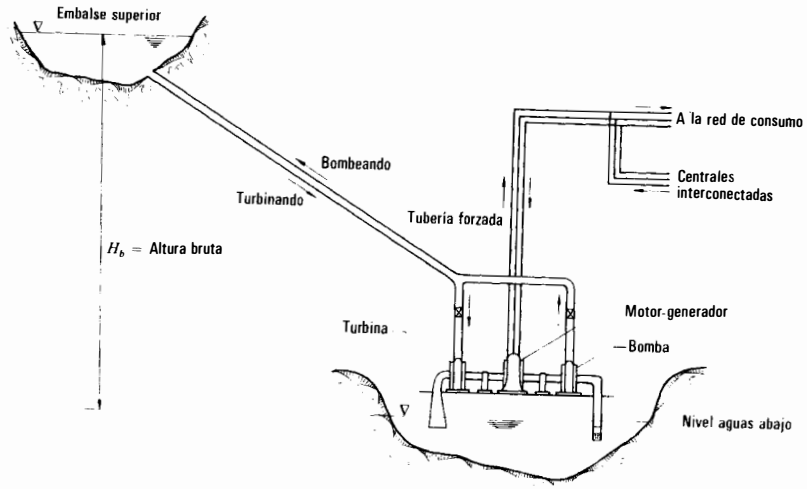


FIG. 2-3. Esquema de una *central de bombeo con grupo ternario:* con una sola máquina eléctrica (motor/alternador síncrono), dos hidráulicas (bomba y turbina) y tubería forzada única para el caudal ascendente y descendente.

3.ª Centrales con *grupos ternarios*. Cada grupo se compone de tres máquinas: bomba, motor-alternador síncrono y turbina. La máquina eléctrica es, pues, una máquina reversible; pero las máquinas hidráulicas son dos distintas. En la Fig. 21-3 puede verse un esquema de este tipo de central con grupos ternarios.

4.ª Centrales con *grupos binarios*. Cada grupo se compone de dos máquinas solamente: una máquina eléctrica: motor-alternador síncrono y una máquina hidráulica: bomba-turbina reversible.

5.ª Centrales mixtas de grupos ternarios y convencionales: grupos bomba-motor/alternador-turbina y grupos turbina-alternador.

6.ª Centrales mixtas de grupos binarios y convencionales: grupos motor/alternador-bomba/turbina y grupos turbina-alternador.

En el pasado, los grupos binarios se emplearon sobre todo en Norteamérica, donde fueron desarrollados, y los grupos ternarios en Europa. En la actualidad, los grupos binarios, que han superado el inconveniente que tenía la máquina hidráulica reversible de su bajo rendimiento al funcionar como turbina, se emplean en todo el mundo más frecuentemente que los ternarios, por el ahorro en la inversión que supone el empleo de una máquina costosa menos.

En la máquina hidráulica reversible del ciclo binario existen en la actualidad cinco variantes:

1.ª) *Bomba-turbina Kaplan* de eje horizontal, vertical o inclinado, sobre todo del tipo bulbo. La turbina Kaplan sólo es aplicable para saltos de altura moderada; siendo por el contrario en general la acumulación de la energía tanto más económica cuanto mayor sea el desnivel geodésico entre los estanques superior e inferior. El rendimiento en el bombeo y turbinación es elevado, gracias a la orientación de los álabes.

2.ª) *Bomba-turbina Dériaz*, que viene a ser una turbina Francis de álabes del rodete orientables.

3.ª) *Bomba-turbina tipo Francis* de álabes del rodete fijos.

4.ª) *Bomba-turbina de dos velocidades*. Así, por ejemplo, los ocho grupos reversibles de la Central de San Luis, U.S.A., funcionan a 120 rpm como bomba y a 150 rpm como turbina. Para ellos el motor-generador eléctrico único es de polos conmutables.

5.ª) *Bomba-turbina isogiro*. Estos grupos isogiro, desarrollados por la firma Charmilles de Suiza, deberán estudiarse en las obras especializadas (14).

En la Tabla 21-11 pueden verse las características de algunas centrales extranjeras de acumulación por bombeo equipadas con grupos binarios.

La Tabla 21-12 reúne las características de las centrales de acumulación por bombeo españolas, que entraron en servicio hasta el año 1970.

La central española de acumulación por bombeo de más potencia es la *central de Villarino*, que ha sido ampliada después de la fecha de confección de la Tabla 21-12 a 6 grupos totalizando una potencia instalada de $6 \times 135 = 810$ MW, con un caudal nominal en turbinación de 38,75 m^3/s y en bombeo de 28 m^3/s. El embalse superior hiperanual de 2.648 Hm^3 de volumen total está creado por la *presa de la Almendra*, de tipo bóveda, de 197 m de altura, la presa más alta construida hasta el presente en España. Desde este embalse una galería a presión de 15 km de longitud, prolongada por las tuberías forzadas, conduce el agua a las seis bombas-turbinas reversibles alojadas en una central subterránea. La galería de desagüe conduce el agua al embalse del salto de Aldeadávila en el río Duero, el salto de mayor potencia de España. Entre ambos embalses, superior (Almendra) e inferior (Aldeadávila), el desnivel es de 402 m. De esta manera se puede bombear agua del Duero una vez turbinada en la central de Aldeadávila; mientras que el embalse de la Almendra regula también las aportaciones irregulares del Tormes caracterizadas por un gran estiaje.

La central de acumulación por bombeo de mayor potencia de la Europa Occidental es la *central de Vianden*, en Luxemburgo, con un caudal pendular diario de $5{,}4 \cdot 10^6$ m^3. Los grupos I a IX de esta central son ternarios, giran a 428 rpm y totalizan una potencia de 900 MW. Los grupos ternarios constan de turbina Francis, motor/generador y bomba de dos flujos y dos escalonamientos. Desde 1973 funciona el grupo X, con el cual la potencia total instalada en Vianden asciende a 1.130 MW. El grupo X es un grupo binario de eje vertical, que gira a 333 rpm.

4.º *Centrales mareomotrices*

Se estudiarán en la Sec. 23.2.

21.4.2. Según la potencia

Las centrales se clasifican en cuatro grupos, aunque evidentemente los límites de potencia que se indican son convencionales:

1.º *Microcentrales*

Potencia máxima, 99 kW.

2.º *Centrales de pequeña potencia*

Potencia de 100 a 999 kW.

(14) Véase Claudio Mataix, *Turbomáquinas Hidráulicas*, Ediciones I.C.A.I., Madrid 1975. 1.371 págs. (págs. 839-840).

TABLA 21-11

CARACTERISTICAS DE ALGUNOS GRUPOS BINARIOS EXTRANJEROS DE ACUMULACION POR BOMBEO

(En las columnas de P_a y H los primeros números se refieren al funcionamiento como bomba y los segundos al funcionamiento como turbina)

Central	*País de instalación*	*Año*	*N.º de grupos*	*Disposición del eje*	P_a *unitaria (MW)*	H *(m)*	n *(rpm)*
Taum Sauk	U.S.A.	1963	2	V (= vertical)	144 261	231 254	200
Yard Creeks	U.S.A.	1965	3	V	74,5 104,3	222 199	
Cornwall	U.S.A.	1965	8	V	186,5 295	310 350	
Ikehara 2	Japón	1966	2	V	110 110	132 129,5	150
Cabin Creek	U.S.A.	1967	2	V	97 116,3	320 326	
Nagano	Japón	1968	2	V	120 113	111 107,5	150
Brasimone	Italia	1970	2	V	150,3 169,7	385,9 377,7	375
Kisen Yama	Japón	1970	1	V	240,0 240,0	230 220	225
Vianden 10	Luxemburgo	1970	1	V	215,0 196,4	294,7 287,1	333,3
Ludington	Japón	1972	6	V	323,0 343,0	113,6 107,7	112,5
Blenhein Gilboa	Japón	1972	4	V	287,0 300,0	358 339	257
Kastaic	Japón	1970	6	V	263,0 261,0	381 328	257

Bomba-turbina con motor-generador de dos velocidades

Hatanagf	Japón	1962	2	V	33,7 45,4	103,2 101,8	200 120/167
San Luis	U.S.A.	1965	8	V	28 23,8	88 59,6	120/150 120/150

TABLA 21-12

CARACTERISTICAS, CONSUMO Y PRODUCCION DE ENERGIA HIDROELECTRICA EN LAS CENTRALES DE ACUMULACION POR BOMBEO QUE ENTRARON EN SERVICIO HASTA EL AÑO 1970

Central	*Río*	*Provincia*	*Volumen de la zona útil del embalse de acumulación (Hm³)*		*Desnivel entre los embalses superior e inferior (m)*	*Tipo de instalación de bombeo*	*Maquinaria hidroeléctrica*								*Año de entrada en servicio*	*Energía consumida en bombeo en el año 1970 (kW · h)*	*Energía producida (kW · h)*
							Turbinas		*Alternadores*		*Bombas*		*Motores*				
			Embalse superior	*Embalse inferior*			*Caudal (m³/s)*	*Potencia (MW)*	*N.º*	*Potencia (MW)*	*Caudal (m³/s)*	*Potencia (MW)*	*N.º*	*Potencia (MW)*			
Urdiceto	Cinca	Huesca	5,7	—	420	Bomba	2 × 1,1	2 × 3,3	2	3,6	1 × 0,45	3,2	1	3,6	1929	3.794.000	2.437.000
Gobantes	Turón	Málaga	86,0	4,0	40	Bomba	1 × 13	1 × 3,5	1	3,344	1 × 0,36	2,3	1	2,5	1955	0	2.533.000
Valdecañas	Tajo	Cáceres	1.176,0	24,0	75-47,5	Turbina-Bomba	3 × 138	3 × 86,5	3	75,0	1 × 10,7	5,4	1	6,0	1964	180.000	560.598.000
Torrejón	Tajo	Cáceres	24,0	1.784,0	48-22	Turbina-Bomba	4 × 82	4 × 33,5	4	32,4	6 × 110	3 × 86,5	3	93,75			
Pintado, El	Tiétar	Cáceres	10,0	—	27,5-0,0	Bomba	1 × 9,65 1 × 6,37 4 × 6,04	1 × 15,6 1 × 10,7 1 × 8,8	1 1 1	14,4 10,075 6,4	4 × 98	4 × 33,5	4	40,5	1966	14.622.000	297.096.000
Puente Bibey	Viar	Sevilla	165,0	0,7	200	Bomba	4 × 26,4	4 × 80,9	4	82,2	1 × 8	1 × 15	1	14,0	1966	13.478.000	65.998.000
Santiago-Jares	Bibey	Orense	238,0	1,7	350	Bomba	2 × 14	2 × 25,9	2	25,6	1 × 17	1 × 82,5	1	14,0	1967	120.212.000	656.800.330
Ip	Jares	Orense	6,3	—	225	Turbina-Bomba	3 × 3,37	6 × 28,1	3	27,48	2 × 9	2 × 25	2	70,0	1967	28.998.800	107.495.000
Villarino	Tormes	Salamanca	5,3 2.474,0	0,5 115,0	970-920 402-344	Bomba Turbina-Bomba	3 × 3,37 4 × 38,75	6 × 28,1 4 × 138	3 4	27,48 135,0	3 × 2,95 4 × 36,9	3 × 29,4 4 × 147,2	3 4	32,5 135,0	1969 1970	0 0	69.873.000 44.560.000
																267.126.800	1.807.390.330

3.º *Centrales de potencia media*

Potencia de 1.000 a 9.999 kW.

4.º *Centrales de gran potencia*

Potencias superiores a 10.000 kW.

Las microcentrales, que constituyeron un día la solución para proveer económicamente de electricidad granjas, poblados pequeños, etc., y que perdieron interés cuando las redes eléctricas nacionales cubrían prácticamente la geografía del país, vuelven a considerarse en muchas naciones al revalorizarse con la crisis energética aun los más pequeños recursos. Las microcentrales y más generalmente las centrales de pequeña potencia de 50 a 5.000 kW despiertan hoy día crecido interés (15). Algún gobierno favorece la explotación privada de los pequeños recursos hidroeléctricos, comprándose para la red general la energía producida:

1. Entre otras, las casas Drees y Ossberger en Alemania, Neyrpic y otros fabricantes más en Francia y Allis Chalmers en U.S.A., construyen pequeñas turbinas.
2. En el Japón, según un artículo de N. Sasaki y T. Yasuda, la crisis del petróleo de 1973 ha despertado el interés en las pequeñas turbinas (300-10.000 kW), que totalizan una potencia estimada de 10.000 MW, que podrían añadirse a la red nacional.
3. En U.S.A., un reciente artículo de J. D. Lawrence publicado en «Public Power», propugna el aprovechamiento de los pequeños recursos hidroeléctricos, cuyo precio se reduciría con unidades estandarizadas de funcionamiento totalmente automático.
4. En China se obtienen actualmente unos 2.000 MW en un total de 60.000 minicentrales, que oscilan entre 20 a 50 MW (16).
5. En España, de las 1.677 centrales catalogadas en las estadísticas del año 1978 del M.O.P.U., 656 son microcentrales.
6. La Electricité de France explota 147 pequeñas centrales (de 50 a 2.000 kW) y otras 913 son explotadas por particulares. Con la crisis del petróleo de 1973 aumenta el mercado nacional e internacional de las microcentrales, que son más económicas y de mayor duración que las centrales con motor Diesel y no requieren personal tan especializado.

21.4.3. Según la altura de salto

En este lugar, como siempre que no se especifica los contrario, se entiende por salto la *altura neta*, que suele ser menor que la *altura bruta*, H_b [Ec. (21-2)]. El concepto de *altura neta* juega un papel tan importante en las turbinas como el de *altura útil o efectiva* en las bombas, y se puntualizará en la Sec. 22.8.

La *clasificación de las centrales según la altura de salto* es la más importante porque es el salto neto más que ninguna otra característica el que determina tanto la obra civil (presa, canal de derivación, conducto forzado, central) cuanto el tipo de turbina, así como la velocidad del grupo y el tipo de alternador, como se puede ver en la Tabla 21-13 de *características de las centrales según la altura de salto*.

(15) Véase folleto de la Allis Chalmers, U.S.A., *Standardized hydroelectric generating units*. (Ofrece 10 tamaños estándard de turbinas (turbinas bulbo) para $H \leq 15$ m y P_a de 50 a 5.000 kW).

(16) En China hasta ahora la política hidroeléctrica ha sido desarrollar estos pequeños proyectos construidos y explotados por la comunidad local. En la actualidad se desarrollan dos grandes proyectos hidroeléctricos de ámbito nacional: la central de Gezhouba, de 2,7 GW, en el río Yangtze, y otra en el río Amarillo, de 1,6 GW.

TABLA 21-13

CARACTERISTICAS DE LAS CENTRALES SEGUN LA ALTURA DE SALTO

Característica	*Saltos de pequeña altura*	*Saltos de mediana altura*	*Saltos de gran altura*
Topografía	Terreno llano o ligeramente ondulado	Terreno suavemente ondulado	Terreno montañoso (a veces suavemente ondulado)
Importancia del caudal con respecto a la altura	Grande	Media	Pequeña
Embalse	Sin embalse o con reserva diaria; presa a través del río; compuertas móviles	Presa y reserva diaria o semanal en el mismo río; compuertas móviles y aliviaderos fijos; a veces embalse	Embalse anual o hiperanual
Llegada de agua a la central	Central de agua fluyente (a veces canal de derivación)	Canal de derivación (a veces central de agua fluyente)	Canal de derivación o túnel y central de pie de presa
Tipo de central	Canal de llegada —sala de máquinas— subestructura	Canal de llegada —tubería forzada— sala de máquinas —subestructura	Chimenea de equilibrio —tubería forzada sala de máquinas —subestructura
Tipo de turbina	Kaplan, hélice, bulbo, Francis exprés	Francis normal (a veces modernamente también Kaplan)	Francis lenta, Pelton (a veces modernamente también Kaplan)
Tamaño de turbina	Turbinas grandes	Turbinas medianas	Turbinas pequeñas
Eje de la turbina	Corrientemente eje vertical		Corrientemente eje horizontal
Coste de la central/kW instalado	Alto	Medio	Bajo

También aquí los límites de saltos que se indican son convencionales.

1.º *Saltos de pequeña altura*

Altura neta, $H \leq 14{,}99$ m.

2.º *Saltos de mediana altura*

$15{,}00 \leq H \leq 49{,}99$ m.

3.º *Saltos de gran altura*

$H \geq 50$ m.

21.4.4. Según la economía de la explotación

Las centrales se clasifican en:

1.º *Centrales independientes*

Alimentan una red individual no conectada a otras centrales.

2.º *Centrales interconectadas*

Alimentan una red común junto con otras centrales hidráulicas, térmicas, convencionales o nucleares. La tendencia moderna, como sucede en España, es crear una red nacional única, con interconexión de todas las centrales, incluso las pequeñas (17).

21.4.5. Según el lugar de instalación

1.º *Centrales de agua fluyente*

La central intercepta el curso del río.

2.º *Centrales de pie de presa*

La central se construye al pie del embalse.

En la Fig. 21-4 puede verse un corte esquemático de la central de Entrepeñas con la tubería forzada que sale del embalse y alimenta la turbina con su tubo de aspiración y el canal de salida.

3.º *Centrales subterráneas*

Se desarrollaron grandemente en Suecia, en la última guerra mundial para protección contra los ataques aéreos; en la actualidad, gracias al desarrollo de la técnica de construcción de túneles, han adquirido un gran auge en el mundo entero y en muchos casos constituyen la solución más económica.

(17) La energía proveniente de una red nacional única es en general más barata que la engendrada en centrales privadas. En los últimos años, con el desarrollo de los *ciclos térmicos* combinados, resulta a veces más económico a una empresa generar su propia corriente.

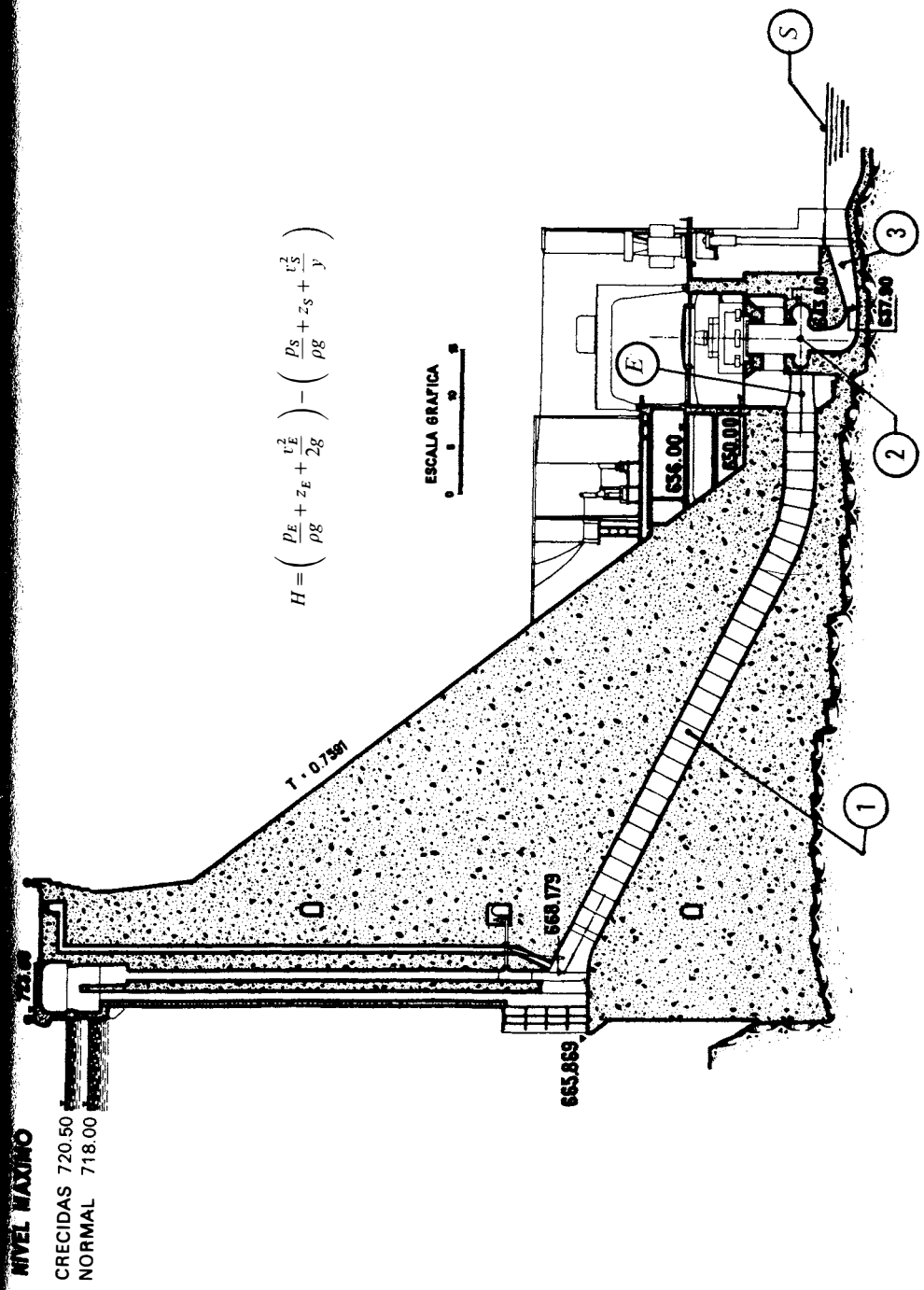


FIG. 21-4. *Central de Entrepeñas* de la Unión Eléctrica Madrileña. Altura de salto: máxima, 80,00 m; mínima, 37,00 m; esta central está equipada con 2 grupos de 19.500 kW cada uno. (*Por cortesía del Ministerio de Obras Públicas.*)

22. *Turbomáquinas hidráulicas: Turbinas*

22.1. DEFINICION

La turbina hidráulica es una turbomáquina motora, y por tanto esencialmente es una bomba rotodinámica que trabaja a la inversa.

Así como una bomba *absorbe* energía mecánica y *restituye* energía al fluido, una turbina *absorbe* energía del fluido y *restituye* energía mecánica. *Teóricamente*, suministrando energía hidráulica a la máquina, e invirtiendo el flujo, una bomba podría trabajar como turbina. *Prácticamente*, el rendimiento sería muy bajo, y a veces nulo, exceptuando las máquinas especialmente diseñadas para trabajar como bomba y como turbina, como es el caso de la máquina doble bomba-turbina de las centrales de bombeo (Sec. 21.4.1).

22.2. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

Los elementos constitutivos de una turbina son análogos a los de una bomba; pero dispuestos en orden inverso. (Véase la Fig. 21-4: los números entre paréntesis se refieren a esta figura):

— *Canal de llegada* (lámina libre) o *tubería forzada* (flujo a presión, n. 1). Corresponde a la tubería de impulsión en una bomba. Al final de la tubería forzada se instala una válvula (compuerta, mariposa, etc.), que no aparece en la figura y detrás de la válvula está la entrada en la tubería (sección *E* en la figura).
— *Caja espiral* (n. 2). Transforma presión en velocidad; en una bomba, velocidad en presión.
— *Distribuidor*. Corresponde a la corona directriz en una bomba; pero en una turbina transforma presión en velocidad y actúa como tobera; en una bomba, por el contrario, actúa como difusor.
— *Rodete*. A las *bombas centrífugas* con flujo en el rodete hacia el exterior corresponde el tipo de *turbinas centrípetas*, con flujo en el rodete hacia el interior.
— *Tubo de aspiración* (n. 3). Corresponde a la tubería de aspiración de una bomba. En una turbina es el órgano de desagüe, pero se llama *tubo de aspiración* porque crea una aspiración o depresión *a la salida* del rodete; mientras que en las bombas constituye la tubería de admisión y crea

también una depresión *a la entrada* del rodete. Las turbinas de acción, como veremos (Sec. 22.4.1), carecen de tubo de aspiración: en ellas el agua sale del rodete directamente al canal de salida.

22.3. CLASIFICACION DE LAS TURBINAS HIDRAULICAS

22.3.1. Clasificación según el grado de reacción

Las turbinas hidráulicas, según el grado de reacción, se clasifican en dos grupos: *turbinas de acción* y *turbinas de reacción*.

Esta clasificación se funda en el concepto de *grado de reacción* estudiado en la Sec. 18.6: si el grado de reacción es 0, la turbina se llama de acción. Si el grado de reacción es distinto de 0, la turbina se llama de reacción.

Como se vio en la Sec. 18.6, el *grado de reacción de una bomba* ε_B se define así:

$$\varepsilon_B = \frac{\text{altura de presión comunicada por el rodete}}{\text{altura total comunicada por el rodete}}.$$

Análogamente, el *grado de reacción de una turbina*, ϵ_T se define así:

$$\varepsilon_T = \frac{\text{altura de presión absorbida por el rodete}}{\text{altura total absorbida por el rodete}}.$$

La Fig. 22.2, que se explica en la Sec. 22.4.1, representa una instalación con *turbina de acción*. La presión del agua no varía en los álabes. El rodete no está inundado. Se encuentra a la presión atmosférica.

Las turbinas de acción son de admisión parcial.

Por el contrario, la Fig. 21-4 representa una instalación con *turbina de reacción*. La presión a la entrada del rodete es superior a la atmosférica y a la salida inferior. El rodete está inundado.

Las turbinas de reacción son de admisión total.

La Fig. 22-1 *a* es un esquema relacionado con una turbina de acción como la de la Fig. 22-2, y la Fig. 22-1 *b* un esquema relacionado con una turbina de reacción, como la de la Fig. 21-4.

En ambos esquemas se emplean los subíndices siguientes, que se refieren a las secciones características de la turbina:

E — entrada de la turbina
0 — entrada del distribuidor
1 — entrada del rodete
2 — salida del rodete
S — salida de la turbina

En una *turbina de acción* el rodete trabaja a presión constante, luego $p_1 = p_2$. Además esta turbina no tiene tubo de aspiración: la salida del rodete (2) coin-

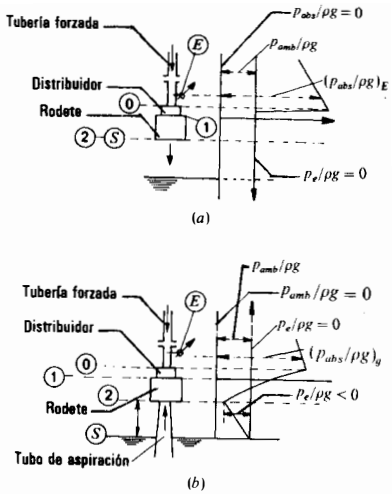


FIG. 22-1. Esquema de la variación de la presión en las turbinas de acción y de reacción. En las *turbinas de acción* (*c*) la presión relativa, p_{rel}, en el distribuidor se reduce a 0, en el rodete la presión es igual a la entrada y a la salida, por eso el grado de reacción es 0. (*b*) En las *turbinas de reacción* la presión relativa a la entrada del rodete es mayor que 0. Hay un salto de presión en el rodete tanto mayor cuanto mayor sea el *grado de reacción*.

cide con la salida de la turbina (*S*). Luego $p_1 = p_2 = p_S = p_{amb}$ (donde p_{amb} — presión atmosférica).

En una *turbina de reacción* $p_1 > p_2$. La salida de la turbina se encuentra en el nivel de aguas abajo. Además, gracias al tubo de aspiración, que realiza, como veremos, una succión: $p_2 < p_{amb}$. Finalmente, a la salida, $p_S = p_{amb}$.

Estudiemos con más detenimiento estos esquemas en que se ha trazado la curva de *altura de presión* a lo largo de la turbina:

Turbina de acción (Fig. 22-1 *a*)

Tubería forzada: la *altura de presión* aumenta a costa de la altura geodésica, que disminuye. La *altura de velocidad* permanece constante, si la sección de la tubería es constante.

Distribuidor: la *altura de presión* baja a cero (presión relativa) o sea a la altura de presión ambiente (presión absoluta). La *altura de velocidad* aumenta porque el distribuidor transforma la energía de presión en energía cinética. El aumento de esta última es un poco menor que la disminución de la primera por las pérdidas.

Rodete: la *altura de presión* permanece constante. Todo el rodete se encuentra a la presión atmosférica. La *altura de velocidad* disminuye, porque la energía cinética del chorro se va transformando en energía útil en el eje. En estas turbinas no hay tubo de aspiración.

Turbina de reacción (Fig. 22-1 *b*)

Tubería forzada: igual que en las turbinas de acción. Si no hay tubería forzada, sino que el agua llega a la turbina por un canal en lámina libre, la altura de presión permanece constante (presión atmosférica).

Distribuidor: la *altura* de *presión* disminuye; pero no tanto como en las turbinas de acción: $\frac{p_1}{\rho g} > \frac{p_{amb}}{\rho g}$. *La altura de velocidad* aumenta.

Rodete: la *altura de presión* sigue disminuyendo hasta un valor menor que en las turbinas de acción: $\frac{p_2}{\rho g} < \frac{p_{amb}}{\rho g}$ (presión relativa a la salida del rodete, negativa). La *altura de velocidad* disminuye también: el rodete transforma energía de presión y cinética en energía útil en el eje.

Tubo de aspiración: la energía de presión aumenta desde un valor negativo hasta 0 (presión barométrica). Gracias al tubo de aspiración el salto de presión en el rodete ha sido mayor.

22.3.2. Tipos actuales

Antes de 1900 las turbinas hidráulicas más empleadas fueron las de Fourneyron, Jonval y Fontaine. Su rendimiento era bajo, sobre todo a cargas reducidas y su velocidad pequeña.

A comienzo de siglo se emplearon mucho en Europa las turbinas Girard y la centrípeta de acción.

En la actualidad prácticamente las únicas turbinas que se construyen son las que figuran en el cuadro siguiente (1).

TURBINAS	ACCION	— Sólo se construyen prácticamente de *flujo tangencial* y son las turbinas Pelton	
	REACCION	*de flujo diagonal* (excepcionalmente de *flujo radial*)	de álabes fijos: turbinas Francis
			de álabes orientables: turbinas Dériaz (Francis de álabes orientables)
		de *flujo axial*	de álabes fijos: turbinas hélice
			de álabes orientables: turbinas Kaplan (hélice de álabes orientables)

Las alturas de salto (neto) explotadas por las turbinas que se construyen en la actualidad, así como los tamaños y potencias de las turbinas actuales oscilan entre amplios límites, según puede verse en la Tabla 22-1.

22.3.3. Clasificación según el número específico de revoluciones

Según el cuadro anterior, en la actualidad se construyen cinco tipos de turbinas: Pelton, Francis, Dériaz, Hélice y Kaplan. A éstas hay que añadir las Bombas-Turbinas reversibles de los grupos binarios de las centrales de acumu-

(1) Otro tipo de turbina que se sigue construyendo hoy es la turbina Ossberger (fabricada en Baviera, Alemania), turbina de acción de admisión parcial, que se construye sólo hasta potencias de unos 700 kW, ideales para molinos de harina, fábricas de papel y de tejidos, pequeñas comunidades rurales, etc. Estas turbinas se fabrican para caudales entre 20 y 700 l/s y para saltos hasta 200 m, con número de revoluciones de 50 a 200 rpm.

TABLA 22-1

SALTOS, TAMAÑOS Y POTENCIAS DE LOS TIPOS ACTUALES DE TURBINAS

Tipo de turbina	*Reacción*		*Acción*
	Axiales (Kaplan)	*Diagonales (Francis)*	*(Pelton)*
Salto neto, H(m)	2-70	2-500	40-1.700
Diámetro exterior del rodete (m)	1,0-10,5	0,35-7,65	0,36-5,2
Potencia en el eje (MW)	Hasta 250	Hasta 750	Hasta 400

lación por bombeo (véase Sec. 21.4.1). La turbina Pelton es de acción y las otras cuatro de reacción.

Según lo dicho en la Sec. 21.3, la naturaleza ofrece los saltos hidráulicos con potencias muy variadas y una misma potencia con combinaciones múltiples de Q y H (H — salto neto). Por tanto, también aquí como en las bombas (Sec. 19.6):

> *El rodete de las turbinas hidráulicas va cambiando insensiblemente de forma para adaptarse a las diferentes condiciones de servicio.*

Por tanto aquí como en las bombas (Sec. 19.6):

> *La clasificación más precisa de las turbinas hidráulicas es una clasificación numérica, que se hace asignando a toda la familia de turbinas geométricamente semejantes un número, a saber, el NUMERO ESPECIFICO DE REVOLUCIONES, n_s* [véase Ec. (19-1) y Sec. 25.3]:

$$n_s = \frac{n\, P_a^{1/2}}{H^{5/4}}$$

donde n — número de revoluciones
H — altura neta (véase Sec. 22.8)
P_a — potencia en el eje o potencia útil (véase Sec. 22.9)

— En la Sec. 22.4.3 se verá cómo evoluciona la forma de una turbina de acción (Pelton) a medida que crece n_s.
— En la Sec. 22.5.2 se verá lo mismo en las turbinas de reacción.

> *Sólo hay un salto brusco de forma cuando se pasa de un rodete de acción (Pelton) a un rodete de reacción. Luego todos los tipos de turbinas clasificados según n_s pueden agruparse en los dos únicos tipos mencionados en la clasificación anterior* (Sec. 22.3.1): *turbinas de acción y turbinas de reacción.*

En efecto, hay una *discontinuidad* en la forma, al pasar de una turbina de acción (Pelton) a una turbina de reacción (Francis) (compárense Figs. 22-2 y 22-7):

— Las turbinas Pelton no tienen *caja espiral;* las de reacción, sí.
— El distribuidor de las turbinas Pelton se llama *inyector*, y consta de tobera y válvula de aguja, y su forma no se parece en nada a la del *distribuidor* Fink de las turbinas de reacción (compárense Figs. 22-2 y. 22-8), aunque desempeña el mismo papel (reducción de la altura de presión y aumento de altura cinética).
— Los álabes de las turbinas Pelton se llaman *cucharas* y son de aspecto totalmente distinto a los de las turbinas de reacción (compárense Figs. 22-5 y 22-9).

22.4. TURBINAS DE ACCION: TURBINAS PELTON

22.4.1. Descripción

La Fig. 22-2 representa una turbina Pelton construida por la casa Alsthom-Charmilles. Se trata de una *Pelton doble*, porque tiene dos rodetes montados

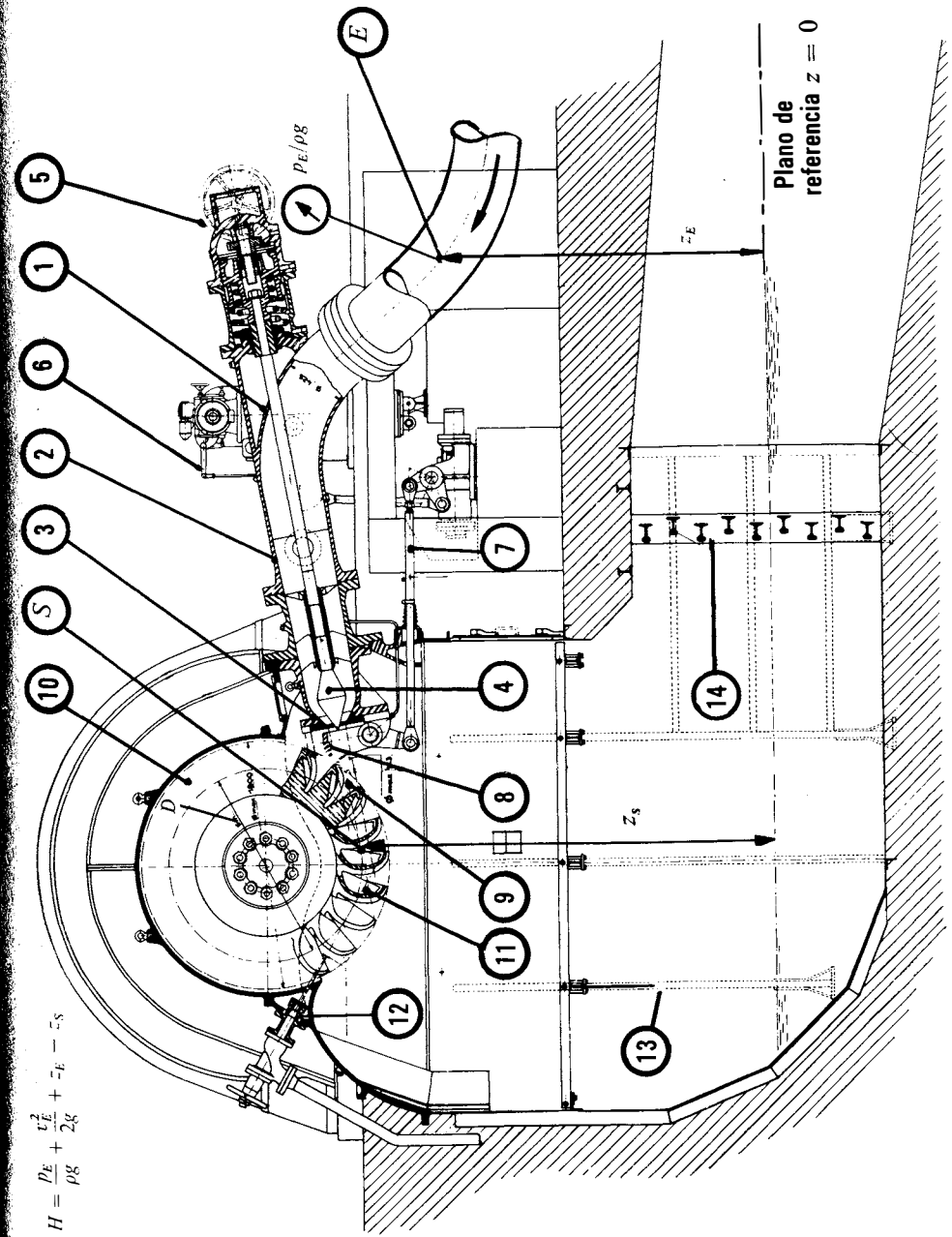


FIG. 22-2. *Turbina Pelton doble* de dos rodetes (el segundo rodete paralelo al de la figura no es visible en la misma) y un chorro por rodete construida por la casa Charmilles, Suiza, para una altura neta de 705 m. potencia 16.000 kW a 750 rpm.

en el mismo eje (el segundo paralelo al de la figura queda oculto en un corte transversal) y dos inyectores, uno por rodete (2). Altura neta, $H = 705$ m, $n = 750$ rpm, $P_a = 16.000$ kW (P_a — potencia en el eje o potencia útil). La *Pelton sencilla* tiene un rodete solamente y un inyector.

Una instalación típica de turbinas Pelton consta (los números remiten a la figura) de los siguientes elementos:

1 — *Codo de entrada.*
2 — *Inyector.* Es el distribuidor de las turbinas Pelton. Transforma la energía de presión del fluido en energía cinética. La velocidad del chorro a la salida del inyector en algunas instalaciones llega a 150 m/s y aún más. Consta de tobera y válvula de aguja.
3 — *Tobera.*
4 — *Válvula de aguja.* Se desplaza longitudinalmente. Tanto la boquilla como la aguja del inyector suelen construirse de acero muy duro. A pesar de esto si el agua contiene arena al cabo de cuatro mil horas de servicio estas piezas ya no producen un cierre estanco y deben reemplazarse.
5 — *Servomotor.* Desplaza mediante presión de aceite la aguja del inyector, como se verá al estudiar la regulación de la turbina en la Sec. 29.6.
6 — *Regulador* (véase Sec. 29.6).
7 — *Mando del deflector.*
8 — *Deflector o pantalla deflectora.* Sirve para evitar el golpe de ariete y el embalamiento de la turbina (véanse Secs. 22.10.2 y 29.6).
9 — *Chorro.* En la turbina de la Fig. 22-2 el diámetro máximo, d, del chorro a plena carga es de 123 mm.

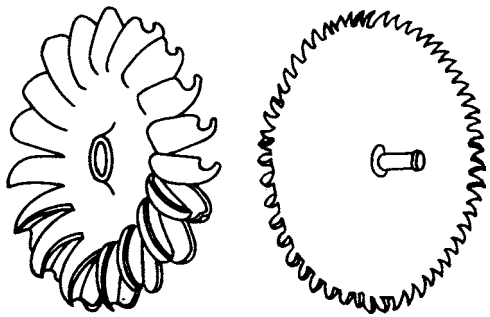


FIG. 22-3. (*a*) *Rodete Pelton rápido* ($n_s = 35$): se adapta a caudales relativamente grandes y a alturas de salto relativamente pequeñas; (*b*) *rodete Pelton lento* ($n_s = 2,7$): se adapta a caudales muy pequeños y alturas de salto elevadas.

10 — *Rodete* (véanse Figs. 22-3 *a* y *b*).
11 — *Alabes o cucharas* (véanse Figs. 22-5 y 22-6).
12 — *Freno de la turbina* por chorro de agua. El pequeño chorro, de 25 mm de diámetro en este caso, actúa sobre el dorso de los álabes y frena el rodete. Sin él, el rodete seguiría girando por inercia cada vez más lentamente, con perjuicio de la lubricación y deterioro de los cojinetes.
13 — *Blindaje.* Protege la infraestructura contra el efecto destructor del chorro desviado. A veces se utilizan con el mismo fin bloques de granito.
14 — *Destructor de energía.* Evita también las erosiones en la infraestructura.

(2) La turbina Pelton doble puede construirse también con un solo rodete y dos inyectores, siendo el número de inyectores el que multiplica la turbina.

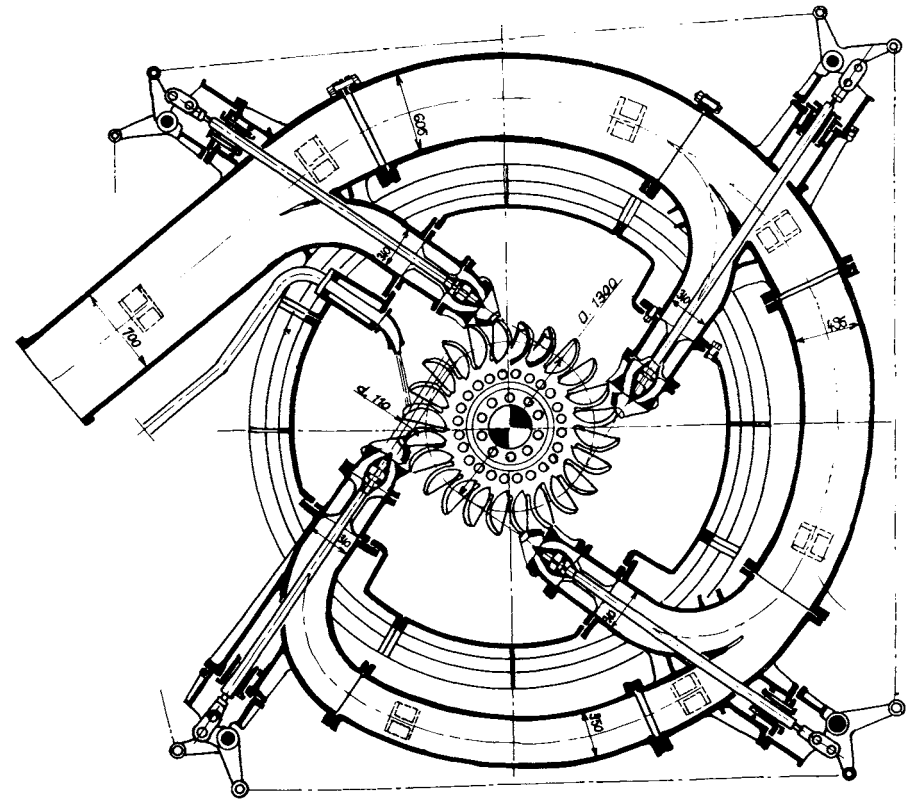


FIG. 22-4. *Turbina Pelton de eje vertical de 4 chorros* de 7.350 kW para un salto neto de 394 m, construida por la casa Escher Wyss.

Finalmente, en la misma figura se ha indicado la *altura neta H*, según las normas internacionales (véase Sec. 22.8.2).

Las turbinas Pelton se clasifican, como ya hemos dicho, en *sencillas* (un rodete y un solo chorro) y *múltiples.* Las turbinas Pelton se multiplican por el número de chorros, llamándose Pelton doble, triple, etc., a la Pelton de 2, 3, ... chorros. Los chorros se pueden instalar en rodetes distintos como en la Fig. 22-2 *(Pelton doble* 2 rodetes y 1 chorro por rodete) o en un solo rodete como en la Fig. 22-4, construida por la casa Escher Wyss *(Pelton cuádruple:* 1 rodete y 4 chorros).

Las turbinas *Pelton séxtuples* (1 rodete de eje vertical y 6 chorros) cayeron un tiempo en desuso, por la complicación que entraña su duodécuple regulación (6 deflectores y 6 pantallas deflectoras y, por tanto, 12 servomotores, véase Sec. 29.6); pero posteriormente volvieron de nuevo a construirse.

La Fig. 22-5 es una foto de un rodete para 4 inyectores instalado en la central de Lünersee: $P_a = 46.200$ kW; $H = 970$ m; diámetro del rodete = 2 m.

22.4.2. Triángulos de velocidad

En la Fig. 22-6 puede verse la forma de las cucharas. Las diferentes dimensiones suelen expresarse tomando como unidad el diámetro del chorro cuando la turbina trabaja a *carga nominal*, generalmente 3/4 de la *carga máxima.*

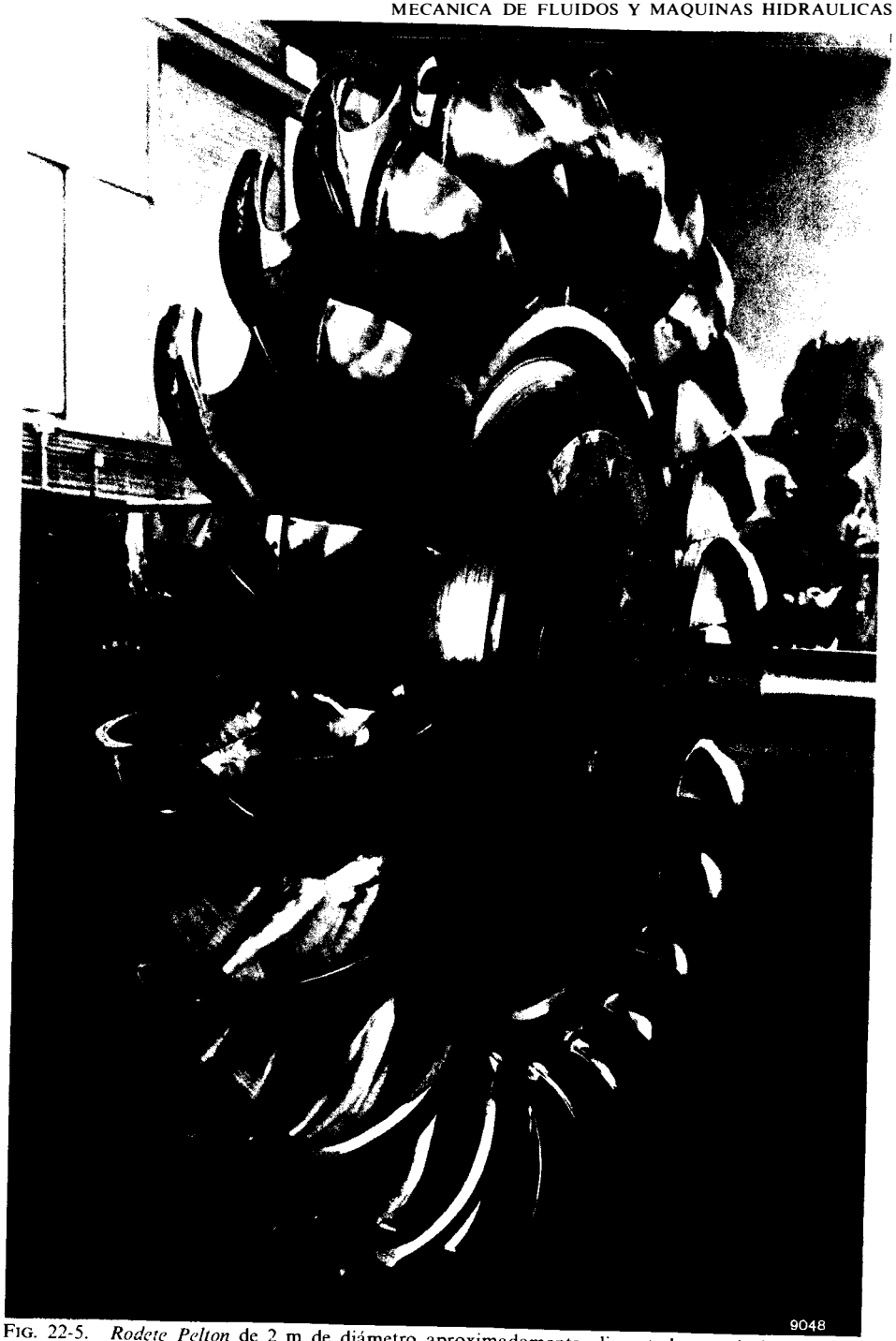


FIG. 22-5. *Rodete Pelton* de 2 m de diámetro aproximadamente alimentado por 4 chorros para la central de bombeo de Lünersee. La turbina construida por la firma Voith desarrolla una potencia de 46.200 kW con una altura de salto de 970 m. *(Por cortesía de J. M. Voith GMBH.)*

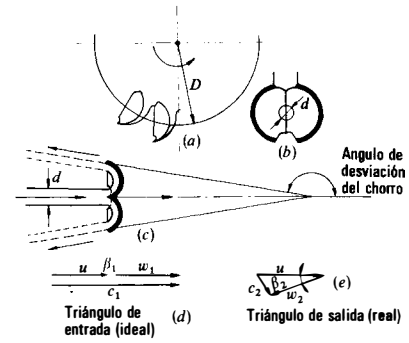


FIG. 22-6. *Turbina Pelton:* (*a*) rodete (corte transversal); (*b*) forma de la cuchara (corte longitudinal o meridional); *d* es el diámetro del chorro acotado también en la figura (*c*); (*c*) chorro y desviación por la cuchara (corte tangencial); (*d*) triángulo ideal de entrada. Idealmente $\alpha_1 = 0°$ y $\beta_1 = 180°$; (*e*) triángulo real de salida; c_2 debe ser muy pequeño porque $\frac{c_2^2}{2g}$ representa una energía perdida (idealmente $c_2 = 0$; $w_2 = w_1 = u$; $\beta_2 = 0$).

Seguiremos la notación internacional explicada en la Sec. 18.4.

— La trayectoria de una partícula de agua en la cuchara es tangencial, de manera que en las turbinas Pelton se verifica siempre:

$$u_1 = u_2 = u \tag{22-1}$$

— *Si no hay rozamiento* al ser el flujo en la cuchara de lámina libre *idealmente:*

$$w_1 = w_2 \tag{22-2}$$

La *velocidad real* w_2 es algo menor que w_1.

— *Si no hay pérdidas* en el inyector el chorro sale del inyector a la atmósfera con una velocidad, c_1, que, según la ecuación de Torricelli [Ec. (6-1)], *idealmente* será:

$$c_1 = \sqrt{2gH}$$

Prácticamente, la velocidad real es algo más pequeña y aproximadamente:

$$c_1 = 0{,}97\sqrt{2gH} \tag{22-3}$$

— *Idealmente* se demuestra que la turbina Pelton alcanza su rendimiento óptimo cuando $u_1 = 1/2\, c_1$. *Prácticamente*, el rendimiento óptimo suele alcanzarse para una velocidad un poco más baja, aproximadamente

$$u_1 = 0{,}45\sqrt{2gH} \quad (3) \tag{22-4}$$

(3) Se denomina coeficiente de velocidad a la relación de una velocidad cualquiera por $\sqrt{2gH}$. Así

$$k_{u_1} = \frac{u_1}{\sqrt{2gH}}, \quad k_{c_{1u}} = \frac{c_{1u}}{\sqrt{2gH}}, \text{ etc.}$$

De las Ecs. (22-3) y (22-4) se desprende que el coeficiente de velocidad $k_{c_{1u}}$ viene a valer 0,97 y el coeficiente de velocidad k_{u_1} alrededor de 0,45.

— *Idealmente*, el ángulo $\alpha_1 = 0°$ y el ángulo $\beta_1 = 180°$ (véase Fig. 22-6 *d*). *Prácticamente*, el ángulo α_1 suele ser algo mayor, aunque siempre muy pequeño (aproximadamente 17°).

— La turbina Pelton no tiene tubo de aspiración. Como consecuencia no puede aprovecharse la velocidad de salida (véase Sec. 22.10). Por tanto, como la energía cinética a la salida del álabe se pierde es conveniente que sea 0, de esta manera el álabe habrá aprovechado toda la energía, es decir, *idealmente* $c_2 = 0$. *Prácticamente*, c_2 es muy pequeña.

Según esto, pueden ya trazarse los triángulos de velocidad, que pueden verse en la Fig. 22-6.

22.4.3. Clasificación de las turbinas Pelton según el número específico de revoluciones

Veamos cómo, según lo dicho en general para todas las turbinas en la Sec. 22.3.3, el rodete de las turbinas Pelton va cambiando insensiblemente de forma para adaptarse a las diferentes condiciones de funcionamiento.

En la Sec. 25.3 se demostrará que todas las turbinas hidráulicas geométricamente semejantes tienen un mismo número específico de revoluciones, n_s, siendo

$$n_s = n\, P_a^{1/2}\, H^{-5/4} \qquad (22\text{-}5)$$

donde n, P_a y H — respectivamente, *rpm*, *potencia útil* y *salto neto* en el punto nominal de funcionamiento o punto para el que la turbina alcanza el rendimiento óptimo.

Por la razón aducida en la Sec. 19.6, en la Ec. (22-5) expresaremos n en rpm, P_a en CV y H en m. Entonces, en virtud de las Ecs. (22-21 y (22-28):

$$P_a = \frac{Q\,\rho\,H}{75}\,\eta_{tot}$$

y finalmente:

$$n_s = 3{,}65\, n\, \sqrt{\eta_{tot}}\, Q^{1/2}\, H^{-3/4} \qquad (22\text{-}6)$$

que es la expresión de n_s en función del caudal y de la altura neta.

Las turbinas Pelton cuyo n_s es pequeño se llaman *lentas* y aquellas cuyo n_s es grande se llaman *rápidas*. En efecto, la Ec. (22-5) demuestra que de dos turbinas de la misma potencia y el mismo salto neto, la que tenga un n_s más pequeño girará más lentamente: dicha turbina es una turbina más lenta que la otra.

Toda turbina Pelton, lo mismo que cualquier otra turbina hidráulica, se caracteriza por un valor de n_s que es el mismo para todas las turbinas geométricamente semejantes, independientemente de su tamaño. Si n_s es bajo, por ejemplo $n_s = 4$, la turbina Pelton se llama *lenta* y si es elevado, por ejemplo $n_s = 30$, la turbina Pelton se llama *rápida*. Las palabras *lenta* y *rápida* no se refieren,

pues, al número real de revoluciones; sucediendo con frecuencia que la turbina rápida gira a número de revoluciones menor que la lenta (4).

La Ec. (22-6), válida para todas las turbinas, demuestra que las *turbinas lentas*

1) *giran a velocidad relativamente más baja* que las turbinas rápidas (y en particular las Pelton lentas en comparación con las Pelton rápidas), porque, colocadas en el mismo salto y absorbiendo el mismo caudal, la turbina de menor n_s girará también a menor n.
2) *absorben relativamente menos caudal*, porque girando al mismo número de revoluciones e instaladas en el mismo salto neto, la turbina de menor n_s absorberá menos caudal.
3) *se destinan a saltos relativamente más elevados*, porque girando al mismo número de revoluciones y absorbiendo el mismo caudal, la turbina de menor n_s requerirá un salto más elevado (5).

Las características que sirven para definir el n_s de una turbina [Ec. (22-6)], así como el de una bomba [Ec. (19-2)] son las características nominales, o sea aquellas para las cuales el η_{tot} de la máquina es máximo.

La relación de diámetros del rodete (D — diámetro llamado característico de la turbina Pelton, que es el diámetro de la circunferencia tangente al eje del chorro; véase Fig. 22-2) al del chorro d está relacionada con el n_s. Así, por ejemplo, la turbina cuyo rodete se representa en la Fig. 22-3 *b* tiene un $n_s = 2{,}7$. El diámetro característico del rodete es alrededor de 85 veces el diámetro del chorro; desarrolla una potencia de 2.200 kW con una altura neta de 1.650 m, girando a 500 rpm; mientras que la turbina cuyo rodete se representa en la Fig. 22-3 *a* tiene un $n_s = 35$ y el diámetro característico del rodete es sólo 7 veces el diámetro del chorro.

La primera turbina es adecuada a grandes saltos y pequeños caudales; por esto último tiene las cucharas tan pequeñas. La segunda turbina, en cambio, es más adaptada a saltos más pequeños y caudales más grandes; por esto último tiene las cucharas tan grandes.

22.5. TURBINAS DE REACCION: TURBINAS FRANCIS Y HELICE

Como se dijo en la Sec. 22.3.3, hay una graduación continua en las turbinas de reacción, y el paso de una Francis a una hélice no constituye un cambio brusco de forma como el paso de una Pelton a una Francis. Por eso estudiamos en conjunto en esta sección todas las turbinas de reacción de álabes fijos Francis y hélice, dejando para la sección siguiente las turbinas de reacción de álabes orientables. Las turbinas hélice de álabes fijos *(turbinas hélice)* son de construcción muy rara en Europa. Casi todas las turbinas de este tipo se construyen en Europa con álabes orientables *(turbinas Kaplan)*.

(4) Hay turbinas Pelton que giran a 1.000 rpm y turbinas Kaplan que giran a 100 rpm y sin embargo, las turbinas Pelton son turbinas mucho más lentas que las Kaplan. No obstante, colocada la turbina Kaplan en el salto de la Pelton y desarrollando la misma potencia, giraría a una velocidad excesiva, de ahí la necesidad de instalar en el salto en cuestión una turbina Pelton.

(5) Las notas 1) a 3) son igualmente aplicables a las bombas.

22.5.1. Descripción

La Fig. 22-7 representa una turbina *Francis lenta* (véase Sec. 22.5.2) construida por la casa Escher-Wyss (los números remiten a la figura):

1 — *Caja espiral.* Según las dimensiones de la turbina se construye de acero colado, fundición, chapa roblonada o soldada u hormigón armado (solo o blindado con chapa para evitar fugas).

2 — *Distribuidor* (véase Fig. 22-8). La caja espiral y el distribuidor dirigen el agua al rodete con un mínimo de pérdidas, y transforman parte de la energía de presión (no toda como sucedía en las turbinas de acción; compárense Figs. 22-1 *a* y 22-1 *b*) en energía cinética. El distribuidor es de *álabes orientables* y sirve también para reducir el caudal cuando

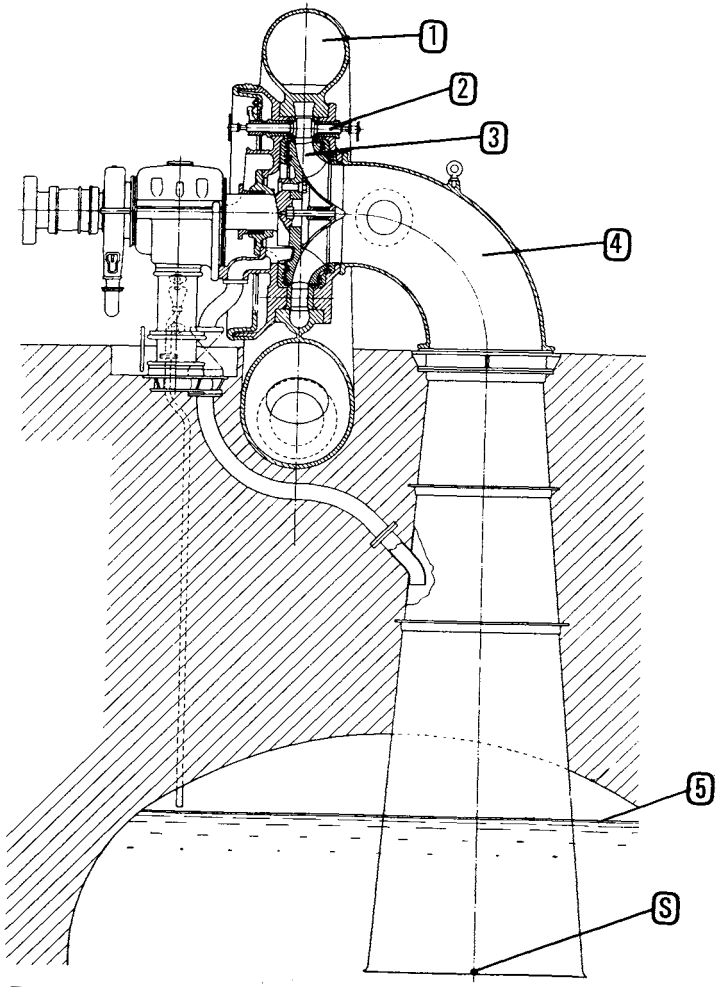


FIG. 22-7. *Turbina Francis lenta* construida por la firma Escher Wyss, Suiza, con tubo de aspiración troncocónico.

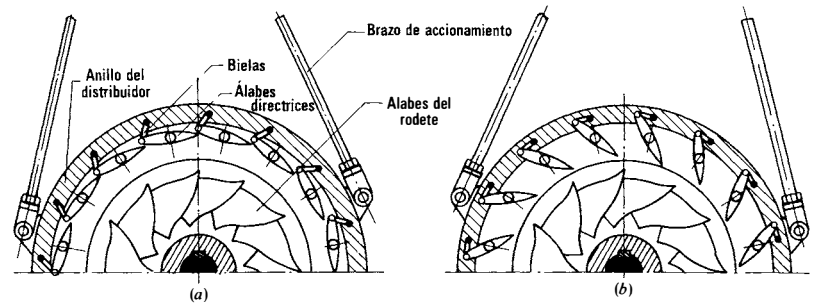


FIG. 22-8. *Distribuidor Fink:* (*a*) En posición cerrada; (*b*) en posición abierta. Este distribuidor se utiliza en todas las turbinas cuando es preciso regular el caudal, excepto en las turbinas Pelton, en las que se sustituye por el inyector.

la carga de la turbina disminuye, conservando el mejor rendimiento posible, es decir, reduciendo a un mínimo las pérdidas hidráulicas por fricción y choque.

El *distribuidor* Fink es el distribuidor corriente de todas las turbinas de reacción (Francis, hélice, Kaplan y Dériaz). Este distribuidor puede verse en posición cerrada en la Fig. 22-8 *a* y en posición abierta en la Fig. 22-8 *b*. Consta de dos bielas o brazos robustos, movidos por uno o varios servomotores de aceite (6) (en las pequeñas turbinas raras veces a mano) que hacen girar al anillo donde pivota un extremo de las pequeñas bielas, las cuales a su vez hacen girar a los álabes de perfil aerodinámico, que pivotan en torno a un eje fijo.

El distribuidor Fink sustituye al inyector de las turbinas Pelton. Algunas veces las turbinas de reacción si no interesa regular el caudal se instalan sin distribuidor y otras también con distribuidor de álabes fijos.

3 — *Rodete.* La Fig. 22-9 es una foto del rodete de una turbina Francis construida por la casa Voith, de 5,38 m de diámetro, $P_a = 66.200$ kW, $H = 40$ m, para la central de Managua, Venezuela.

4 — *Codo de entrada en el tubo de aspiración.* El tubo de aspiración crea una depresión a la salida del rodete (véase Fig. 22-1 *b*). En efecto, despreciando las pérdidas en el tubo de aspiración de la Fig. 22-7, la presión según la ecuación de Bernoulli va aumentando desde la salida del rodete hasta la salida de la turbina, sección S, donde la presión es atmosférica, por dos causas:

1.ª Porque la energía geodésica disminuye en el sentido del flujo: $s_S < z_2$ (2 — salida del rodete).

2.ª Porque la energía cinética disminuye (el tubo de la figura es troncocónico), $c_S^2/2g < c_2^2/2g$.

Por tanto, dejando para más adelante la deducción de la ecuación

(6) En las turbinas modernas de gran potencia cada álabe directriz es accionado individualmente por un servomotor.

FIG. 22-9. *Rodete Francis* de 5,38 m de diámetro construido por la firma Voith para la central de Macagua, Venezuela. La turbina tiene 66.200 kW de potencia y el salto es de 40 m. (*Por cortesía de J. M. Voith GMBH.*)

del tubo de aspiración [Ec. (22-38)], en una turbina de reacción el *tubo de aspiración:*

— crea una depresión, o *aspiración*, a la salida del rodete. De esta manera el salto de presión en él es mayor;
— tiene dos funciones:

1.ª *recuperar la energía cinética* que tiene el agua a la salida del rodete; a costa de ella se crea en parte la depresión mencionada (difusor);
2.ª *recuperar la energía geodésica* que tiene el agua a la salida del rodete, porque éste se ha de colocar elevado para proteger el grupo contra una posible inundación; a costa de ella se crea en parte la depresión mencionada.

— La 1.ª función exige que la sección del tubo crezca en la dirección del flujo (por ejemplo, tubo de aspiración troncocónico); la 2.ª, no (tubo de aspiración cilíndrico).
— En las turbinas rápidas suele ser preponderante la 1.ª función y en las lentas la 2.ª (los términos «lenta» y «rápida» se refieren al número específico de revoluciones).

S — Sección de salida de la turbina. Esta sección sirve para definir la altura neta, *H*, según las normas internacionales (véase Sec. 22.8.1).
5 — Nivel inferior *(NI)* del salto.

Como puede verse en los esquemas de la Fig. 22-1 *a* y *b*, la presión a la entrada del rodete en las turbinas de reacción es superior a la atmosférica, mientras que en las turbinas de acción es igual. Por tanto, para un mismo salto la velocidad c_1 es inferior en las turbinas de reacción que en las turbinas Pelton. La velocidad periférica óptima del rodete a la entrada u_1 es en cambio superior. Así, en la ecuación válida para todas las turbinas:

$$u_1 = k_{u_1} \sqrt{2gH} \tag{22-7}$$

$k_{u_1} \simeq 0{,}5$ — en las turbinas de acción

mientras que k_{u_1} — oscila entre 0,65 a 2,5 en las turbinas de reacción (k_{u_1} aumenta al aumentar n_s).

De la Ec. (22-7) y de $u_1 = \dfrac{\pi D_1 n}{60}$ se deduce fácilmente que en una turbina cualquiera

$$n = C \frac{\sqrt{H}\, k_{u_1}}{D_1}$$

donde C — constante. Luego

— para un mismo salto y un mismo tamaño de turbina, las turbinas de acción giran más lentamente que las de reacción, porque k_{u_1} es menor en las primeras
— las turbinas de reacción son turbinas tanto más rápidas cuanto mayor

sea k_{u_1}. En particular es costumbre hablar de Francis lentas, normales, rápidas y exprés, así como de turbinas hélices lentas y rápidas. En todas ellas va aumentando k_{u_1} desde 0,65 (Francis lentas) a 2,5 (hélices rápidas).

Número de revoluciones de los grupos turboalternadores

En las centrales hidroeléctricas las turbinas accionan alternadores síncronos que han de producir una corriente, la cual en Europa tiene una frecuencia:

$$f = 50 \text{ cps} = 50 \times 60 = 3.000 \text{ cpm}$$

Para conseguir una corriente con frecuencia f (cps) hará falta en general que la turbina gire a

$$n = \frac{60f}{z} \tag{22-8}$$

donde z — número de pares de polos del alternador. La Ec. (22-8) para Europa se reduce a la ecuación:

$$n = \frac{3.000}{z} \tag{22-9}$$

En las centrales de poca altura se emplean a veces alternadores de 40 y más pares de polos, naturalmente muy costosos. Ahora bien, un alternador de 40 pares de polos giraría a 75 rpm, y, *paradójicamente*, la turbina de accionamiento técnicamente sería *muy rápida*. Colocada en el mismo salto una turbina Pelton, como la de la Fig. 22-3 *b*, de la misma potencia, giraría a menos de 1/4 rpm para tener un buen rendimiento. Por eso dicha turbina es una Pelton *muy lenta*.

Los términos «lenta» y «rápida» son, pues, relativos. Esto nos lleva a la clasificación de las turbinas de reacción, que a continuación se establece.

22.5.2. Clasificación de las turbinas de reacción según el número específico de revoluciones

En las turbinas de reacción lo mismo que en las turbinas Pelton (Sec. 22.4.3), el rodete va cambiando insensiblemente de forma de una turbina a otra para adaptarse a las diferentes condiciones de funcionamiento. Estas condiciones son la potencia útil, P_a, la altura neta, H, y el número de revoluciones, n.

La importancia relativa de P_a, H y n en la forma del rodete se expresa por el valor del número específico de revoluciones, n_s:

$$\boxed{n_s = n\, P_a^{1/2} H^{-5/4}} \tag{22-10}$$

(En este libro en esta ecuación, como ya hemos dicho, se expresa n en rpm, P_a en CV y H en m.) También puede expresarse n_s en función del caudal [Ec. (22-6)]:

$$n_s = 3{,}65n \sqrt{\eta_{tot}} \cdot Q^{1/2} \cdot H^{-3/4} \tag{22-11}$$

En el cuadro siguiente (Fig. 22-10) pueden verse 6 cortes meridionales de 6 rodetes de turbinas de reacción, clasificados según n_s. El significado de esta clasificación es el siguiente: una turbina cualquiera, por ejemplo, la de $n_s = 200$, funcionará con óptimo rendimiento cuando la potencia desarrollada, la altura neta y el número de revoluciones sean tales que sustituyendo sus valores en la Ec. (22-10) se obtenga $n_s = 200$. Aquí, lo mismo que en la clasificación análoga que hicimos de las bombas (Fig. 19-15), se han seleccionado unos pocos tipos solamente; pero es evidente que todas las turbinas de reacción pueden ser clasificadas de esta manera.

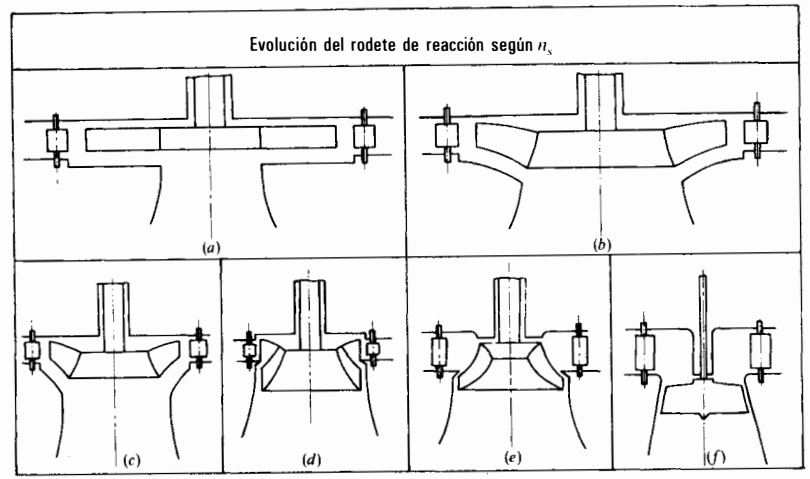


FIG. 22-10. El rodete de una turbina de reacción se adapta a las exigencias de Q, H y n. De (*a*) a (*f*) la turbina se adapta a caudales relativamente mayores y a alturas de salto relativamente menores: (*a*) rodete radial centrípeto; (*b*) $n_s = 45$: Francis lenta; (*c*) $n_s = 110$; (*d*) $n_s = 200$: Francis normal; (*e*) $n_s = 400$: Francis exprés; (*f*) $n_s = 800$: hélice o Kaplan.

El rodete *a* es de flujo radial. El flujo es radioaxial, y cada vez más axial que radial, en *b*, *c*, *d* y *e*. En el rodete *f* el flujo es puramente axial. Así la evolución de la forma es continua; pero cuando la máquina es totalmente axial, el rodete ha adquirido ya la forma de *hélice*.

Por tanto,

— la turbina *a* se llama *radial*. Se construye muy poco (la bomba radial en cambio es muy frecuente);
— las turbinas *b*, *c*, *d* y *e* se llaman Francis. Son de flujo *radioaxial;*
— la turbina *f* se llama turbina hélice: es de flujo *axial*.

Las turbinas de reacción cubren una gama grande de número específico de revoluciones, $n_s = 60$ a n_s por encima de 1.000. Son corrientes, como ya hemos dicho, las denominaciones de turbinas Francis *lentas*, *normales*, *rápidas* y *exprés*. Estas últimas son ya casi axiales. Suelen llamarse *Francis normales* aquellas cuyo n_s está comprendido entre 125 y 300. Así, pues, la Fig. 22-10 *d* representa una *Francis normal*. Insistimos una vez más en que el término rápido o lento no se refiere al *número real de revoluciones*, sino al *número específico de revoluciones*. De hecho las turbinas lentas (Pelton lentas) suelen girar a número de revoluciones mayor, porque se instalan en saltos de mucha altura. Si en este mismo salto

se instalara una máquina rápida iría a una velocidad excesiva. Por el contrario, las turbinas rápidas (de hélice rápidas) suelen girar muy lentamente, a veces a menos de 80 rpm. Si en ese mismo salto se instalara una máquina lenta giraría tan lentamente que su velocidad sería prácticamente irrealizable. De ahí la necesidad que ha existido de desarrollar turbinas muy lentas y muy rápidas.

22.6. TURBINAS DE REACCION: TURBINAS KAPLAN Y DERIAZ

22.6.1. Orientación de los álabes

Como la carga de un alternador varía según una curva de consumo, la turbina deberá proporcionar más o menos potencia, y al no variar la altura de salto no funcionará siempre con la admisión máxima, $Q_{máx}$. Por tanto, las curvas de rendimiento total de la turbina en función del caudal Q expresado como fracción de $Q_{máx}$, representadas en la Fig. 22-11, tienen gran interés. Estas curvas corresponden:

- la curva *a*, a una turbina *Pelton de* $n_s = 20$, aproximadamente;
- la curva *b*, a una turbina *Kaplan de* $n_s = 500$ como las que vamos a estudiar en esta sección;
- la curva *c*, a una turbina *Francis* normal, $n_s = 250$;
- la curva *d*, a una turbina *Francis rápida*, $n_s = 500$;
- la curva *e*, a una turbina *hélice*, $n_s = 650$;
- la curva *f*, a una turbina *hélice muy rápida*, $n_s = 1.050$.

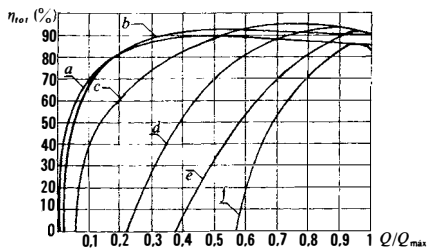


FIG. 22-11. Curvas de rendimientos de los diversos tipos de turbinas en función del caudal: *a*, turbina Pelton; *b*, Kaplan; *c*, *d*, Francis; *e*, *f*, hélice. Las curvas *a* y *b* se llaman *planas* y las curvas *e* y *f*, en gancho; las *c* y *d* son intermedias.

Las curvas tales como la *a* son características de las turbinas Pelton y se llaman curvas *planas*, y las curvas tales como la *e* son características de las turbinas hélice y se llaman *curvas en gancho*. Se observa que a medida que aumenta n_s la curva va siendo más del segundo tipo.

La curva *b* explica el significado excepcional del descubrimiento del ingeniero Kaplan, en 1925, de la turbina que lleva su nombre, que ha hecho posible en los últimos años la explotación de los saltos de gran potencia; pero de poca altura.

La turbina Kaplan es una turbina hélice en que los álabes del rodete giran en marcha, ajustándose *automáticamente* (véase Sec. 29-7), según la carga, a las condiciones de óptimo rendimiento. *Como si un solo rodete desempeñara el papel de infinito número de rodetes.* Por eso la curva *b* que corresponde a una turbina Kaplan no es una *curva en gancho*, como correspondería a una turbina hélice de álabes fijos, sino una *curva plana*, como las de las turbinas Pelton.

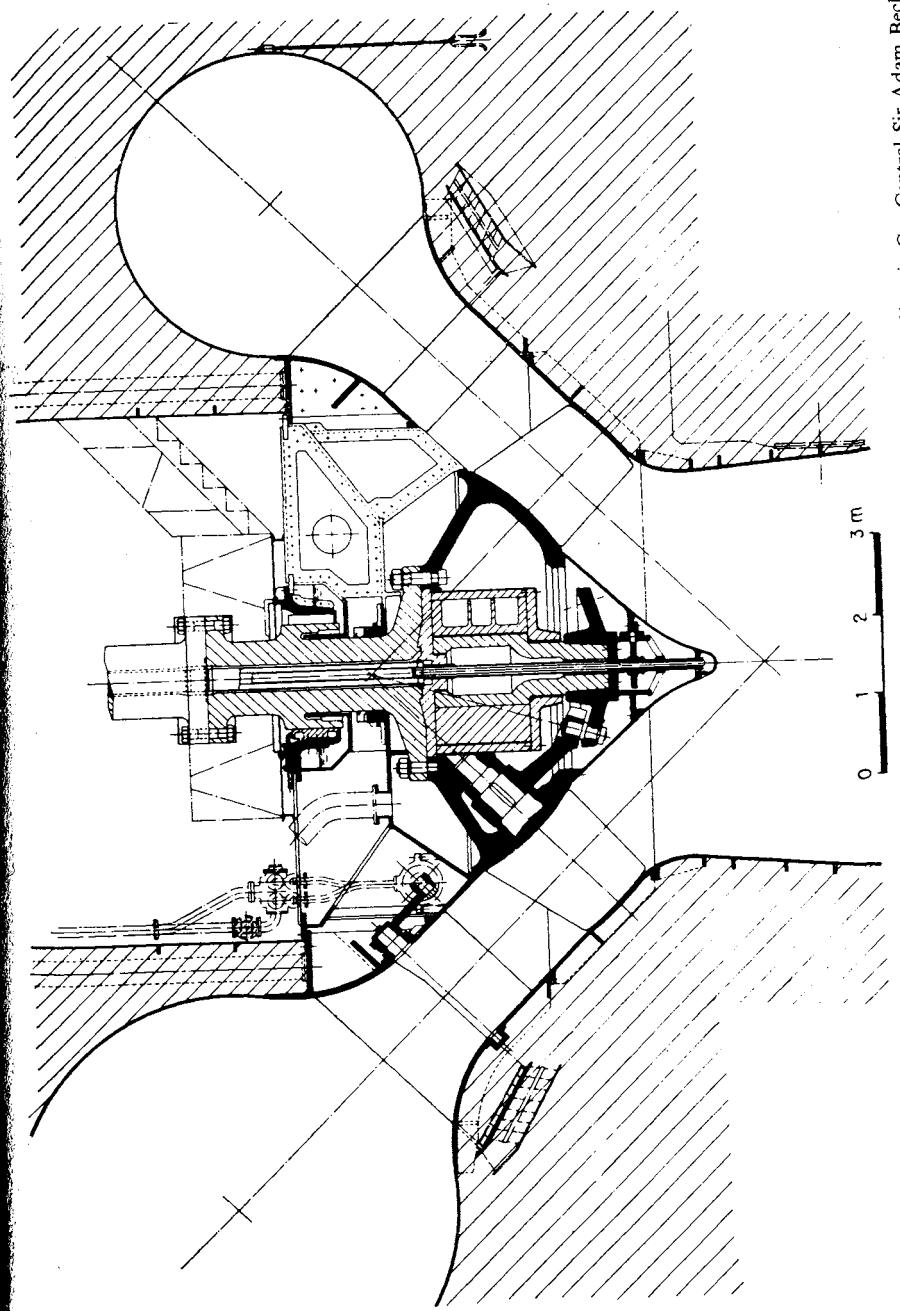


FIG. 22-12. Corte axial de la primera *turbina Deriaz* instalada en el mundo. Constructora English Electric Co. Central Sir Adam Beck en el Niágara canadiense; 92,3 rpm; salto entre 12 y 27,5 m; potencia 40.500 kW. Esta turbina, a pesar de no ser axial, sino semiaxial, es de álabes orientables y constituye en muchos casos la solución más eficiente para las centrales de acumulación por bombeo.

Es muy fácil diseñar una turbina Kaplan *reversible*, es decir, que pueda funcionar como turbina y como bomba con buen rendimiento.

Posteriormente, en 1956, el ingeniero suizo Dériaz, trabajando para la English Electric, inventó la turbina que lleva su nombre, y que sigue despertando un gran interés en la actualidad en la explotación de los saltos de mediana y gran altura (7). Esta turbina se presta también fácilmente a su construcción como bomba-turbina reversible y presenta una nueva solución al problema de las centrales de acumulación por bombeo mencionado en la Sec. 21.4.1.

La turbina Dériaz acoplada a un motor-generador síncrono constituye un grupo binario, que reduce el precio invertido en la maquinaria, utilizando una sola máquina hidráulica que actúa como bomba y como turbina.

Las primeras turbinas Dériaz se construyeron para la central de acumulación por bombeo Sir Adam Beck en el Niágara del Canadá. Las características de esta máquina son: diámetro del rodete = 6,4 m; $P_a = 40.500$ kW; $n = 92{,}3$ rpm. Como bomba de un caudal que oscila de 142 a 113 m^3/s, correspondiente a alturas efectivas de 18,3 hasta 25,9 m. El conjunto del eje y del rodete tiene una masa de $100 \cdot 10^3$ kg. La Fig. 22-12 es un corte axial de esta máquina. Las segundas turbinas Dériaz del mundo entraron en funcionamiento en la central de Amagaze del Japón de potencia unitaria de 51.500 kW. En España la central de Valdecañas, construida por Hidroeléctrica Española e inaugurada en 1964, fue una de las primeras centrales del mundo equipada con estas turbinas.

La turbina Dériaz es como una turbina Francis de álabes orientables.

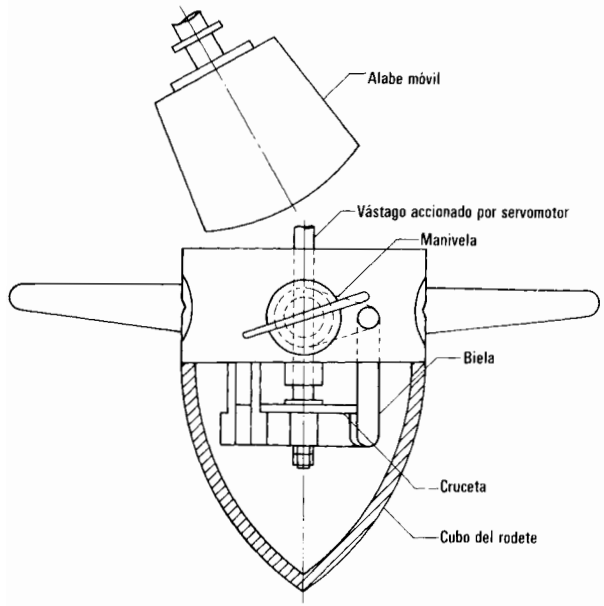


FIG. 22-13. El *mecanismo de orientación de los álabes* de un rodete Kaplan consta esencialmente de un vástago que al moverse con simple movimiento de traslación hace subir o bajar la cruceta, la cual hace girar simultáneamente a todos los álabes al transmitirse su movimiento por las bielas y manivelas.

(7) Véase el libro dedicado a estas turbinas de V. S. Kvjatkovskij, *Diagonal'nye gidroturbiny* [Turbinas diagonales (Dériaz), en ruso], Moscú, Masinostroenie, 1971, 208 págs. En él se presagia una intensa utilización de las turbinas Dériaz en la U.R.S.S. hasta el punto de que en la gama de 40-200 m de H podría constituir la turbina básica en dicho país.

La turbina Dériaz, en su variante de bomba-turbina reversible, posee:

— *funcionando como turbina*, mejor rendimiento que una turbina Francis de rodete análogo de álabes fijos, a cargas intermedias;
— *funcionando como bomba*, mejor rendimiento que una turbina-bomba de álabes fijos.

El *mecanismo de orientación de los álabes* de una turbina Kaplan es muy fácil de comprender si se considera la Fig. 22-13: los álabes del rodete giran todos el mismo ángulo al moverse longitudinalmente hacia arriba o hacia abajo el vástago, que hace subir o bajar la cruceta, donde están articuladas las bielas (una por álabe), cuyos extremos opuestos están a su vez articulados a las manivelas, solidarias con los álabes que giran con ellas. El movimiento longitudinal del vástago se produce automáticamente con la turbina en marcha al variar la carga, mediante un servomotor de aceite, como se explicará en la Sec. 29.7.

El mecanismo de orientación de los álabes de una turbina Dériaz es análogo al anterior y se representa en la Fig. 22-12. El cubo de las turbinas Kaplan y Dériaz, como se ve en las dos figuras, es hueco y aloja en su interior el mecanismo de regulación, incluyendo el servomotor de orientación de los álabes.

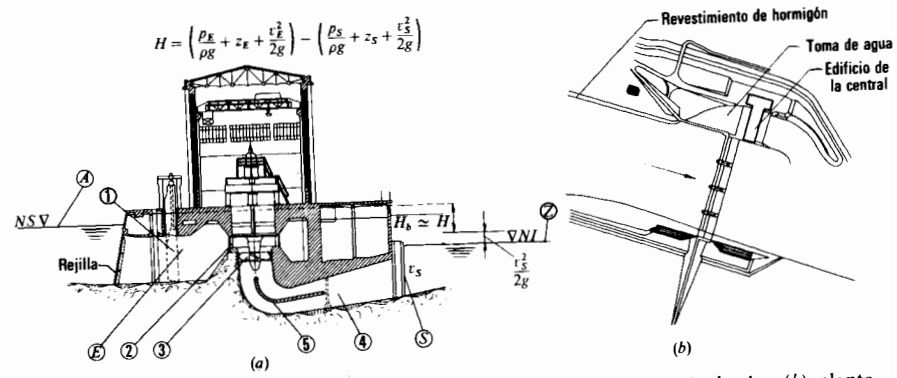


FIG. 22-14. *Central de agua fluyente* de Argency en el Moselle: (*a*) alzado; (*b*) planta.

22.6.2. Descripción de una central con turbinas Kaplan

La Fig. 22-14 representa una *central de agua fluyente* de pequeña altura equipada con turbinas Kaplan:

(Los números remiten a los de la figura.)

1 — *Compuerta de admisión* a la turbina. Sólo cuando se cierra esta compuerta la turbina queda sin agua para la revisión, porque la estanqueidad perfecta no se logra con el distribuidor Fink, aun estando completamente cerrado. Estas compuertas suelen ser de diferentes tipos. La Fig. 22-15 corresponde a uno de los cuatro tableros que forman la *compuerta de rodillos* de entrada a las turbinas de la central Río Negro (Uruguay) de 7 × 7 m de luz, construida por la casa Voith. Este tipo es muy frecuente.

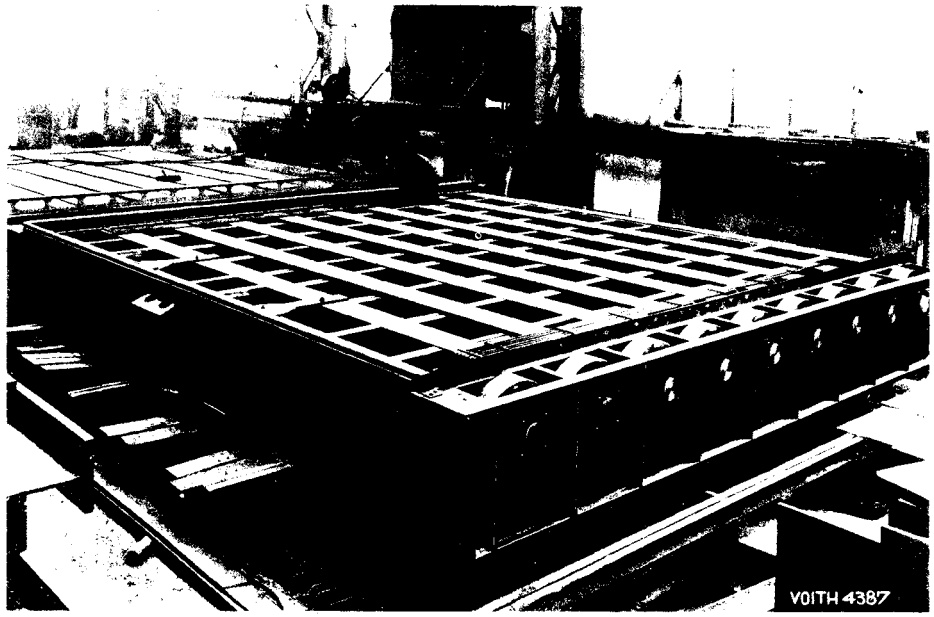


FIG. 22-15. Uno de los 4 tableros de la *compuerta de rodillos* a la entrada de las turbinas de la central de río Negro (Uruguay) construida por la firma Voith. Sección de entrada 7 × 7 m. A la derecha se ven los rodillos de deslizamiento.

En la Fig. 22-16 se ve otro tipo de compuerta: la *válvula de mariposa.*

La de la figura, de 5,20 m de diámetro, está construida por la casa Escher-Wyss. El empleo de las válvulas de mariposa es muy frecuente en saltos de pequeña y mediana altura.

2 — *Distribuidor* Fink (véase Fig. 22-8).

3 — *Rodete:* como la turbina Kaplan (álabes orientables), es mucho más cara que la hélice (álabes fijos), a veces se equipa una central de pequeña altura con turbinas hélice y Kaplan. Así, por ejemplo, una central de 50.000 kW se podría equipar con una turbina hélice de 25.000 kW y otra Kaplan de 25.000. Si la carga de la central es 1/2 se hará funcionar sólo la turbina hélice a plena carga con óptimo rendimiento, a pesar de su *curva en gancho* (Fig. 22-11 *f*). Si la carga desciende, por ejemplo, 1/4, funcionará sólo la Kaplan a 1/2 de la carga con rendimiento muy bueno gracias a su *curva plana* (Fig. 22-11 *b*).

En la Fig. 22-17 puede verse una foto de un rodete Kaplan de 7,4 m de diámetro.

4 — *Tubo de aspiración.* En este caso no es troncocónico, como en la Fig. 22-7, sino acodado. Los tubos de aspiración acodados suelen ser de hormigón, con frecuencia blindados con chapa y de forma cuidadosamente estudiada para óptimo rendimiento, pasando gradualmente de la sección circular a una sección rectangular.

El tubo de aspiración forma parte de la turbina.

La turbina termina en la sección de salida, *S* (véase la figura). La constructora civil hormigona el tubo de aspiración según planos facilitados

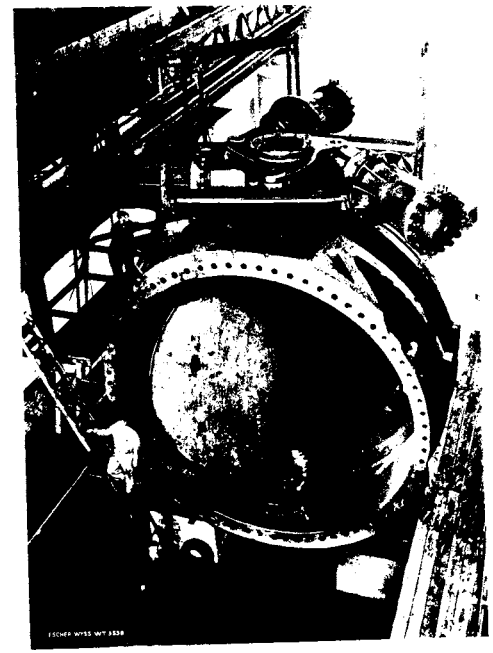


FIG. 22-16. *Válvula de mariposa* de 5,20 m de diámetro construida por Escher Wyss en acero colado y forjado para 120 m de presión. *(Por cortesía de «Bulletin Escher Wyss».)*

FIG. 22-17. *Rodete Kaplan* de 7.4 m de diámetro perteneciente a una de las 5 turbinas de una central en el Danubio construidas por la casa Voith, Alemania. La potencia de cada turbina es 32.370 kW y la altura de salto 10,6 m. *(Por cortesía de J. M. Voith GMBH.)*

por el constructor de la turbina. El nervio central (n. 5 de la figura), cuidadosamente estudiado con ensayos de laboratorio, evita las pérdidas por desprendimiento de la corriente. El rendimiento de la turbina en estas centrales de poca altura, depende tanto del tubo de aspiración como del rodete. La función del tubo de aspiración en estas centrales fundamentalmente es la primera mencionada en la Sec. 22.5.1, es decir, recobrar la altura de velocidad que sale del rodete, que en los saltos de poca altura llega a valer hasta la mitad de la altura neta. Si no hubiera tubo de aspiración, el rendimiento hidráulico sería inferior al 50 por 100. Con tubo de aspiración puede ser superior al 90 por 100.

22.7. ALGUNAS TENDENCIAS ACTUALES EN LA CONSTRUCCION DE LAS TURBINAS HIDRAULICAS

En los primeros años del siglo xx ya se habían construido turbinas Francis de más de 7.000 kW. La evolución continua de la construcción de turbinas en este siglo se refleja en la

— *Construcción de turbinas de potencia creciente.*
De 7.350 kW, en 1905, se llegó cincuenta años más tarde a los récords de potencias unitarias siguientes:

a) *en turbinas Pelton:* 110.400 kW, central de Cimego, Italia;
b) *en turbinas Francis:* 129.000 kW, central de Bersimis, Canadá;
c) *en turbinas Kaplan:* 80.900 kW, central de McNary.

La evolución sigue porque tanto en el alternador como en la turbina y en la obra civil el precio por kW instalado disminuye con la potencia unitaria. Es mucho más barata una central de 100.000 kW con 2 turbinas de 50.000 que con 10 de 10.000 kW. Así, actualmente, se han construido en Rusia para la central de Krasnoiarsk 10 turbinas Francis de 508.000 kW por unidad con una masa del rodete de $250 \cdot 10^3$ kg, con 10 m de diámetro y alimentadas por tubería forzada de 7,5 m de diámetro. En 1968 se estaban ya preparando los planos para la construcción de turbinas Francis de 650.000 kW para la central de Sayano-Shushenskaya, también en Rusia, de 194 m de altura de salto.

— *Alturas mayores y adaptación de las Francis y Kaplan a saltos crecientes.*

En estos treinta últimos años las alturas máximas de salto explotadas se han duplicado (de 1.000 a 2.000 m).

a) *en turbinas Pelton* el récord actual de altura es 2.030 m: central de Laures, Italia;
b) *en turbinas Francis* el récord de altura en 1966 era 522 m: central de Ferrera, Suiza, de 72.000 kW. Las Francis tienden a invadir el terreno de las Pelton por lo que respecta a alturas, instalándose en saltos que oscilan entre los 10 y 600 m;
c) *en turbinas Kaplan* el récord de altura en el año 1969 correspondía a la central de Nembia, Italia, de 88 m de salto neto. También las Kaplan invaden el terreno de las Francis, adaptándose cada vez más a saltos mayores, para aprovechar sus características de buen rendimiento a cargas intermedias.

— *Caudales mayores.* En el año 1970 los caudales máximos (fuera de Rusia) eran de 200 m^3/s en las Francis y 550 m^3/s en las Kaplan. Tanto la evolución de las turbinas rápidas (n_s creciente) como la evolución en la construcción de compuertas móviles, etc., han hecho posible en la actualidad la explotación de los *saltos de llanura*, más cercanos a las desembocaduras de los ríos, que se caracterizan por grandes caudales y pequeñas alturas (a veces cercanas a 1 m).
— *Número específico de revoluciones creciente.* Los grupos bulbo de las centrales mareomotrices (Sec. 23.2) han alcanzado el valor máximo de $n_s = 1.150$.
— *Rendimientos crecientes.* Hay pocas probabilidades de que el rendimiento máximo actual de las turbinas sea superado: los rendimientos máximos actuales son:

— turbinas Kaplan, 93 por 100;
— turbinas Francis, 92 por 100;
— turbinas Pelton, 90 a 91 por 100.

Actualmente se tiende a construir turbinas cada vez más económicas, de explotación más fácil y más duraderas. Otras tendencias actuales son, pues, las siguientes:

— *Aumento de potencia unitaria.* Este aumento, además de reducir el coste por kW instalado, facilita la explotación. El problema consiste en primer lugar en aumentar la capacidad de producción y mecanización de piezas grandes, a que pocos talleres pueden hacer frente (hornos de fundición más grandes, tornos verticales mayores, longitud mayor de los tornos para mecanizar los ejes, etc.); y en segundo lugar en la posibilidad misma del transporte (anchura del ferrocarril, posibilidad de transporte por barco, puentes-grúa de capacidad suficiente en los talleres y en la central).

En la U.R.S.S. hay un programa en marcha de explotación de los enormes recursos hidráulicos de la región oriental del país, de Siberia, de Asia Central y de la zona europea del país. El plan incluye aumentar la potencia instalada en las centrales Ust'ilimskaja, Zejskaja, Ingurskaja y Nurekscaja. Para equipar las centrales en los ríos Lena y Yenissei, superpotentes, se contempla una potencia unitaria de las turbinas de 1.200 MW análoga a los grupos de mayor potencia de turbinas de vapor que se construyen en la actualidad (8).

— *Aumento de potencia específica* (potencia por unidad de peso o unidad de volumen).
— *Facilitación de revisión* y desmontaje de la turbina.
— *Automatización* de la central.
— *Sustitución de la fundición por construcción en chapa*, con la disminución consiguiente del peso de la máquina. En las carcasas la chapa ha sustituido muchas veces a la fundición, con lo que se ahorra un 12 por 100 de peso y un 10 por 100 del coste total en una turbina de gran potencia.

(8) Véase N. N. Stepanov, *Gidravliceskie masiny*, Kiev, Visca skola, 1978, 152, págs. 7-8.

— *Sustitución casi total del roblonado por la soldadura* en la construcción de turbinas Francis y Kaplan.
— *Control del fenómeno de cavitación* y aumento consiguiente del n_s posible de las turbinas. Este control se realiza tomando las medidas siguientes: selección apropiada de la altura de aspiración; forma adecuada de las partes sujetas a la cavitación; selección de materiales y capas protectoras, anticavitativas; protección catódica; admisión de aire; permisión de cavitación controlada.

El aumento de la cavitación y del empuje axial con la altura de salto ponen un límite aun hoy día a la altura máxima explotada con las turbinas Kaplan. En el año 1970 la mayor altura explotada con turbina Kaplan era la de 71,5 m de la de la central Moldau, con una potencia de 3 × 91 MW.
— *Aumento de la presión de aceite* en la regulación automática (véase Cap. 29).
— *Construcción de grupos bulbos*, de los que se hablará en la Sec. 23.2. Estos grupos permiten reducir el precio por kW instalado en un 15 por 100.

22.8. ALTURA NETA

Paralelamente a las dos expresiones de la *altura útil o efectiva*, H, de una bomba que se dieron en las Secs. 19.10.1 y 19.10.2, existen también dos expresiones de la llamada *altura neta* de una turbina, que se denominará también H, porque una y otra representan la misma realidad física.

Altura neta es la altura puesta a disposición de la turbina.
Una bomba *absorbe* energía mecánica y *restituye* energía hidráulica.
La diferencia entre la energía específica que tiene el fluido a la salida de la bomba (sección S) y a la entrada (sección E) es la energía útil o efectiva comunicada por la bomba al fluido. Ahora bien, $\frac{Y}{g} = H$ *es la altura útil o efectiva.*

La altura útil H es menor que la altura teórica H_u o altura que el rodete comunica al fluido, porque hay que descontar las pérdidas interiores en la bomba. Es decir [Ec. (19-4)],

$$H = H_u - H_{r\text{-int}} \tag{22-12}$$

Una turbina *absorbe* energía hidráulica y *restituye* energía mecánica.

La diferencia entre la energía específica que tiene el fluido a la entrada de la turbina (sección E) y a la salida (sección S) es la energía suministrada a la turbina, que puesta en forma de altura se denomina altura neta H.

La altura neta no es la altura útil aprovechada por la turbina, sino la altura teórica que hubiera aprovechado si no hubiera habido pérdidas. Parte de esta altura se disipa, pues, en pérdidas hidráulicas, y el agua *intercambia con el rodete* una altura menor que la que ha absorbido. Esta última altura que en este caso es la altura hidráulica útil es la altura de Euler. Por tanto,

$$\boxed{H = H_u + H_{r\text{-int}}} \tag{22-13}$$

Recuérdese que tanto en las bombas como en las turbinas *la altura de Euler representa el equivalente en altura de la energía intercambiada entre el fluido y el rodete:* sin embargo, esta energía *en una bomba* es la energía específica *teórica y en una turbina* la energía específica *útil.*

22.8.1. Normas internacionales para la determinación de la altura neta

Como dijimos en la Sec. 19.4, es importantísimo determinar en qué sección comienza la máquina (sección E) y en qué sección termina (sección S). Sin esta determinación las dos expresiones de la altura neta que vamos a dar a continuación resultan indefinidas. Los pleitos mencionados en dicha sección que pueden surgir son en las turbinas más importantes que en las bombas: *a*) porque las curvas de rendimiento en función de la carga (Fig. 22-11) siempre están garantizadas; y *b*) por la importancia de las potencias que entran en juego. La susodicha determinación es objeto de normas. Todas las normas coinciden en las expresiones de la altura neta que se desarrollarán en las dos secciones siguientes. El objeto de la norma es determinar precisamente las secciones E y S.

El contrato de garantía de rendimiento de una turbina debe ir acompañado de un esquema o al menos de una cláusula que determine o especifique la norma que se ha adoptado para definir la entrada E y la salida S de la turbina.

Altura neta es la diferencia de alturas totales entre la entrada y la salida de la turbina (véase la Sec. 22.8.2).

Las normas más empleadas en la actualidad son las «Normas internacionales para los ensayos de las turbinas hidráulicas en las centrales hidroeléctricas» (9).

Estas normas quedan bien claras con las cuatro figuras que se aducen:

Fig. 22-18 *a*: Turbina de reacción (turbinas Francis, Dériaz, hélice y Kaplan) con caja espiral de hormigón y tubo de aspiración de secciones transversales con aristas rectas.
Fig. 22-18 *b*: Turbina hidráulica de reacción con cámara espiral de sección circular.
Fig. 22-18 *c*: Turbina hidráulica de reacción de eje horizontal.
Fig. 22-18 *d*: Turbina Pelton de un chorro y de dos chorros (línea de puntos).

La fórmula de la altura neta en cada caso se aduce en la correspondiente figura.

En la turbina Pelton simple se advertirá que, según esta norma, no figura el término $v_S^2/2g$, que sería igual a $c_2^2/2g$ (la salida de la turbina Pelton se encuentra a la salida del rodete). El constructor deberá procurar que $c_2^2/2g \simeq 0$ porque al no tener la turbina Pelton tubo de aspiración, dicha altura cinética constituye una pérdida que disminuye su rendimiento y es según esta norma imputable a la turbina.

Se advertirá también que en la turbina Pelton de dos o más chorros la altura neta es la altura que multiplicada por el caudal total daría una potencia igual a la suma de las potencias de cada chorro. Con este criterio se ha desarrollado la norma que se muestra en la Fig. 22-18 *d*.

(9) *Internationaler Code für Abnahmeversuche an Wasserturbinen in Kraftwerken*, Springer, Berlín 1965.

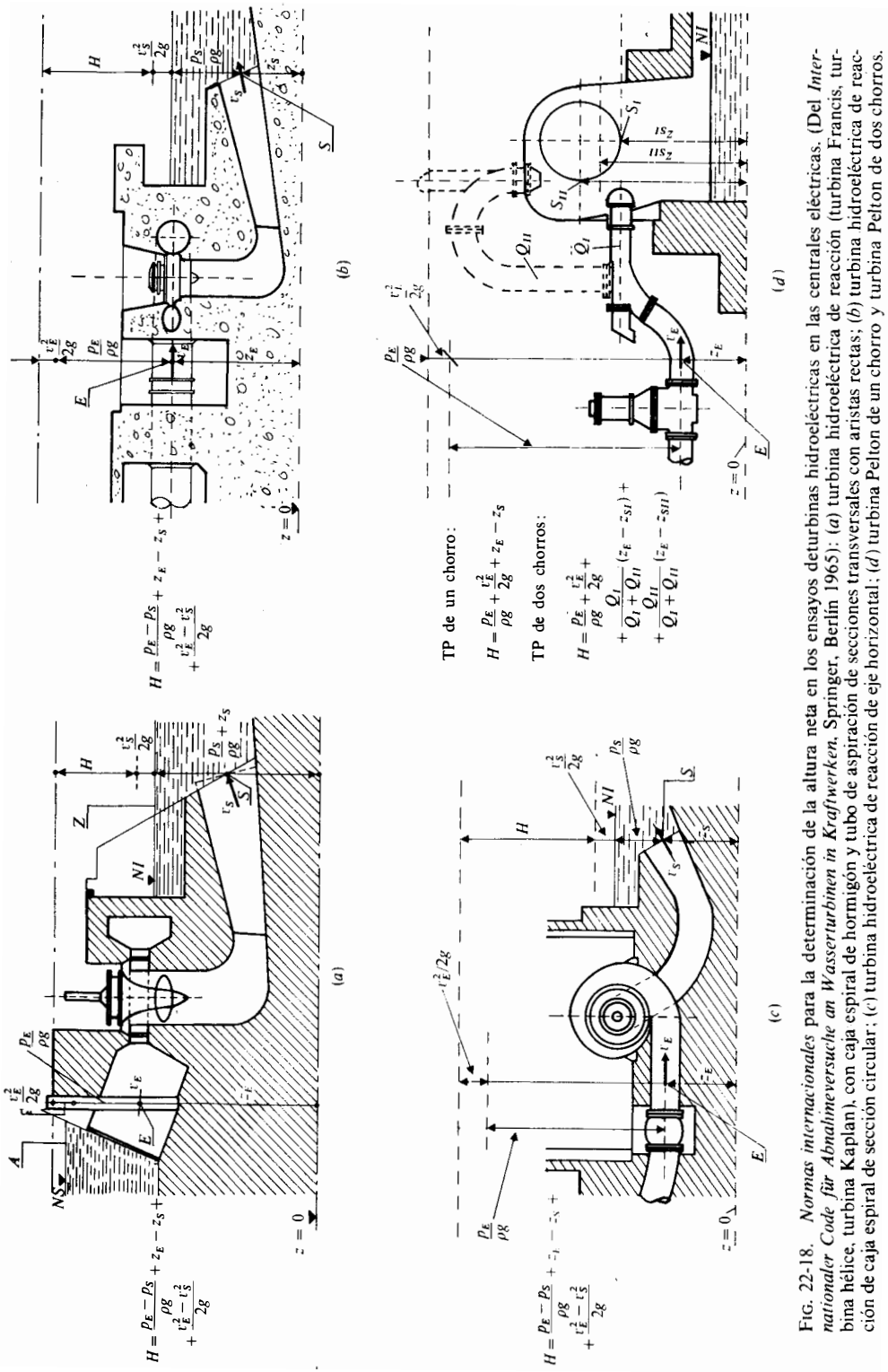


FIG. 22-18. *Normas internacionales* para la determinación de la altura neta en los ensayos deturbinas hidroeléctricas en las centrales eléctricas. (Del *Internationaler Code für Abnahmeversuche an Wasserturbinen in Kraftwerken*, Springer, Berlín 1965): (*a*) turbina hidroeléctrica de reacción (turbina Francis, turbina hélice, turbina Kaplan), con caja espiral de hormigón y tubo de aspiración de secciones transversales con aristas rectas; (*b*) turbina hidroeléctrica de reacción de caja espiral de sección circular; (*c*) turbina hidroeléctrica de reacción de eje horizontal; (*d*) turbina Pelton de un chorro y turbina Pelton de dos chorros.

En resumen, según dicha norma internacional:

— *Sección E: En todas las turbinas* la sección de entrada se encuentra inmediatamente detrás de la válvula de admisión (compuerta, de mariposa, de rodillos, etc.). A veces, si los saltos son muy pequeños y los caudales no muy grandes (hasta unos 10 m^3/s), el canal mismo de admisión se ensancha formando una cámara, donde se instala la turbina que se dice instalada en *cámara de agua:* en dichas instalaciones la pérdida desde el nivel de aguas arriba hasta la entrada de la turbina es tan pequeña que puede despreciarse, con lo que puede tomarse el nivel de aguas arriba como sección *E* (en dichas turbinas la altura neta coincide prácticamente con la altura bruta).

— *Sección S:* La sección de salida se encuentra:

a) *en todas las turbinas de reacción* (Francis, Dériaz, hélice y Kaplan) en la sección de salida del tubo de aspiración (10).

b) *en todas las turbinas de acción* (Pelton) en el punto de tangencia del eje del chorro con un círculo cuyo centro es el centro del rodete. Por tanto, si por dificultades de construcción (excavación en roca, por ejemplo) el punto *S* de una turbina Pelton se encuentra a 15 m por encima del canal de salida, estos 15 m constituyen una *pérdida de altura bruta;* pero no afectan al rendimiento de la turbina, porque sólo son imputables a la turbina las pérdidas que tienen lugar entre la sección *E* y la *S*. Sin embargo, como ya se ha dicho, *la pérdida* $v_S^2/2g$ *sí es imputable a la turbina.*

---

(10) Las antiguas *normas europeas* establecían la sección de salida de las turbinas de reacción en el nivel *NI* del canal de salida.

Empleando el subíndice *Z* para el nivel inferior de la central (*NI* en Fig. 22-18 *a*), se tendrá:

$$H_{ant.\ norma\ europ.} = \frac{p_E - p_Z}{\rho g} + z_E - z_Z + \frac{v_E^2 - v_Z^2}{2g}$$

$$H_{norma\ intern.} = \frac{p_E - p_S}{\rho g} + z_E - z_S - \frac{v_E^2 - v_Z^2}{2g}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones *S* y *Z*, se tendrá:

$$\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g} - \frac{v_S^2}{2g} = \frac{p_Z}{\rho g} + z_Z$$

siendo $H_{r\,S\text{-}Z} = \frac{v_S^2}{2g}$ y habiendo hecho $\frac{v_Z^2}{2g} \simeq 0$.

Luego

$$H_{norma\ intern.} = H_{ant.\ norma\ europ.} - \frac{v_S^2}{2g}$$

Siendo $\frac{v_S^2}{2g}$ muy pequeña, la diferencia de altura neta computada por una y otra norma no es muy grande, siendo menor la computada por la norma internacional y el rendimiento hidráulico mayor, porque la H_u es igual en ambos casos [véase la Ec. (22-24)].

En los problemas de este libro supondremos, siempre que no se advierta lo contrario, que $\frac{v_S^2}{2g} \simeq 0$, lo cual equivale a poder tomar la salida de la turbina indiferentemente en las secciones *S* o *Z*.

22.8.2. Primera expresión de la altura neta y de la energía neta

Siguiendo el mismo procedimiento de la Sec. 19.10.1, para deducir la altura útil de una bomba, escribamos la ecuación de Bernoulli entre las secciones de entrada y salida, E y S, de cualquier turbina:

$$\frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{v_E^2}{2g} - H = \frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g}$$

Despejando H, tendremos:

$$H = \left(\frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{v_E^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{v_S^2}{2g}\right) \qquad (22\text{-}14)$$

el primer paréntesis es la altura total del agua a la entrada y el segundo la altura total a la salida [compárese con la Ec. (19-5)]. Por tanto,

altura neta es la diferencia de alturas totales entre la entrada y salida de la turbina. Esta diferencia es el incremento de altura absorbida por la turbina (altura teórica).

Reordenando los términos en la Ec. (22-14), se tiene:

PRIMERA EXPRESION DE LA ALTURA NETA

$$H = \frac{p_E - p_S}{\rho g} + z_E - z_S + \frac{v_E^2 - v_S^2}{2g} \qquad (22\text{-}15)$$

[compárese con la Ec. (19-6)].

Por tanto,

la altura neta es igual al incremento de altura que absorbe la turbina en forma de presión + la que absorbe en forma de altura geodésica + la que absorbe en forma de altura cinética.

Adviértase:

1.º *En toda turbina* $p_S/\rho g = 0$ y $z_S = 0$ (si se toma como plano de referencia el plano de salida).
2.º *En una turbina Pelton* (véase Sec. 22.4.2 y Fig. 22-6) $v_S^2/2g = c_2^2/2g \simeq 0$.
3.º *En toda turbina* $v_S^2/2g$ es muy pequeña y muchas veces puede despreciarse. (Nótese que sólo en las Pelton, $v_S = c_2$).
4.º $p_E/\rho g$ se calcula leyendo convenientemente el manómetro instalado a la entrada de la turbina; $v_E^2/2g$ se calcula midiendo el caudal y la sección de entrada.

Además, teniendo en cuenta la Ec. (18-11), se tendrá:

PRIMERA EXPRESION DE LA ENERGIA NETA

$$Y = \frac{p_E - p_S}{\rho} + (z_E - z_S)g + \frac{v_E^2 - v_S^2}{2} \qquad (22\text{-}16)$$

[compárese con la Ec. (19-7)].

La energía neta es igual al decremento de energía de presión que experimenta el fluido en la turbina + el decremento de energía geodésica + el decremento de energía dinámica (11).

22.8.3. Segunda expresión de la altura neta y de la energía neta

La siguiente expresión se deduce de la definición, ya que siendo la altura neta *la altura puesta a disposición de la turbina* será también la altura bruta descontándole las pérdidas antes de la turbina (antes de la sección E) y las pérdidas después de la turbina (después de la sección S). (Véase la Fig. 22-18.)

Escribamos, análogamente a como hicimos en la Sec. 19.10.2, la ecuación de Bernoulli entre la sección A (nivel superior del salto, o sea cota máxima del salto explotado o cota del nivel superior del embalse) y la sección Z (nivel inferior de aguas abajo en el canal de salida; véanse las Figs. 22-14 y 22-18):

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - H_{r\text{-ext}} - H = \frac{p_Z}{\rho g} + \frac{v_Z^2}{2g} + z_Z$$

donde $H_{r\text{-ext}}$ — pérdidas *exteriores* a la turbina (este término incluye tanto las pérdidas antes de la turbina, que son las principales, como las pérdidas después de la turbina). Pero

$$z_A - z_Z = H_b \ (altura\ bruta) \qquad \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_Z}{\rho g} = 0$$

y prácticamente, $\dfrac{v_A^2}{2g} = \dfrac{v_Z^2}{2g} = 0$;

luego

$$H = H_b - H_{r\text{-ext}} \qquad (22\text{-}17)$$

siendo

$$H_{r\text{-ext}} = H_{r\,A\text{-}E} + H_{r\,S\text{-}Z}$$

donde $H_{r\,A\text{-}E}$ — pérdidas exteriores antes de la turbina
$H_{r\,S\text{-}Z}$ — pérdidas exteriores después de la turbina

(11) A la altura y energía (específica) neta se la denomina también «altura o energía entre bridas» y equivale en las turbinas hidráulicas a la tensión entre bornes de un motor eléctrico (véase la nota en pie de página 387).

SEGUNDA EXPRESION DE LA ALTURA NETA

$$H = H_b - H_{r\,A\text{-}E} - H_{r\,S\text{-}Z} \qquad (22\text{-}18)$$

Es decir:

Altura neta es igual a la altura bruta menos las pérdidas en la tubería forzada (o en el canal de llegada) menos las pérdidas después de la salida de la turbina.

La 1.ª expresión de H [Ec. (22-15)] mira más a la turbina misma y la 2.ª [Ec. (22-18)] mira más a la instalación (compárese con las Secs. 19.10.1 y 19.10.2).

Antes de hacer el contrato del encargo y compra de las turbinas de una central hidroeléctrica se ha de deducir sobre el proyecto de la misma aún no construido la altura neta mediante la Ec. (22-18).

Aplicando de nuevo la Ec. (18-11), se tiene:

SEGUNDA EXPRESION DE LA ENERGIA NETA

$$Y = Y_b - Y_{r\,A\text{-}E} - Y_{r\,S\text{-}Z}$$

La energía neta es igual a la energía bruta menos la energía perdida antes de la turbina menos la energía perdida después de la turbina.

22.9. PERDIDAS, POTENCIAS Y RENDIMIENTOS

Aquí, lo mismo que en una bomba (Sec. 19.11.1), las pérdidas en la turbina (entre las secciones E y S, Figs. 22-2 y 22-14) se clasifican en tres grupos: pérdidas hidráulicas, pérdidas volumétricas y pérdidas mecánicas:

— *Las pérdidas hidráulicas* tienen lugar: desde la sección E hasta el distribuidor; en el distribuidor Fink (y antes en la caja espiral y en el llamado predistribuidor) o el inyector; entre el distribuidor y el rodete (este espacio se llama *entrehierro*, en las turbinas de reacción); en el rodete y finalmente en el tubo de aspiración, si lo hay.

— *Las pérdidas volumétricas* o intersticiales se dividen como en las bombas, en *pérdidas exteriores* y *pérdidas interiores*. En las pérdidas interiores es útil comparar la Fig. 22-19 *a* (bombas) con la Fig. 22-19 *b* (turbinas): en las bombas (Fig. 22-19 *a*) el caudal q_i *retrocede* por el juego entre el rodete y la carcasa desde la salida del rodete otra vez a la entrada, porque la presión a la salida del rodete es mayor que a la entrada. En las turbinas el caudal q_i (Fig. 22-19 *b*) no retrocede, sino que sigue, por el juego también entre el rodete y la carcasa, pero *en dirección del caudal principal*, siempre que la presión a la entrada del rodete sea mayor que a la salida del rodete (turbinas de reacción). El caudal q_i representa una pérdida porque no cede su energía al rodete, sino que su energía se pierde por estrangulamiento en el exterior del rodete. Por eso las expresiones del rendimiento volumétrico en las bombas [Ec. (19-19)] y en las turbinas [Ec. (22-23)] son distintas.

— *Las pérdidas mecánicas* son de igual naturaleza en las bombas y en las turbinas.

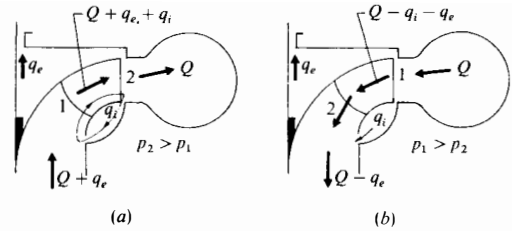


FIG. 22-19. *Pérdidas volumétricas* en las bombas (ventiladores) y turbinas. (*a*) El caudal a la entrada de la bomba es $Q + q_e$ y a la salida (caudal útil) es Q; el rodete bombea $Q + q_i + q_e$. (*b*) El causal a la entrada y salida de la turbina es el caudal teórico o caudal suministrado Q; por el rodete circula sólo el caudal útil, $Q - q_i - q_e$.

Recordando lo dicho en la Sec. 19.11.2 acerca de las bombas y teniendo en cuenta la inversión de los fenómenos que en la turbina ocurren por ser máquina motora en lugar de máquina generadora, será fácil entender las fórmulas siguientes:

Potencia teórica (= potencia absorbida o potencia neta = potencia hidráulica puesta a disposición de la turbina):

$$P = Q\rho g H \qquad (22\text{-}19)$$

Esta es la potencia absorbida por la turbina. En una bomba la ecuación equivalente [Ec. (19-17)] es la potencia restituida o potencia útil.

Potencia útil (= potencia restituida = potencia al freno = potencia en el eje):

$$P_a = M\omega = 0{,}1047\, nM \qquad (22\text{-}20)$$

M se mide con un dinamómetro y n con un cuentarrevoluciones. [compárese con la Ec. (19-14)].

Potencia interna (potencia suministrada por la turbina descontando la potencia necesaria para vencer los rozamientos mecánicos P_m^r):

$$P_i = P_a + P_m^r \qquad (22\text{-}21)$$

[compárese con la Ec. (19-15)].

Rendimiento hidráulico

$$\eta_h = \frac{H_u}{H} = \frac{u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}}{gH} \tag{22-22}$$

[Compárese con la Ec. (19-18).]

Rendimiento volumétrico:

$$\eta_v = \frac{Q - q_e - q_i}{Q} \tag{22-23}$$

donde Q — caudal suministrado a la turbina
$Q - q_e - q_i$ — caudal útil, o sea caudal que cede su energía en el rodete (véase Fig. 22-18 *b*).

[Compárese con la Ec. (19-19).]

Rendimiento interno:

$$\eta_i = \frac{P_i}{P} \tag{22-24}$$

[Compárese con la Ec. (19-20).]

$$\eta_i = \eta_h \eta_v$$ [véase Ec. (19-21)]

Rendimiento mecánico:

$$\eta_m = \frac{P_a}{P_i} \tag{22-25}$$

[Compárese con la Ec. (19-22).]

Rendimiento total:

$$\eta_{tot} = \frac{P_a}{P} \tag{22-26}$$

[Compárese con la Ec. (19-23).]

La potencia útil en una turbina es la potencia mecánica P_a; pero tiene su equivalente hidráulico. En efecto, de todo el caudal suministrado a la turbina se aprovecha el caudal útil, o sea $Q\eta_v$; de toda la altura neta se aprovecha la altura de Euler, o sea $H\eta_h$; del producto del caudal útil por la altura útil se obtiene la potencia interna multiplicando por ρg, o sea $P_i = Q\eta_v H\eta_h \rho g$; de la potencia interna se aprovecha sólo $P_i\eta_m$. Por tanto, en unidades hidráulicas:

$$P_a = P_i\eta_m = QH\rho g\eta_h\eta_v\eta_m \tag{22-27}$$

Finalmente:

$$\eta_{tot} = \frac{P_a}{P} = \frac{P_a}{P_i} \cdot \frac{P_i}{P} = \eta_m\eta_i$$

Luego

$$\eta_{tot} = \eta_i\eta_m = \eta_h\eta_v\eta_m \tag{22-28}$$

que coincide con la Ec. (19-24).

22.10. ECUACION DEL TUBO DE ASPIRACION

El tubo de aspiración desempeña, como ya se dijo en la Sec. 22.6.2, un papel importantísimo en las turbinas de reacción (las turbinas de acción no poseen tubo de aspiración). Este papel es tanto más importante cuanto mayor es el número específico de revoluciones de la turbina.

El tubo de aspiración es excepcionalmente cilíndrico, siendo de ordinario troncocónico o acodado (véase Fig. 22-14).

En la Fig. 22-20, que representa una turbina en cámara de agua (véase Sec. 22.8.1), el tubo de aspiración es troncocónico y empieza en un codo.

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre la salida del rodete (punto 2) y el nivel inferior del salto (punto Z):

$$\frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{c_2^2}{2g} - H_{ra} = \frac{p_Z}{\rho g} + z_Z + c_Z^2/2g$$

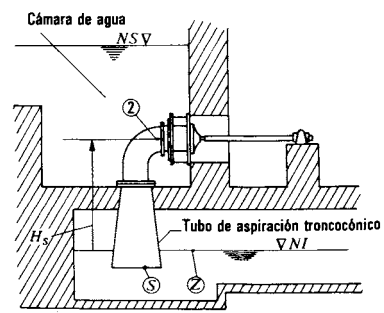


FIG. 22-20. Deducción de la ecuación *del tubo de aspiración*. En el caso particular de la figura la turbina está instalada en *cámara de agua*. En el punto 2 se crea un vacío que no debe ser tan grande que se produzca la *cavitación* (véase problema 22-4).

H_{ra} — pérdidas en el tubo de aspiración, incluyendo las pérdidas por velocidad de salida del mismo $c_S^2/2g$)

$z_2 - z_Z = H_S$ (véase figura) — altura de suspensión o altura de aspiración (cota del eje de la bomba con respecto al nivel inferior, *NI*)

$$\frac{p_Z}{\rho g} = 0 \quad , \quad \frac{c_Z^2}{2g} \simeq 0$$

Por tanto,

$$\frac{p_2}{\rho g} = -\left(H_S + \frac{c_2^2}{2g}\right) + H_{ra} \qquad (22\text{-}29)$$

La Ec. (22-29) pone en evidencia las funciones que desempeña el tubo de aspiración:

a) Recupera la altura de suspensión de la turbina, creando una depresión a la salida del rodete *(función aspiradora)*.

b) Recupera la energía cinética a la salida del rodete, creando también una depresión a la salida del mismo *(función difusora)*.

En las turbinas de bajo n_s, que se caracterizan por una H relativamente grande, el papel aspirador suele ser más importante; mientras que en las de elevado n_s, que se caracterizan por un Q relativamente grande, suele ser más importante el poder difusor.

Cuanto menores son las pérdidas en el tubo de aspiración tanto mayor será la depresión alcanzada a la salida del rodete (el tubo de aspiración será más eficiente).

El tubo de aspiración, al crear una depresión a la salida del rodete, incrementa el salto de presión en el rodete y, por tanto, la altura útil. Esto último queda patente en el problema 22-5, cuya solución deberá estudiarse con cuidado.

22.11. CAVITACION Y GOLPE DE ARIETE DE UNA TURBINA

22.11.1. Cavitación

De la Ec. (22-29) se desprende fácilmente que en las turbinas hidráulicas se puede producir el fenómeno de la cavitación, que fue estudiado en general en la Sec. 15.2 y en particular en las bombas en la Sec. 19.12.

En efecto, si se eleva excesivamente la altura de aspiración H_S de la turbina (véase Fig. 22-20), con el fin por ejemplo de proteger el alternador contra las inundaciones posibles por la elevación del agua en el *NI*, o/y la velocidad del agua a la salida del rodete es relativamente grande, lo que fácilmente tiene lugar en las turbinas rápidas o de n_s elevado, la presión media p_2 a la salida del rodete puede llegar a ser $p_2 \leq p_s$ (p_s — presión de saturación del vapor a la temperatura del agua en la turbina) y producirse la cavitación. Más aún, incluso sin que la *presión media* $p_2 \leq p_s$, la *presión local* en un punto cercano a la salida del rodete puede descender hasta dicho valor, iniciándose en dicho punto la cavitación.

El fenómeno de la cavitación se viene estudiando desde hace más de cincuenta años y en la actualidad la investigación continúa, lo cual se explica por lo intrincado del problema. La cavitación ha constituido y sigue constituyendo un serio obstáculo en el proyecto de las turbinas, porque al producirse este fenómeno se origina la destrucción del material por erosión y corrosión química, disminuye el rendimiento de la turbina y se produce ruido con vibraciones intensas. Modernamente se tiende a construir las turbinas con potencia unitaria creciente y reduciéndo su precio a costa de la disminución de su peso y dimensiones; todo lo cual conduce a turbinas de mayor n_s y más expuestas a que se origine la cavitación.

Muchas veces la solución más económica no consiste en construir una turbina en la cual se excluya totalmente la cavitación. En la práctica se construyen turbinas en las cuales puede originarse un grado de cavitación controlado, con erosión de los álabes tolerable que obligue a reparaciones periódicas, pero que no afecte ni al rendimiento de la turbina ni a un funcionamiento de la turbina totalmente exento de cavitación. Esto puede hoy lograrse gracias al conocimiento que se tiene en la actualidad de este fenómeno. Los materiales empleados en la construcción de las turbinas han de ser especialmente resistentes a la erosión y corrosión cavitativa.

El coeficiente de cavitación deThoma σ se define para las turbinas hidráulicas de manera análoga que para las bombas:

$$\sigma = \frac{(p_{amb} - p_s)/\rho g - H_{s\,máx}}{H} \qquad (22\text{-}30)$$

donde p_{amb} — presión atmosférica indicada por el barómetro

p_s — presión de saturación del vapor; como las turbinas hidráulicas trabajan con agua fría, $\frac{p_S}{\rho g} \simeq 0$ (véase Tabla 15-1).

$H_{s\,máx}$ — (véase Fig. 22-20) valor máximo que H_s alcanza cuando tiene lugar la cavitación (12).

Cuanto más rápida sea la turbina (mayor n_s no precisamente mayor n) mayor es el peligro de cavitación. Por tanto, este peligro es mayor en las turbinas Kaplan que en las Francis y en éstas que en las Pelton. Las investigaciones modernas han podido producir turbinas más rápidas que funcionan sin peligro de cavitación. Si interesa utilizar una turbina muy rápida, el coeficiente de Thoma será

(12) Comparando la Ec. (22-30) con la Ec. (19-33) junto con la Ec. (19-31) se observa que no figura en la primera el término de las pérdidas, porque dicho término está implícito ya en el numerador de la Ec. (22-30), porque las pérdidas en el tubo de aspiración son exteriores en la bomba, pero son interiores en la turbina. En efecto, $\frac{p_{amb} - p_S}{\rho g} - H_{S\,max}$ es igual a Δh o pérdida en el interior de la turbina, resultando que en las turbinas, como en las bombas,

$$\sigma = \frac{\Delta h}{H}$$

(véase la demostración de esto último en Claudio Mataix, *Turbomáquinas Hidráulicas*, Madrid, I.C.A.I., 1975, 1.371 págs.

grande y para ello, no pudiendo modificar en la Ec. (22-30) el término $p_{amb}/\rho g$, convendrá disminuir H_s. El tubo de aspiración acodado, como el de la Fig. 22-14 *a*, permite disminuir H_s contando, sin embargo, con longitud suficiente para realizar la recuperación de energía cinética, según la Ec. (22-29).

La Fig. 22-21 muestra los efectos destructores de la cavitación en un rodete de turbina.

En las turbinas, lo mismo que en las bombas, se ha comprobado experimentalmente que todas las turbinas geométricamente semejantes tienen el mismo valor del coeficiente de cavitación σ, lo cual permite el ensayo experimental de la cavitación en un modelo reducido. El esquema de un banco de cavitación puede verse en la Fig. 19-27.

En la Fig. 22-22 puede verse un *banco de cavitación* de la firma Escher Wyss de Suiza, en el que pueden realizarse también otra multitud de ensayos.

Se trata de un banco de cavitación de baja presión, que puede funcionar en circuito cerrado o abierto, adaptado a ensayos de modelos de turbinas héli-

FIG. 22-21. Deterioro causado por la *cavitación* en rodetes de turbinas. (*Por cortesía de Baldwin-Lima-Hamilton.*)

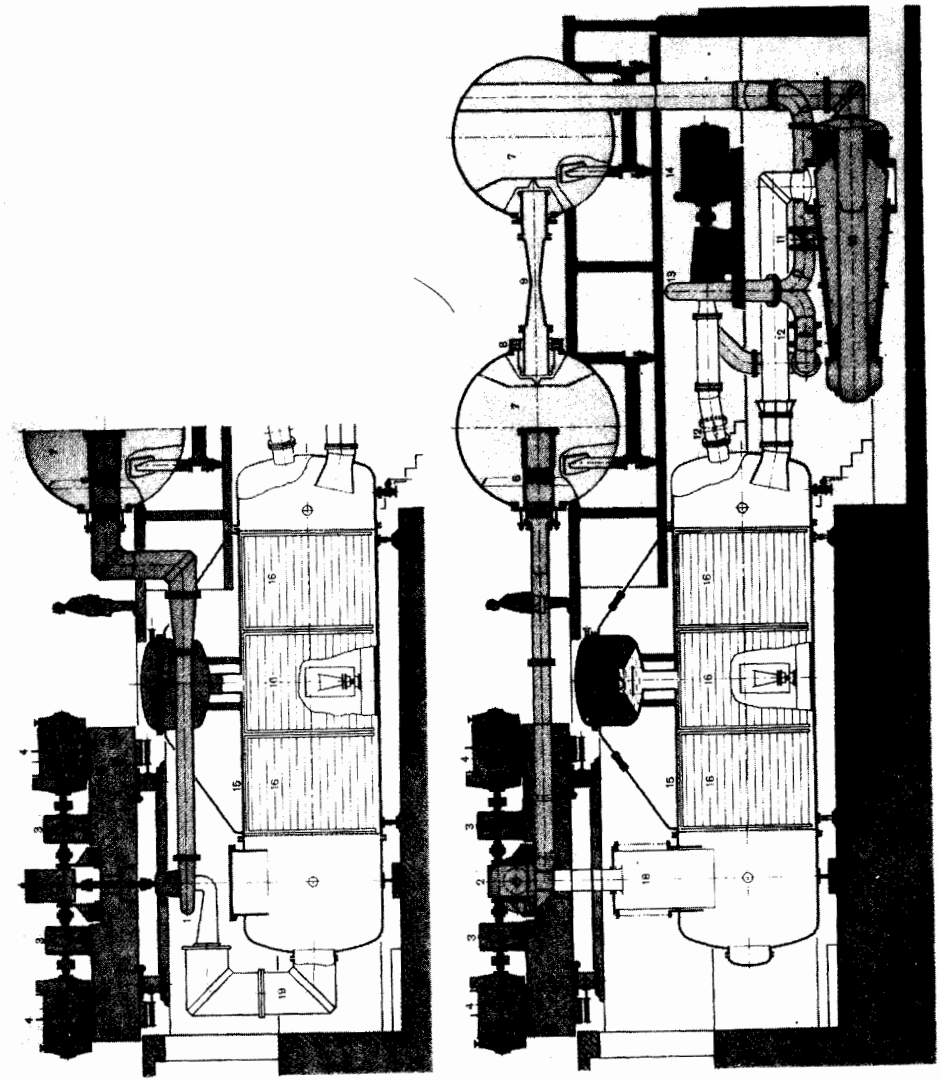


FIG. 22-22. *Banco universal para ensayo de turbomáquinas hidráulicas* de la firma Escher Wyss: (*a*) modelo de eje vertical; (*b*) modelo de eje horizontal: 1, modelo; 2, accionamiento en ángulo recto; 3, acoplamiento de corrientes parásitas, usado también como freno; 4, motores asíncronos de 600 kW cada uno; 5, placa de fundición para 2, 3 y 4; 6, válvula de tambor para regulación tosca de altura de bombeo; 7, tanques de equilibrio (volumen − 17 m^3 cada uno); 8. conexión compensadora de presión; 9, tubos de Venturi simétricos, intercambiables para gamas de caudales diversos; 10. convertidor de energía para regulación fina. Aparato de expansión de cuatro escalonamientos con liberación de aire mínima; 11, válvula de mariposa para regulación tosca del salto de la turbina; 12, válvula de mariposa para conectar las bombas de circulación en serie, en paralelo o en funcionamiento individual; 14, motores asíncronos para bombas, de 400 kW cada uno; 15, depósito de aguas abajo (volumen $\simeq 60$ m^3); 16, placas angulares para captación de las burbujas grandes de aire no disueltas; 17, cúpula del tanque de agua inferior con conexiones al aire comprimido de servicio y a bombas de vacío para variación de la presión entre −8 y 52 m; equipada con válvula de flotador para regulación de nivel; 18, tubería axial ajustable para instalación de tubos de aspiración diversos; 19, tubería de conexión con el tubo de aspiración con compensación por deformación.

ce, Kaplan, Francis, Dériaz y bulbo, así como de las bombas-turbinas reversibles de los grupos binarios de las centrales de acumulación por bombeo. Se trata de un banco universal, que permite el trazado de las curvas características, ensayos generales y de cavitación de las citadas máquinas, con diámetros de modelo hasta aproximadamente 300 mm. La potencia máxima del modelo es de 50 kW y los números de revoluciones pueden oscilar entre 250 y 3.200 rpm (ó 500 y 6.400 rpm con transmisión). Las alturas máximas en los ensayos de turbina es de 12 m y en los de bomba 20 m. El $Q_{máx}$ es de 700 l/s.

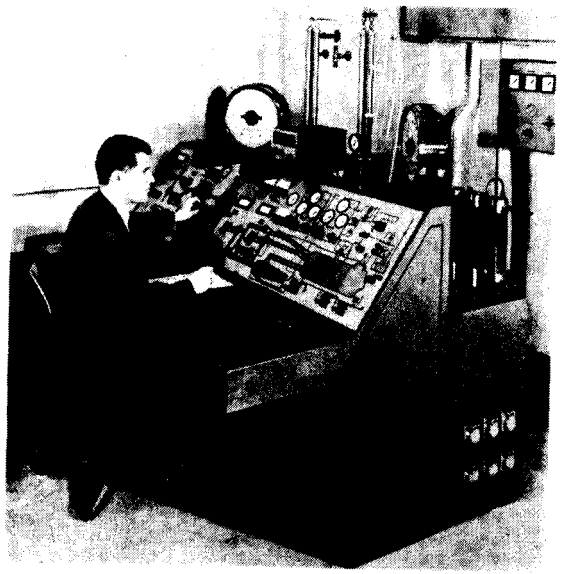


FIG. 22-23. *Pupitre* centralizado con los aparatos de medida y control de la estación de ensayos de la Figura 22-22.

En la Fig. 22-23 puede verse el pupitre de mando y control, donde se han centralizado todos los instrumentos de medida, a fin de que el ensayo pueda ser realizado por un solo ingeniero. Algunas de sus características son:

- transmisión del par, medido por un torsiómetro óptico, por cámara de televisión a un monitor en el pupitre;
- monitores en varios puntos del circuito (presiones en diferentes puntos del circuito, presión del aire de alimentación) conectador a relés con bombillas en el panel de control y con parada automática del banco de ensayos si se enciende la bombilla respectiva, indicadora de avería;
- interruptores de límite conectados a bombillas indican la posición de todos los dispositivos de estrangulamiento.

22.11.2. Golpe de ariete de una turbina: pantalla deflectora, orificio compensador y chimenea de equilibrio

Según la Ec. 15-15, la *sobrepresión* que se produce al cerrar una válvula, en nuestro caso al cerrar el distribuidor de una turbina:

- está *en razón directa de la longitud de la tubería forzada:* luego el *golpe de ariete* se presentará más en los saltos de grande y mediana altura, en que la tubería forzada tiene mayor longitud;
- está *en razón inversa del tiempo de cierre.*

Supongamos que en una central un grupo se queda bruscamente sin carga. Si el distribuidor Fink o el inyector Pelton se cerrasen lentamente la turbina se *embalaría.* Esto puede originar una seria avería mecánica; luego hay que evitarlo; pero si el distribuidor Fink o el inyector se cierran rápidamente, se produce el golpe de ariete.

Para solucionar este problema se utiliza en las turbinas Francis el *orificio compensador*, en las turbinas Pelton la *pantalla deflectora*, y en unas y otras la *chimenea de equilibrio.*

El orificio compensador esencialmente es un orificio obturado con una válvula que, cuando la turbina se queda sin carga, se abre automáticamente. Al abrirse pone en comunicación directamente la cámara espiral con el canal de salida sin pasar por el rodete. De esta manera la turbina no se embala. A fin de que no se gaste mucha agua el distribuidor se cierra, pero lentamente, evitándose así el golpe de ariete. La temporización de los dos movimientos: lento el cierre del distribuidor y rápido la apertura del orificio compensador se consigue en la *regulación automática* con un relé hidráulico.

La pantalla deflectora que se ve en la Fig. 22-2, n.º 8, lame permanentemente al chorro. Si la turbina Pelton se queda sin carga, la pantalla deflectora automáticamente se hunde en el chorro desviándolo en el acto, con lo que se evita el embalamiento de la turbina. El golpe de ariete no se produce, porque sigue circulando el agua por el inyector y la tubería forzada. A fin de evitar la pérdida de agua el inyector se cierra lentamente y su temporización se consigue con la regulación automática, como se verá en la Sec. 29.6 (véase Fig. 29-6).

La chimenea de equilibrio puede verse en la Fig. 22-24. Esta se ha de colocar lo más cerca posible de la central. La onda elástica de sobrepresión no se propaga en la tubería que une la chimenea de equilibrio con el embalse porque la onda se refleja en ella. Por tanto, la conducción entre la chimenea y el embalse sujeta a mucha menos presión puede construirse como un túnel. Al mismo tiempo se reduce la longitud de la tubería entre la turbina y la chimenea de equilibrio, con lo que el golpe de ariete queda aminorado.

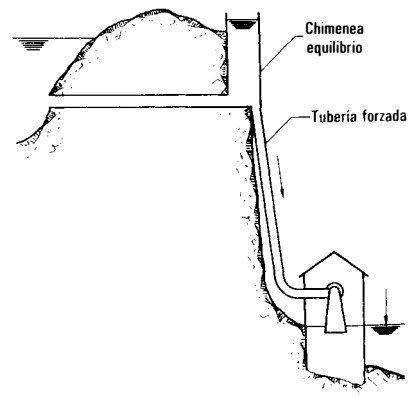


FIG. 22-24. La *chimenea de equilibrio* sirve para aminorar el *golpe de ariete.*

PROBLEMAS

22-1. *Una turbina Pelton trabaja bajo una altura neta de 240 m; $c_1 = 0{,}98\sqrt{2gH}$. El diámetro del chorro es de 150 mm y el del rodete de 1.800 mm; $\alpha_1 = 0°$, $\beta_2 = 15°$, $w_2 = 0{,}70\, w_1$ y $u_1 = 0{,}45\, c_1$.*

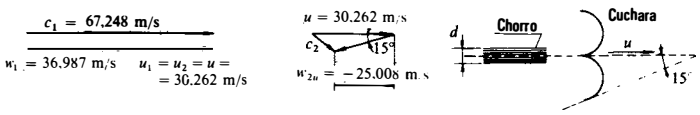
Calcular:

a) la fuerza tangencial ejercida por el chorro sobre las cucharas;
b) la potencia transmitida por el agua al rodete;
c) rendimiento hidráulico de la turbina;
d) si el rendimiento mecánico es 0,97, calcular el rendimiento total de la turbina.

a) Tomando como eje x la dirección de la velocidad periférica del rodete en el punto en que el eje del chorro corta a éste, la fuerza tangencial ejercida por el chorro sobre las cucharas es igual y de sentido contrario a la que las cucharas ejercen sobre el fluido. Por tanto (véase Sec. 16.3.2):

$$F = Q\rho(w_{1u} - w_{2u}) \tag{1}$$

Calculemos los triángulos de velocidad a la entrada y salida del rodete de esta turbina (véase figura):



PROB. 22-1

Triángulo de entrada:

$$c_1 = 0{,}98\sqrt{2gH} = 0{,}98\sqrt{19{,}62 \cdot 240} = 67{,}248\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$u = u_1 = u_2$ (las turbinas Pelton son turbinas tangenciales y en ellas la velocidad periférica a la entrada y salida es la misma)

$u = 0{,}45\, c_1 = 30{,}262$ m/s

Siendo $\alpha_1 = 0$

$$w_1 = w_{1u} = c_1 - u = 36{,}987\ \text{m/s}$$

Triángulo de salida:

$$w_2 = 0{,}7\, w_1 = 25{,}891\ \text{m/s}$$
$$w_{2u} = -w_2 \cos\beta_2 = -25{,}008\ \text{m/s}$$

Por otra parte

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c_1 = 1{,}188\ \text{m}^3/\text{s}$$

Sustituyendo los valores hallados en la Ec. (1) tendremos:

$$F = 73.673\ \text{N}$$

b) La potencia transmitida por el agua al rodete, según la conocida ecuación de la mecánica

$$P = Fu$$

será (esta potencia es la potencia interna, P_i):

$$P_i = 2.229 \cdot 10^6\ \text{W} = 2.229\ \text{kW}$$

c)

$$\eta_h = \frac{H_u}{H}$$

$$H_u = \frac{P_i}{Q\rho g} = 191{,}241\ \text{m}$$

Por tanto

$$\eta_h = 79{,}68\ \%$$

d) $$\eta_{tot} = \eta_m \eta_h = 0{,}97\, \eta_h = 0{,}7729 \quad \text{ó} \quad 77{,}29\ \%$$

22-2. *Una turbina de reacción, en la que se despreciarán las pérdidas, tiene las siguientes características: $n = 375$ rpm, $\beta_1 = 90°$, $\alpha_1 = 10°$, $c_{1m} = c_{2m} = 2$ m/s, $D_2 = 1/2\, D_1$, $b_1 = 100$ mm. El agua sale del rodete sin componente periférica. El espesor de los álabes resta un 4 % al área útil a la entrada del rodete.*

Calcular:

a) salto neto;
b) β_2;
c) D_1 y D_2;
d) potencia desarrollada por la turbina.

a) Como no hay pérdidas,

$$H = H_u \text{ (altura útil o altura de Euler)}$$

Como el agua sale del rodete sin componente periférica (triángulo de salida rectángulo en α) $c_{2u} = 0$, y

$$H_u = \frac{u_1 c_{1u}}{g}$$

Como el triángulo de entrada es rectángulo en β (véase figura), tendremos:

$$c_{1u} = u_1 = \frac{c_{1m}}{\text{tg}\,\alpha_1} = \frac{2}{\text{tg}\,10°} = 11{,}343\ \text{m/s}$$

Luego

$$H_u = 13{,}115\ \text{m}$$
$$\textit{Salto neto} = 13{,}115\ \text{m}$$

b) (véase figura) $u_2 = 0{,}5\, u_1 = 5{,}671$ m/s

y

$$\beta_2 = \text{arc tg}\,\frac{2}{u_2} = 19°{,}43$$

c)

$$u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} \quad \text{luego} \quad D_1 = \frac{60\, u_1}{\pi n} = \frac{60}{\pi \cdot 375} u_1 = 578\ \text{mm}$$

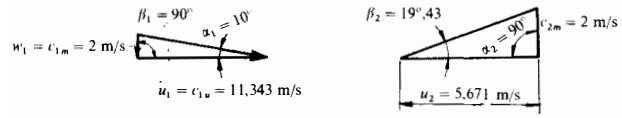
$$D_2 = 0{,}5 \cdot D_1 = 289\ \text{mm}$$

d) La *potencia desarrollada por el rodete* es la *potencia interna* que, en este caso, coincide con la *potencia útil* o potencia en el eje, porque no se consideran las pérdidas mecánicas, y con la *potencia neta*, porque no se consideran las pérdidas hidráulicas y volumétricas. Luego, según la Ec. (22-27) y teniendo en cuenta que

$$Q = 0{,}96\,\pi D_1 b_1 c_{1m} = 0{,}96 \cdot \pi \cdot D_1 \cdot 0{,}1 \cdot 2 = \\ = 0{,}3484 \text{ m}^3/\text{s}$$

tendremos:

$$P_i = P = Q\rho g H = 44{,}828 \cdot 10^3 \text{ W} = \\ = 44{,}828 \text{ kW}$$



PROB. 22-2

22-3. *Una turbina Pelton de un solo chorro se alimenta de un embalse cuyo nivel de agua se encuentra 300 m por encima del eje del chorro, a través de un conducto forzado de 6 km de longitud y 680 mm de diámetro interior. El coeficiente de rozamiento de la tubería es* $\lambda = 0{,}032$. *La velocidad periférica de los álabes es 0,47 la velocidad del chorro. El coeficiente de velocidad absoluta a la entrada del rodete,* $k_{c_1} = 0{,}97$. *El ángulo,* $\alpha_1 = 0°$. *Las cucharas desvían el chorro 170°, y la velocidad relativa del agua se reduce en un 15 % a su paso por ellas. El chorro tiene un diámetro de 90 mm. El rendimiento mecánico de la turbina es 88 %.*

Calcular:

a) altura neta de la turbina;
b) altura de Euler o altura útil;
c) caudal;
d) rendimiento hidráulico;
e) potencia útil en el eje de la turbina;
f) rendimiento total de la turbina.

a) En virtud de la segunda expresión de la altura neta [Ec. (22-18)]:

$$H = 300 - H_{r\,A\text{-}E} = 300 - \lambda \frac{L}{d_t} \frac{V_t^2}{2g} = 300 - 0{,}032 \cdot \frac{6.000}{0{,}68} \frac{V_t^2}{2g} = 300 - 14{,}39\, V_t^2 \qquad (2)$$

donde d_t — diámetro de la tubería forzada
V_t — velocidad en la tubería forzada

Por otra parte,

$$c_1 = 0{,}97 \sqrt{2gH}$$

de donde

$$H = \frac{1}{19{,}62 \cdot 0{,}97^2} c_1^2 = 0{,}0542\, c_1^2 \qquad (3)$$

Por la ecuación de continuidad:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c_1 = \frac{\pi d_t^2}{4} V_t$$

donde d — diámetro del chorro

luego

$$V_t = \left(\frac{d}{d_t}\right)^2 c_1$$

y

$$V_t^2 = \left(\frac{d}{d_t}\right)^4 c_1^2 = \left(\frac{90}{680}\right)^4 c_1^2 \\ = 3{,}069 \cdot 10^{-4}\, c_1^2$$

valor que sustituido en la Ec. (2) nos da para la altura neta la expresión

$$H = 300 - 44{,}16 \cdot 10^{-4}\, c_1^2 \qquad (4)$$

e igualando las dos expresiones (3) y (4) para la altura neta y despejando c_1 se obtiene:

$$c_1 = 71{,}56 \text{ m/s}$$

Sustituyendo este valor en la Ec. (3) se obtiene la altura neta:

$$H = 277{,}4 \text{ m}$$

b) Para obtener la altura de Euler o altura útil hay que hallar los triángulos de velocidad:

$$c_{1u} = c_1 = 71{,}56 \text{ m/s}$$
$$u = 0{,}47\, c_1 = 33{,}63 \text{ m/s}$$
$$w_1 = c_1 - u = 37{,}93 \text{ m/s}$$
$$/w_2/ = 0{,}85/w_1/ = 32{,}24 \text{ m/s}$$

Siendo el ángulo de desviación del chorro (véase Fig. 22-6) de 170°, es fácil ver que $\beta_2 = 180 - 170° = 10°$ y $\cos 10° = 0{,}9848$. Luego:

$$c_{2u} = u - w_2 \cos \beta_2 = 1{,}89 \text{ m/s}$$

Luego [Ec. 18-12)]:

$$H_u = \frac{u(c_{1u} - c_{2u})}{g} = \\ = 238{,}9 \text{ m}$$

c)

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c_1 = \\ = 0{,}4552 \text{ m}^3/\text{s}$$

d) Por la Ec. (22-22),

$$\eta_h = \frac{H_u}{H} \cdot 100 = \\ = 86{,}11\,\%$$

e) La potencia interna de la turbina será:

$$P_i = Q\rho g H_u = 1.067 \cdot 10^3 \text{ W} = \\ = 1{,}067 \text{ kW}$$

(suponiendo un rendimiento volumétrico igual a la unidad)

y la potencia útil, en virtud de la Ec. (22-27),

$$P_u = P_i \eta_m = 1.066 \cdot 0{,}88 = 938{,}8 \text{ kW}$$

f) Según la Ec. (22-28), suponiendo rendimiento volumétrico igual a 1:

$$\eta_{tot} = \eta_h \eta_m = \\ = 0{,}7578$$

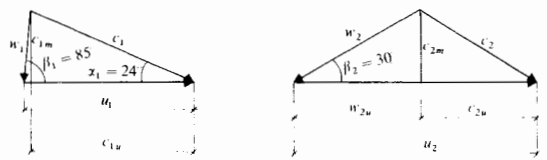
22-4. *De una turbina Francis de eje vertical se conocen los datos siguientes: diámetro de entrada del rodete, 45 cm; ancho del rodete a la entrada, 5 cm; diámetro de salida del rodete, 30 cm; ancho a la salida del mismo, 7 cm; los álabes ocupan un 8 % del área útil a la entrada del rodete (a la salida del rodete los álabes pueden suponerse afilados: $\tau_2 = 1$); ángulo de salida del distribuidor, 24°; ángulo de entrada de los álabes del rodete, 85°; ángulo de salida de los álabes del rodete, 30°; las pérdidas hidráulicas en el interior de la turbina equivalen a 6 m de columna de agua. Velocidad de entrada en la turbina, 2 m/s; altura piezométrica a la entrada de la turbina sobre la cota de salida del rodete, 54 m; rendimiento mecánico, 94 %. La turbina carece de tubo de aspiración, estableciéndose la norma para esta turbina de que la salida de la turbina se encuentra a la salida del rodete. Rendimiento volumétrico, 1.*

Calcular:

a) rpm;
b) altura neta;
c) altura útil;
d) rendimiento hidráulico y rendimiento total;
e) caudal;
f) potencia interna;
g) potencia al freno.

a) rpm

$$n = \frac{60}{\pi d_1} u_1 = \frac{60}{\pi \cdot 0{,}45} u_1 = 42{,}441\, u_1$$



PROB. 22-4

Pongamos los lados de ambos triángulos de velocidad en función de c_{1m}:

$$u_1 = c_{1u} + w_{1u} = \frac{c_{1m}}{\text{tg } 24°} + \frac{c_{1m}}{\text{tg } 85°} = c_{1m}\left(\frac{1}{\text{tg } 24°} + \frac{1}{\text{tg } 85°}\right) = 2{,}3335\, c_{1m}$$

$$c_{1u} = \frac{c_{1m}}{\text{tg } 24°} = 2{,}2460\, c_{1m}$$

$$u_2 = \frac{30}{45} u_1 = 1{,}5557\, c_{1m}$$

$$c_{2m} = \frac{b_1 d_1 \tau_1}{b_2 d_2} c_{1m} = \frac{5 \cdot 45 \cdot 0{,}92}{7 \cdot 30} c_{1m} = 0{,}9857\, c_{1m}$$

$$c_{2u} = u_2 - w_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\text{tg } 30°} = -0{,}1516\, c_{1m}$$

$$c_2 = \sqrt{c_{2m}^2 + c_{2u}^2} = 0{,}9973\, c_{1m}$$

$$H = \left(\frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{c_E^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{c_S^2}{2g}\right) = 54 + \frac{4}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{c_2^2}{2g} = \\ = 54{,}2039 - 0{,}0507\, c_{1m}^2 \qquad (5)$$

Por otra parte,

$$H = H_u + H_{r\text{-int}} = H_u + 6$$

$$H_u = \frac{u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}}{g} = \frac{2{,}3335 \cdot 2{,}2460 + 1{,}5557 \cdot 0{,}1516}{9{,}81} c_{1m}^2 = 0{,}5583\, c_{1m}^2 \qquad (6)$$

$$H = 0{,}5583\, c_{1m}^2 + 6 \qquad (7)$$

Igualando (5) y (7) y despejando c_{1m} se obtiene:

$$54{,}2039 - 0{,}0507\, c_{1m}^2 = 0{,}5583\, c_{1m}^2 + 6$$

$$c_{1m} = \sqrt{\frac{54{,}2039 - 6}{0{,}5583 + 0{,}0507}} = 8{,}8968 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (8)$$

$$u_1 = 20{,}7607 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$n = 881{,}1041 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) H

De la Ec. (5) y teniendo en cuenta (8) se deduce:

$$H = 50{,}1911 \text{ m}$$

c) H_u

De la Ec. (6) se deduce:

$$H_u = 44{,}1911 \text{ m}$$

d) η_h, η_{tot}

$$\eta_h = \frac{H_u}{H} = 0{,}8805$$

$$\eta_{tot} = \eta_h \eta_m = 0{,}8276$$

e) $Q = \tau_1 \pi d_1 b_1 c_{1m} = \\ = 0{,}5786 \text{ m}^3/\text{s}$

f) $P_i = Q \rho g H_u = 0{,}5786 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 44{,}1911 = 250.831 \cdot 10^3 \text{ W} = 250{,}831 \text{ kW}$

g) $P_a = P_i \eta_m = 235{,}782 \text{ kW}$

22-5. *Una pequeña turbina hidráulica de eje vertical de reacción tiene las siguientes dimensiones: diámetro de entrada del rodete, 630 mm; diámetro de salida, 390 mm; ancho a la entrada, 95 mm; ancho a la salida, 100 mm; $\alpha_1 = 8°$; $\beta_1 = 70°$. Un manómetro situado detrás de la válvula de admisión de la turbina marca una presión equivalente a 25 m columna de agua estando la turbina en funcionamiento. Cotas: entrada en la turbina y salida del rodete a la misma cota y 4 m por encima del nivel inferior del salto. Se despreciará la energía cinética del agua en la tubería forzada. El coeficiente de obstrucción de los álabes a la entrada del rodete es 0,85 y a la salida del mismo aproximadamente igual*

a 1. Rendimiento hidráulico = 89 %; mecánico = 92 %; volumétrico = 1. La salida del rodete se supondrá sin circulación ($c_{2u} = 0$). Las pérdidas desde la entrada en la turbina a la salida del rodete son iguales a 5 $\frac{c_{2m}^2}{2g}$.

Calcular:

a) altura neta;
b) número de revoluciones;
c) caudal;
d) potencia útil;
e) número específico de revoluciones;
f) pérdidas en el tubo de aspiración (incluyendo las de salida del mismo);
g) % de altura útil que se perdería si se quitara el tubo de aspiración, suponiendo que la energía del agua a la entrada del rodete permaneciera constante en ambos casos, así como la energía cinética a la salida del rodete y la fricción en el mismo.

a) Altura neta

$$H = \frac{p_E - p_S}{\rho g} + z_E - z_S + \frac{c_E^2 - c_S^2}{2g}$$

$$\frac{c_E^2 - c_S^2}{2g} = 0$$

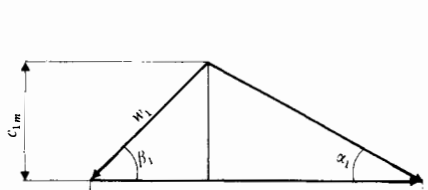
$$H = \frac{p_E - p_S}{\rho g} + z_E - z_S = 29 \text{ m}$$

b) Número de revoluciones

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{c_{1u}}{c_{1m}}$$

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{w_{1u}}{c_{1m}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{u_1}{c_{1m}}$$



(no a escala) PROB. 22-5

$$c_{1m} = \frac{u_1}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1}$$

$$c_{1u} = u_1 - w_{1u} = u_1 - c_{1m} \operatorname{ctg} \beta_1 = u_1 - \frac{u_1 \operatorname{cotg} \beta_1}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1} = u_1 \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1}\right)$$

$$H_u = \frac{u_1 c_{1u}}{g} = \frac{u_1^2}{g} \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1}\right) = \frac{u_1^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \beta_1}} = 0{,}0970\, u_1^2$$

Por otra parte

$$H_u = H \eta_h = 29 \cdot 0{,}89 = 25{,}81 \text{ m}$$

$$u_1 = 16{,}314 \text{ m/s}$$

$$n = \frac{60\, u_1}{\pi\, d_1} = 494{,}6 \simeq 500 \text{ rpm}$$

(para acoplamiento con alternador de 6 pares de polos)

c) Caudal

$$c_{1m} = \frac{u_1}{\operatorname{ctg} 8° + \operatorname{ctg} 70°} = 2{,}181 \text{ m/s}$$

$$Q = \tau_1\, \pi d_1 b_1 c_1 = 0{,}85\, \pi \cdot 0{,}630 \cdot 0{,}095 \cdot c_{1m} = 0{,}3485 \text{ m}^3/\text{s}$$

d) Potencia útil

$$\eta_{tot} = \eta_h \eta_m = 0{,}89 \cdot 0{,}92 = 0{,}8188$$

$$P_a = Q \rho g H \eta_{tot} = 0{,}3486 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 29 \cdot 0{,}8188 = 81.183 \text{ W} = 81{,}183 \text{ kW}$$

e) Número específico de revoluciones

$$P_a = 110{,}3 \text{ CV}$$

$$n_S = \frac{500 \cdot 110{,}3^{1/2}}{29^{5/4}} = 78{,}03 \qquad (\textit{TF lenta:} \text{ véase Fig. 22-10})$$

f) Pérdidas en tubo de aspiración

$$H_{r\text{-int}} = H - H_u = 29 - 25{,}81 = 3{,}19 \text{ m}$$

$$H_{r\text{-int}} = H_{r\,E\text{-}2} + H_{ra}$$

$$H_{ra} = 3{,}19 - H_{r\,E\text{-}2}$$

$$H_{r\,E\text{-}2} = 5\, \frac{c_{2m}^2}{2g}$$

$$c_{2m} = \frac{Q}{\pi\, d_2 b_2} = 2{,}845 \text{ m/s}$$

$$H_{r\,E\text{-}2} = \frac{5 \cdot 2{,}846^2}{2 \cdot 9{,}81} = 2{,}062 \text{ m}$$

$$H_{ra} = 1{,}128 \text{ m}$$

g) Pérdida de altura útil en % sin tubo de aspiración

Sea H_R la altura correspondiente a la energía total a la entrada del rodete y H_{rR} las pérdidas en el mismo. Escribamos la ecuación generalizada de Bernoulli entre la entrada y salida del rodete:

Con tubo de aspiración

$$H_R - H_{rR} - H_u = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{c_2^2}{2g} \tag{9}$$

Sin tubo de aspiración

$$H_R - H_{rR} - H_u' = z_2 + c_2^2/2g \tag{10}$$

$\left(\text{sin tubo de aspiración } \frac{p_2}{\rho g} = 0\right)$.

Restando ordenadamente (22-39) de (22-40) se tendrá:

$$H_u - H'_u = -\frac{p_2}{\rho g}$$

(p_2 presión a la salida con tubo de aspiración).

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre 2 y Z (nivel inferior del salto, NI) con tubo de aspiración:

$$\frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{c_2^2}{2g} - H_{ru} = 0 \quad (*) \tag{11}$$

$$\frac{c_2^2}{2g} = 0{,}4124 \text{ m}$$

luego

$$\frac{p_2}{\rho g} = H_{ru} - z_2 - \frac{c_2^2}{2g} = 1{,}126 - 4 - 0{,}4128 = -3{,}284 \text{ m}$$

Por tanto

$$\frac{H'_u - H_u}{H_u} \cdot 100 = 12{,}73\,\%$$

Nota. Para la solución de los problemas que siguen téngase presente la nota (10) de la pág. 489.

22-6. *Una turbina de acción tiene las siguientes características: diámetro del rodete, 1.800 mm; diámetro del chorro, 150 mm; velocidad del chorro, 120 m/s. Las cucharas desvían el chorro un ángulo de 150°; $\alpha_1 = 0°$. La velocidad relativa se reduce en un 5% a causa del rozamiento en las cucharas; la potencia útil es 13.120 kW; el rendimiento mecánico es 0,97.*

Calcular el número de revoluciones por minuto de la turbina.

22-7. *En este problema no se tendrá en cuenta el rozamiento. Una turbina de acción de 200 kW tiene un chorro de 100 mm de diámetro, un rodete de 1.200 mm de diámetro y una velocidad de 500 rpm. Las cucharas desvían el chorro un ángulo de 150°.*

Calcular la velocidad del agua en el chorro.

22-8. *En este problema no se tendrán en cuenta las pérdidas. Un chorro de 20 m/s acciona una turbina de acción y es desviado por el rodete un ángulo de 145°; $u = 0{,}40\, c_1$. El caudal absorbido por la turbina es de 2.500 l/min.*

Calcular la potencia de la turbina.

22-9. *El rodete de una turbina Pelton de 200 cm de diámetro es alimentado por un chorro de 150 mm de diámetro. La velocidad del chorro es de 100 m/s; $\alpha_1 = 15°$; $c_1 = \sqrt{2gH}$. Rendimiento hidráulico, 85%. Las pérdidas mecánicas pueden despreciarse.*

Calcular:

a) la potencia de la turbina;
b) el par sobre el rodete para las velocidades de éste de 0, 20, 40, 60, 80, 100 m/s.

(*) Suponemos despreciable la altura de velocidad a la salida del tubo de aspiración, que es la salida de la turbina $c_S^2/2g \simeq 0$.

22-10. *El inyector de una turbina Pelton produce un chorro de 200 mm, $c_1 = 0{,}98\sqrt{2gH}$; $u = 0{,}45\sqrt{2gH}$. El salto neto de la turbina es de 300 m. Supóngase $\alpha_1 = 0°$. Diámetro del rodete 2.500 mm; $\beta_2 = 15°$; $\eta_m = 98\%$. Se pierde por fricción en las cucharas un 10% de la velocidad relativa.*

Calcular:
a) número de revoluciones;
b) rendimiento hidráulico;
c) rendimiento total de la turbina;
d) pérdida por velocidad de salida del rodete y tanto por ciento de esta pérdida con relación a la altura neta.

22-11. *Una central hidroeléctrica se alimenta de un arroyo, cuyo caudal varía a lo largo del año. El caudal medio de los tres meses de lluvia del año es de 10 m^3/s. En el resto del año el caudal es de 3 m^3/s. Se construye un embalse de manera que se utilice el caudal del río uniformemente a lo largo del año. El centro de gravedad del embalse se encuentra 20 m por encima del nivel de aguas abajo. La central consta de tres turbinas, que son alimentadas desde el embalse por 3 tuberías forzadas de 1.250 m de longitud cada una. El coeficiente de rozamiento en estas tuberías es $\lambda = 0{,}02$. La pérdida de carga en cada una de las tres tuberías es el 3% de la altura bruta. El rendimiento global de cada turbina es 87%.*

Calcular:
a) la capacidad mínima del embalse;
b) el diámetro de las tuberías;
c) la potencia de la central.

22-12. *El diámetro exterior de un rodete Kaplan es de 500 cm y el diámetro del cubo de la turbina 200 cm. La turbina gira a 100 rpm, absorbiendo un caudal de 190 m^3/s; $d \cdot c_{1u} = 60\ m^2/s$; $c_{2u} = 0$; $\eta_v = 1$; $\eta_m = 97{,}8\%$.*

Calcular:

a) β_1 y β_2;
b) la potencia desarrollada por la turbina.

(Refiéranse los cálculos al diámetro medio de la turbina.)

22-13. *En este problema no se tendrá en cuenta la fricción en los álabes ni en el inyector. El inyector de una turbina Pelton suministra un chorro de 70 m/s con un caudal de 1.500 l/min; $\alpha_1 = 0°$; el chorro es desviado por las cucharas 170°; $u = 0{,}5\sqrt{2gH}$. El diámetro del rodete es 30 veces mayor que el diámetro del chorro.*

Calcular:

a) diámetro del rodete;
b) rpm;
c) energía del chorro no aprovechada;
d) potencia desarrollada por la turbina.

22-14. *Una turbina Kaplan desarrolla una potencia de 6.350 kW en un salto neto de 5 m; $u = 2{,}10\sqrt{2gH}$ (velocidad periférica referida al diámetro exterior del rodete); $c_m = 0{,}65\sqrt{2gH}$; diámetro del cubo = 0,35 diámetro exterior del rodete; rendimiento total, 87%.*

Calcular:

a) diámetro exterior del rodete;
b) rpm;
c) n_s.

22-15. *Una turbina Pelton gira a 375 rpm y su altura neta es de 60 m; desarrolla una potencia en el eje de 100 kW; $u = 0{,}45\sqrt{2gH}$; $c_1 = 0{,}97\sqrt{2gH}$. El rendimiento total de la turbina es 80 %. La velocidad a la entrada de la turbina es 1,5 m/s.*

Calcular:

a) caudal;
b) diámetro del rodete;
c) diámetro del chorro;
d) lectura en bar del manómetro situado a la entrada del inyector.

22-16. *Una turbina de reacción tiene las siguientes características: $\alpha_1 = 30°$; diámetro medio del rodete a la entrada, 180 cm y a la salida, 120 cm; $c_1 = 2$ m/s; $b_1 = b_2 = 45$ cm. A una velocidad de 100 rpm el par medio es de 2.000 m · N; $\eta_m = 95$ %.*

Calcular:

a) el ángulo α_2;
b) la potencia útil desarrollada por la turbina;
c) la caída de altura de presión teórica que experimenta el agua en el rodete (supónganse iguales las cotas de entrada y de salida del rodete).

22-17. *En la tubería forzada a la entrada de una turbina donde la velocidad del agua es 2 m/s a una cota de 6 m con relación al nivel inferior del agua se conecta un manómetro, que mide una presión de 3 bar, y en un punto situado en el tubo de aspiración a 1 m con relación al mismo nivel (diámetro del tubo de aspiración en dicha sección, 2.500 mm) se conecta otro manómetro. El rendimiento global de la turbina es de 75 % y su potencia útil 6.000 kW.*

Calcular:

a) el caudal;
b) lectura del manómetro conectado al tubo de aspiración, si no se tienen en cuenta las pérdidas en el mismo.

22-18. *En este problema se despreciará el rozamiento. Una turbina Pelton tiene las siguientes características: diámetro del chorro, 75 mm; velocidad del agua en el chorro, 40 m/s; velocidad periférica del rodete, 20 m/s; ángulo de desviación del chorro, 150°; $\alpha_1 = 0°$.*

Calcular la potencia desarrollada por la turbina.

22-19. *Una turbina de reacción, en la que se despreciarán las pérdidas mecánicas y volumétricas, absorbiendo un caudal de 60 l/s, bajo un salto de 20 m, gira a 375 rpm y tiene un rendimiento hidráulico de 85 %; $d_1 = 1/2$ m; $d_2 = 750$ mm; $c_{2u} = 0$. El ancho b es el mismo a la entrada y salida del rodete.*

Calcular:

a) potencia útil de la turbina;
b) α_1;
c) β_1.

22-20. *Una turbina se alimenta por una tubería de madera de 2,5 m de diámetro y 800 m de longitud, que tiene 2 codos ($r/D = 0{,}5$, en que R = radio interior del codo) y una válvula de compuerta ($\zeta = 0{,}5$). El nivel del embalse se encuentra 200 m por encima de la entrada en la turbina y el nivel de aguas abajo 5 m por debajo de la misma entrada. La turbina lleva un tubo de aspiración, cuya velocidad de salida es de 0,5 m/s con un diámetro de 3,5 m. El rendimiento total de la turbina es de 80 %.*

Calcular:

a) la potencia útil que puede esperarse de esta instalación;
b) el rendimiento global de la planta.

22-21. *Un pequeño motor hidráulico que funciona con agua absorbe un caudal de 1.500 l/min. Antes del motor en la tubería de admisión la presión relativa es de 6 bar y después del motor en la tubería de descarga, y en un punto que se encuentra 5 m por debajo del punto de conexión del manómetro de entrada, la presión relativa es de 3 bar. Se despreciarán las pérdidas.*

Calcular la potencia desarrollada por el motor.

22-22. *Una turbina de reacción, en la que no se tendrá en cuenta la fricción, da un caudal de 800 l/s a 500 rpm bajo una altura neta de 40 m. El área disponible para el flujo a la entrada del rodete es 500 cm^2 y el diámetro del mismo 650 mm.*

Calcular:

a) las dos relaciones típicas de la turbina (coeficientes de velocidad) $c_1/\sqrt{2gH}$ y $u_1/\sqrt{2gH}$,
b) si la salida del rodete se encuentra 3 m por encima del nivel de aguas abajo, calcular la ganancia de altura útil que se obtiene instalando un tubo de aspiración, cuya entrada tiene 600 mm de diámetro y la salida 1.000 mm.

22-23. *Una turbina hidráulica fue ensayada en un laboratorio bajo un salto neto de 20 m. Para una cierta apertura del distribuidor se midió un caudal de 50 l/s a 275 rpm con un rendimiento de 75 %.*

Calcular:

a) la potencia al freno;
b) la potencia suministrada a la turbina.

22-24. *Una turbina Kaplan está provista de un tubo de aspiróción troncocónico vertical. El diámetro de entrada del tubo de aspiración es 600 mm y el de salida 900 mm. La altura del tubo de aspiración en vertical es de 6 m, de los cuales 1,5 m se encuentra sumergido. La pérdida de carga por fricción en el tubo de aspiración es 0,3 m de la altura de velocidad a la salida del mismo. La velocidad a la salida del tubo de aspiración es 1,5 m/s.*

Calcular:

a) la presión a la entrada del tubo de aspiración;
b) la energía total en este mismo punto referida al nivel del agua en el canal de salida;
c) la energía total en el punto más bajo del tubo de aspiración referida al mismo nivel;
d) la potencia del agua a la entrada del tubo de aspiración;
e) la potencia del agua a la salida del tubo de aspiración;
f) rendimiento del tubo de aspiración $\eta_{t.a.} = \dfrac{(c_2^2 - c_3^2)/2g - H_{r\,2-3}}{(c_2^2 - c_3^2)/2g}$.

22-25. *Una turbina Francis tiene las siguientes características: $d_2 = 240$ cm; $d_1 = 300$ cm; $\alpha_2 = 90°$; $n = 100$ rpm; $w_1 = 15$ m/s; $w_2 = 16$ m/s; $b_1 = b_2 = 300$ mm.*

Calcular:

a) el caudal de la turbina;
b) el par hidráulico comunicado al rodete.

22-26. *Una turbina Francis de eje vertical desarrolla una potencia de 250 kW y absorbe un caudal de 0,9 m^3/s. La presión a la entrada de la turbina es de 3 bar. La entrada en la turbina se encuentra 200 cm por encima del nivel de aguas abajo. La velocidad de entrada en la turbina es 4 m/s.*

Calcular:

a) la altura neta;
b) el rendimiento total de la turbina.

22-27. *Se prevé una central hidroeléctrica aprovechando un salto de 80 m con un caudal medio de 5 m^3/s.*

Calcular la potencia neta de esta central.

22-28. *Los diámetros de entrada y salida del rodete de una turbina hidráulica de reacción son, respectivamente, 600 y 300 mm. El agua entra en el rodete con una velocidad absoluta que forma un ángulo de 20° con la tangente a la circunferencia exterior y sale del mismo sin componente periférica alguna. La velocidad c_m permanece constante en todo el rodete e igual a 3 m/s. El rodete gira a 300 rpm.*

En funcionamiento, mediante un torsiómetro, se mide un par de 1.952 m · N. La altura neta de la turbina es 8,2 m. La cota de entrada en el rodete y la salida del mismo es igual y se encuentra 1,5 m por encima de la salida de la turbina, donde la energía cinética puede despreciarse. Las pérdidas hidráulicas en el rodete son iguales a las del tubo de aspiración (incluyendo en estas últimas la de velocidad de salida del mismo) y cada una de estas pérdidas es la tercera parte de las pérdidas hidráulicas totales en el interior de la máquina. Ancho a la entrada del rodete, 15 cm; η_v, 0,95. Despréciese el espesor de los álabes.

Calcular:

a) ángulos de los álabes a la entrada y salida (ángulos β_1 y β_2);
b) potencia interna de la turbina;
c) caudal;
d) potencia útil;
e) rendimiento hidráulico de la turbina;
f) rendimiento total;
g) par hidráulico transmitido por el agua al rodete (calcúlese hidráulica y mecánicamente);
h) presión relativa a la salida del rodete;
i) presión relativa a la entrada del rodete;
j) tipo de turbina.

22-29. *Una turbina Francis tiene las siguientes características: $d_1 = 1.200$ mm; $d_2 = 600$ mm; $\beta_1 = 90°$; $\alpha_1 = 15°$; $c_{2u} = 0$; $H = 30$ m; $u_1 = 0{,}7\sqrt{2gH}$; c_m igual a la entrada y salida del rodete.*

Calcular:

a) rpm;
b) β_2.

22-30. *Una turbina Francis de eje vertical trabaja en un salto de 45 m y suministra una potencia en el eje de 3.660 kW con un rendimiento total de 82 %. Funciona a 280 rpm con un rendimiento hidráulico de 90 % y un rendimiento volumétrico unidad. La entrada en el rodete se encuentra metro y medio sobre el nivel de aguas abajo y la presión relativa a la entrada en el rodete es de 2,5 bar. A la salida del rodete los valores correspondientes a los anteriores son 1,20 m y −0,13 bar; $c_{2u} = 0$; $c_{2m} = 5{,}5$ m/s. El agua sale del tubo de aspiración con una velocidad de 3 m/s, que se pierde a la salida. El diámetro de entrada en el rodete es de 152 cm y la velocidad meridional a la entrada del rodete es de 6 m/s.*

Calcular:

a) ángulo de entrada en el rodete;
b) diámetro de salida del tubo de aspiración;
c) pérdida en el distribuidor;
d) pérdida en el rodete;
e) pérdida por fricción en el tubo de aspiración.

22-31. *La boquilla del inyector de una turbina Pelton tiene a la salida un diámetro de 50 mm; el coeficiente de contracción del chorro es 0,9; $c_1 = 0{,}94\sqrt{2gH}$; $u = 0{,}43\, c_1$. La presión a la entrada del inyector es 30 bar. Las cucharas desvían el chorro un ángulo de 160°. A causa del rozamiento $w_2 = 0{,}9\, w_1$; $\alpha_1 = 0$. El rendimiento mecánico de la turbina es 0,96.*

Calcular la potencia desarrollada por la turbina.

22-32. *Una turbina Kaplan desarrolla una potencia de 10.000 kW bajo un salto de 5 m; $u = 2\sqrt{2gH}$ y $c_m = 0{,}6\sqrt{2gH}$ (ambas velocidades referidas al diámetro exterior del rodete). Relación del diámetro del cubo al diámetro exterior del rodete, 0,45. Rendimiento total, 90 %.*

Calcular:

a) diámetro exterior del rodete:
b) rpm;
c) número específico de revoluciones.

22-33. *Una turbina Francis absorbe un caudal de 4 m^3/s girando a 500 rpm; $D_1 = 130$ cm; $\alpha_1 = 20°$; $c_1 = 30$ m/s; $\eta_h = 85$ %; $\eta_m = 95$ %. La componente periférica de la velocidad absoluta a la salida es 0.*

Calcular:

a) la altura neta;
b) el par;
c) la potencia útil.

22-34. *En un laboratorio de hidráulica se ensayó una turbina al freno en un salto de 10 m a una velocidad de rotación de 200 rpm con un caudal de 400 l/s. Se calculó un rendimiento total del 85 %.*

Calcular:

a) potencia suministrada a la turbina;
b) potencia al freno suministrada por la turbina.

22-35. *Una turbina absorbe un caudal de 5 m^3/s. La lectura del manómetro a la entrada de la turbina, $M_E = 10$ m c.a. y la del manómetro a la salida de la turbina, $M_S = -4$ m c.a. El rendimiento de la turbina, que se supondrá limitada por las secciones E y S, es de 75 %; $z_E - z_S = 2$ m. Diámetro de la tubería de entrada, 1 m; diámetro del tubo de aspiración en la sección donde está conectado el manómetro M_S, 150 cm.*

Calcular la potencia desarrollada por la turbina.

22-36. *Una turbina desarrolla una potencia de 15 kW con un rendimiento de 60 % bajo un salto neto de 10 m. La turbina se alimenta de un embalse a través de una tubería de 250 mm y 45 m de longitud. El coeficiente de rozamiento $\lambda = 0{,}025$.*

Calcular el caudal y trazar el gráfico de energías.

22-37. *Una turbina de reacción tiene las siguientes características: $D_1 = 750$ mm; $D_2 = 630$ mm; $n = 400$ rpm; $\alpha_1 = 15°$; $c_1 = 14$ m/s; $c_{2m} = 5$ m/s; $c_{2u} = 0$; relación ancho/diámetro a la entrada, 0,15; rendimiento hidráulico, 0,8; la entrada en la turbina se encuentra 4 m por encima del nivel superior del agua en el canal de salida; la velocidad del agua en la tubería de entrada es 2 m/s; se pierden en rozamientos mecánicos 3,7 kW (supóngase $\tau_1 = 1$; $c_S \simeq 0$; $\eta_r = 1$).*

Calcular:

a) los triángulos de velocidad a la entrada y salida de la turbina;

b) el caudal;
c) la altura útil;
d) el salto neto;
e) la presión relativa a la entrada en la turbina en bar;
f) potencia útil suministrada por la turbina.

22-38. *La sección E designa la entrada en una turbina Francis y la sección S la salida convencional de la misma. En la turbina, girando a 250 rpm, se miden en el ensayo las siguientes alturas de presión absolutas:* $\frac{p_E}{\rho g} = 28$ *m;* $\frac{p_S}{\rho g} = 2{,}5$ *m. Además,* $\alpha_2 = 90°$; $\beta_2 = 20°$; $d_1 = 180$ *cm;* $d_2 = 150$ *cm;* $w_1 = 18$ *m/s;* $z_E = z_S$.

Calcular las pérdidas hidráulicas en dicho punto de funcionamiento de la turbina.

22-39. *Una turbina de reacción tiene las siguientes características:* $d_1 = 680$ *mm;* $b_1 = 150$ *mm;* $d_2 = 500$ *mm;* $b_2 = 200$ *mm;* $H = 20$ *m;* $c_{1m} = 3$ *m/s;* $\alpha_1 = 12°$.

Calcular:

a) rpm;
b) ángulo de los álabes a la salida del rodete;
c) potencia en el eje.

22-40. *En una turbina Pelton* $u = 0{,}45\sqrt{2gH}$; $D/d = 20$ *(D — diámetro característico del rodete; d — diámetro del chorro);* $c_1 = 0{,}98\sqrt{2gH}$; $\eta_{tot} = 0{,}80$.

Calcular:

a) diámetro D de una turbina de estas características que diera una potencia de 1 CV en un salto de 1 m.
b) rpm de la misma turbina unitaria.

22-41. *Una turbina de reacción está diseñada para alcanzar su óptimo rendimiento cuando gira a 600 rpm bajo un salto neto de 30 m desarrollando una potencia de 125 kW. El rendimiento total en estas condiciones es de 75 %;* $u_1 = 0{,}95\sqrt{2gH}$.

Calcular:

a) el caudal;
b) el diámetro de entrada en el rodete.

22-42. *Una turbina de reacción desarrolla una potencia de 250 kW (supóngase* $\eta_m = 1$*) bajo una altura neta de 30 m. Los ángulos de salida del distribuidor y del rodete son, respectivamente, 20° y 25°, el diámetro de entrada del rodete es 1,5 el de salida, la relación de área a la salida del rodete a la de la salida de la corona directriz es 4/3, la presión a la salida del rodete es atmosférica (para calcular la altura neta de esta turbina se ha supuesto que la salida de la turbina tiene lugar a la salida del rodete);* $c_{2u} = 0$. *Suponiendo que la pérdida de carga en el distribuidor es el 10 % de la altura de velocidad a la salida del mismo, y que la pérdida de carga en los álabes es el 20 % de la altura de velocidad relativa a la salida.*

Calcular:

a) caudal;
b) área de salida de la corona directriz;
c) altura de presión a la entrada del rodete.

22-43. *El desnivel entre dos depósitos es 20 m. Estos depósitos están comunicados por una tubería de 200 mm y 100 m de longitud, en la que se despreciarán las pérdidas secundarias y se tomará como coeficiente de rozamiento* $\lambda = 0{,}025$. *La turbina instalada a mitad de camino en la tubería absorbe una energía equivalente a 5 m.*

Calcular el caudal y la potencia hidráulica absorbida por la turbina. Dibujar el gráfico de energías.

22-44. *En una turbina de reacción la distribución de las pérdidas por rozamiento es la siguiente: 2 m de pérdidas entre la entrada de la turbina y salida del distribuidor; 4,5 m en el rodete; 0,30 m entre la salida del rodete y un punto de cota 0 en el tubo de aspiración, que se denominará punto 3* ($z_3 = 0$) *(la cota 0 es la del nivel superior del agua en el canal de salida). La altura de velocidad en ese mismo punto en el interior del tubo de aspiración es 0,08 m. La altura de salto disponible es 57 m. La entrada en la turbina y la entrada en el rodete se encuentran ambos a la misma cota y 3 m por encima de la cota 0. La velocidad periférica del rodete a la entrada es 22 m/s y la velocidad meridional es constante a lo largo del rodete, y tiene un valor de 7 m/s. Un manómetro conectado en la cota cero en el interior del tubo de aspiración marca la presión atmosférica. La salida del agua de la turbina sin circulación* ($c_{2u} = 0$). *El diámetro de entrada en el rodete es 0,5 m y la relación* $b_1/d_1 = 0{,}15$. *La velocidad del agua en la tubería de entrada de la turbina es 2 m/s. El coeficiente de estrechamiento de las paletas a la entrada del rodete es 0,9. El rendimiento mecánico es 0,95 y el volumétrico 0,9. La salida del rodete se encuentra* $\frac{1}{2}$ *m por debajo de la entrada en el mismo.*

Calcular:

a) lectura del manómetro a la entrada de la turbina;
b) presión absoluta a la entrada del rodete en bar;
c) presión absoluta a la salida del rodete en bar;
d) ángulo de los álabes del distribuidor a la salida;
e) ángulo de entrada de los álabes del rodete;
f) caudal;
g) rendimiento hidráulico;
h) potencia útil.

Respóndase finalmente a estas dos preguntas:

1) ¿de qué tipo de turbina se trata?
2) ¿iría bien para este mismo salto y para la misma potencia útil una turbina Pelton de $n_q = 10$?

Supóngase despreciable la velocidad del agua a la salida de la turbina y la presión barométrica igual a 1 bar.

22-45. *Una turbina de reacción tiene las siguientes características:* $Q = 3$ *m³/s;* $d_1 = 280$ *cm;* $d_2 = 240$ *cm;* $\alpha_1 = 12°$; $n = 46$ *rpm; ancho del rodete b constante = 290 mm; pérdida de carga en el rodete* $H_{rr} = 0{,}20\, w_2^2/2g$; *altura de presión a la salida del rodete* $p_2/\rho g = 3{,}5$ *m abs.; componente periférica de la velocidad absoluta a la salida del rodete nula.*

Calcular:

a) H_{rr};
b) p_1.

22-46. *Una turbina de reacción de eje vertical funciona bajo un salto neto de 30 m. El diámetro a la entrada del rodete es de 380 mm y el ancho a la entrada del mismo 40 mm; el diámetro a la salida del rodete es 320 mm;* $\beta_1 = 80°$. *El efecto del espesor de los álabes a la entrada del rodete puede despreciarse:* $\alpha_1 = 25°$. *La velocidad meridional del agua a la entrada del rodete es igual que a la salida del mismo;* $c_{2u} = 0$. *Las pérdidas hidráulicas en la turbina ascienden a 4 m.*

Calcular:

a) β_2;
b) diámetro de entrada en el tubo de aspiración.

22-47. *El rendimiento total de una turbina de reacción de 184 kW, que trabaja bajo una altura neta de 70 m, es 75 %, la velocidad periférica a la entrada del rodete es 25 m/s y el ancho del rodete a la entrada es 1/6 del diámetro a la entrada también. La velocidad meridional permanece constante e igual a 4,5 m/s en todo el recorrido de la turbina. El diámetro de salida de los álabes es 3/4 del de entrada, el ángulo* $\beta_1 = 90°$.

Calcular:

a) diámetro del rodete;
b) rpm;
c) ángulo de salida de los álabes del distribuidor;
d) ángulo β_2.

22-48. *En una turbina Francis de eje vertical provista de tubo de aspiración la entrada en la turbina y salida del rodete se encuentran a la misma altura* $z_E = 1$ *m respecto del nivel superior del canal de salida. La energía cinética del agua a la salida de la turbina puede despreciarse;* $\alpha_1 = 8°$; $\beta_1 = 70°$ *y* $\beta_2 = 20°$; $d_1 = 600$ *mm;* $d_2 = 400$ *mm;* $b_1 = 50$ *mm;* $b_2 = 75$ *mm. El área libre a la entrada del rodete se reduce al 85 % por el espesor de los álabes. Un manómetro a la entrada de la turbina marca una presión relativa de 2,5 bar. La velocidad del agua en esta sección de la turbina puede despreciarse. La presión a la salida del rodete es* -200 *mbar. Las pérdidas desde la entrada a la turbina hasta la salida del rodete pueden estimarse en 8* $c_{2m}^2/2g$; *rendimiento mecánico, 92 %.*

Calcular:

a) rpm;
b) caudal;
c) altura útil aprovechada por la turbina;
d) potencia útil.

23. *Otras fuentes de energía: Energía eólica, energía mareomotriz y energía de las olas*

En la producción de energía eléctrica la *energía hidráulica convencional*, que utiliza los saltos naturales de los ríos, representa en los principales países industrializados, salvo excepciones, un tanto por ciento que oscila entre el 4 y el 30. La proporción de la energía hidráulica va además disminuyendo a medida que los recursos naturales se van agotando y la demanda de energía crece incesantemente. En España al finalizar el año 1978, la *potencia hidráulica instalada* representaba todavía un 47,89 % de la potencia instalada total.

La restante energía eléctrica se obtiene en las *centrales térmicas convencionales* o *centrales de combustible fósil* utilizando la energía de los combustibles sólidos, líquidos y gaseosos, y en las *centrales térmicas atómicas* o *centrales de combustible nuclear* utilizando la energía procedente de la *fisión del átomo*. El estudio de unas y otras no pertenece a este libro.

En la actualidad la *crisis energética* ha espoleado la investigación de las llamadas *fuentes alternativas de energía*, entre otras: la energía eólica, solar, mareomotriz, geotérmica, la energía de la *fusión nuclear*, la energía proveniente de otros combustibles secundarios como turbas y maderas, la energía de las olas, etc. De ellas sólo son energías hidráulicas la energía *eólica*, la energía *mareomotriz* y la energía de las *olas*. En el momento actual las *fuentes secundarias de energía* despiertan crecido interés, si no como una alternativa a otras fuentes de energía más copiosas, sí como un complemento valioso de las mismas (1).

23.1. ENERGIA EOLICA

La energía eólica o energía del viento se ha utilizado relativamente poco hasta el presente, tanto por lo variable de la disponibilidad como por el coste específico (coste por kW instalado) relativamente alto de las instalaciones.

(1) Las radiaciones solares que llegan a la tierra tienen una potencia estimada de $178 \cdot 10^9$ MW. El problema consiste en recoger, almacenar y hacer frente a la variación de esta energía y esto de manera que el sistema resulte económico. El desarrollo de la energía solar para calefacción y aire acondicionado es grande, no así para la producción de energía eléctrica. Una central de 1.000 MW exigiría una extensión de terreno mínima (en zona tropical) de 10 km^2 para instalar los paneles solares.

En cuanto al *potencial geotérmico* mundial se estima puede alcanzar los 60.000 MW.

En los mismos combustibles fósiles hay una tendencia a volver a la hulla, hasta el siglo XX el combustible preferido, que luego fue postergado por el uso del petróleo. Las reservas mundiales de hulla se han estimado por encima de 5,5 veces mayores que las del petróleo. Estas reservas se encuentran principalmente en la U.R.S.S. y U.S.A. En Alemania se estima que las reservas de hulla ciertamente explotadas bastan para más de 500 años. (Véase *Bundesministerium für Forschung und Technologie, Auf dem Wege zu neuen Energiesystemen*, Bonn 1975, Teil I, 60 págs.)

Los molinos de viento se empezaron ya a utilizar en Persia unos 1.000 años antes de J. C. El francés Parent, a comienzos del siglo XVIII, estudió científicamente el ángulo más favorable de posición de las paletas de molino de viento. A mediados del siglo XVIII una teoría más perfecta sobre los molinos de viento fue elaborada por Euler, que descubrió el *teorema fundamental de las turbomáquinas*, aplicable también a ellos. El aire en esta máquina puede considerarse también como incompresible. Así como el ventilador no es más que una bomba de aire, el molino de viento es también una turbina de aire. Las fórmulas de potencias, rendimientos, etc., deducidas en el capítulo anterior, son aplicables a estas máquinas.

El *segundo simposio internacional sobre la energía del viento*, celebrado en Amsterdam en octubre de 1978 (2) (el primero se celebró en Cambridge dos años antes), puso en evidencia un crecido interés mundial en este tipo de energía. Un representante de U.S.A. habló de una explosión en la información en los últimos dos años.

En *Holanda* se construye un rotor de 5 m de diámetro con paletas de plástico reforzadas con fibras de vidrio y posiblemente otro de 25 m. En *Suecia* se preparan prototipos de 2 a 4 MW y se sustituyen las paletas de aluminio por paletas de plástico reforzadas con fibra de carbón. En el estado actual de la técnica el *rendimiento de las plantas eólicas* es aproximadamente el doble del de las plantas de energía solar; mientras que para la misma energía las plantas solares requieren una superficie de terreno de 25 a 30 veces mayor que las eólicas, lo que constituye una gran ventaja de las segundas. En *Estados Unidos*, en North Carolina, se estaba terminando la construcción de la mayor planta eólica del país: potencia 2.000 kW con vientos de 36 a 69 km/h; rotor de 30 m de diámetro con paletas de acero; torre de acero de 43 m de altura. La firma Boing investiga formas diversas de un rotor de 90 m de diámetro con dos paletas para una central eólica de 2,5 MW.

Según investigaciones llevadas a cabo en el *Japón*, aproximadamente el 10 por 100 del consumo actual de energía podría cubrirse con energía eólica; mientras que según investigaciones holandesas, esa cifra podría teóricamente elevarse hasta el 20 por 100. Para eso, sin embargo, se necesitarían en *Holanda* 5.000 centrales con rotor de 50 m que cubrirían el 20 por 100 de la costa del país, lo cual da una idea del problema del espacio que es, sin embargo, muy inferior al que plantean los paneles solares para proporcionar la misma potencia.

23.2. CENTRALES MAREOMOTRICES Y GRUPOS BULBO

La utilización de la energía del mar se estudia actualmente en tres campos distintos: La energía de las mareas, la energía de las olas y la energía térmica (3). De las dos primeras, únicas que pertenecen a nuestro estudio, trataremos en las dos secciones siguientes.

Central mareomotriz es una central que aprovecha la energía de las mareas.

En 1960 se empezaba en Francia la construcción de *la primera central mareomotriz* del mundo, la central de la Rance, emplazada en el estuario de Saint-

(2) Véase *Internationales Symposium über Windeenergiesysteme in Amsterdam, Niederlande vom. 3. bis 6. Oktober 1978*, en «BWK 31, 1 (1979) 38-40».

(3) En algunos lugares del Caribe por ejemplo hay un salto térmico de 20 K entre la superficie libre del mar y una profundidad de 600 m. Hay un proyecto del O.T.E.C. (Ocean Thermal Energy Conversion) de una central de 100 MW de este tipo que se piensa realizar en 1985.

Malo, en Bretaña, y en 1966 se ponía en marcha el primer grupo de esta central. Prescindiendo de si la energía de las mareas es producida por la rotación de la tierra o por el calor del sol, y renunciando a todo estudio sobre dinámica de las mareas, nos contentaremos con definir la

Amplitud de la marea = diferencia de nivel entre una marea alta y una marea baja consecutivas; esta amplitud varía según las posiciones relativas de la luna y del sol, y alcanza su valor máximo 4-5 días antes de la luna llena.

Altura unitaria = altura de la marea alta con respecto a un nivel medio, de ciertos días de luna llena, en que el sol y la luna se encuentran a distancia media de la tierra. En Saint-Malo, por ejemplo, es de 5,70 m.

En una central mareomotriz se embalsa el agua cuando la marea está alta y se turbina cuando está baja.

La *oscilación anual* de las mareas de un año a otro no es grande, de manera que la energía disponible de un año a otro es casi constante: no hay, por tanto, años secos y años húmedos.

La *oscilación mensual* (mes lunar: 29 y 1/2 días) es también pequeña y no más que un 5 por 100 de su valor medio: no hay por tanto en las centrales mareomotrices ni invierno ni verano, ni mes seco ni húmedo.

La *oscilación diaria* (de un día a otro) en cambio es muy grande, llegando a valer 8 la relación de la energía disponible en los días de mayor y menor salto. Para atenuar estas variaciones se puede acudir al bombeo. Los grupos bulbo de que hablamos a continuación son reversibles.

Gracias a las investigaciones realizadas en Francia para el desarrollo de la central de la Rance, los problemas técnicos de las centrales mareomotrices pueden considerarse resueltos. No se han instalado hasta el presente más centrales mareomotrices de cierta importancia por el coste excesivo del kW instalado. La crisis de la energía está cambiando el panorama económico de las centrales mareomotrices, que en la actualidad vuelven a considerarse con crecido interés. Así, por ejemplo, se anuncian planes para la construcción de una central mareomotriz de 6.000 MW en Mezenskaya, en la costa ártica de la U.R.S.S., con una longitud de embalse de 58 km (4).

Grupos bulbo

Los *grupos bulbo* son un subproducto muy estimable de las centrales mareomotrices. Desarrollados en Francia se construyen ya en muchos otros países, por su simplicidad de instalación y consiguiente economía en la obra civil. La Fig. 23-1 representa el grupo experimental instalado en Saint-Malo (de características análogas a los de la central de Rance), que estuvo en funcionamiento experimental desde el año 1959 hasta el de 1964. Características: P_a = 9.000 kW, H = 5,5 m; n = 88,235 rpm. Construido en Francia por la casa Neyrpic. Estos grupos bulbo se instalan horizontalmente o con el eje inclinado. El alternador va alojado en un bulbo (de donde el nombre de estos grupos), que reduce las pérdidas hidráulicas.

Las características de las turbinas de la central mareomotriz de la Rance son: veinticuatro grupos de 10.000 kW; H = 5,75 m; n = 93,75 rpm; diámetro del rodete = 5.350 mm. (Véase la Fig. 23-1.)

(4) Cf. E. Jeffs (ed.), *Is tidalpower showing signs of revival*, en «Energy Int. 11, 12 (1974)».

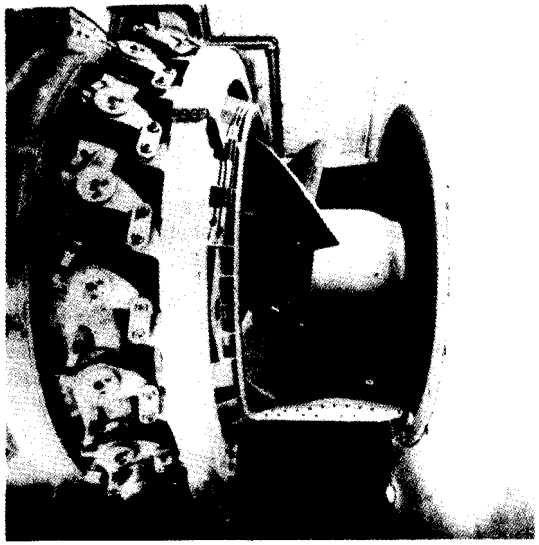


FIG. 23-1. *Turbina bulbo* con distribuidor Fink para la regulación del caudal de la central mareomotriz de la Rance. La central consta de 24 grupos idénticos con una potencia unitaria de 10 MW. La turbina tiene 4 paletas, gira a 93,75 rpm absorbiendo un caudal unitario máximo de 275 m^3/s.

En Alemania se ha instalado un grupo bulbo multiplicador [relación 75 (turbina)/750 (alternador) rpm] de 50.000 kW, que representa una gran economía en el alternador al disminuir el número de pares de polos [véase Ec. (22-9)]. Existe actualmente una tendencia a proyectar siempre que sea posible los saltos de poca altura con grupos bulbos con alternador sumergido en sustitución de los antiguos Kaplan verticales, con alternador fuera del agua.

Además de los problemas de estanqueidad originados por estar el alternador sumergido, comunes a todos los grupos bulbos, los destinados a las centrales mareomotrices han presentado problemas que han requerido innumerables investigaciones sobre la *corrosión* producida por el agua del mar con el problema adicional de depósitos de algas, etc., problema ya conocido en la industria naval. Con motivo de la central de Rance se han estudiado más de cien pinturas distintas para revestimientos, haciéndose también un estudio completo de las aleaciones para la construcción de la turbina, que ha conducido, por ejemplo, a la selección para los álabes del rodete de un acero martensítico de 17 por 100 de Cr, 4 por 100 de Ni y 4 por 100 de Cu.

Otras características de la central mareomotriz de la Rance son: *superficie del embalse:* 22 km^2; *masa de agua* en movimiento en dos mareas (24 h, 50 m): 720 millones de m^3; *volumen útil del embalse*, 184 millones de m^3; *caudal de punta:* 15.000 m^3/s; *producción anual*, 544 GWh.

Existen en Francia otros muchos proyectos de centrales mareomotrices, entre otros el gran proyecto de Chausey, cuya potencia instalada sería treinta veces mayor que la de Rance. También hay muchos estudios sobre posibles emplazamientos de centrales mareomotrices en diferentes lugares del mundo: Canadá, Inglaterra, India, Méjico, etc., incluyendo España, como el de la bahía de Vigo, con una amplitud máxima de las mareas de 3,50 m. Algunos de estos proyectos junto con otros muchos, vuelven a considerarse de nuevo en la actualidad. Así, por ejemplo, en la bahía de Fundy (Nueva Escocia, Canadá) se vuelven a considerar cuatro proyectos, que oscilan entre 1.150 MW y 4.000 MW. El salto máximo originado por las mareas en estas localidades asciende a 16 m, siendo 10 m el valor medio. De los cuatro proyectos indicados, el de 1.150 MW es el que tiene de momento mayores perspectivas de llevarse a cabo.

Citemos para terminar tres proyectos gigantescos que podrían algún día realizarse en la U.R.S.S.:

— Central de 5.000 MW en el golfo de Mezensk, con una amplitud media de marea de 5,80 m, área embalsada de 860 km^2 y longitud del dique de 50 km.
— Central de 10.000 MW en el golfo de Tugursk, con una amplitud media de marea de 5,80 m, área embalsada de 1.140 km^2 y longitud de dique de 17,4 km.
— Central de 3.500 MW en el golfo de Penzhinsk, con una amplitud media de marea de 6,8 m, área embalsada de 6.720 km^2 y longitud de dique de 31,6 km.

Las reservas mundiales de energía mareomotriz superan a las de todos los ríos del mundo y superan los 10^6 MW, pero su explotación es excesivamente costosa.

23.3. LA ENERGIA DE LAS OLAS

Es otra fuente de energía del mar aprovechable. Existen en la actualidad multitud de ideas, prototipos y patentes pero ninguna aplicación práctica importante. En la actualidad se estiman los costes por kW instalado de este tipo de energia ocho veces mayores que en la energía térmica convencional o nuclear. Un esquema reciente que según el inventor reduciría notablemente los costes, consiste en unidades que constan de un globo semiflotante alargado con una quilla de hormigón en su interior. Al pasar las olas comprimen y expansionan alternativamente el aire en los compartimentos internos, originando unos movimientos peristálticos, que bombean aire a través de válvulas y conductos instalados en la quilla. El aire finalmente acciona la turbina de aire acoplada al generador (5). Otro proyecto prometedor consiste en una instalación combinada de desalinización del agua del mar por el principio de la ósmosis invertida y de extracción de energía de las olas, cuya economía se presenta muy atractiva.

PROBLEMAS

23-1. *En este problema se despreciarán las pérdidas. Una turbina de aire tiene un diámetro de 3 m y es accionada por un viento de 50 km/h. La densidad del aire es 1,2 kg/m^3.*

Calcular la potencia máxima del aire.

23-2. *La misma turbina del problema anterior atravesada ahora por un caudal de aire de la misma densidad de 160 m^3/s. Las presiones medias antes y después de la turbina son 2, 5 y 2 mbar, respectivamente.*

Calcular:

a) la velocidad del viento;
b) la fuerza axial que se ejerce sobre la turbina;
c) la potencia del aire.

(5) Cf. *Ups and downs of wave energy*, en «*Water Power*, 31, 1 (1979)», 54-55. Véase también *Symposium über Meeresenergienutzung* (Simposio sobre la utilización de la energía del mar), en «BWK, 31, 2 (1979)», celebrado en septiembre de 1979.

24. *Turbomáquinas hidráulicas: Transmisiones hidrodinámicas*

24.1. INTRODUCCION

Para transmitir potencia a corta o larga distancia existen entre otras, además de la solución eléctrica, dos soluciones: la mecánica y la hidráulica. Las dos soluciones han sido empleadas en los barcos.

Un barco movido con turbina de vapor presenta el problema de que la turbina debe girar a gran velocidad; mientras que la hélice a poca velocidad.

- la *transmisión eléctrica* consistiría en hacer que la turbina accionara un generador, cuya potencia por cable se transmitiría al motor que movería la hélice. Este tipo de transmisión es frecuente en las locomotoras diesel.
- la *transmisión mecánica* en este caso consiste en utilizar engranajes helicoidales reductores. Esta solución es la más empleada en los barcos por su mayor sencillez y rendimiento (en otras aplicaciones las transmisiones mecánicas pueden incluir palancas, cadenas, correas, levas, etc.).
- la *transmisión hidráulica* es la que vamos a estudiar en este capítulo.

La transmisión hidráulica consta de:

- *bomba* que comunica la potencia del eje de entrada al fluido;
- *conducto* más o menos largo y complicado por donde circula el fluido transportador de potencia (en las transmisiones hidrodinámicas estudiadas en este capítulo este conducto prácticamente no existe);
- *motor hidráulico* accionado por el fluido, que comunica potencia al eje de salida.

Las transmisiones hidráulicas se dividen en

- *Transmisiones hidrostáticas:* la bomba y el motor son de *desplazamiento positivo.* Estas transmisiones se estudian en el Cap. 28 de este libro.
- *Transmisiones hidrodinámicas:* la bomba y el motor (turbina) son turbomáquinas, y el conjunto de la transmisión es una turbomáquina compuesta. Estas transmisiones se estudian en el presente capítulo. Existen dos tipos distintos de transmisiones hidrodinámicas: *acoplamientos hidrodinámicos* (Sec. 24.2) y *convertidores de par hidrodinámicos* (Sec. 24.3).

Las transmisiones hidrodinámicas fueron ideadas por el alemán Föttinger.

Föttinger era un ingeniero eléctrico que en unos astilleros se ocupaba de desarrollar un reductor para las turbinas de vapor de los barcos. La solución eléctrica, que él rechazó, por su excesivo peso, le dio la idea de la segunda máquina mencionada: el *convertidor de par.* Se fabricaron e instalaron muchos en los barcos hasta que fue desterrado de este campo de aplicación por los engranajes helicoidales, más baratos y de mejor rendimiento. En los coches ha encontrado nuevas aplicaciones esta máquina, que se estudia en la Sec. 24.3.

Más aceptación en los barcos tuvo el segundo invento del mismo Föttinger, que estudiaremos primero: el *acoplamiento hidrodinámico.*

El convertidor de par es un reductor de velocidad. El acoplamiento hidráulico, un *embrague fluido.* Los motores diesel gigantes de los barcos presentaban el problema de las vibraciones torsionales, que este acoplamiento vino a solucionar. Desde 1930 el acoplamiento hidráulico se utiliza también mucho en los autobuses urbanos. Este acoplamiento suaviza los tirones originados por las paradas y arranques bruscos y continuos de estos vehículos.

Empezaremos con el estudio de esta última *turbomáquina compuesta.*

24.2. ACOPLAMIENTO HIDRODINAMICO

En la Fig. 24-1 *a* puede verse un esquema de *acoplamiento hidrodinámico.* Consta de una bomba centrífuga y de una turbina centrípeta alojadas en la misma carcasa. Ambas forman como dos medias naranjas. Los álabes de la bomba y de la turbina son *radiales* y rectos. Los álabes radiales son más económicos y tienen la ventaja de su simetría en el giro en ambos sentidos. El *eje conductor* o eje de entrada mueve la bomba, que impulsa radialmente hacia el exterior el

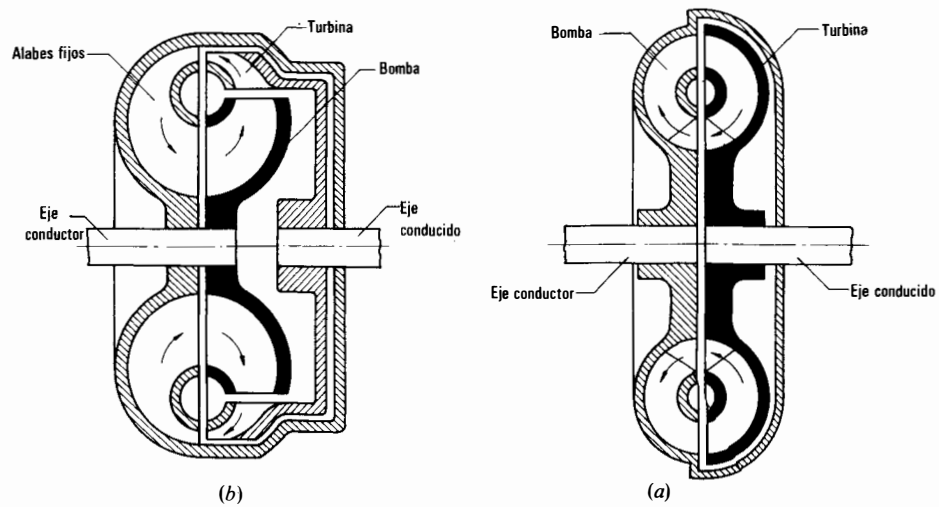


FIG. 24-1. (a) *Acoplamiento hidrodinámico* que consta de dos rodetes móviles, bomba y turbina, y es simplemente un embrague fluido; (*b*) *convertidor de par hidrodinámico* que consta además de una corona de álabes fijos con la cual se logra la multiplicación del par.

aceite que llena la carcasa, el cual en circuito cerrado entra centrípetamente en la turbina accionando el *eje conducido*. Cuando la transmisión está funcionando, la trayectoria del fluido es una hélice enrollada alrededor de un círculo concéntrico con el eje de rotación del acoplamiento. El rendimiento de estos acoplamientos es muy elevado, pudiendo alcanzar el 98 por 100, ya que la proximidad de la bomba y la turbina elimina las pérdidas de transmisión y las pérdidas por velocidad de salida.

Las ventajas de este embrague fluido son: eliminación de las vibraciones torsionales del motor y del acoplamiento brusco, gracias al deslizamiento. Se fabrican en potencias desde 1 hasta por encima de los 25.000 kW. Se utilizan en autobuses urbanos, camiones, etc., y los de gran potencia en los motores diesel de los barcos (la transmisión de gran potencia de la central de bombeo de la Fig. 19-11 es un convertidor de par).

Según el teorema del momento cinético [Ec. (18-5)], el par de entrada en un acoplamiento hidrodinámico ha de ser igual al par de salida, porque el momento cinético comunicado por la bomba al fluido es igual que el comunicado por el fluido a la turbina. El fluido suele ser aceite mineral de lubricación. Como tiene que haber una diferencia de fuerzas centrífugas en el árbol conductor y en el conducido para que se produzca la circulación, existe siempre necesariamente un deslizamiento; pero a plena velocidad suele ser de 2 por 100 y aún menor.

24.3. CONVERTIDOR DE PAR HIDRODINAMICO

En la Fig. 24-1 *b* puede verse un esquema de *convertidor de par*. Se diferencia del mero acoplamiento en que no sólo transmite potencia, sino que multiplica el par transmitido disminuyendo la velocidad. Para ello, a las dos coronas móviles, bomba y turbina, se añade una corona fija con álabes, que dirigen el flujo de la turbina de nuevo a la bomba; de manera que el fluido al cambiar de dirección aumenta su momento cinético; este momento cinético sumado al que le imparte la bomba hace que la disminución del momento cinético en la turbina sea mayor que el aumento del momento cinético que experimenta el fluido en la bomba, con lo que el par transmitido es mayor. El convertidor de par de la figura es de un solo escalonamiento. Hay unidades más complicadas de dos o tres escalonamientos con dos o tres rodetes de turbinas en serie.

El convertidor de par es a la vez un reductor de velocidad, en que la relación entre la velocidad del árbol conductor y del árbol conducido se mantiene constante. Una cierta variación de la relación de velocidades se obtiene variando el deslizamiento; pero al aumentar éste, disminuye el rendimiento de la transmisión. Para conservar un rendimiento aceptable se disponen en serie dos o más ruedas, que según el régimen de funcionamiento pueden girar como ruedas locas, girar una permaneciendo la otra fija como miembro de reacción, o bien permanecer las dos fijas.

Las transmisiones automáticas modernas de los coches emplean convertidores de par junto con cajas de engranajes. Así se mejora el rendimiento.

Otras transmisiones como la *Hydramatic*, utilizada en los Cadillac, Olsmobile y otros coches de la General Motors consta de un *acoplamiento hidráulico*, tres sistemas de engranajes planetarios y los controles necesarios para actuar estos sistemas. La unidad tiene además un sistema hidráulico con

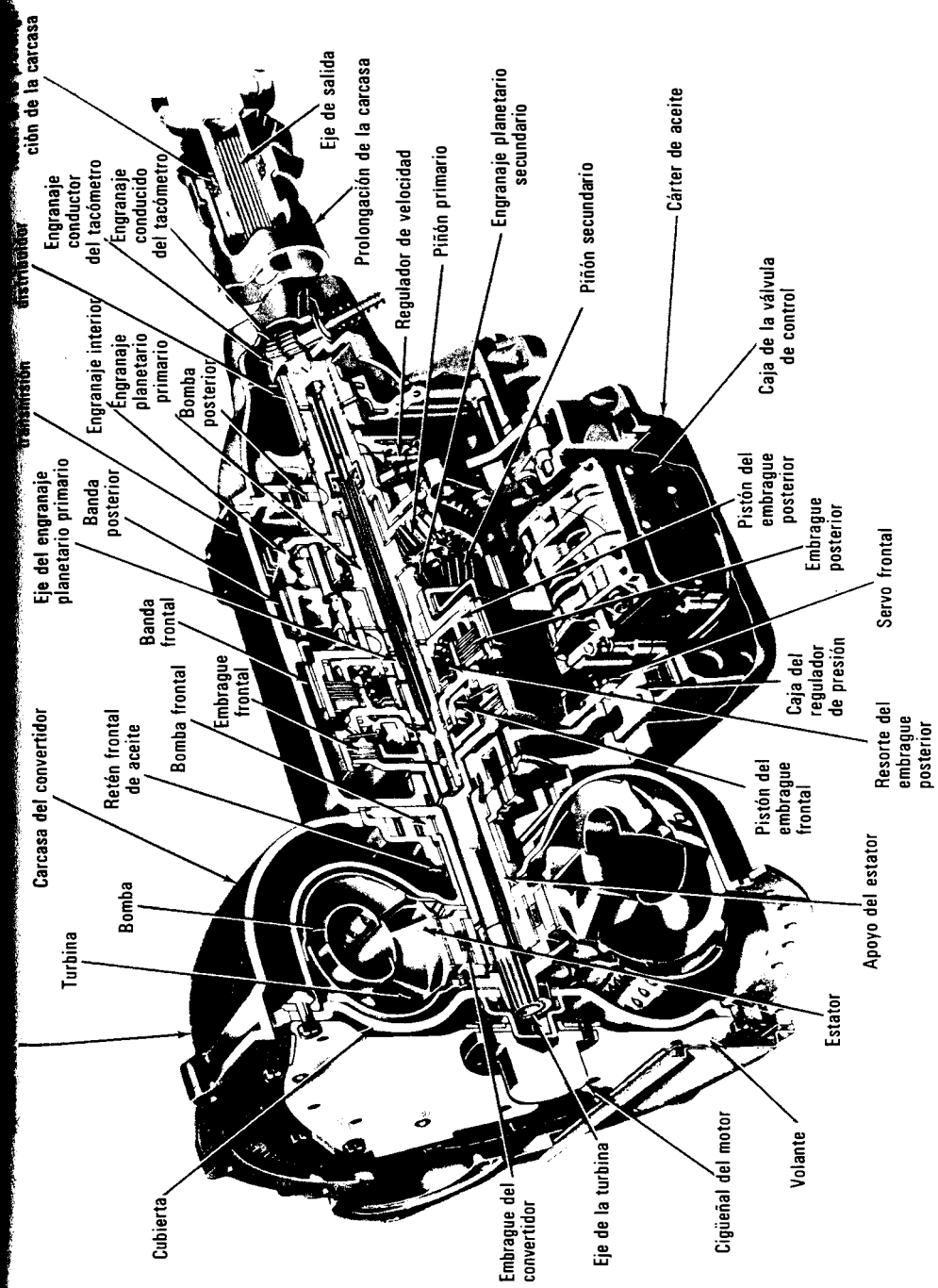


FIG. 24-2. *Transmisión hidráulica Fordomatic* de la Ford Motor Company. Consiste esencialmente en un convertidor de par hidrodinámico, embragues, bandas y un tren de engranajes planetarios, con un sistema hidráulico que asegura el funcionamiento automático.

dos bombas, un regulador y válvulas de control y cilindros hidráulicos, formando un circuito compacto, análogo a los que se describirán en la Sec. 28.10.

En la Fig. 24-2 puede verse la transmisión *Fordomatic* de la Ford Motor Company.

La industria hace uso cada vez mayor tanto del acoplamiento fluido como del convertidor de par en las formas más variadas. La transmisión hidráulica de la Fig. 24-3, del Laboratorio de Ensayo de Máquinas de Fluido del I.C.A.I., de 30,5 kW, permite, por ejemplo, en los ensayos de bombas hidráulicas, la variación continua de velocidad mediante la regulación del anillo de aceite en circución en la turbina. La bomba de circulación, que gira a velocidad constante, introduce aceite del tanque situado en el fondo de esta unidad muy compacta. El aceite es impulsado por la bomba y pasa a la turbina, de donde sale por un tubo extractor desplazable (rebosadero), que sirve precisamente para regular el anillo de aceite. Esta máquina se emplea modernamente en la industria como accionamiento de bombas y ventiladores, así como en centrifugadoras, mezcladoras, cintas transportadoras, maquinaria textil, etc.

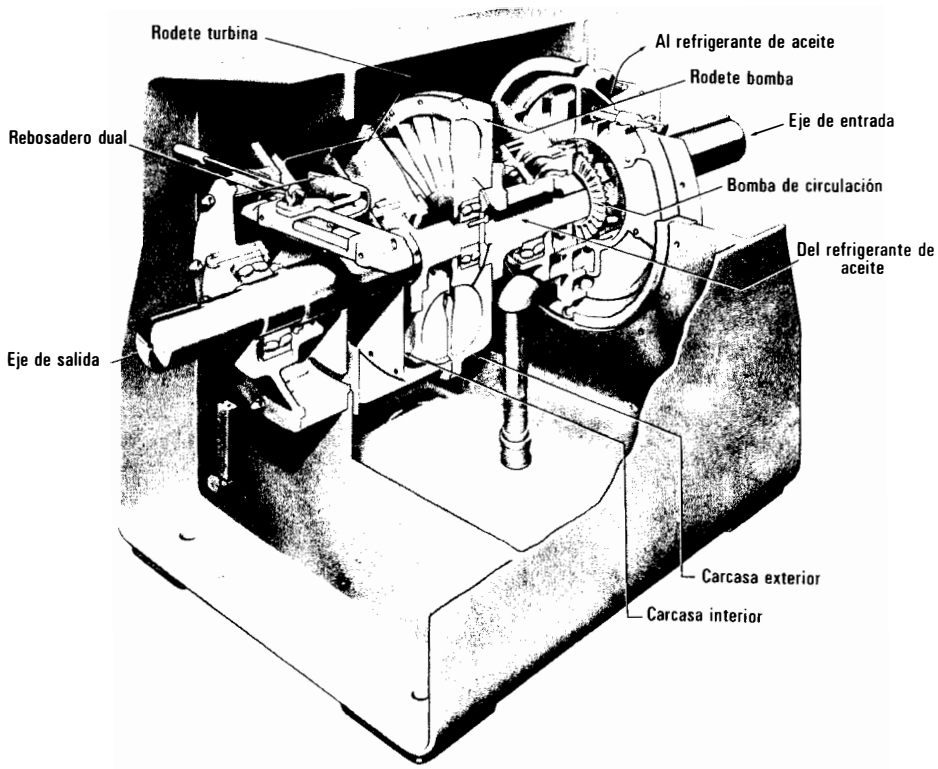


FIG. 24-3. Vista interior de la *transmisión hidráulica American Standard* de 30,5 kW instalada en el Laboratorio de Ensayo de Máquinas de Fluido del I.C.A.I. El control de velocidad pone en posición el rebosadero que regula el vórtice de aceite que se forma en los rodetes de bomba y turbina, regulando así de una manera continua la velocidad de esta última. En los bancos de ensayo de bombas es conveniente disponer de velocidad regulable. *(Por cortesía de American-Standard.)*

PROBLEMAS

24-1. *Las velocidades de giro de los ejes de entrada y salida de un convertidor de par son 2.500 y 1.000 rpm. Los pares de entrada y salida son 50 y 120 mN, respectivamente.*

Calcular:

a) potencia de entrada;
b) potencia de salida;
c) rendimiento del convertidor.

24-2. *El par de accionamiento de un acoplamiento hidráulico es de 20 mN girando el motor eléctrico de accionamiento a 1.450 rpm. El deslizamiento es el 5%.*

Calcular la potencia disponible en el eje de salida.

24-3. *En un acoplamiento hidráulico el eje de entrada gira a 1.000 rpm y el de salida a 990 rpm, transmitiendo el acoplamiento una potencia de 200 kW.*

Calcular:
a) el par en ambos ejes;
b) rendimiento del acoplamiento.

25. *Turbomáquinas hidráulicas: Leyes de semejanza y curvas características*

25.1. INTRODUCCION

Este capítulo está íntimamente relacionado con el Cap. 7, ya que trata de la experimentación en una rama de Mecánica de Fluidos: las turbomáquinas hidráulicas.

Los constructores de máquinas hidráulicas que desarrollan nuevos tipos disponen de *laboratorios de ensayo de modelos*. En particular el coste elevado de una turbina hidráulica de gran potencia absorbe los gastos de construcción y experimentación de un modelo cuyo ensayo corrobora o rectifica el diseño.

En los ensayos de máquinas hidráulicas la fuerza preponderante es la viscosidad. Por tanto, según lo estudiado en la Sec. 7.6, el modelo y el prototipo, además de ser geométricamente semejantes, deberían ensayarse a igual *número de Reynolds* para conservar la semejanza dinámica. En la práctica esto resulta imposible. Así, por ejemplo, si se construye un modelo reducido de una bomba de agua a escala 1/5, siendo 1.000 rpm la velocidad de giro del prototipo, y el ensayo del modelo se hiciera también con agua ($\nu_m = \nu_p$), de la condición de semejanza dinámica:

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$$

se deduciría que

$$D_m u_m = D_p u_p \tag{25-1}$$

donde se ha tomado como velocidad característica para definir el número de Reynolds la velocidad circunferencial u. Pero

$$u_m = \frac{\pi D_m n_m}{60} \qquad u_p = \frac{\pi D_p n_p}{60} \tag{25-2}$$

luego, sustituyendo los valores (25-2) en la Ec. (25-1), tendremos

$$n_m = \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 n_p \qquad n_p = 25.000 \text{ rpm}$$

Los ensayos a velocidades tan elevadas en el laboratorio serían costosos y prácticamente irrealizables.

En los ensayos de turbinas hidráulicas se tropieza con la dificultad de ensayar la turbina modelo bajo el salto requerido por la igualdad de número de Reynolds en el modelo y en el prototipo. De ahí que según la práctica universal:

En los ensayos de máquinas hidráulicas se hace la hipótesis de que la semejanza geométrica implica la semejanza mecánica.

Esto equivale a suponer que la viscosidad no entra en juego y por tanto que los rendimientos del modelo y del prototipo son iguales. Aunque en la realidad no sucede así (en el ejemplo anterior el rendimiento del modelo podría ser del orden del 50 por 100; mientras que el del prototipo del 80 por 100), la hipótesis anterior ha conducido a excelentes resultados, excepto en lo que respecta a predicción de rendimientos. Más aún, utilizando fórmulas empíricas se puede también predecir a base de los rendimientos del modelo obtenidos en el ensayo los rendimientos del prototipo.

En el ensayo de turbinas hidráulicas se ha utilizado la siguiente fórmula con buenos resultados:

$$\eta_{tot} = \eta_m \left[1 - (1 - \eta'_{tot}/\eta_m)(1/E^{0,314})\right] \tag{25-3}$$

donde η_{tot} — rendimiento total del prototipo
η'_{tot} — rendimiento total del modelo
η_m — rendimiento mecánico, supuesto igual en el modelo y en el prototipo
E — escala, prototipo/modelo.

En el ensayo de bombas se ha utilizado la siguiente fórmula con buenos resultados:

$$\eta_2 = 1 - (1 - \eta_1)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{10}} \tag{25-4}$$

que relaciona los rendimientos de *una misma bomba* (por tanto, escala 1/1), funcionando a número de revoluciones diferente.

Como las leyes que rigen la experimentación con modelos están basadas en la semejanza geométrica, se llaman *leyes de semejanza*. Su utilidad no se limita el ensayo de modelos.

Las leyes de semejanza sirven

— para predecir el comportamiento de una máquina de distinto tamaño; pero *geométricamente semejante* a otra cuyo comportamiento (caudal, potencia, etc.) se conoce, trabajando en las mismas condiciones (sobre todo *en condiciones de óptimo rendimiento*) (1);
— para predecir el comportamiento de *una misma máquina* (la igualdad es

(1) O bien en condiciones de igual rendimiento, por ejemplo, 50 por 100 del rendimiento máximo.

un caso particular de la semejanza), cuando varía alguna de sus características, por ejemplo en una bomba para predecir cómo varía la altura efectiva cuando varía el número de revoluciones, o en una turbina cómo varía el caudal cuando varía la altura neta, etc. (sobre todo también *en condiciones de óptimo rendimiento)* (2).

25.2. LAS SEIS LEYES DE SEMEJANZA DE LAS BOMBAS HIDRAULICAS

Las tres primeras leyes se refieren a la misma bomba ($D'/D'' = 1$: designamos con $'$ y $''$ las dos bombas que en este caso son una misma, pero funcionando en condiciones distintas) y expresan la

Variación de las características de una misma bomba o de bombas iguales cuando varía el número de revoluciones.

Deduciremos solamente la primera ley. Las demás se deducen de la misma manera, con lo que bastará indicar la fórmula que se puede utilizar en la deducción. Fácilmente verá el lector que podría también haberse utilizado cualquier otra fórmula que ligue las magnitudes que interesan.

Primera ley: Los caudales son directamente proporcionales a los números de revoluciones:

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{n'}{n''} \tag{25-5}$$

Fórmulas para la deducción de (25-5):

$$Q = Av$$

donde v — componente de la velocidad normal a cualquier sección A de la bomba.

Además, cualquier velocidad será proporcional a n, supuesto que u es proporcional a n también. En efecto, $u = \frac{\pi D}{60} n = Cn$ (C — constante). Ahora bien, en condiciones de igual rendimiento, sobre todo de óptimo rendimiento, los triángulos de velocidad han de ser semejantes (condiciones isógonas), lo que exige que todas las velocidades sean proporcionales a n.

Deducción de (25-5): el caudal es proporcional a una sección y a una velocidad; la sección no varía, al no variar el tamaño de la bomba; luego el caudal es proporcional a la velocidad. Por otra parte todas las velocidades son proporcionales al número de revoluciones; luego los caudales son directamente proporcionales a los números de revoluciones.

(2) O bien en condiciones de igual rendimiento, por ejemplo, 50 por 100 del rendimiento máximo.

Segunda ley: Las alturas útiles son directamente proporcionales a los cuadrados de los números de revoluciones:

$$\frac{H'}{H''} = \left(\frac{n'}{n''}\right)^2 \tag{25-6}$$

Fórmulas para la deducción de (25-6):

$$H = \eta_h H_u = \eta_h \frac{u_2 c_{2u}}{g}$$

por otra parte, según lo dicho (Sec. 25.1), $\eta_h' = \eta_h''$; además, $v = Cn$.

Tercera ley: Las potencias útiles (3) *son directamente proporcionales a los cubos de los números de revoluciones:*

$$\frac{P'}{P''} = \left(\frac{n'}{n''}\right)^3 \tag{25-7}$$

Fórmula para la deducción de (25-7):

$$P = Q\rho g H.$$

Las tres siguientes se refieren a dos bombas geométricamente semejantes, pero de diámetro distinto y expresan la

Variación de las características de dos bombas geométricamente semejantes con el tamaño, si se mantiene constante el número de revoluciones.

Cuarta ley: Los caudales son directamente proporcionales al cubo de la relación de diámetros:

$$Q'/Q'' = (D'/D'')^3 \tag{25-8}$$

La deducción de (25-8) es análoga a la de la Ec. (25-5).

Quinta ley: Las alturas útiles son directamente proporcionales al cuadrado de la relación de diámetros:

$$\frac{H'}{H''} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^2 \tag{25-9}$$

(3) La misma Ec. (25-7) es válida para la relación de potencias en el eje, potencias internas, etc., porque se hace siempre la hipótesis de igual rendimiento.

La deducción de (25-9) es análoga a la de (25-6).

Sexta ley: Las potencias útiles (4) *son directamente proporcionales a la quinta potencia de la relación de diámetros.*

$$\frac{P'}{P''} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^5 \qquad (25\text{-}10)$$

La deducción de (25-10) es análoga a la de (25-7).

Estas leyes se pueden fundir dos a dos, haciendo que varíe primero el diámetro y luego el número de revoluciones, obteniéndose las fórmulas siguientes:

$$Q'/Q'' = (n'/n'')(D'/D'')^3 \qquad (25\text{-}11)$$

$$\frac{H'}{H''} = (n'/n'')^2(D'/D'')^2 \qquad (25\text{-}12)$$

$$P'/P'' = (n'/n'')^3(D'/D'')^5 \qquad (25\text{-}13)$$

Eliminemos ahora $\frac{D'}{D''}$ entre las Ecs. (25-12) y (25-13), despejando en primer lugar en la Ec. (25-12) D'/D'':

$$D'/D'' = (H'/H'')^{1/2} n''/n'$$

e introduciendo después este valor en la Ec. (25-13):

$$P'/P'' = (H'/H'')^{5/2} (n''/n')^2$$

Agrupando en el primer miembro los términos que tienen ' y en el segundo miembro los que tienen " tendremos:

$$n'^2 P' H'^{-5/2} = n''^2 P'' H''^{-5/2} \qquad (25\text{-}14)$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de la Ec. (25-14):

$$n' P'^{1/2} H'^{-5/4} = n'' P''^{1/2} H''^{-5/4} \qquad (25\text{-}15)$$

Al haber deducido la Ec. (25-15) por eliminación de la relación de diámetros queda patente que el producto $n P^{1/2} H$ es idéntico para todas las bombas geométricamente semejantes. Este producto se llama

(4) Véase la nota al pie de la pág. 533.

NUMERO ESPECIFICO DE REVOLUCIONES

$$n_s = n P^{1/2} H^{-5/4} \qquad (25\text{-}16)$$

(número específico de revoluciones en función de la potencia)

De lo expuesto se deduce que

Todas las bombas geométricamente semejantes tienen el mismo número específico de revoluciones.

Nota. Fácilmente se comprueba que n_s no es adimensional. Luego n_s será distinto según el sistema de unidades utilizado, en particular, según se use el sistema técnico o el sistema internacional. Aunque en este libro se ha utilizado exclusivamente el sistema internacional, se hace la excepción de emplear las antiguas unidades del sistema técnico en el n_s, a fin de mantener los valores numéricos del mismo utilizados hasta el presente (5). Luego unidades de la Ec. (25-16):

n — rpm
P — CV
H — m

Ahora bien, siendo

$$P = Q\rho g H \text{ (W)} = Q\rho H \frac{\text{kpm}}{\text{s}} =$$

$$= \frac{Q\rho H}{75} \text{ (CV)}$$

(5) A fin de evitar la dualidad de definición de n_s de las Ecs. (25-17) y (25-28) se ha utilizado mucho, sobre todo en Alemania, el *número específico de revoluciones en función del caudal* n_q, que se define para todas las turbomáquinas hidráulicas así:

$$n_q = n Q^{1/2} H^{-3/4}$$

Finalmente, multiplicando los dos miembros de esta última expresión por $g^{-3/4}$ se obtiene el número adimensional:

$$n'_0 = \frac{n Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

donde n se expresa en rpm o también:

$$n_0 = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

donde ω se expresa en rad/s. Sería de desear que se acelerase la introducción en la técnica de este *número adimensional.*

se tendrá:

$$n_s = \sqrt{\frac{\rho}{75}}\, n\, Q^{1/2}\, H^{-3/4}$$

El n_s de una bomba suele definirse para el agua, con lo cual

$$\sqrt{\frac{\rho}{75}} = \sqrt{\frac{1.000}{75}} = 3{,}65$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{n_s = 3{,}65 n Q^{1/2} H^{-3/4}} \qquad (25\text{-}17)$$

(número específico de revoluciones de una bomba en función del caudal)

Es evidente que los valores de n_s obtenidos por la Ec. (25-16) o la (25-17) son iguales. Las unidades en que han de expresarse las variables de la Ec. (25-17) son:

n — rpm
Q — m^3/s
H — m

25.3. LAS SEIS LEYES DE SEMEJANZA DE LAS TURBINAS HIDRAULICAS

Las tres primeras leyes se refieren a la misma turbina ($D' = D''$) y expresan la

Variación de las características de una misma turbina o de turbinas iguales cuando varía la altura neta (6).

Primera ley: Los números de revoluciones son directamente proporcionales a la raíz cuadrada de las alturas netas:

$$\boxed{\frac{n'}{n''} = \frac{\sqrt{H'}}{\sqrt{H''}}} \qquad (25\text{-}18)$$

Segunda ley: Los caudales son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de las alturas netas:

(6) Se advertirá que en las tres leyes primeras de las turbinas la variable independiente es la altura neta no el número de revoluciones, como en las de las bombas.

$$\boxed{\frac{Q'}{Q''} = \frac{\sqrt{H'}}{\sqrt{H''}}} \qquad (25\text{-}19)$$

Fórmula para la deducción de (25-19)

$$v = k\sqrt{H}$$

En efecto, en una misma turbina, para una apertura determinada del distribuidor, la velocidad de entrada en el rodete es aproximadamente $c_1 = \sqrt{2gH}$ en las turbinas Pelton, y exactamente en todas las turbinas $c_1 = k_{c_1}\sqrt{2gH}$, donde $k_{c_1} < 1$; todas las demás velocidades al variar la altura neta deben variar en la misma proporción para que los triángulos de velocidad sean semejantes y el flujo tenga lugar en las mismas condiciones (generalmente las correspondientes al *óptimo rendimiento*).

Tercera ley: Las potencias útiles o potencias en el eje (7) *son directamente proporcionales a las alturas netas elevadas a 3/2*

$$\boxed{\frac{P'_a}{P''_a} = \left(\frac{H'}{H''}\right)^{3/2}} \qquad (25\text{-}20)$$

Las tres leyes siguientes se refieren a dos turbinas geométricamente semejantes, pero de diámetro distinto y expresan la

Variación de las características de dos turbinas geométricamente semejantes si se mantiene constante la altura neta.

Cuarta ley: Los números de revoluciones son inversamente proporcionales a los diámetros:

$$\boxed{\frac{n'}{n''} = \frac{D''}{D'}} \qquad (25\text{-}21)$$

Fórmula para la deducción: $u \sim Dn$. Además, $u \sim \sqrt{H} = C$ (C —constante).

Quinta ley: Los caudales son directamente proporcionales a los cuadrados de los diámetros:

$$\boxed{\frac{Q'}{Q''} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^2} \qquad (25\text{-}22)$$

(7) Véase la nota al pie de la página 532.

Sexta ley: Las potencias útiles o potencias en el eje son directamente proporcionales a los cuadrados de los diámetros:

$$\frac{P'_a}{P''_a} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^2 \tag{25-23}$$

Lo mismo que en las bombas estas seis fórmulas se pueden fundir dos a dos, a saber:

$$\frac{n'}{n''} = \sqrt{\frac{H'}{H''}}\left(\frac{D''}{D'}\right) \tag{25-24}$$

$$\frac{Q'}{Q''} = \sqrt{\frac{H'}{H''}}\left(\frac{D'}{D''}\right)^2 \tag{25-25}$$

$$\frac{P'_a}{P''_a} = \left(\frac{H'}{H''}\right)^{3/2}\left(\frac{D'}{D''}\right)^2 \tag{25-26}$$

Siguiendo el mismo procedimiento de las bombas, o sea eliminando D'/D'' entre las Ecs. (25-24) y (25-26) se deduce también que

Todas las turbinas geométricamente semejantes tienen el mismo número específico de revoluciones:

$$n_s = n\, P_a^{1/2}\, H^{-5/4} \tag{25-27}$$

(número específico de revoluciones en función de la potencia)

Las unidades en la Ec. (25-27) son las mismas que en la ecuación correspondiente de las bombas [Ec. (25-16)].

Ahora bien, siendo

$$P_a = Q\rho g\, H\eta_{tot}\ \text{(W)} = \frac{Q\rho\, H\eta_{tot}}{75}\ \text{(CV)}$$

se tendrá

$$n_s = 3{,}65\, n\sqrt{\eta_{tot}}\, Q^{1/2}\, H^{-3/4} \tag{25-28}$$

(número específico de revoluciones de una turbina en función del caudal)

Nótese la diferencia entre esta última ecuación y la Ec. (25-17). Para calcular n_s en una turbina mediante la Ec. (25-28) es preciso estimar η_{tot} (véase nota 5, pág. 535).

25.4. LAS ONCE LEYES DE SEMEJANZA DE LOS VENTILADORES

El ventilador es una bomba para gases. Por tanto, las seis leyes de semejanza de las bombas son aplicables a los ventiladores; pero en éstos se suelen utilizar presiones en vez de alturas como ya hemos dicho (Sec. 20.4). Por otra parte, en los ventiladores es interesante también estudiar su comportamiento cuando varía la densidad del gas (no dentro de la máquina, en la cual es prácticamente constante, sino de un lugar geográfico a otro o de un día a otro). Las leyes siguientes se deducen fácilmente utilizando las mismas fórmulas de deducción anteriores, junto con la ley de los gases perfectos $\frac{p}{\rho} = R_i T$ (8).

En un mismo ventilador:

Primera ley: Los caudales son directamente proporcionales al número de revoluciones.

Segunda ley: Las presiones totales engendradas son directamente proporcionales al cuadrado del número de revoluciones.

Tercera ley: Las potencias son directamente proporcionales al cubo del número de revoluciones.

En ventiladores geométricamente semejantes:

Cuarta ley: Los caudales son directamente proporcionales al cubo de los diámetros.

Quinta ley: Las presiones totales engendradas son directamente proporcionales al cuadrado de los diámetros.

Sexta ley: Las potencias son directamente proporcionales a la quinta potencia de los diámetros.

Séptima ley: Los caudales no varían con la densidad del aire.

Octava ley: Las presiones estáticas engendradas varían en relación directa con la densidad.

Novena ley: Las potencias absorbidas varían directamente con la densidad.

Décima ley: Las presiones estáticas engendradas son directamente proporcionales a la presión barométrica e inversamente proporcionales a la temperatura absoluta.

Undécima ley: Las potencias son directamente proporcionales a la presión barométrica e inversamente proporcionales a la temperatura absoluta.

Las leyes décima y undécima permiten predecir el comportamiento de un ventilador en las condiciones atmosféricas actuales, p''_{amb}, T''_{amb}, a partir de un ensayo realizado en condiciones atmosféricas distintas, p'_{amb}, T'_{amb}; así como también reducir un ensayo realizado con unas ciertas condiciones atmosféricas p'_{amb}, T'_{amb} a las condiciones normales (760 Torr, 0° C: véase pág. 429).

(8) R_i es la constante particular del gas impulsado por el ventilador.

En el primer caso se tendrá:

$$\Delta p''_{tot} = \frac{p''_{amb}\, T'_{amb}}{p'_{amb}\, T''_{amb}} \Delta p'_{tot}$$

En el segundo caso se tendrá:

$$\Delta p_{tot\ n} = \frac{760\ T'_{amb}}{p'_{amb} \cdot 273{,}15} \Delta p'_{tot}$$

donde p'_{amb} deberá expresarse en Torr y análogamente para las potencias en el eje. Los caudales no experimentan variación alguna.

25.5. CURVAS CARACTERISTICAS DE LAS TURBOMAQUINAS HIDRAULICAS

25.5.1. Curvas características de las bombas rotodinámicas y ventiladores

25.5.1.1. Ensayo elemental de una bomba

Ensayo elemental de una bomba es aquel en que, manteniéndose constante el número de revoluciones, n, se varía el caudal, Q, y se obtienen experimentalmente las curvas $H = f_1(Q)$; $P_a = f_2(Q)$, *y* $\eta_{tot} = f_3(Q)$. *Estas curvas, y en particular la curva* $H = f_1(Q)$, *se llaman curvas características.*

En las instalaciones más corrientes la bomba acoplada a un motor eléctrico de inducción está destinada a girar a velocidad constante. Sin embargo, es frecuente que, aunque la bomba gire a n constante, el utilizador necesite más o menos caudal, lo que sólo puede conseguirse en este caso abriendo o cerrando la válvula de impulsión (válvula de compuerta en la Fig. 19-18).

Suponemos que tanto la selección como la instalación de la bomba está bien hecha. Esta selección se ha de hacer mediante un estudio previo de la H necesaria, como se explicó en la Sec. 19.10.2. Se han hecho estudios de rendimientos logrados en las bombas destinadas a la agricultura en alguna región, que han dado una media de rendimiento del 25 por 100; siendo así que en dichas bombas podría esperarse un rendimiento del 75 por 100. Esto significa que se pagaba allí en recibos eléctricos tres veces más de lo que se hubiera pagado si las bombas hubieran estado bien seleccionadas e instaladas.

Si la bomba está bien escogida estará funcionando normalmente en las condiciones llamadas nominales, a saber, Q_N, H_N, n_N (este último deberá ser el rpm del motor eléctrico), es decir, marchará la bomba en el *punto de funcionamiento* para el cual el rendimiento total η_{tot} es máximo.

Ahora bien, ¿cuáles serán las características de la bomba, H, P_a (potencia de accionamiento) y η_{tot} (rendimiento total), cuando el caudal, Q, varía, o sea cuando se estrangula la válvula de impulsión? Las fórmulas de semejanza no

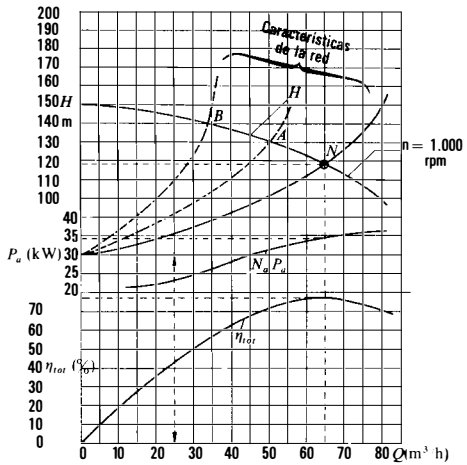


FIG. 25-1. *Curvas características* $H = f_1(Q)$, $P_a = f_2(Q)$ y $\eta = f_3(Q)$ de una bomba para $n = 1.000$ rpm. El punto N para el cual η_{tot} es máximo (77 %) es el *punto nominal*. Las curvas de puntos que pasan por A y B, así como la curva del mismo tipo de trazo continuo que pasa por N son las características de la red para diferentes aperturas de la válvula de impulsión.

resuelven este problema, porque dichas fórmulas se basan en la hipótesis de que el rendimiento se mantiene constante. Luego sus resultados serán tanto menos aproximados cuanto más diferentes sean las condiciones de funcionamiento.

Las curvas características, que son la respuesta a la pregunta anterior, son experimentales y se obtienen fácilmente en un banco de pruebas, como el representado en la Fig. 25-5 (véase Sec. 25.6). Así, por ejemplo, las curvas de la Fig. 25-1 se han obtenido manteniendo constante el número de revoluciones (1.000 rpm, por ejemplo). Se han hecho de cinco a ocho ensayos a diferentes aperturas de la válvula de impulsión desde la apertura completa hasta el cierre completo. En cada ensayo, o punto, se miden H, P_a y η_{tot}. En el gráfico se toma Q como abscisa y como ordenadas: H (primera curva), P_a (segunda) y η_{tot} (tercera). Si el número de revoluciones por minuto de diseño es $n_N = 1.000$ rpm, el rendimiento máximo obtenible con esta bomba será (véase figura) $\eta_{máx} = 77$ por 100, siendo por tanto las *características nominales* $Q_N = 65$ m³/h y $H_N = 118{,}6$ m. En este punto que es el *punto nominal*, la bomba absorbe una potencia mecánica $P_a = 25{,}2$ kW. En esta figura hemos trazado además tres *curvas características de la red*, que es la representación gráfica de la Ec. (19-13) (expresando previamente los tres últimos términos de dicha ecuación en función del caudal): las tres curvas corresponden a tres posiciones de la válvula de impulsión. Los puntos A, B y N son puntos posibles de funcionamiento. Si la bomba está bien escogida para la red funcionará en el punto nominal (punto N, $\eta_{tot\ max}$). En el banco de pruebas la curva se obtiene cerrando progresivamente la válvula de estrangulamiento.

25.5.1.2. Ensayo completo de una bomba

Ensayo completo de una bomba es un conjunto de ensayos elementales, caracterizado cada uno por un número de revoluciones distinto: consta de varias (cinco a ocho) curvas $H - Q$ *y de varias curvas de* $\eta_{tot} - Q$. *Al conjunto de todas las curvas se denomina curvas en concha.*

Las bombas pueden ser accionadas no sólo por motores de inducción de velocidad constante, sino también por motores de gasolina, o diesel, turbinas

de vapor, motores eléctricos de continua, motores de alterna de colector, de velocidad regulable o motores de inducción, a través de cambios de velocidad mecánicos (variación continua o discontinua) o hidráulicos (Sec. 24.3 y Fig. 24-3); es decir, una bomba puede trabajar a números de revoluciones distintos.

¿Cuáles serán las características de la bomba, H, P_a y η_{tot} cuando varíe no solamente Q, sino también n?

En la Fig. 25-1, si el número de revoluciones es fijo (1.000 rpm en la figura), la bomba sólo puede funcionar en los puntos del plano $H - Q$ que se encuentran en la curva $H - Q$ trazada en la figura; pero si el número de revoluciones varía, la bomba puede funcionar en toda una región de este plano, que se llama *campo característico*. El campo característico se estudia experimentalmente en el mismo banco de pruebas (Fig. 25-5) con tal de que el banco posea un accionamiento de número de revoluciones variable.

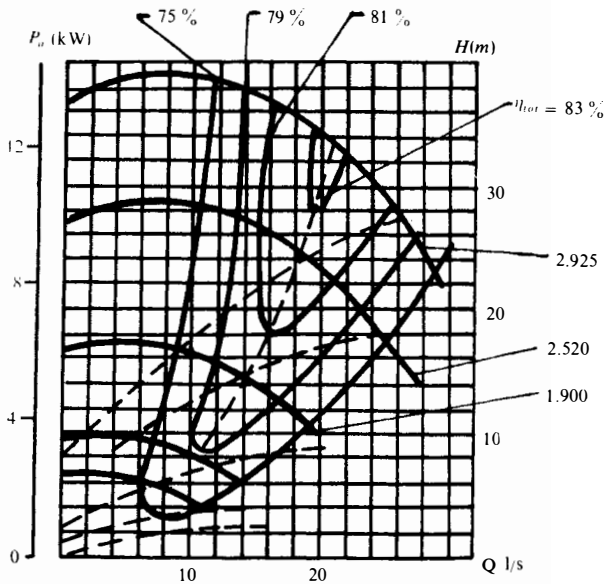


FIG. 25-2. *Curvas en concha o colina de rendimientos* de una bomba centrífuga. Las curvas de igual rendimiento son equivalentes a las curvas de nivel en el plano topográfico de una colina. La cúspide corresponde al rendimiento óptimo, en este caso de 83 %, que se obtiene con valores bien determinados de Q, H y n los cuales se llaman *valores nominales* Q_N, H_N y n_N.

El *ensayo completo* de la Fig. 25-2 corresponde a una bomba centrífuga cuyo $\eta_{tot\ max} = 83$ por 100 en las condiciones nominales: $Q_N = 20$ l/s, $H_N = 32$ m y $n_N = 2.925$ rpm. Este ensayo completo se ha obtenido así:

— Se hace un cierto número de ensayos elementales (cinco a ocho) haciendo girar sucesivamente la bomba a número de revoluciones distinto: 2.925, 2.520, 1.900, etc.
— Se llevan las curvas $H - Q$ de estos ensayos a un mismo gráfico.
— Se escoge en cada ensayo elemental los mismos valores exactos de rendimiento: 75, 79, 81 %, etc., en la figura.
— En el valor de Q correspondiente a cada rendimiento en cada curva y sobre la curva correspondiente $H - Q$ se anota el valor del rendimiento.
— Finalmente se unen los puntos de igual rendimiento, por ejemplo, 75 %, obteniéndose así la curva $\eta_{tot} = 75$ % y lo mismo a continuación la $\eta_{tot} = 79$ %, etc.

Las curvas de igual rendimiento son como las curvas de nivel en un plano topográfico. En efecto, el plano $H - Q$ es como el terreno en planta. El tercer eje en un sistema cartesiano espacial es el eje de los rendimientos η_{tot}. Y las curvas de igual rendimiento de la Fig. 25-2 son las proyecciones en el plano $H - Q$ de las intersecciones de la superficie de ecuación $\eta_{tot} = f(Q, H)$ con planos horizontales trazados en la figura a alturas $\eta_{tot} = 0{,}75$, 0,79, 0,81 y 0,83. Estas curvas, que van siendo cada vez más interiores a medida que el rendimiento crece, se llaman *curvas en concha*, y a su conjunto se le llama también *colina de rendimientos*. El constructor suele poseer las curvas en concha para cada tipo de bomba fabricado. Como se ve fácilmente,

el ensayo completo revela todas las posibilidades de la bomba funcionando de todas las maneras posibles dentro del campo característico.

En los *ventiladores* se procede de manera análoga; pero utilizando las variables típicas indicadas en la Sec. 20.4. Con frecuencia, además de la curva $\Delta p_{tot} = f_1(Q)$ se trata la curva de la presión estática del ventilador $\Delta p_e = f_2(Q)$.

25.5.2. Curvas características de las turbinas hidráulicas

En las turbinas hidráulicas el ensayo elemental y el ensayo completo se hacen de manera análoga; aunque son otras las variables corrientemente utilizadas, etc., como se explica a continuación:

El ensayo completo de una turbina se hace manteniendo siempre constante la altura neta.

— El *ensayo elemental* se hace manteniendo además constante no n como en las bombas, sino la apertura del distribuidor (distribuidor Fink o inyector). La variable independiente (abscisa) no es Q como en las bombas, sino n, obteniéndose experimentalmente las curvas

$$Q = f_1(n)$$
$$P_a = f_2(n)$$
$$\eta_{tot} = f_3(n)$$

— El *ensayo completo* es un conjunto de ensayos elementales caracterizado cada uno por una apertura distinta del distribuidor.

La Fig. 25-3 es un ensayo completo de una turbina Francis cuyo $n_s = 260$. Se han trazado las curvas $Q = f_1(n)$ para distintas aperturas del distribuidor. Uniendo los puntos de igual rendimiento se obtienen las curvas en concha. Otras veces se trazan las curvas $P_a = f_2(n)$ también para distintas aperturas del distribuidor, y uniendo los puntos de igual rendimiento se obtienen otras curvas en concha distintas. En nuestro caso el rendimiento óptimo es aproximadamente el 90 por 100.

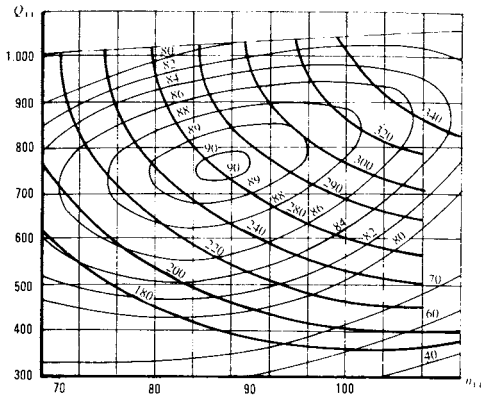


FIG. 25-3. *Ensayo completo* de una turbina Francis de $n_s = 260$: curvas $Q_{11} = f(n_{11})$ y curvas de igual rendimiento (curvas de trazo fino).

Como se ve en la misma figura, en las turbinas no suelen utilizarse como variables Q y n, sino Q_{11} y n_{11}.

donde n_{11}, Q_{11} — número de revoluciones y caudal de una turbina geométricamente semejante a la ensayada, cuyo rodete tuviera un diámetro igual a 1 m y funcionase con un salto neto igual a 1 m *en iguales condiciones de rendimiento.*

Aplicando la Ec. (25-24) a la turbina ensayada y a esta *turbina unitaria* se deduce fácilmente que

$$n_{11} = \frac{nD}{\sqrt{H}} \tag{25-29}$$

y aplicando la Ec. (25-25) a las mismas turbinas:

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2\sqrt{H}} \tag{25-30}$$

El ensayo completo de una turbina revela todas las posibilidades de la turbina funcionando de todas las maneras posibles.

Así:

— La Fig. 25-4 *a* revela una turbina en que si varía tanto la altura de salto como el caudal, el rendimiento disminuye mucho. Esta turbina sería adecuada para una central en que el salto y la carga se mantuvieran constantes [al aumentar H disminuye n_{11}, según la Ec. (25-30)].
— La Fig. 25-4 *b* revela una turbina que no acusa variaciones de rendimiento mientras no varíe la altura de salto; aunque las variaciones del caudal, y por tanto de la carga, sean considerables.

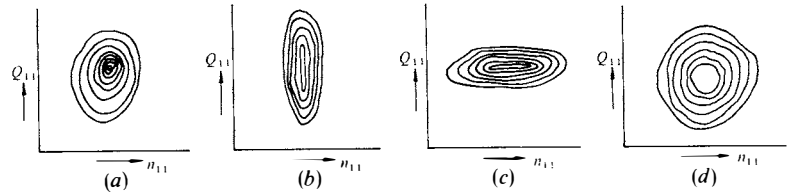


FIG. 25-4. Formas diversas de *colinas de rendimientos*. Estas colinas revelan el comportamiento de la turbina en todas las condiciones de servicio posibles (véase texto).

— La Fig. 25-4 *c* revela una turbina que no acusa variaciones de rendimientos grandes con las variaciones de altura de salto siempre que no varíe el caudal.
— La Fig. 25-4 *d* revela finalmente una turbina que mantiene un buen rendimiento para variaciones relativamente grandes, tanto de caudal como de salto.

25.6. BANCOS DE ENSAYO

Los ensayos de las bombas y la obtención de sus curvas características en los laboratorios de hidráulica se llevan a cabo en *bancos de prueba*, como el de la Fig. 22-22. El esquema de la Fig. 25-5 contiene los elementos esenciales de un banco de ensayo de bombas:

— *Grupo de accionamiento a velocidad variable* (véase Sec. 25.5.1.2). En los laboratorios de hidráulica se utiliza para ello el motor de corriente continua, motor de alterna con transmisión hidráulica o mecánica, o un motor de combustión interna.
— *Medidor de par.* Los dos procedimientos más utilizados son el motor de corriente continua basculante, en que se mide (con una balanza) el par de reacción, y el torsiómetro.
— *Cuentarrevoluciones* para medir n. Con el par y las rpm se calcula P_a.
— *Manómetro y vacuómetro* a la salida y entrada de la bomba para medir la diferencia de presiones necesaria para el cálculo de H.
— *Medidor de caudal.* Los procedimientos más utilizados son: tanques vo-

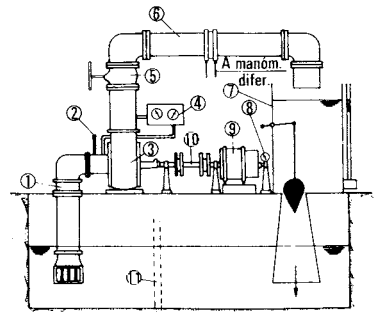


FIG. 25-5. Esquema de un *banco de pruebas de bombas hidráulicas:* 1, tubería de aspiración; 2, termómetro; 3, bomba que se ensaya; 4, panel con vacuómetro y manómetro; 5, válvula de compuerta para variar el caudal; 6, diafragma para medir el caudal con salidas a manómetro diferencial; 7, depósito volumétrico para medir también el caudal. Puede sustituirse por un depósito gravimétrico con balanza; 8, tacómetro para medir n; 9, motor de accionamiento de corriente continua con variación de n; 10, torsiómetro para medición de par; 11, rejilla tranquilizadora.

lumétricos (medición de caudal por volumen), tanques gravimétricos (medición de caudal por peso), Venturis, toberas y diafragmas, rotámetros, etc.

— *Termómetro* para medir la temperatura del agua en los ensayos de cavitación (véase Sec. 19.12.1).

En los ensayos de cavitación es necesario variar la altura de aspiración, lo que se consigue:

— estrangulando la válvula de aspiración;

— aspirando la bomba de un depósito hermético, en que se controla la presión;

— aspirando la bomba de un pozo a la presión atmosférica de nivel regulable (9).

La Fig. 25-6 corresponde a un banco de ensayo de una bomba construido por la firma Gilkes de Inglaterra, especializada en equipo didáctico.

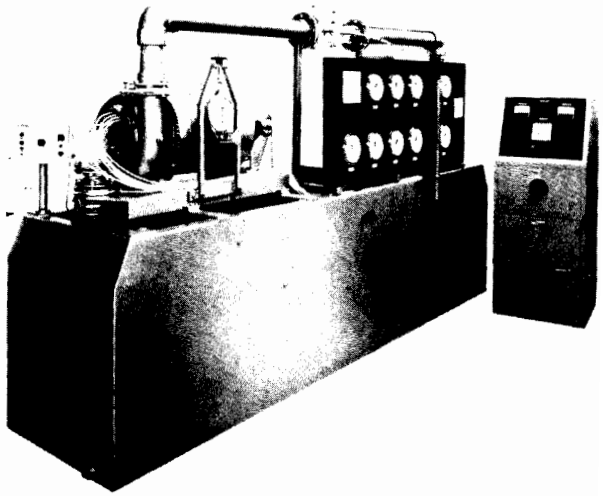


FIG. 25-6. *Banco de ensayo de una bomba centrífuga*, comercializada para escuelas de Ingeniería por la casa Gilkes, Inglaterra. La bomba, dotada de ventana de plexiglás y 9 tomas de presión, está accionada por un motor de velocidad variable de 9 kW. El caudal se mide mediante un tubo de Venturi y un vertedero triangular. El banco incluye un estroboscopio para estudios de cavitación.

La Fig. 25-7 representa el banco de pruebas de una turbina Kaplan, instalado en el laboratorio del I.C.A.I., que permite, además del ensayo completo descrito en la Sec. 25.5.2, ensayos a diferentes alturas de salto, a diferentes ángulos de los álabes orientables del rodete y estudios estroboscópicos de cavitación, ya que la carcasa del rodete es de plástico transparente (10).

(9) Véase Claudio Mataix, *Sistema hidráulico múltiple para ensayo de bombas hidráulicas*, en «Anales de Mecánica y Electricidad», 45, 6 (1968), 375-401.

(10) Véase también C. Mataix, *Grupos especiales e instrumentación específica para investigación de características de las máquinas de fluido*, en «Anales de Mecánica y Electricidad», 46, 3 (1969), 163-185.

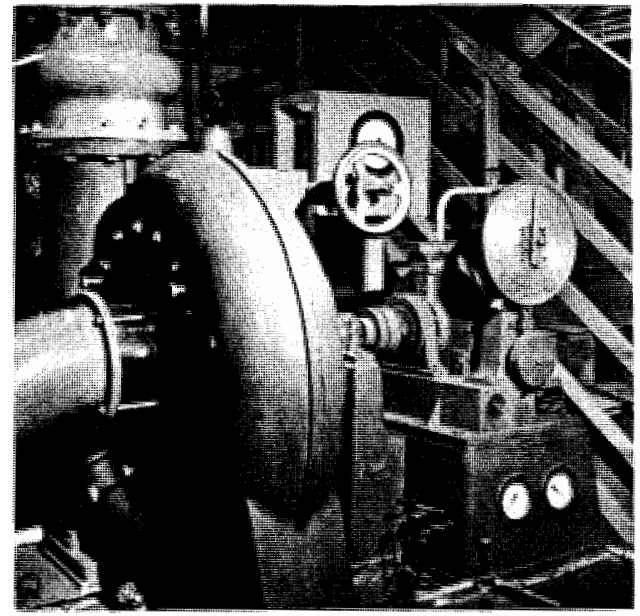


FIG. 25-7. *Banco de ensayo en el L.E.M. del I.C.A.I. de una turbina Kaplan* de álabes orientables preparado para ensayos estroboscópicos (el rodete es visible a través del arranque del tubo de aspiración, que es de plástico). A la derecha, parte superior, el medidor del caudal Samson conectado a un Venturi. También puede verse el dinamómetro Junkers hidráulico para medir la potencia, en cuyo pedestal se ven los dos manómetros para la medición precisa de la altura neta. Esta turbina está acoplada al circuito cerrado del laboratorio en el que se puede controlar la presión desde −6 m hasta 40 m c.a., lo que permite variar también la altura neta de la turbina.

Un banco moderno de ensayos y de investigación de máquinas hidráulicas fue ya descrito en otro lugar (véanse Figs. 22-22 y 22-23).

PROBLEMAS

25-1. *En el ensayo de una turbina Francis en el banco de pruebas, en el punto del óptimo rendimiento, se han obtenido las siguientes características: $H = 5$ m; $Q = 1{,}5$ m^3/s; $n = 200$ rpm; $P_a = 55$ kW; $D_1 = 750$ mm.*

Calcular:

a) el rendimiento y número de revoluciones específico de esta turbina:
b) se instala la turbina en un salto neto de 15 m. Calcular n, Q y P_a de la turbina funcionando también en el punto de óptimo rendimiento.

a)

$$\eta_{tot} = \frac{P_a}{P} = \frac{55 \cdot 1.000}{Q \rho g H}$$

$$= \frac{55}{1{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 5} = 0{,}7475$$

$$P_a = 55 \text{ kW} = 55 \cdot 1{,}3592 \text{ CV}$$

$$= = 74{,}75 \text{ CV}$$

$$n_s = \frac{200 \cdot 74{,}75^{1/2}}{5^{5/4}} = 231{,}3$$

b) Aplicando sucesivamente la primera, segunda y tercera ley de semejanza de las turbinas, tendremos:

$$n'' = \sqrt{\frac{H''}{H'}}\, n' = \sqrt{\frac{15}{5}} \cdot 200 = 346{,}4 \text{ rpm}$$

$$Q'' = \sqrt{\frac{H''}{H'}}\, Q' = \sqrt{\frac{15}{5}} \cdot 1{,}5 = 2{,}598 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_a'' = \left(\frac{H''}{H'}\right)^{3/2} P_a' = \left(\frac{15}{5}\right)^{3/2} \cdot 55 = 285{,}8 \text{ kW}$$

25-2. *Un ventilador aspirando aire en estado normal tiene las siguientes características: $Q = 8$ m³/s; presión estática equivalente a 50 mm c.a.; $n = 580$ rpm. Potencia absorbida, 5,2 kW. Sin variar las rpm y siendo la temperatura del aire 60° C y la presión atmosférica 770 Torr:*

Calcular:

a) la nueva presión estática;
b) la nueva potencia absorbida por el ventilador.

Al no variar ni D, ni rpm, el caudal Q permanecerá constante (primera, segunda y séptima ley). En el estado normal:

$$T'_{amb} = 0 + 273{,}15 = 273{,}15 \text{ K}$$

$$p'_{amb} = 760 \text{ Torr}$$

$$\Delta p'_e = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}050 = 490{,}5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Por tanto, siendo la nueva temperatura $T''_{amb} = 60 + 273{,}15 = 333{,}15$ K.

a) Según la 10.ª ley:

$$\Delta p''_e = \frac{p''_{amb} \cdot T'_{amb}}{p'_{amb} \cdot T''_{amb}} \Delta p'_e = \frac{770 \cdot 273{,}15}{760 \cdot 333{,}15} \cdot 490{,}5 = 407{,}5 \frac{N}{\text{m}^2}$$

b) Según la 11.ª ley:

$$P''_a = \frac{p''_{amb} \cdot T'_{amb}}{p'_{amb} \cdot T''_{amb}} P'_a = \frac{770 \cdot 273{,}15}{760 \cdot 333{,}15} \cdot 5{,}2 = 4{,}120 \text{ kW}$$

25-3. *Una bomba centrífuga que gira a 1.500 rpm, cuyas tuberías de aspiración e impulsión son del mismo diámetro, produce un aumento de presión de 50 bar en total en sus 5 escalonamientos, proporcionando un caudal de 5.500 l/min.*

Calcular:

a) la velocidad específica de esta bomba;
b) la velocidad específica característica de un rodete de la bomba anterior.

25-4. *Una bomba centrífuga tiene las siguientes características de funcionamiento: potencia absorbida, 16 kW; $n = 2.850$ rpm; $Q = 3.000$ l/min.; $H = 25$ m. Sin embargo, un utilizador de esta bomba para riego desea sustituir el motor eléctrico por un motor diesel que gira a 3.100 rpm, haciendo un acoplamiento directo.*

Calcular:

a) la altura útil que deberá desarrollar la bomba;
b) el caudal;
c) la potencia absorbida.

25-5. *Una bomba centrífuga girando a 500 rpm proporciona un caudal de agua de 18.000 l/min a una altura efectiva de 5 m.*

Calcular:

a) la velocidad a que debe girar una bomba geométricamente semejante a la anterior, que diera en condiciones análogas de rendimiento la mitad del caudal con una altura manométrica de 10 m;
b) también la relación de semejanza entre ambas bombas.

25-6. *Un ventilador proporciona un caudal de 12.000 m³/h a 500 rpm. El ventilador da una presión total de 15 mbar y absorbe una potencia de 320 W. Se reduce la velocidad a un 80 % del valor anterior. Las condiciones atmosféricas permanecen invariables.*

Calcular:

a) el nuevo caudal;
b) el nuevo incremento de presión total;
c) la nueva potencia absorbida.

25-7. *Las características de un ventilador centrífugo de 800 mm de diámetro exterior, trabajando con aire en condiciones normales, son: $Q = 4.000$ m³/h; presión total, 50 Pa; $n = 450$ rpm; rendimiento total, 50 %. Otro ventilador geométricamente semejante al anterior tiene un diámetro exterior de 1 m y gira al mismo número de revoluciones.*

Calcular, para las mismas condiciones normales:

a) el caudal del segundo ventilador;
b) su presión total;
c) su potencia en el eje.

25-8. *Una turbina hidráulica desarrolla una potencia de 200 kW bajo un salto neto de 6 m girando a 100 rpm. La misma turbina ha de funcionar bajo un salto neto de 8 m.*

Calcular, para las mismas condiciones de funcionamiento:

a) potencia desarrollada por la turbina;
b) velocidad a que deberá girar la turbina.

25-9. *Una turbina Pelton consigue su óptimo rendimiento bajo un salto de 80 m, desarrollando una potencia de 200 kW. Se instala en un salto neto de 90 m.*

Calcular en condiciones también de óptimo rendimiento:

a) el incremento de velocidad que ha de experimentar la turbina;
b) el incremento de potencia.

25-10. *Una bomba centrífuga, que gira a 1.800 rpm, da un caudal de 1.360 l/min con una altura efectiva de 120 m y un rendimiento total de 75 %. Si esta misma bomba gira a 1.450 rpm,*

Calcular:

a) el caudal;
b) la altura efectiva;
c) la potencia en el eje.

25-11. *Calcular el número de revoluciones específico de una bomba centrífuga de las siguientes características nominales: $n = 1.450$ rpm; $Q = 0{,}05$ m³/s; $H = 25$ m.*

25-12. *Se requiere una bomba centrífuga para bombear un caudal de agua de 200 m³/h a una altura efectiva de 50 m, acoplada a un motor de 1.950 rpm.*

Calcular la velocidad específica de la bomba requerida.

25-13. *Una turbina alcanza su máximo rendimiento funcionando en un salto neto de 6 m, girando a 100 rpm y desarrollando una potencia de 400 kW. El diámetro exterior del rodete es 1.300 mm.*

Calcular:

a) la velocidad a que debe girar en las mismas condiciones de rendimiento una turbina geométricamente semejante a la anterior, pero de mitad de tamaño en un salto neto de 9 m;
b) la potencia que desarrollará esta segunda turbina.

25-14. *Una turbina de 400 mm de diámetro bajo un salto neto de 7 m absorbiendo un caudal de 400 l/s a 150 rpm, da un rendimiento total de 70 %. Una turbina geométricamente semejante a la anterior de 1 m de diámetro, funciona en un salto neto de 10 m.*

Calcular para las mismas condiciones de funcionamiento:

a) la velocidad a que debe girar la turbina;
b) la potencia desarrollada;
c) el caudal.

25-15. *En un laboratorio se ensaya un modelo de turbina de 400 mm de diámetro, obteniéndose el mejor rendimiento, que es el 70 %, para una velocidad de 1.500 rpm con un salto de 10 m. Se construye un prototipo geométricamente semejante al modelo de 1.500 mm de diámetro y se instala en un salto de 15 m.*

Calcular:

a) velocidad a que conviene que gire el prototipo;
b) relación de potencias del prototipo a la del modelo.

25-16. *Se quieren bombear 300 m³/h de agua a una altura efectiva de 200 m.*

Calcular la velocidad mínima de sincronismo con un motor eléctrico si n_s no debe bajar mucho de 30 a fin de que el rendimiento de la bomba pueda ser aceptable.

25-17. *Calcular las velocidades específicas de las bombas siguientes de un solo escalonamiento, cuyas características nominales son:*

Bomba	*rpm*	*Q* (m³/h)	*H* (m)
1	1.000	780	40
2	750	2.700	5
3	600	4.200	20
4	500	4.800	6

25-18. *Calcular en las mismas cuatro bombas del problema 25-17 el n_s correspondiente a una velocidad igual al 70 % del valor nominal.*

25-19. *Para poder predecir el funcionamiento de una bomba centrífuga de gran potencia se construyó un modelo a escala 1:10, cuyas características nominales en funcionamiento fueron las siguientes: $P_m = 24$ kW; $H_m = 8$ m; $n_m = 700$ rpm; $\eta_{tot\,m} = 79$ %. Además, $H_p = 30$ m.*

Calcular:

a) n_p;
b) P_p;
c) Q_m y Q_p.

25-20. *Una bomba centrífuga da un caudal de 50 l/s a una altura efectiva de 100 m girando a 1.450 rpm. El rendimiento de la bomba es 0,67. Se exige a la bomba una altura efectiva de 130 m.*

Calcular el número de revoluciones, el caudal y la potencia de accionamiento necesaria para que la bomba dé esta altura efectiva, suponiendo igual rendimiento.

25-21. *Un ventilador, absorbiendo una potencia de 27 kW, proporciona un caudal de aire (densidad 1,2 kg/m³) de 6 m³/s, desarrollando un incremento de presión total de 25 mbar y girando a una velocidad de 2.200 rpm. Varía la densidad del aire a 1,12 kg/m³ sin variar el incremento de presión total.*

Calcular las nuevas características de funcionamiento del ventilador.

25-22. *La central de Quintana (Iberduero) tiene una turbina Kaplan de 10.500 CV, que en un salto neto de 18,8 m gira a 250 rpm. Calcular el número específico de revoluciones de esta turbina.*

La central de Balaguer (Fuerzas Eléctricas de Cataluña) tiene una turbina Kaplan de 9.950 CV, instalada en un salto de 16,6 m, que gira a 214 rpm. Calcular el número específico de revoluciones de esta máquina.

En la central de Öjeforsen, de Suecia, una turbina Kaplan tiene las siguientes características: $H = 16$ m; $Q = 180$ m³/s; $P_a = 35.000$ CV; $n = 115$ rpm. Calcular el rendimiento de esta turbina y su número específico de revoluciones.

25-23. *Una turbina desarrolla una potencia de 200 kW girando a 100 rpm en un salto neto de 10 m.*

Calcular:

a) potencia desarrollada en un salto de 12 m en las mismas condiciones de rendimiento;
b) velocidad a que debe girar la turbina.

25-24. *En el mismo ventilador del problema 25-6 cuyas características nominales de funcionamiento se refieren al aire en condiciones normales.*

Calcular:

a) el caudal, si la densidad del aire fuera 0,96 kg/m^3;
b) la potencia si la temperatura fuera de 35° C y la presión barométrica 780 Torr.

25-25. *Un exhaustor que extrae aire en condiciones normales, con un rendimiento total de 80 % y un caudal de 120 m^3/s, girando a 490 rpm, desarrolla un incremento de presión total de 40 mbar. Se mantiene constante el caudal y el número de revoluciones; pero la presión atmosférica es de 740 Torr y la temperatura del aire 80° C.*

Calcular:

a) el nuevo incremento de presión total desarrollado por el ventilador;
b) la nueva potencia absorbida por el mismo.

25-26. *Los ensayos realizados con una turbina hidráulica de diámetro exterior 1.500 mm dieron como resultado que el rendimiento máximo se obtenía a 90 rpm en un salto de 6 m. En estas condiciones la turbina dio un rendimiento total de 75 %. Una turbina geométricamente semejante a la anterior y de la mitad de diámetro se instala en el mismo salto neto.*

Calcular para el rendimiento máximo:

a) el % en que ha disminuido la potencia de esta segunda turbina;
b) el número de revoluciones a que debe girar para conseguir el óptimo rendimiento.

25-27. *Calcular el número específico de revoluciones de una de las tres turbinas Pelton de la central de Sabiñánigo de eje horizontal, que desarrolla una potencia unitaria de 4.530 CV, con una altura de salto de 497 m, a una velocidad de 600 rpm. Lo mismo, de una de las dos turbinas de la central de Pontenovo (Saltos del Sil), que desarrolla una potencia unitaria de 18.000 CV en un salto de 387 m, girando a 600 rpm. ¿Cuál es el número específico de revoluciones de la turbina Francis de la central de Pintado (Compañía Sevillana de Electricidad), que desarrolla una potencia de 14.500 CV en un salto de 191 m a 750 rpm?*

En la central de San Sebastián (Hidroeléctrica de Moncabril) hay dos turbinas Francis de eje vertical, que desarrollan una potencia unitaria de 12.800 CV en un salto neto de 153 m, girando a 750 rpm.

Calcular el número específico de revoluciones de estas turbinas.

25-28. *Una bomba centrífuga tiene un rodete de 200 mm de diámetro y proporciona una altura útil nominal de 18 m. Sin embargo, la altura útil requerida es de 16 m.*

Calcular la reducción necesaria que se ha de efectuar en el rodete para que dé la altura que se pretende, conservando el mismo número de revoluciones.

25-29. *Las turbinas Francis múltiples fueron en otro tiempo corrientes.*

Calcular la relación entre el número específico de revoluciones de una turbina Francis doble (turbinas Francis gemelas) y el de una turbina Francis simple de la misma geometría.

26. *Máquinas hidráulicas de desplazamiento positivo: Bombas de émbolo*

26.1. INTRODUCCION

Las *máquinas de desplazamiento positivo*, motores y bombas, constituyen la segunda clase de las dos en que fueron divididas en la Sec. 18.2 las máquinas hidráulicas. Estas máquinas, cuya teoría es mucho más sencilla que la de las turbomáquinas, se estudiarán brevemente en éste y en el capítulo siguiente.

Esta clase, además del grupo importante de las *bombas de émbolo*, comprende el grupo compuesto por los cilindros hidráulicos y neumáticos y las bombas y motores rotativos, grupo muy numeroso y variadísimo, que constituye hoy día en los países más desarrollados una industria floreciente, la cual encuentra cada día nuevas aplicaciones en el campo de las *transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos* y en el automatismo (véase Cap. 28).

Este campo de las transmisiones y controles es un dominio casi exclusivo de las máquinas de desplazamiento positivo; mientras que en el campo de bombeo de líquidos y gases las turbomáquinas han invadido y seguirán invadiendo cada vez más el dominio en otro tiempo exclusivo de las máquinas de émbolo. Uno y otro hecho se fundan en el distinto principio de funcionamiento.

26.2. PRINCIPIO DEL DESPLAZAMIENTO POSITIVO

El funcionamiento de las máquinas de desplazamiento positivo no se basa, como el de las turbomáquinas, en la *ecuación de Euler*, que se estudió en la Sec. 18.3, sino en el *principio del desplazamiento positivo* que se estudia a continuación. En el interior del cilindro de la Fig. 26-1 en que se mueve un émbolo con movimiento uniforme y velocidad v hay un fluido a la presión p. Supondremos que tanto el cilindro como el émbolo son rígidos o indeformables y que el fluido es incompresible. El movimiento del émbolo se debe a la fuerza aplicada F. El émbolo al moverse *desplaza* al fluido a través del orificio de la figura. Si el émbolo recorre un espacio l hacia la izquierda el volumen ocupado por el líquido se reducirá en un valor igual a Al (donde A — área transversal del émbolo). Como el fluido es incompresible el volumen de fluido que sale por el orificio será también Al. El tiempo t empleado en recorrer la distancia l es

$$t = l/v \qquad (26\text{-}1)$$

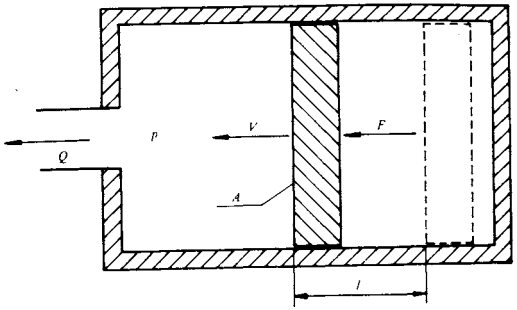


FIG. 26-1. Explicación del *principio de desplazamiento positivo*: al disminuir el volumen a la izquierda del émbolo el fluido se verá obligado a salir sea cual fuere la presión, siempre que la fuerza F sea suficientemente grande y las paredes del cilindro suficientemente robustas.

El caudal Q, o volumen *desplazado* en la unidad de tiempo, será, teniendo en cuenta la Ec. (26-1):

$$Q = \frac{Al}{t} = Av. \tag{26-2}$$

Si no hay rozamiento la potencia comunicada al fluido será:

$$P = Fv$$

pero $F = pA$; luego

$$P = Fv = pAv = Qp$$

en virtud de la Ec. (26-2).

Es evidente que el esquema de la Fig. 26-1 puede funcionar como bomba o como motor, es decir, la máquina puede absorber potencia mecánica, Fv y restituir potencia hidráulica Qp (bomba) o viceversa. Tanto en un caso como en otro queda en evidencia que

el principio de desplazamiento positivo consiste en el movimiento de un fluido causado por la disminución del volumen de una cámara.

Por tanto, en una *máquina de desplazamiento positivo*

— el órgano intercambiador de energía no tiene necesariamente movimiento alternativo (émbolo), sino que puede tener movimiento rotativo (rotor). Sin embargo, en las máquinas de desplazamiento positivo tanto alternativas como rotativas, siempre hay una cámara que aumenta de volumen (succión en una bomba) y disminuye de volumen (impulsión). Por eso estas máquinas se llaman también *máquinas volumétricas.* Además, si el órgano transmisor de energía tiene movimiento rotativo, la máquina se llama *rotoestática* para distinguirlas de las *rotodinámicas.*

Una máquina rotoestática es una máquina de desplazamiento positivo de movimiento rotativo.

— El intercambio de energía de fluido se hace siempre en forma de presión, en contraposición a las turbomáquinas, en que los cambios en la dirección y valor absoluto de la velocidad del fluido juegan un papel esencial (véase Sec. 18.2).

— La curva característica o curva $H - Q$ de una turbomáquina, por ejemplo, de una bomba (véase la Fig. 25-1) revela que la bomba sólo puede alcanzar una altura (presión) máxima que, según la ecuación de Euler, depende de la forma del rodete. Por el contrario, supongamos que la Fig. 26-1 represente una bomba de émbolo. Es evidente que, teóricamente, el caudal Q no dependerá de la resistencia en la tubería de impulsión, que se reflejará en un aumento de la presión p que reine en el cilindro, ya que dada una velocidad de émbolo v, el *desplazamiento* será el mismo, y el caudal también. Además, si las paredes del émbolo son suficientemente robustas, y el motor de accionamiento es suficientemente potente, la bomba proporcionará toda la presión que se le pide. Teóricamente la curva $H - Q$ de una bomba de desplazamiento positivo será una paralela al eje H.

— Las *turbomáquinas* basadas en la ecuación de Euler en general no son reversibles; una *bomba rotodinámica* al funcionar como turbina empeora su rendimiento, y en algunos casos es incapaz de producir potencia útil alguna. La razón es que los ángulos de los álabes juegan un papel decisivo en la transmisión de la energía, y al funcionar como turbina los álabes no poseen ya los ángulos apropiados.

Por el contrario, el principio de desplazamiento positivo hace que todas las máquinas basadas en él sean *fundamentalmente* reversibles. El que algunas máquinas prácticamente no lo sean no es en virtud de la hidráulica, sino de la mecánica del aparato. Por ejemplo, ciertas *bombas de paletas deslizantes* funcionando como motor a pequeñas velocidades pueden no llegar a desarrollar la fuerza centrífuga necesaria para producir suficiente estanqueidad.

En las transmisiones y controles se emplean casi exclusivamente las máquinas de desplazamiento positivo; quedando casi eliminadas de este dominio las turbomáquinas.

Para ello existen dos razones:

1.ª En las turbomáquinas al variar la presión varía el caudal. Si, por ejemplo, se emplease una *bomba rotodinámica* para el sistema de presión del accionamiento hidráulico de una excavadora, al encontrar ésta mayor resistencia en el terreno, se reduciría la velocidad de trabajo de la misma. Si se emplea una *bomba rotoestática*, no.

2.ª Una *bomba rotodinámica* da una presión máxima. Si aumenta la resistencia aumenta la presión necesaria en la bomba, que no puede exceder dicho valor máximo y la máquina se calaría. La *bomba rotoestática*, no.

26.3. CLASIFICACION DE LAS MAQUINAS DE DESPLAZAMIENTO POSITIVO

El órgano principal de las máquinas de desplazamiento positivo, que designaremos con el nombre genérico de *desplazador*, tiene la misión de intercam-

biar energía con el líquido, lo que implica un *desplazamiento* del mismo. Este órgano admite infinidad de diseños, y el campo abierto a la imaginación del ingeniero proyectista es tan grande que constantemente aparecen en el mercado nuevas formas constructivas.

Sin embargo, es fácil clasificar estos diseños atendiendo a dos criterios distintos:

Primer criterio: Según el tipo de movimiento del desplazador las máquinas de desplazamiento positivo se clasifican en:

— *máquinas alternativas* y
— *máquinas rotativas.*

El *principio de desplazamiento positivo* en las máquinas alternativas se explicó por medio de la Fig. 26-1. La Fig. 26-2 demuestra que el mismo principio se puede realizar en una máquina rotativa. La figura representa una *bomba*

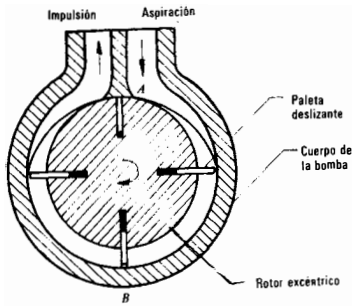


FIG. 26-2. Las bombas rotoestáticas se basan también en el principio de desplazamiento positivo. En la *bomba de paletas deslizantes* el rotor es excéntrico y hay una o varias cámaras que aumentan y disminuyen de volumen al girar la bomba.

de paletas deslizantes (véase Sec. 22.7 y Fig. 27-1 *k*). Al girar el rotor excéntrico con relación a la carcasa en sentido de las agujas del reloj de *A* a *B* aumenta el volumen, se crea una succión y entra el líquido por el conducto y la lumbrera de admisión; de *B* a *A* el volumen entre el rotor y la carcasa disminuye y el líquido es impulsado por la lumbrera y el conducto de salida: el principio de funcionamiento de esta máquina es, pues, el mismo que el de una bomba de émbolo: un volumen que aumenta y realiza la succión y luego disminuye realizando la impulsión: de nuevo el *principio de desplazamiento positivo.*

Segundo criterio: Según la variabilidad del desplazamiento se clasifican en:

— *máquinas de desplazamiento fijo* y
— *máquinas de desplazamiento variaale.*

La variación del desplazamiento en una *máquina alternativa* es fácil: basta variar la carrera del émbolo. En algunas máquinas rotativas también es fácil. Por ejemplo, en la Fig. 26-2, para variar el desplazamiento basta variar la excentricidad del rotor.

Desplazamiento, D, es el volumen desplazado en una revolución. Por tanto *el caudal, Q,* en las máquinas de desplazamiento positivo será:

$$Q = Dn \qquad (26\text{-}3)$$

En muchas aplicaciones interesa variar el caudal. Según la Ec. (26-3) esto puede lograrse variando *n;* pero no es recomendable y se usa poco. Lo más ordinario es variar *D,* como se acaba de explicar.

En resumen, atendiendo a los dos criterios enunciados, las máquinas de desplazamiento positivo se clasifican en cuatro grupos:

1 — máquinas alternativas de desplazamiento fijo;
2 — máquinas alternativas de desplazamiento variable;
3 — máquinas rotativas de desplazamiento fijo;
4 — máquinas rotativas de desplazamiento variable.

Los grupos 1 y 2, o *máquinas alternativas,* tienen dos campos de aplicación distintos:

Primer campo de aplicación: bombeo de líquidos.
Segundo campo de aplicación: transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos.

En el primer campo se utilizan mucho las *bombas de émbolo* de diferentes tipos que estudiaremos en este capítulo. En el segundo campo se utilizan los cilindros hidráulicos y neumáticos, de los que veremos múltiples aplicaciones en el Cap. 28.
Los grupos 3 y 4 o *máquinas rotoestáticas* se estudiarán en el capítulo siguiente.

26.4. BOMBAS DE EMBOLO

26.4.1. Comparación de las bombas rotodinámicas y las bombas de émbolo

La comparación se refiere al primer campo de aplicación enunciado: *el bombeo de líquidos.*

Presiones

Las *bombas de émbolo* prácticamente no tienen límite de presiones. Actualmente se construyen para presiones de 1.000 bar y aun mayores. Para aumentar la presión basta hacer la bomba más robusta y el motor más potente. El *principio de desplazamiento positivo* demuestra que teóricamente cualquier presión es alcanzable. Sin embargo, las *bombas rotoestáticas* (Cap. 27), con excepción de las de tornillo, no se adaptan tan bien a presiones mayores de 30 bar.

Las *bombas rotodinámicas, centrífugas* (radiales y radioaxiales) y *axiales* alcanzan grandes presiones, aumentando el número de escalonamientos; pero si este número es excesivo el rendimiento disminuye mucho. Sin embargo, la tendencia moderna muestra una invasión muy acusada de las bombas rotodinámicas en el campo de las grandes presiones: se construyen para alimentación de calderas de vapor en las centrales térmicas bombas de presión superior a los 350 bar.

Caudales

Las *bombas de émbolo* se adaptan sólo a caudales limitados. Para aumentar el caudal en ellas hay que aumentar el tamaño de la máquina, porque, siendo como veremos en estas máquinas el flujo pulsatorio, los fenómenos de inercia impiden aumentar el caudal mediante el aumento de velocidad.

Las *bombas rotodinámicas* se adaptan fácilmente a grandes caudales.

En resumen:

Las bombas de émbolo se adaptan más a grandes presiones y pequeños caudales y las bombas rotodinámicas (centrífugas y axiales) a pequeñas presiones y grandes caudales. Las bombas rotodinámicas (centrífugas y axiales) a pequeñas presiones y grandes caudales. Las bombas rotodinámicas son máquinas de mayor número específico de revoluciones (más rápidas) que las bombas de émbolo.

La Fig. 26-3 indica el campo de aplicación de los diferentes tipos de bombas. Esta figura está naturalmente sujeta a la evolución de la técnica.

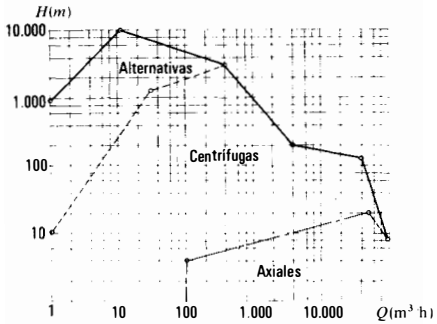


FIG. 26-3. *Campo de aplicación* de las bombas alternativas o de émbolo, centrífugas y axiales.

Las bombas de émbolo tienen la ventaja de mejor rendimiento, autoaspiración (véase Sec. 19.8) y mayor altura de aspiración. Sin embargo, la tendencia moderna muestra una invasión, como hemos dicho, de las bombas rotodinámicas en el dominio de las bombas de émbolo, debido a las

Ventajas de las bombas rotodinámicas sobre las bombas de émbolo.

— *Potencia específica* (= potencia por unidad de peso o por unidad de volumen) *mayor*.
— *Carencia de fuerzas de inercia descompensadas*, si el rotor está mecánica y dinámicamente equilibrado, y por tanto funcionamiento menos expuesto a vibraciones.
— *Acoplamiento directo* a motores eléctricos de número de revoluciones elevado, y por tanto más baratos, sin transmisión reductora como las bombas de émbolo.
— *Carencia de sobrepresión* en la bomba y en la tubería por cierre de la válvula de impulsión.

— *Carencia de válvulas*, con lo que se eliminan averías.
— *Precio más reducido.*

26.4.2. Caudal teórico, caudal real y caudal instantáneo

En la Fig. 26-4 se ve un esquema de una bomba de émbolo. En ella el émbolo es de tipo corriente o de disco: este tipo se emplea en las bombas de émbolo

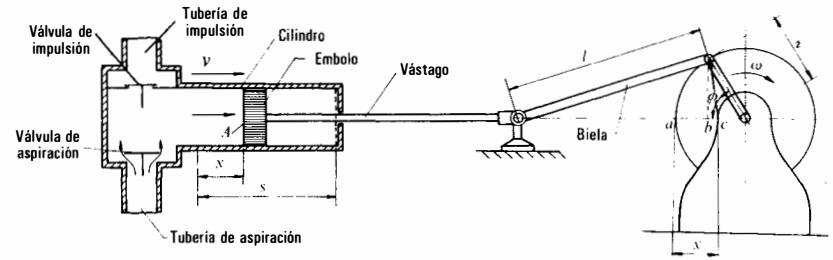


FIG. 26-4. Esquema de *bomba de émbolo de simple efecto.*

hasta presiones de 20 a 25 bar. Si las presiones son mayores, el émbolo es mucho más robusto, de mayor longitud y las bonbas se llaman *bombas de émbolo buzo* (Fig. 26-5). El movimiento del motor eléctrico de gasolina, diesel, etc., se transmite por el mecanismo de biela-manivela al vástago del émbolo. La bomba tiene dos válvulas: la válvula de aspiración que comunica con la tubería de aspiración y la válvula de impulsión que comunica con la tubería de impulsión. Al moverse el émbolo hacia la derecha crea un vacío en la cámara, y la presión atmosférica que reina en el pozo de aspiración empuja el líquido por la tubería de aspiración al interior de la cámara. Al volver el émbolo hacia la izquierda se cierra la válvula de aspiración, se abre la de impulsión y el líquido es impulsado por la tubería de salida. A cada revolución del motor corresponden dos carreras (ida y vuelta) s del émbolo; pero sólo en una se realiza la impulsión. Por tanto será

Caudal teórico, Q_t

$$\boxed{Q_t = \frac{Ans}{60}} \quad \text{m}^3/\text{s},\ SI \tag{26-4}$$

donde A — *área* transversal del émbolo, m², *SI*
s — *carrera*, m, *SI*
$As = D$ — *desplazamiento* o volumen desplazado en una revolución, m³, *SI*
n — *rpm* del cigüeñal.

Luego el caudal teórico de una bomba de émbolo es directamente proporcional al área del émbolo, a la carrera y al número de revoluciones del motor, y no

depende de la presión creada por la bomba. Esta última determina la potencia absorbida por la bomba para bombear un caudal determinado.

Si queremos aumentar el caudal sin aumentar excesivamente las dimensiones de la máquina según la Ec. (26-4) habrá que aumentar n; pero por la razón ya expuesta anteriormente, la velocidad media del émbolo no suele exceder 1,5 m/s, y el número de carreras dobles (ida y vuelta) no suele exceder 550 a 600 por minuto. La tendencia moderna señala un progreso hacia velocidades de émbolo mayores que las indicadas, con lo que se disminuyen las dimensiones y el peso de la bomba (aumento de potencia específica). Las bombas de émbolo en contraposición de las rotodinámicas (Sec. 19.8) tienen excelentes características de aspiración y no necesitan cebamiento. Sin embargo, la regulación del caudal no puede hacerse en estas bombas por cierre de la válvula de impulsión sino variando el número de revoluciones del motor, o bien haciendo el *by-pass* de parte del caudal impulsado otra vez al tubo de aspiración.

La válvula de impulsión en una bomba de émbolo sólo se debe cerrar al parar la bomba, jamás en marcha

De lo contrario, la presión crecería hasta tal punto que se produciría una avería seria en el motor (caso de no estar éste protegido), en la bomba o en la instalación.

Caudal real Q

El caudal real es menor que el teórico, a causa de las fugas debidas a retraso de cierre en las válvulas, a que las válvulas no son estancas, y a las pérdidas exteriores en el prensaestopas por donde el eje atraviesa el émbolo. Además el aire mezclado con el líquido impulsado que se desprende a causa del vacío creado por la bomba, y que penetra por el tubo de aspiración si no es estanco, disminuye el caudal. Sin embargo, aquí también la disminución de caudal útil se debe al caudal de retroceso (véase Sec. 19.11.1.2 y Fig. 22-20 *a*) que circula en estas bombas por el juego entre el émbolo y el cilindro dilatado sobre todo en las grandes presiones. Estas pérdidas se tienen en cuenta en el

rendimiento volumétrico:

$$\eta_v = Q/Q_t \tag{26-5}$$

η_v oscila entre 0,85 a 0,99. Es mayor en las bombas cuyo émbolo es de mayor diámetro, y es tanto menor cuanto menor es la viscosidad del fluido.

Caudal instantáneo, Q_i

El caudal instantáneo no es constante como en las bombas rotodinámicas, lo que constituye una desventaja, sino *pulsatorio*. En efecto, en la Fig. 26-4, llamando

ω — velocidad angular constante de la manivela
r — radio de la manivela
l — longitud de la biela
$\phi = \omega t$ — ángulo de giro de la manivela
x — camino recorrido por el émbolo desde el punto muerto superior
D — desplazamiento
v — velocidad del émbolo
$s = 2r$ — carrera del émbolo,

y siendo la relación r/l pequeña $ab \approx ac = x$. Entonces $x = r - bd = r - r \cos\phi = r(1 - \cos\phi)$.

Por otra parte,

$$v = \frac{dx}{dt} = r \operatorname{sen}\phi \frac{d\phi}{dt} = r\omega \operatorname{sen}\phi.$$

Pero $v = 0$ tanto para $\phi = 0$ (punto muerto superior), como para $\phi = \pi$ (punto muerto inferior); luego entre ambos valores hay un máximo, cuyo valor tiene lugar para

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$v_{máx} = r \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\omega = \omega r = \frac{\pi n r}{30};$$

luego la velocidad no es constante, sino que sigue una ley sinusoidal.

El volumen desplazado en un recorrido infinitesimal del émbolo será

$$dD = A\, ds$$

pero

$$ds = v\, dt = \omega r \operatorname{sen}\phi\, dt,$$

luego

$$dD = A\,\omega\, r \operatorname{sen}\phi\, dt = A\,\omega\, r \operatorname{sen}\omega\, t\, dt, \tag{26-6}$$

y el caudal instantáneo será

$$Q_i = \frac{dD}{dt} = A\,\omega r \operatorname{sen}\omega t \tag{26-7}$$

que no es constante, sino que sigue una ley sinusoidal.

Como $\omega t = \phi$ y $\frac{d\phi}{dt} = \omega$, de la Ec. (26-6) se deduce:

$$dD = r\, A \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

y el *desplazamiento* o volumen impulsado en una revolución, será:

$$D = \int_0^{\pi} r\,A \operatorname{sen}\phi\, d\phi = A\,r \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$
$$= Ar[-\cos\phi]_0^{\pi} = 2\,Ar = As. \qquad (26\text{-}8)$$

El caudal total será:

$$Q = \frac{Dn}{60} = \frac{Asn}{60}$$

que coincide con la Ec. (26-4).

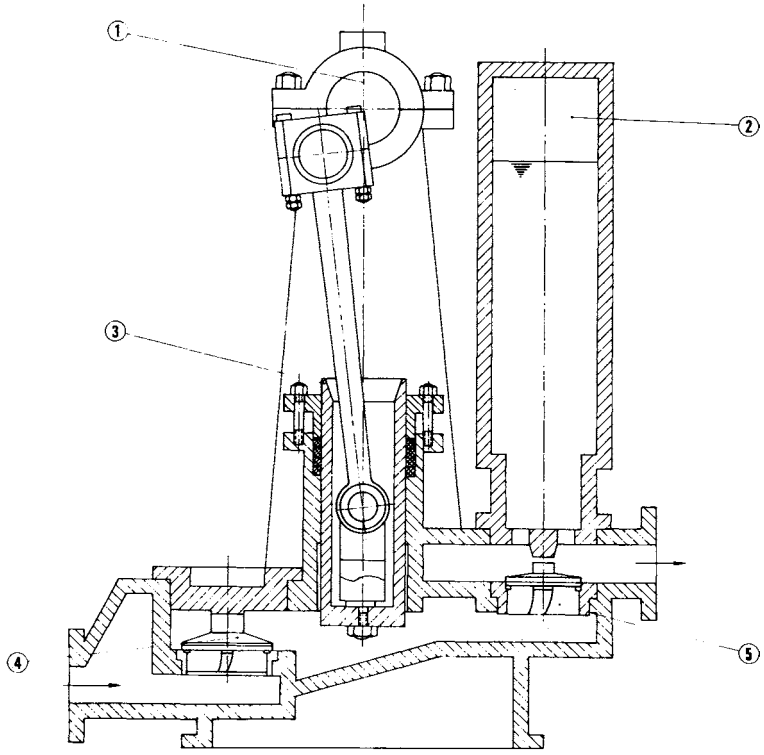


FIG. 26-5. *Bomba de émbolo buzo* adaptada a grandes presiones o alturas útiles: 1, cigüeñal; 2, cámara de aire; 3, émbolo buzo; 4, vá lvula de aspiración; 5, válvula de impulsión.

La cámara de aire que aparece en la Fig. 26-5, n.2 tiene como objeto amortiguar el golpe de ariete que resulta de la pulsación continua del caudal en la tubería de impulsión en las bombas de un solo émbolo llamadas *simplex*. La Fig. 26-6 muestra una bomba de émbolo *duplex* o de doble efecto (véase la Sec. 26.4.4). La Fig. 26-7 es una bomba *triplex*, construida por la casa Kobe de U.S.A.

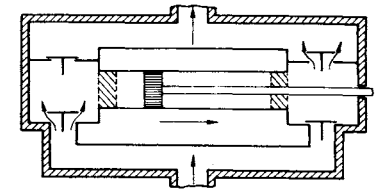


FIG. 26-6. Esquema de una *bomba de émbolo de doble efecto*.

26.4.3. Potencia indicada y potencia útil: diagrama del indicador

Se llama *diagrama del indicador* a la representación gráfica de la variación de la presión en el cilindro de una bomba durante una revolución completa del cigüeñal. En la práctica el diagrama del indicador se obtiene mediante un instrumento que registra la presión instantánea que reina en el cilindro del instrumento conectado a la bomba, y por tanto registra la presión instantánea en el interior de la bomba. El diagrama del indicador sirve para

— descubrir defectos de funcionamiento de la bomba
— medir la *potencia interna*, que en las máquinas alternativas, por obtenerse con este aparato, se llama *potencia indicada.*

Si la bomba trabaja normalmente (las válvulas se abren y se cierran sin dilación, no existen fugas en las válvulas, el émbolo y el cilindro tienen un ajuste perfecto, no hay pérdidas importantes en el paso del fluido por las válvulas) en el diagrama del indicador las líneas *ac* y *bd*, que corresponden al comienzo de de la aspiración y de la impulsión, respectivamente, serían verticales. La pequeña elevación de la presión que se advierte en el ángulo derecho del diagrama corresponde al momento de apertura de la válvula de impulsión y análogamente sucede con la pequeña depresión al comienzo de la aspiración.

En las Figs. 26-8 *a*, *b*, *c*, *d* pueden verse diagramas que corresponden a bombas con algún defecto de funcionamiento. El diagrama *a* corresponde a una bomba en que la válvula de impulsión no se cierra a tiempo. El diagrama *c* corresponde a una bomba en que la válvula de aspiración no se cierra a tiempo: las verticales se inclinan porque el émbolo comienza su carrera de retroceso cuando aún no se han cerrado las válvulas (la de impulsión o la de aspiración). Estas inclinaciones pueden producirse también si las válvulas no cierran bien, debido a impurezas que las obstruyen, o a que no están en condiciones, o también si ha entrado aire en el cilindro. El diagrama *b* corresponde a una bomba en que funcionan mal ambas válvulas. Del diagrama *d* puede concluirse que por entrada del aire no se hace un vacío suficiente en el cilindro, etc.

El área del diagrama convertido a unidades convenientes mediante una escala apropiada representa el trabajo hidráulico comunicado por el émbolo al líquido en una revolución. Este trabajo específico, puesto en metros, corresponde exactamente a la altura de Euler H_u en las bombas rotodinámicas. Así como multiplicando dicha altura por el caudal teórico obteníamos la potencia interna de una bomba rotodinámica; así, aquí obtendremos de la misma manera la potencia indicada. El subíndice i en P_i significa potencia indicada o interna, porque en realidad son una misma. Midiendo el área del diagrama del indicador con un planímetro y dividiendo esta área por la carrera s, se calcula la presión media indicada, p_i. En resumen:

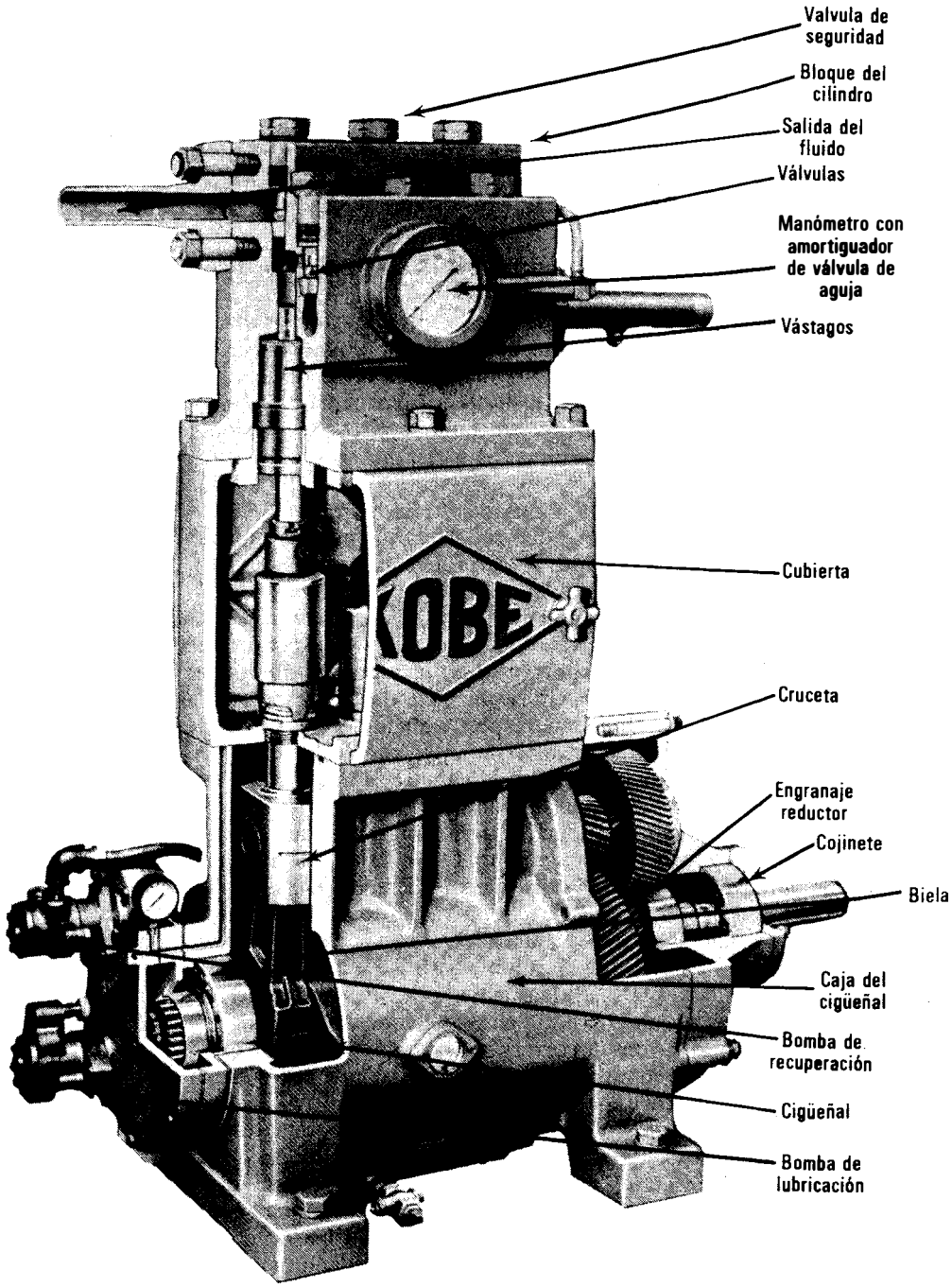


FIG. 26-7. La *bomba triplex* Kobe, U.S.A., se construye para presiones hasta unas 2.000 bar y potencias de unos 130 kW para trabajo fuerte con aceite; hidrocarburos; nitrógeno, etileno, hidrógeno y anhídrido carbónico líquidos, etc., en prensas de forjado, ensayos destructivos pesados, ensayos hidrostáticos, etc.

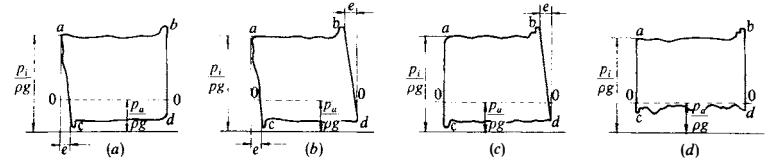


FIG. 26-8. *Diagramas diversos del indicador.* El diagrama (*a*) acusa que la válvula de impulsión no se cierra a tiempo; (*b*) ambas válvulas funcionan mal; (*c*) la válvula de aspiración no se cierra a tiempo; (*d*) vacío insuficiente.

Potencia indicada o potencia interna de una bomba de émbolo

$$P_i = \frac{p_i\, Asn}{60\,\eta_v} \qquad \text{W } (SI) \tag{26-9}$$

Potencia útil [véase Ec. (19-17)]

$$P = Q\rho g\, H \qquad \text{W } (SI) \tag{26-10}$$

Rendimiento hidráulico [véase Ec. (19-18)]

$$\eta_h = \frac{H}{p_i/\rho g} \tag{26-11}$$

Rendimiento total [véase Ec. (19-24)]

$$\eta_{tot} = \eta_v\, \eta_h\, \eta_m \tag{26-12}$$

El rendimiento total en las bombas de émbolo oscila de 0,70 a 0,92 según tamaño, tipo y calidad de construcción.

26.4.4. Tipos diversos de bombas de émbolo

1.º Existen multitud de variantes en la construcción de estas bombas. Como ejemplo citaremos la Fig. 26-9, que corresponde a una *bomba de cilindro oscilante* que carece de válvulas, cuyo funcionamiento se basa en la oscilación del cilindro, que pone en comunicación las cámaras de izquierda y derecha alternativamente con la aspiración y la impulsión.

Otra variante es la *bomba diferencial*, cuyo esquema se ve en la Fig. 26-10. La superficie del cilindro a la derecha es mayor que a la izquierda. Cuando el émbolo se mueve hacia la derecha parte del caudal

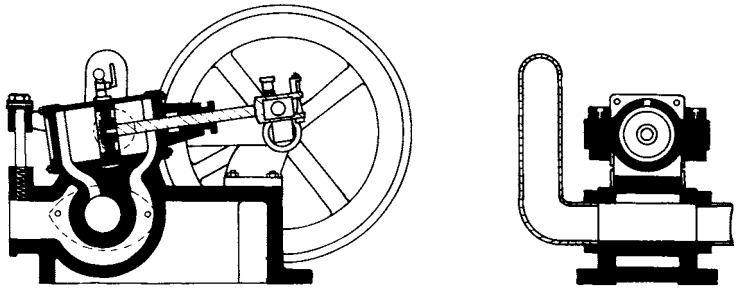


FIG. 26-9. *Bomba de émbolo sin válvulas.*

que sale por la válvula de impulsión sale definitivamente de la bomba; mientras que la otra parte retrocede para llenar el espacio izquierdo del cilindro. Esta bomba funciona como una bomba de simple efecto en la aspiración, y como una bomba de doble efecto en la impulsión y, sin embargo, sólo tiene dos válvulas.

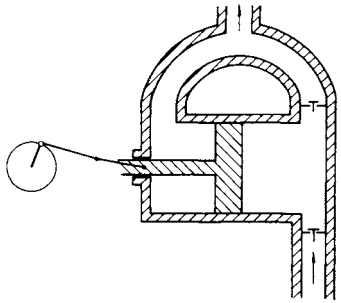


FIG. 26-10. *Bomba diferencial.*

2.º Las bombas de émbolo se clasifican en *simplex* y *multiplex* y estas últimas en duplex (de dos cilindros o de uno de doble efecto), triplex y cuadruplex.

Las *bombas multiplex* tienen la ventaja de aminorar las pulsaciones del caudal, así como aumentar el caudal total de la bomba. La Fig. 26-6 representa una bomba de doble efecto.

Es evidente que el caudal teórico Q_t de esta bomba será:

$$Q_t = \frac{Asn}{60} + \frac{(A - a)sn}{60} = \frac{(2A - a)sn}{60}$$

donde A — área del émbolo
a — área del vástago
s — carrera.

Esta bomba consigue mucha mayor uniformidad de caudal con poca complicación.

La bomba de émbolo accionada por vapor en construcción *sencilla* (un émbolo de vapor y un émbolo de líquido), o *doble* (no de doble efecto, sino dos émbolos de vapor y dos de líquido) ha sido y sigue siendo muy usada como bomba de alimentación de calderas. Tiene la ventaja de que se evita el mecanismo de biela y manivela, y consiguientemente se elimina el equilibrado de las fuerzas de inercia mediante contrapesos del cigüeñal o volante, que en esta bomba no son necesarios. Los ángulos del cigüeñal suelen ser en estas bombas de 180°.

La *bomba triplex* consta de tres bombas de simple efecto que tienen tubos de aspiración y de impulsión comunes. Los ángulos del cigüeñal son de 120°. Las bombas cuadruplex constan de dos bombas de doble efecto, con tubo de aspiración y de impulsión también comunes y ángulos del cigüeñal a 90°.

Es inmediata la obtención de las siguientes

Fórmulas del caudal útil:

Bomba simplex

$$Q_1 = \eta_t \frac{Asn}{60} \quad \text{m}^3/\text{s},\ SI \tag{26-13}$$

Bomba duplex (1 cilindro doble efecto):

$$Q_2 = \eta_t \frac{(2A - a)sn}{60} \quad \text{m}^3/\text{s},\ SI \tag{26-14}$$

Bomba triplex:

$$Q_3 = 3Q_1 \quad \text{m}^3/\text{s},\ SI \tag{26-15}$$

Bomba cuadruplex:

$$Q_4 = 2Q_2 \quad \text{m}^3/\text{s},\ SI \tag{26-16}$$

Bomba diferencial:

$$Q_d = Q_1 \quad \text{m}^3/\text{s},\ SI \tag{26-17}$$

El coeficiente de irregularidad ϵ, se define así:

$$\epsilon = \frac{Q_{máx}}{Q_{medio}}$$

Este coeficiente vale para las

— *bombas simplex* $\epsilon_1 = \pi = 3{,}14$

— *bombas duplex* $\epsilon_2 = \dfrac{\pi}{2} = 1{,}57$

— *bombas triplex* $\epsilon_3 = \dfrac{\pi}{3} = 1{,}047$

— *bombas cuadruplex* $\epsilon_4 = \dfrac{1{,}41\,\pi}{4} = 1{,}11$

siendo la bomba *triplex* la que tiene más regularidad de caudal.

PROBLEMAS

26-1. *En este problema se despreciarán las pérdidas y el rozamiento. Una bomba de émbolo de agua de doble efecto tiene un émbolo de 250 mm de diámetro. El diámetro del vástago del émbolo es de 50 mm y sobresale por una parte solamente. La carrera es de 375 mm y la velocidad de giro del cigüeñal es de 60 rpm. La altura de presión negativa de aspiración es 4,5 m c.a. y la de impulsión 18 m c.a.*

Calcular:

a) la fuerza que se requiere para mover el émbolo en las carreras de ida y vuelta;
b) el caudal de la bomba;
c) la potencia absorbida por la bomba.

Area transversal del émbolo, $A = \dfrac{\pi D^2}{4} = \dfrac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4}$

$= 0{,}04909\ \text{m}^2$

Area transversal del vástago, $a = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{\pi \cdot 0{,}050^2}{4}$

$= 0{,}001963\ \text{m}^2$

presión de aspiración (negativa), $p_a = 4{,}5 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 = 44.145\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

presión de impulsión, $p_i = 18 \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 = 176.580\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Al despreciarse el rozamiento del émbolo con las paredes del cilindro, se tendrá:

a) Fuerza que se requiere para mover el émbolo en la carrera de ida, F_1:

Para la aspiración, $F_{1a} = p_a A = 2.167\ \text{N}$

Para la impulsión, $F_{1i} = p_i(A - a) = 8.321\ \text{N}$

Por tanto

$$F_1 = F_{1a} + F_{1i} = 10.488\ \text{N}$$

Fuerza que se requiere para mover el émbolo en la carrera de vuelta, F_2:

Para la aspiración, $F_{2a} = p_a(A - a) = 2.080\ \text{N}$

Para la impulsión, $F_{2i} = p_i A = 8.668\ \text{N}$

Por tanto

$$F_2 = F_{2a} + F_{2i} = 10.748\ \text{N}$$

b) Caudal de la bomba Q:

Caudal en la carrera de ida, Q_1:

$$Q_1 = \frac{Asn}{60} = \frac{A \cdot 0.375 \cdot 60}{60}$$

$$= 0{,}01841\ \text{m}^3/\text{s}$$

Caudal en la carrera de vuelta, Q_2:

$$Q_2 = \frac{(A - a) \cdot 0{,}375 \cdot 60}{60}$$

$$= 0{,}01767\ \text{m}^3/\text{s}$$

Por tanto

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0{,}036079\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$= 36{,}079\ \text{l/s}$$

c) Potencia absorbida por la bomba

Al no haber pérdidas la potencia absorbida será igual a la potencia útil.
Para calcularla, se calculará primero la altura efectiva por la Ec. (19-6), válida también para las bombas de émbolo:

$$H = \frac{p_i}{\rho g} - \frac{p_a}{\rho g} = 18 - (-4{,}5) = 22{,}5\ \text{m}$$

y luego se aplicará la Ec. (26-10):

$$P_a = P = Q\rho g H = 7.963{,}6\ \text{W} = 7{,}9636\ \text{kW}$$

26-2. *En este problema se despreciará el rozamiento. La bomba de émbolo de agua accionada manualmente, representada en la figura, tiene una altura de aspiración de 4 m y una altura de elevación de 30 m. El diámetro del émbolo es 250 mm; el del vástago, 75 mm, y la carrera, 600 mm.*

Calcular:

a) fuerza requerida para levantar y bajar el émbolo;
b) volumen de agua suministrada en las carreras de elevación y bajada del émbolo.

a) Area del émbolo $A_e = \dfrac{\pi \cdot 0{,}250^2}{4} = 0{,}0491\ \text{m}^2$

Area del vástago $A_v = \dfrac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4} = 0{,}0044\ \text{m}^2$

presión de aspiración $p_a = \rho g H_a = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 39.240\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

presión en la impulsión $p_i = \rho g H_i = 1.000 \cdot 9{,}81 \cdot 30 = 294.300\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Fuerza requerida para elevar el émbolo = fuerza requerida para la succión + fuerza requerida para la impulsión, porque ambas se realizan simultáneamente:

Fuerza requerida para la succión en la elevación del émbolo:

$$F_a = A_e\, p_a = 0{,}0491 \cdot 39.240 = 1.926{,}68 \text{ N}$$

Fuerza requerida para la impulsión en la elevación del émbolo:

$$F_i = (A_e - A_v)\, p_i = (0{,}0491 - 0{,}0044)294.300 =$$

$$= 13.155 \text{ N}$$

Fuerza requerida para elevar el émbolo:

$$F_{elev.} = F_a + F_i = 13.155 + 1.926{,}68 =$$

$$= 15.081{,}89 \text{ N}$$

Fuerza requerida para bajar el émbolo (sólo se requiere elevar la presión de la columna de líquido ocupada por el vástago):

$$F_{baj.} = p_i\, A_v = 294.300 \cdot 0{,}0044 =$$

$$= 1.294{,}92 \text{ N}$$

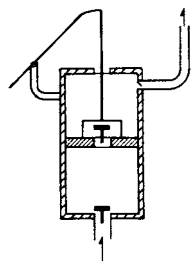
b)

Volumen suministrado en la carrera de subida:

$$V_{elev.} = (A_e - A_v) \cdot s = (0{,}0491 - 0{,}0044) \cdot 0{,}6 = 0{,}0268 \text{ m}^3$$

Volumen suministrado en la carrera de bajada:

$$V_{baj.} = A_v \cdot s = 0{,}0044 \cdot 0{,}6 = 0{,}0026 \text{ m}^3$$



PROB. 26-2

26-3. *Una bomba de émbolo de agua de 150 mm de diámetro y 250 mm de carrera gira a 50 rpm. La presión de aspiración es −0,5 bar y la de impulsión 2 bar. Supóngase un rendimiento en la aspiración del 60 % y en la impulsión del 75 %.*

Calcular:

a) fuerza requerida para mover el émbolo en la aspiración y en la impulsión;
b) potencia útil de la bomba.

26-4. *Una bomba de émbolo se utiliza para elevar agua de un depósito a otro (abiertos ambos a la atmósfera) 40 m más elevado. La pérdida de carga en las tuberías de aspiración e impulsión asciende a 8,5 m.*

Calcular la altura efectiva de la bomba.

26-5. *Un cilindro hidráulico de aceite de simple efecto utilizado como bomba en una transmisión hidráulica efectúa 750 ciclos por minuto, siendo la longitud de cada carrera de 75 mm y produce una elevación de presión de 100 bar. El área del pistón es de 10 cm². En este problema no se tendrán en cuentas las pérdidas.*

Calcular:

a) el caudal;
b) la fuerza recorrida para impulsar el aceite, sin tener en cuenta la aceleración.
c) la potencia de la bomba.

26-6. *El diámetro del cilindro de una bomba de émbolo de simple efecto es 200 mm y la carrera también 200 mm; n = 50 rpm; rendimiento volumétrico, $\eta_v = 0{,}92$.*

Calcular el caudal efectivo de la bomba.

26-7. *El émbolo de una bomba alternativa de simple efecto tiene 150 mm de diámetro, siendo la carrera 300 mm. La bomba, que ha de elevar agua de un depósito a otro cuyas cotas distan 20 m, gira a 50 rpm.*

Calcular:

a) caudal teórico;
b) potencia teórica;
c) caudal efectivo, si el rendimiento volumétrico es 0,95.

26-8. *Una bomba de émbolo suministra un caudal de agua de 30 m³/h. La presión relativa a la salida de la bomba es 3,3 bar y la presión relativa a la entrada es −350 Torr. Diámetro del tubo de aspiración y de impulsión, 125 y 100 mm, respectivamente. Distancia en vertical entre las secciones donde se toman las presiones, 0,8 m.*

Calcular la altura útil de la bomba.

26-9. *Una bomba de émbolo de simple efecto, en la que se despreciarán las pérdidas, es accionada por un motor eléctrico de 750 rpm. La carrera es de 80 mm y el área del pistón 8 cm². La bomba proporciona un incremento de presión de 90 bar.*

Calcular:

a) el caudal de la bomba;
b) la fuerza requerida para mover el émbolo, sin tener en cuenta la aceleración;
c) la potencia de la bomba.

26-10. *Calcular el caudal teórico de una bomba de émbolo de doble efecto que funciona a 200 rpm, si el diámetro del cilindro es de 50 mm y la carrera de 140 mm (despréciese el diámetro del vástago).*

26-11. *Calcular los metros de altura afectiva a que puede impulsar agua la bomba del problema 26-10 por kW suministrado (despréciense las pérdidas).*

27. *Máquinas hidráulicas de desplazamiento positivo: Máquinas rotoestáticas*

27.1. CLASIFICACION

Resumiendo lo ya dicho sobre estas máquinas:

Máquinas rotoestáticas son máquinas de desplazamiento positivo dotadas de movimiento rotativo.

Estas máquinas

— *Se construyen* en inmensa variedad de modelos y continuamente aparecen nuevos tipos. La clasificación de estas maquinas que vamos a dar en esta sección es incompleta. En las dos secciones siguientes nos contentaremos con una breve descripción y teoría de algunos tipos más interesantes que encuentran aplicación continua en la industria de las transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos y en el automatismo (Cap. 28).
— *Se basan* en el *principio del desplazamiento positivo* (Sec. 26.2). Por tanto, aunque tienen movimiento rotativo como las turbomáquinas, el principio hidráulico de funcionamiento es el mismo que el de una bomba de émbolo, y su funcionamiento no se basa en la ecuación de Euler.
— *Constan* de un estator y de un rotor, dotado este último de paletas, émbolos, etc., según el tipo de máquina.
— Son máquinas *hidráulicamente* reversibles, aunque excepcionalmente *mecánicamente* algunas no lo sean.

Se clasifican:

Según el órgano desplazador en:

— Máquinas de émbolos
— Máquinas de engranajes
— Máquinas de paletas

Según la variedad del caudal, sin variar el número de revoluciones:

— Máquinas de desplazamiento fijo
— Máquinas de desplazamiento variable.

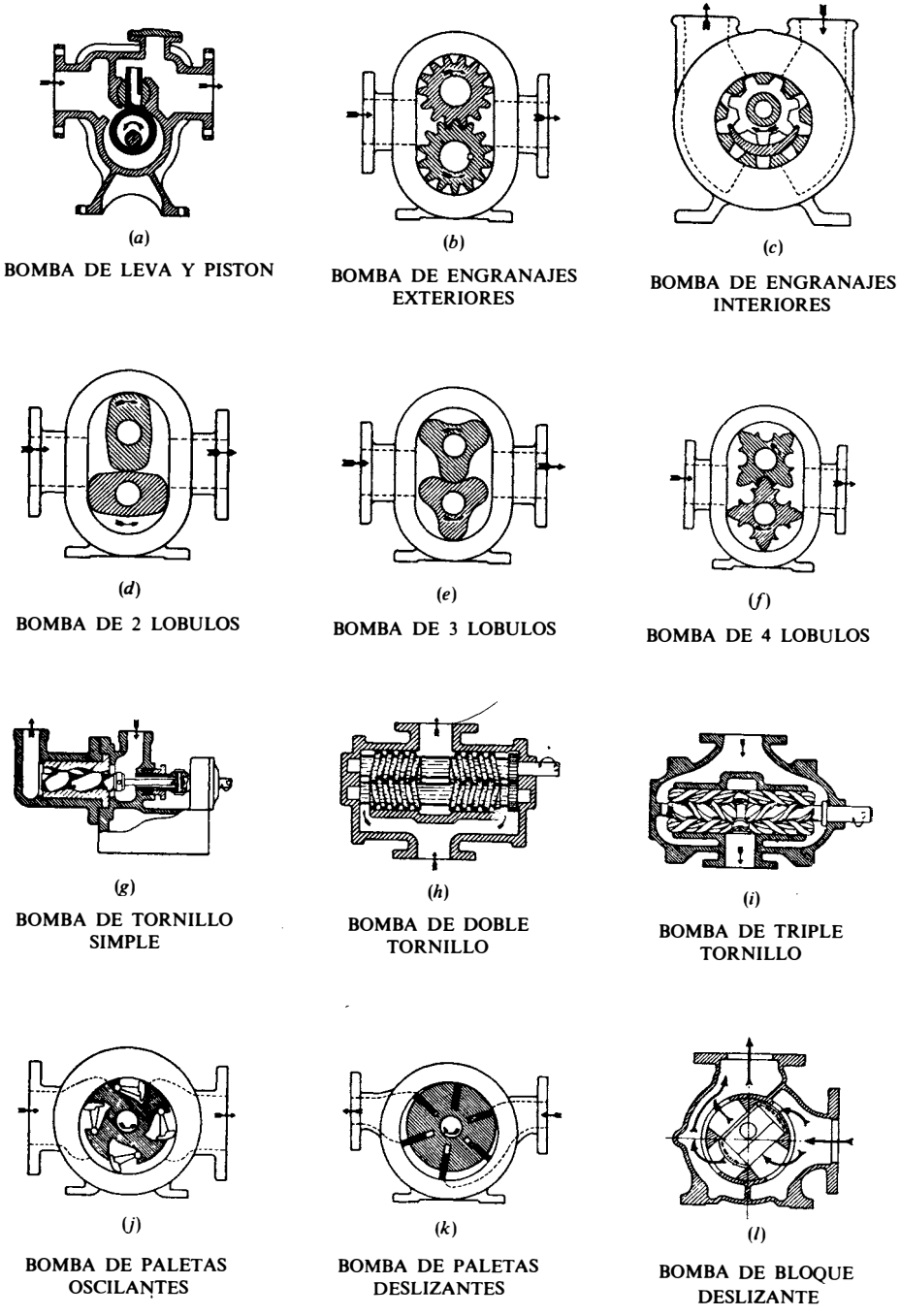


FIG. 27-1. Algunos tipos de *bombas de desplazamiento positivo*. El número de formas de estas bombas (que *fundamentalmente* pueden funcionar como motores) es ilimitado. (*Por cortesía de Hydraulic Institute.*)

Por tanto:

MAQUINAS ROTOESTATICAS	de émbolos	de émbolos radiales	(Fig. 27-2)
		de émbolos axiales	(Fig. 27-5 *a* y *b*)
	de engranajes	de engranajes externos	(Fig. 27-1 *b*)
		de engranajes internos	(Fig. 27-1 *c*)
		de tornillo	(Fig. 27-1 *g*, *h*, *i*)
		de lóbulos	(Fig. 27-1 *d*, *e*, *f*)
	de paletas	*a* — deslizantes	(Fig. 27-1 *k*, *l*)
		b — oscilantes	(Fig. 28-1 *j*)

27.2. DESCRIPCION

Bastará describir aquí algún que otro tipo más importante. Recuérdese que todas estas máquinas pueden funcionar como bomba y como motor.

1. *Máquinas de paletas deslizantes.* En la Sec. 26.3 (Fig. 26-2) ya se describió la máquina de paletas deslizantes, y se vio cómo gracias a la *excentricidad*, la cámara entre el rotor y el estator aumenta y disminuye de volumen. Esta máquina se construye como máquina de *desplazamiento fijo* y como máquina de *desplazamiento variable*. Para variar el desplazamiento basta variar la *excentricidad* del rotor. Si la excentricidad es 0 el desplazamiento es nulo también. Existen unidades que incorporan dos bombas de este tipo conectadas de múltiples maneras con controles automáticos: en paralelo con salida común o distinta; en paralelo pero unidades de distinto caudal; en serie y finalmente con posibilidad de funcionamiento en serie o en paralelo.
2. *Máquina de émbolos radiales* (Fig. 27-2).
   Esta máquina es muy utilizada para trabajo pesado en prensas, maquinaria de acererías, etc., así como en máquinas-herramientas, etc., y se

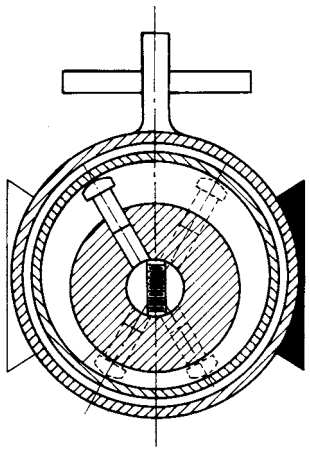


FIG. 27-2. En la *bomba de émbolos radiales* los émbolos están alojados en un rotor que gira excéntricamente. Los émbolos se apoyan en la carcasa fija. Al girar el rotor, los émbolos realizan la aspiración e impulsión.

adapta con facilidad al tipo de desplazamiento variable. Se construyen hasta presiones superiores a 250 bar. Consta de

— *bloque cilíndrico central fijo*, que tiene la forma de la Fig. 27-3: los dos orificios de arriba corresponden, por ejemplo, a la admisión y los dos de abajo a la impulsión; la cruceta central mantiene incomunicadas las dos admisiones de las dos impulsiones.
— *bloque cilíndrico excéntrico* que gira alrededor del anterior. Este bloque tiene un cierto número de cilindros con sus émbolos respectivos.
— *rotor* o anillo que gira arrastrado por las cabezas de los émbolos

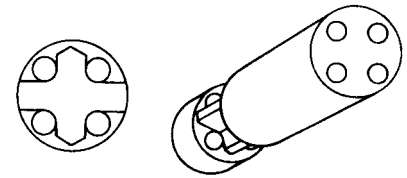


FIG. 27-3. Bloque cilíndrico fijo de una bomba de émbolos radiales en los orificios de aspiración e impulsión.

que se mantienen en contacto con el rotor por la fuerza centrífuga. Al girar el bloque con los émbolos éstos se mueven con movimiento alternativo, con relación al bloque, realizando la aspiración e impulsión.
— *estator*, que en las máquinas de desplazamiento variable, como la de la figura, puede deslizar sobre guías. La Fig. 27-4 indica esquemáticamente cómo al moverse el estator se varía la excentricidad y con ella el desplazamiento, sin que el rotor pierda su alineamiento.

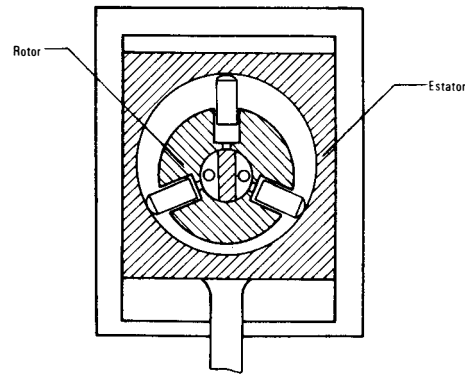
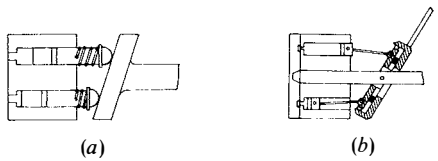


FIG. 27-4. Bomba de émbolos radiales de *desplazamiento variable*. El estator en este esquema es un émbolo que al deslizar empujado por el vástago altera la excentricidad y desplazamiento.

3. *Máquinas de émbolos axiales.* En la Fig. 27-5 *a* puede verse un esquema de una máquina de este tipo de desplazamiento fijo, y en la Fig. 27-5 *b* un esquema de desplazamiento variable. Esta máquina consta de un estator o carcasa en cuyo interior giran el eje con el bloque, donde axialmente están dispuestos los émbolos. El eje se extiende a través del bloque que lleva la placa oscilante montada sobre cojinete de rodillos. Los vástagos de los cilindros están montados con Cardan sobre la placa.



(*a*) (*b*)

FIG. 27-5. Esquema de *bomba de émbolos axiales:* (*a*) bomba de desplazamiento fijo; (*b*) bomba de desplazamiento variable.

La placa oscilante puede girar a ambos lados de la perpendicular al eje. En la figura se ve también dónde está la placa fija que tiene las entradas de presión y de depresión de la máquina. Los émbolos al girar se van poniendo en comunicación con una u otra.

4. *Máquinas de engranajes externos* (Fig. 27-1 *b*, *c*). Las bombas de este tipo encuentran múltiples aplicaciones. Al girar en el sentido de las flechas, en el lado de la admisión siempre hay dos dientes que se separan, creando un vacío, con lo que el líquido penetra en el estator, y es desplazado por los espacios entre los dientes y el estator hacia la impulsión, donde por el contrario siempre hay dos nuevos dientes que engranan y expulsan al líquido. Estas máquinas se utilizan mucho como bombas de combustibles y lubricantes para caudales de 0,3 a 2 m^3/s y presiones de 10 a 20 bar. No se prestan fácilmente a ser utilizadas como máquinas de desplazamiento variable.
5. *Máquinas de lóbulos* (Figs. 27-1 *d*, *e*, *f*). En ellas las ruedas dentadas han sido sustituidas por *lóbulos*, cuya forma no es apta para transmitir el movimiento mecánicamente de un lóbulo al otro; lo cual se consigue con engranajes adicionales en el eje de la bomba, los cuales realizan esta transmisión.

27.3. TEORIA

27.3.1. Teoría de la bomba o motor de paletas deslizantes

En la Fig. 27-1 *k* llamemos:

d — Diámetro interior del estator
d' — Diámetro exterior del rotor
b — Ancho del rotor
e — Excentricidad
z — Número de paletas
δ — Espesor de las paletas.

Consideremos la sección transversal máxima ω entre el rotor y el estator, $\omega = 2eb$, donde $2e$ (doble de la excentricidad) $\cdot\, 2e$ juega papel análogo al de la carrera en una bomba de émbolo. La velocidad media de la paleta será

$$v_p = \frac{\pi(d - e)n}{60} \text{ m/s, } SI$$

Por tanto, despreciando el espesor de los álabes y las fugas, puesto que la velocidad media del líquido coincide con la velocidad del álabe, el caudal teórico Q_t'' será

$$Q_t'' = \omega v_p = \frac{2eb\,\pi(d - e)n}{60} \text{ m}^3/\text{s, } SI$$

y teniendo en cuenta el espesor de las paletas

$$Q_t' = \frac{2eb\,[\pi(d - e) - \delta z]n}{60}$$

y el caudal real, Q:

$$Q = \eta_v \frac{2eb\,[\pi(d - e) - \delta z]n}{60}$$

Esta máquina se suele utilizar para líquidos, como bomba y como motor, y también para gases, como compresor y bomba de vacío.

27.3.2. Teoría de la bomba o motor de engranajes

Esta máquina tiene dos rotores.
En ella el desplazamiento D, o volumen desplazado por revolución es:

$$D = Ab\,2z \text{ m}^3, \; SI \tag{27-1}$$

donde A — área del espacio ocupado por un diente, m^3, *SI*
b — altura del diente, m, *SI*
z — número de dientes.

El caudal útil de la bomba será

$$Q = \eta_v \frac{Dn}{60} = \eta_v \frac{Ab\,2z}{60} n \text{ m}^3/\text{s, } SI \tag{27-2}$$

PROBLEMAS

27-1. *Una bomba de aceite de desplazamiento positivo tiene un desplazamiento de 100 cm^3/rev, funciona a 2.500 rpm y produce un incremento de presión de 10 bar.*

Calcular:

a) el caudal ideal;
b) la potencia de accionamiento ideal.
c) el par motor ideal.

27-2. *Si el caudal calculado en el problema 27-1 se suministra a un motor de aceite cuyo desplazamiento es 50 cm^3/rev,*

Calcular el número de revoluciones de este motor.

27-3. *El estator de una bomba de paletas deslizantes tiene un diámetro interior de 130 mm y el rotor un diámetro exterior de 80 mm y un ancho de 110 mm. La bomba gira a 2.500 rpm.*

Calcular:

a) el caudal ideal despreciando el influjo del espesor de las paletas;
b) el desplazamiento de la bomba.

28. *Transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos*

28.1. INTRODUCCION

Estudiadas en el Cap. 24, las *transmisiones hidrodinámicas*, vamos a estudiar ahora las *transmisiones hidroestáticas*.

Este capítulo es una introducción a la rama de la hidráulica conocida con el nombre de *hidráulica industrial* o *potencia fluida*, que constituye hoy una especialidad importante de la ingeniería.

Los fluidos más comúnmente utilizados en este campo son el *aceite* y el *aire;* el agua también, aunque cada vez menos. Las *transmisiones* y *controles neumáticos* utilizan aire por ser un fluido abundante, que además puede descargarse directamente a la atmósfera. Las *transmisiones* y *controles hidráulicos* utilizan tres clases de fluidos: aceites derivados del petróleo, fluidos sintéticos y agua. Como hemos dicho, ésta se utiliza cada vez menos a fin de evitar la corrosión, falta de lubricación, etc. En los derivados del petróleo se buscan buenas características de viscosidad, resistencia a la emulsión (o propiedad en virtud de la cual se mantiene separado de la humedad), resistencia a la oxidación, poder lubricante, etc. Los aceites derivados del petróleo son inflamables y a grandes presiones explosivos; por lo que, si existe ese peligro, se sustituyen por fluidos hidráulicos sintéticos no inflamables. A veces se utiliza como fluido no inflamable agua con aditivos de glicol y otros anticongelantes inhibidores de corrosión, mejoradores de las propiedades lubricantes, etc. Los fluidos sintéticos son de uso corriente en aviación.

28.2. PRINCIPIO DE PASCAL

La *hidráulica industrial* nace en el siglo XVII con Pascal, que formula su famoso principio:

La presión en un punto de un fluido en reposo es igual en todas las direcciones.

Corolario 1.º: la presión que se ejerce sobre un líquido en reposo en un punto es transmitida por él a todos los puntos sin disminución.

Corolario 2.º: la presión en todos los puntos situados en un mismo plano horizontal de un líquido en reposo es idéntica (véase Sec. 3.1, donde fueron demostrados los dos corolarios anteriores como propiedades de la presión).

La aplicación técnica de este principio físico fue escasa hasta que se resolvió el problema de la estanqueidad de un émbolo en su cilindro, sin cuya solución resultaba imposible trabajar a presiones un poco elevadas.

28.3. BREVE HISTORIA DESDE EL PRINCIPIO DE PASCAL A LAS TRANSMISIONES Y CONTROLES HIDRAULICOS MODERNOS

Las aplicaciones técnicas del principio de Pascal comenzaron unos ciento cincuenta años más tarde cuando el inglés Bramah patentó su prensa hidráulica, en la que introdujo la *empaquetadura* de cuero para conseguir el ajuste del émbolo en el cilindro. Posteriormente al aumentar las presiones de trabajo surgiría de nuevo el problema de la estanqueidad, que encontraría soluciones técnicas más perfectas.

Al invento de Bramah siguió el florecimiento en Inglaterra de las máquinas hidráulicas gigantes.

Medio siglo más tarde, a mediados del siglo XIX, el inglés Armstrong inventó el *acumulador hidráulico*, compañero inseparable desde entonces de las prensas hidráulicas y componente aún muy utilizado en los circuitos hidráulicos y neumáticos. La aplicación de la hidráulica al forjado de los metales data de aquel tiempo.

La hidráulica precedió históricamente a la electricidad en la transmisión de energía a distancia. En Londres, Manchester y otras ciudades inglesas industriales se crearon anteriormente al advenimiento de las centrales hidroeléctricas, centrales de energía hidráulica, que vendían esta energía. La transmisión se hacía a muchos kilómetros de distancia por tubería, por donde circulaba agua a presión que era utilizada para accionamiento de grúas, cabrestantes, prensas hidráulicas, etc. Algunas fábricas e instalaciones portuarias a lo largo del Támesis compraban al menos hasta hace poco (1960) aún esta energía.

La transmisión *a distancia* de potencia se hace hoy día eléctricamente. Aquí tratamos de la transmisión *a corta distancia*, por ejemplo, de un lugar a otro de la misma máquina, o dentro de la misma nave de una fábrica.

A comienzos de siglo se desarrolló en Estados Unidos la bomba de paletas deslizantes (véase Fig. 27-1 *k*) y en Inglaterra la bomba de pistones rotativos de caudal variable. Estos dos inventos iniciaron un desarrollo de componentes hidráulicos y neumáticos con un salto ascensional en la última guerra, a cuya terminación surgieron centenares de fábricas nuevas, revistas especializadas, congresos, etc.

28.4. EVOLUCION DEL ESQUEMA BASICO DE PASCAL AL ESQUEMA DE UNA TRANSMISION HIDRAULICA MODERNA

La evolución de la aplicación del principio básico de Pascal puede verse en los diez esquemas siguientes:

1.º Fig. 28-1: sobre los émbolos de área transversal A_1 y A_2 actúan los pesos W_1 y W_2.

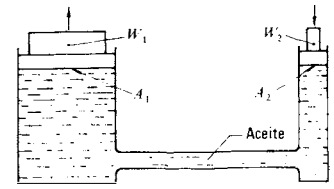


FIG. 28-1. *Principio de Pascal.* Siendo en A_1 y A_2 la presión igual la fuerza sobre W_1 será $\frac{A_1}{A_2}$ veces la fuerza aplicada

Se tiene:

$$p_1 = \frac{W_1}{A_1} \qquad p_2 = \frac{W_2}{A_2}$$

Por el principio de Pascal

$$p_1 = p_2 \tag{28-1}$$

(la diferencia de presiones debida a que los émbolos no estuvieran situados a la misma cota la supondremos despreciable). Luego

$$\frac{W_1}{A_1} = \frac{W_2}{A_2} \qquad \text{y}$$

$$\boxed{W_1 = \frac{A_1}{A_2} W_2} \tag{28-2}$$

Siendo iguales los volúmenes *desplazados* por uno y otro cilindro

$$A_1 l_1 = A_2 l_2$$

se tendrá

$$\boxed{l_2 = \frac{A_1}{A_2} l_1} \tag{28-3}$$

Las Ecs. (28-2) y (28-3) demuestran que la fuerza es directamente proporcional a la relación de las áreas; mientras que el camino recorrido es inversamente proporcional a la misma relación.

2.º Fig. 28-2: La presión p se ejerce más cómodamente mediante una palanca, y utilizando un brazo de palanca largo puede multiplicarse adicionalmente la fuerza aplicada.

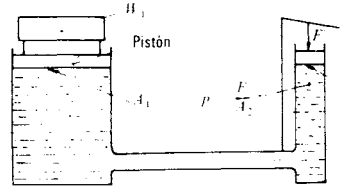


FIG. 28-2. La palanca sobre el émbolo pequeño hace más cómoda la aplicación de la fuerza y permite también su multiplicación.

3.º Fig. 28-3: el cilindro pequeño se sustituye por una bomba hidráulica. Según la Ec. (28-2) para aumentar la fuerza transmitida conviene hacer la relación A_1/A_2 grande; pero entonces, según la Ec. (28-3) la longitud del cilindro menor sería desmesuradamente grande. La bomba de la figura soluciona este problema.

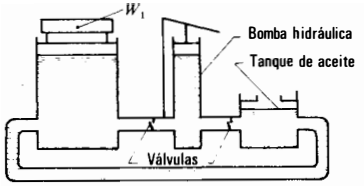


FIG. 28-3. El cilindro pequeño se ha sustituido por una bomba.

4.º Fig. 28-4: la bomba se acciona con un motor.

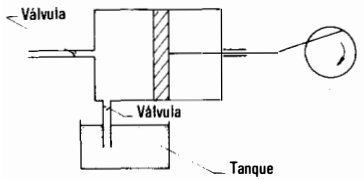


FIG. 28-4. La bomba de mano se ha sustituido por una bomba accionada por motor.

5.º Fig. 28-5: transmisión hidráulica que consta de: bomba accionada por motor eléctrico —circuito de interconexión— motor hidráulico con su carga.

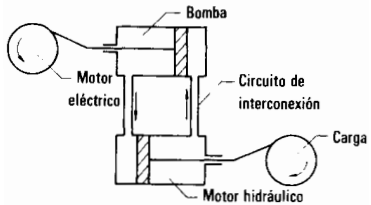


FIG. 28-5. Esquema simplificado de una *transmisión hidrostática*.

6.º Fig. 28-6: *Esquema de circuito con acumulador*.

Con este esquema se puede reducir la dimensión de la bomba: si el motor hidráulico tiene un trabajo intermitente, una bomba pequeña, y por tanto barata, en funcionamiento continuo, almacena energía en el acumulador, que luego cederá al motor hidráulico de mucha mayor

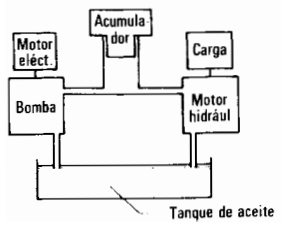


FIG. 28-6. Transmisión hidráulica con *acumulador*. El uso de un acumulador permite reducir el tamaño de la bomba y con ello el coste de la transmisión.

potencia que la bomba, durante su funcionamiento. Así, por ejemplo, en una prensa hidráulica mientras se prepara la pieza la bomba, que funciona continuamente, carga el acumulador, el cual cede luego su energía al pistón de la prensa.

Para estudiar las características de los esquemas siguientes es necesario deducir las dos fórmulas fundamentales de una transmisión hidrostática.

Estas transmisiones utilizan bombas y motores de desplazamiento positivo en los cuales el caudal [véase Ec. (26-3)] es:

$$\boxed{Q = \frac{Dn}{60}} \quad \mathrm{m^3/s},\ SI \qquad (28\text{-}4)$$

(D en m^3 rev; n en rpm)

Si no hay derivación alguna, como en el esquema de la Fig. 28-5, ni pérdidas volumétricas, todo el caudal de la bomba irá al motor. Por tanto, utilizando los subíndices b para la bomba y m para el motor, tendremos:

$$D_m n_m = D_b n_b.$$

Tenemos, pues, la

PRIMERA FORMULA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSMISIONES HIDROSTATICAS

$$\boxed{n_m = \frac{D_b}{D_m} n_b} \qquad (28\text{-}5)$$

En condiciones ideales la potencia mecánica del motor hidráulico es igual a la potencia hidráulica de la bomba, es decir:

$$M_m \omega = Qp = \frac{D_m n_m}{60} p, \qquad \text{o también} \qquad 2\pi M_m n_m = D_m n_m p$$

y despejando p se obtiene la

SEGUNDA FORMULA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSMISIONES HIDROSTATICAS

$$\boxed{p = \frac{2\pi M_m}{D_m}} \qquad (28\text{-}6)$$

7.º Fig. 28-7: *Esquema con válvula de seguridad, bomba y motor de desplazamiento fijo* (véase Sec. 26-3):

La válvula de seguridad evita las sobrepresiones en el circuito descargando el aceite en el tanque. En virtud de la Ec. (28-4) si la bomba gira, como sucede normalmente, a velocidad constante, el motor trabajará también a velocidad constante; y en virtud de la Ec. (28-6) la presión variará directamente con la carga del motor.

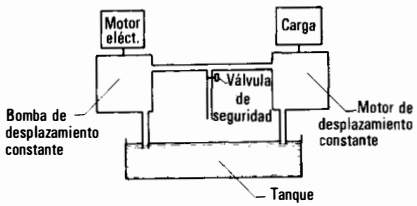


FIG. 28-7. Transmisión hidráulica con bomba y motor de desplazamiento constante.

8.º Fig. 28-8: *Esquema con válvula de seguridad (limitadora de presión), válvula de estrangulamiento, bomba y motor de desplazamiento fijo.*

La *válvula limitadora de presión* es regulable y protege el circuito contra la sobrecarga que pueda producirse en el motor hidráulico, y la válvula de estrangulamiento regula la velocidad del motor. Como la bomba es de desplazamiento fijo el caudal que no va al motor vuelve al tanque por la válvula limitadora de presión. Este circuito es de coste bajo, pero gasta excesiva energía y calienta el aceite hasta el punto que las válvulas al variar la viscosidad del aceite con la temperatura pueden llegar a funcionar mal.

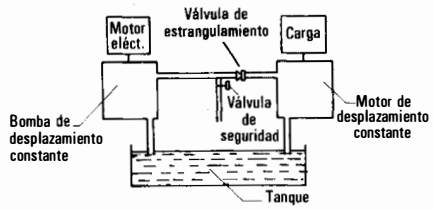


FIG. 28-8. Transmisión hidráulica con válvula limitadora de presión o válvula de seguridad y válvula de estrangulamiento.

9.º Fig. 28-9: *Esquema con bomba de desplazamiento variable y motor de desplazamiento constante.* Variando el desplazamiento de la bomba de cero al máximo la velocidad del motor variará de cero a un máximo. Este máximo, según la Ec. (28-5) valdrá

$$(n_m)_{máx} = \frac{(D_b)_{máx}}{D_m} n_b$$

La presión será proporcional a la carga del motor, según la Ec. (28-6).

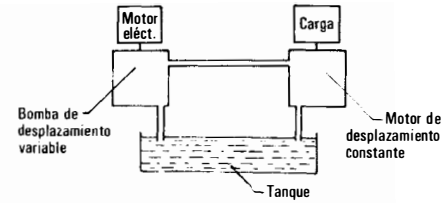


FIG. 28-9. Transmisión hidráulica con bomba de desplazamiento variable y motor de desplazamiento constante.

10.º Fig. 28-10: *Esquema con bomba y motor de desplazamiento variable.* La Ec. (28-5) demuestra que teóricamente este circuito, el más versátil de todos, logra cualquier velocidad en el motor desde cero a infinito.

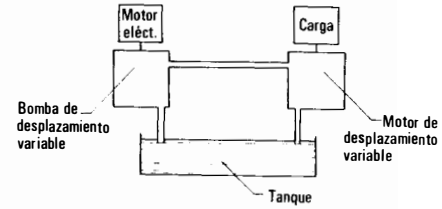


FIG. 28-10. Transmisión hidráulica con bomba y motor de desplazamiento variable.

En la Fig. 28-11 puede verse una bomba moderna seccionada de alta precisión de desplazamiento variable.

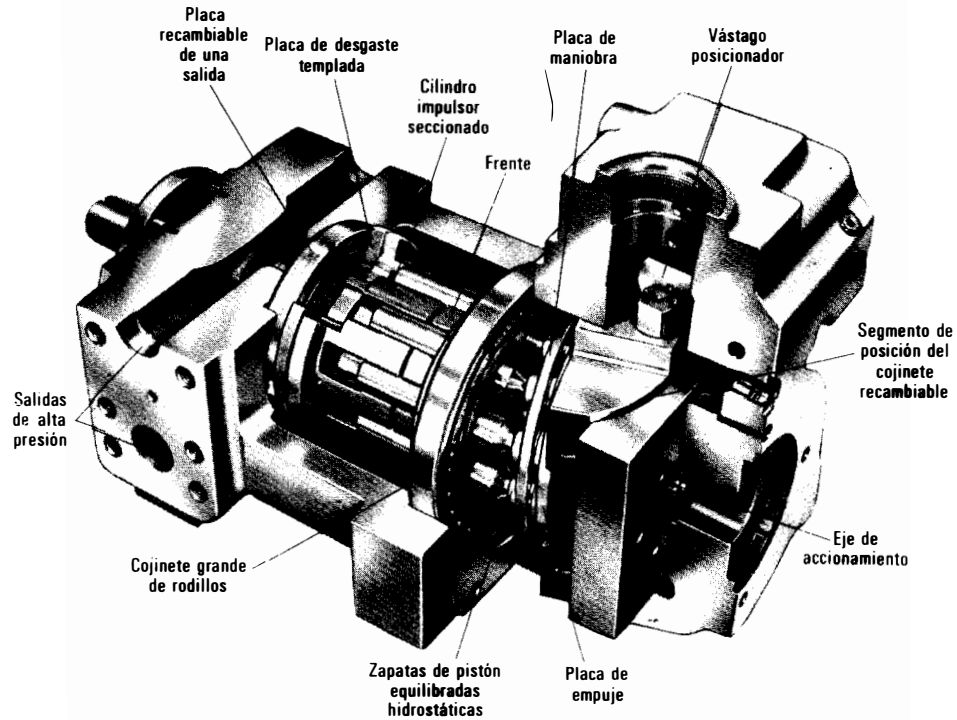


FIG. 28-11. *Bomba* moderna seccionada de alta presión de desplazamiento variable modelo PVL de la firma Oil Gear, U.S.A., construida en tres tamaños hasta una potencia de 299 kW, un caudal de aceite de 477 l/min y una presión de 448 bar.

28.5. COMPARACION ENTRE LAS TRANSMISIONES HIDRAULICAS Y MECANICAS

Cualquier transmisión *a corta distancia* es posible mecánicamente, utilizando palancas, levas, cadenas, correas, engranajes, etc.; pero con mucha frecuencia la *solución hidráulica* es mucho más flexible, y elimina problemas de desgaste, lubricación y averías de los sistemas mecánicos. La transmisión de movimiento, traslacional o rotacional, así como la conversión de uno a otro, no constituye para la hidráulica ningún problema, y la transmisión de potencia de un punto a otro de difícil acceso se logra siempre con una tubería que recorre un camino más o menos tortuoso. El aceite de la transmisión es además lubricante y absorbe choques y vibraciones, con lo que mejora el funcionamiento de la máquina, y aumenta la vida de las herramientas empleadas.

Los aparatos de seguridad que resultan complicados en la *solución mecánica* (embragues, etc.) se reducen a válvulas de seguridad en la *solución hidráulica* (véase Fig. 28-7). La variación continua de velocidad no es problema en hidráulica (véanse Figs. 28-9 y 28-10) y sí lo es en mecánica: con las cajas de velocidades se obtiene variación de velocidad discontinua. Con la *solución hidráulica* es posible la coordinación, temporización y secuencia de movimientos, así como la incorporación de los dispositivos de seguridad y de control adecuados,

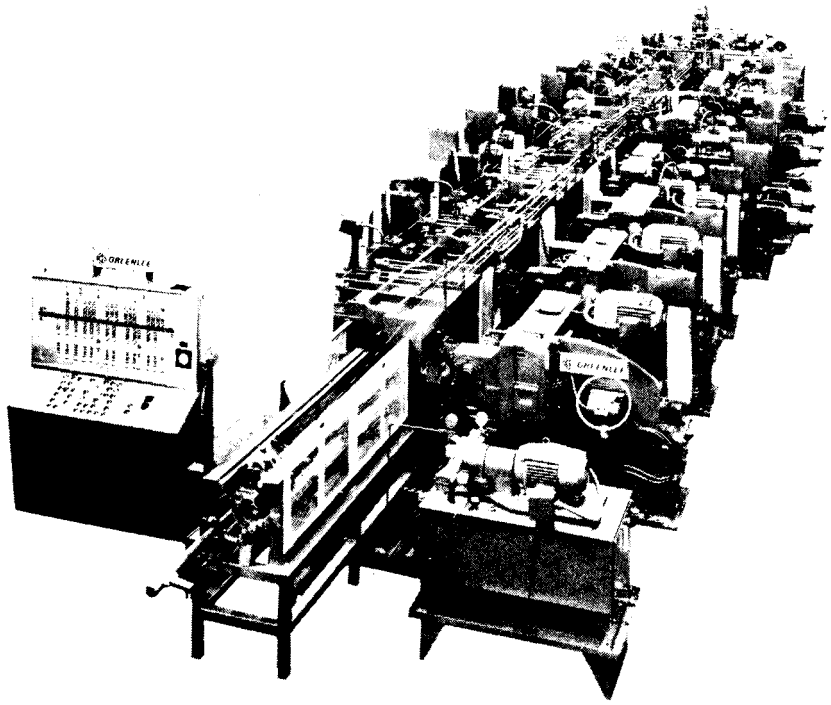


FIG. 28-12. *Máquina transfer* utilizada por la casa Chrysler para la mecanización de los bloques del motor. En estas máquinas se combinan los elementos electrónicos con los hidráulicos y neumáticos para operación totalmente automática. Esta máquina utiliza, por ejemplo, 500 válvulas de control direccional del flujo. *(Por cortesía de Chrysler Corp.)*

es decir, la *automatización* total de procesos industriales. La Fig. 28-12 representa una máquina *transfer* totalmente automática para el mecanizado completo del bloque de un automóvil. En resumen, estas son las

Diez ventajas principales de las transmisiones hidráulicas sobre las mecánicas:

1. Multiplicación fácil de la fuerza, aplicando el *principio de Pascal* [Ec. (28-2)].
2. Transmisión de potencia a distancias grandes y en puntos difíciles.
3. Carencia de desgastes y holguras.
4. Simplicidad y flexibilidad.
5. Autolubricación (incluso el sistema hidráulico puede utilizarse para lubricar toda la máquina).
6. Absorción de choque y eliminación de vibraciones.
7. Prevención simple y segura contra la sobrecarga, pudiéndose preestablecer de antemano la presión máxima de trabajo (véase Fig. 28-7: válvula de seguridad).
8. Velocidad infinitamente variable.
9. Control preciso de la velocidad.
10. Facilidad de realizar ciclos automáticos.

28.6. COMPARACION ENTRE LAS TRANSMISIONES HIDRAULICAS Y ELECTRICAS

Si se sustituye la bomba por un generador, el motor hidráulico por un motor eléctrico y las tuberías por cables, tenemos una transmisión eléctrica.

Además, todo circuito hidráulico tiene su paralelo electrónico, sustituyendo las válvulas hidráulicas por válvulas electrónicas o transistores, etc.

A continuación se exponen las

Tres ventajas principales de las transmisiones hidráulicas sobre las eléctricas:

1. En un *sistema totalmente eléctrico* si falla la corriente el sistema deja de funcionar. En un *sistema hidráulico*, por el contrario, es muy fácil instalar una bomba de emergencia movida a mano o con un motor auxiliar no eléctrico.
2. En un *sistema eléctrico* existe el peligro del fuego, que queda eliminado en el *sistema hidráulico*, si se utilizan fluidos sintéticos no inflamables.
3. En la industria se necesitan a menudo movimientos traslacionales largos (empuje de la caja de un camión para el vuelco de la carga), que pueden conseguirse fácilmente con cilindros hidráulicos o neumáticos y con mucha dificultad eléctricamente (los solenoides son ideales para movimientos cortos: movimiento de la corredera de una válvula, Sec. 28.8.3).

Estas ventajas son decisivas en *aeronáutica*, donde los sistemas hidráulicos, neumáticos y hidráulico-neumáticos accionan timones, alerones, trenes de aterrizaje, etc.

28.7. APLICACIONES

Una mera enumeración, aunque sea incompleta, de los campos de aplicación de la *potencia fluida* bastará para explicar por qué la industria de los controles hidráulicos y neumáticos sigue siendo una industria floreciente en la actualidad:

- *Máquinas-herramientas:* Movimientos de la tabla de fresadoras, etc., avance de la herramienta en tornos automáticos, descenso de los taladros a la pieza, giro de los mismos, amordazamiento y sujeción de las piezas, movimientos diversos de traslación y rotación en tornos, fresadoras, brochadoras, etc. Las máquinas-herramientas modernas, incluso las pequeñas, incorporan frecuentemente controles hidráulicos.
- *Máquinas agrícolas:* Palas mecánicas, cosechadoras, plantadoras, sembradoras, cavadoras, recogedoras, etc.
- *Máquinas de obras públicas:* Máquinas para remover basura, tierras, rocas; para construcción de carreteras, túneles, presas y construcciones portuarias; niveladoras de carreteras, cavadoras, trituradoras, taladradoras de roca, dragadoras, etc. Este, como es sabido, es un campo fecundo de aplicación de la *hidráulica industrial*.
- *Aplicaciones militares:* Los aviones y barcos militares utilizan la hidráulica para el giro de las torretas, apunte de las baterías, accionamientos múltiples de toda clase de dispositivos en los portaaviones, etc. Es triste reconocer que el gran impulso de la industria de los controles hidráulicos tuvo su origen y causa en la última guerra europea.
- *Industria minera:* En las minas modernas se hace hidráulicamente desde la excavación hasta la clasificación, manejo y refinamiento del material. Las trituradoras, clasificadoras, palas mecánicas, grúas, montacargas, etc., incorporan controles y transmisiones hidráulicos.
- *Industria química:* Control remoto de válvulas, control de las puertas de las tolvas, accionamiento de las puertas de descarga en mezcladoras y cámaras de tratamientos, regulación de la presión de los rodillos en las máquinas mezcladoras, empaquetadoras de productos químicos y drogas, etc.
- Finalmente las industrias de la alimentación, del automóvil, de la madera, del papel, de los plásticos; así como las industrias textil, del caucho, artes gráficas, etc., utilizan en multitud de procesos y operaciones semiautomáticas y automáticas, controles hidráulicos y neumáticos.

28.8. VALVULAS HIDRAULICAS

Las válvulas son, después de las bombas y motores, los componentes más importantes de los circuitos hidráulicos, que se estudiarán en la Sec. 28.10.

Las bombas y motores hidráulicos son del tipo de desplazamiento positivo y fueron ya estudiados en los Caps. 26 y 27.

Al estudio de componentes tales como acumuladores, interruptores de presión, filtros, intercambiadores de calor, intensificadores, así como al de las mangueras, conexiones de enchufe rápido, etc., tenemos que renunciar por falta de espacio.

Las operaciones de control múltiples, complejas y automáticas, con temporización y secuencia de operaciones, etc., se consiguen incorporando en el circuito las válvulas más adecuadas, que el proyectista puede escoger entre una variedad inmensa de modelos.

El diseñador de un circuito hidráulico combina de mil maneras estas componentes.

La mayor parte de los circuitos hidráulicos constan de componentes cuyo funcionamiento es fácil de entender. Apenas pasa una semana sin que se introduzca en el mercado una nueva máquina con funcionamiento hidráulico.

En la fabricación de estas componentes y en particular de las bombas, motores y válvulas, éstas son las

Tendencias modernas:

- Aumento de potencia específica de las componentes (importantísimo en la *hidráulica espacial*).
- Aumento de la presión de trabajo a 300 bar y más.
- Aumento de la velocidad de las bombas. Se ha demostrado que el aumento de la potencia específica se consigue mejor aumentando la velocidad de la bomba que aumentando la presión. En aplicaciones espaciales se llega hasta 24.000 rpm y aún más.
- Mejora del equilibrado de las piezas móviles de las válvulas.
- Disminución de las pérdidas volumétricas.

Las tres funciones distintas que pueden realizar pueden servir para la

Clasificación de las válvulas:

- válvulas de control de presión
- válvulas de control de caudal
- válvulas de control de dirección.

28.8.1. Válvulas de control de presión

Citaremos tres clases:

28.8.1.1. Válvulas de seguridad

Limitan la presión del circuito, para protegerlo o para reducir la fuerza o el par ejercido por un cilindro o por un motor rotativo. Suelen ser ajustables, como la representada en la Fig. 28-13, graduando con el tornillo superior la presión del resorte. Si la presión excede el valor establecido se levanta la bola y la línea se pone por el conducto de la derecha en comunicación con el tanque de aceite.

28.8.1.2. Válvulas reductoras de presión

Tienen por objeto limitar la presión en una rama de un circuito a un valor inferior a la presión de trabajo del circuito principal. Permiten que un mismo

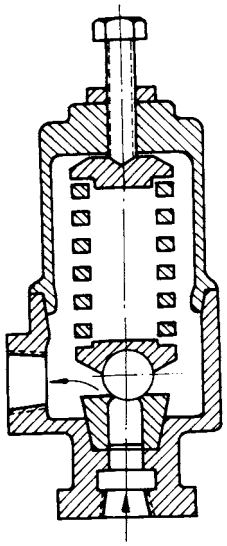


FIG. 28-13. *Válvula de seguridad.*

sistema trabaje a dos presiones con la consiguiente economía en los componentes de la parte de baja presión. Así, por ejemplo, en algunas prensas el cilindro del pistón de la prensa conviene que trabaje a alta presión para reducir sus dimensiones mientras que para amordazar la pieza sólo se necesita baja presión. El funcionamiento de este tipo de válvulas puede verse en el modelo representado en la Fig. 28-14, que lleva dos resortes, uno más fuerte en la parte superior y otro más débil en la base. Este último solamente sirve para mantener el émbolo en posición. El líquido entra en la válvula, según se indica en la figura, desde la línea de alta presión, fluye por debajo y alrededor de la parte estrecha del émbolo y sale por el otro lado de la válvula a la línea de baja presión. La alta presión de la entrada actúa hacia arriba en la superficie inferior del émbolo en *A* y hacia abajo en la superficie lateral de la válvula *B*. Estas superficies son tales que ambas fuerzas se equilibran, con lo que la acción de la válvula es independiente de la presión en la línea de entrada. Esta válvula mantiene una presión constante a la salida, aunque la presión en la línea de entrada sea fluctuante. En efecto, la presión que actúa en la parte inferior del émbolo en *C* actúa contra el resorte

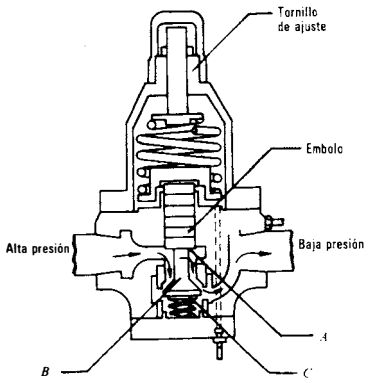


FIG. 28-14. *Válvula reductora de presión.*

superior, el cual se gradúa a la presión que se desee en la línea de baja presión de la válvula; si aumenta la presión en la línea de alta presión, aumenta también la presión debajo del émbolo, con lo que éste se elevará hacia arriba, estrangulando el flujo en la línea de alta presión, de manera que la presión a la salida de la válvula se mantiene en el valor deseado.

28.8.1.3. Válvulas de secuencia

Controlan la sucesión de operaciones entre dos ramas de un circuito; por ejemplo, para que el cilindro que aplica la herramienta a la pieza comience su carrera sólo cuando el cilindro que amordaza la pieza haya terminado la suya. Estas válvulas tienen una entrada de presión y dos salidas: una normalmente abierta y la segunda obturada por la compresión regulable de un resorte. Al no poder salir el aceite, por haber terminado en el ejemplo anterior el primer cilindro su carrera, sube la presión que vence al resorte y permite el paso del aceite al segundo cilindro para que dé comienzo la segunda operación.

28.8.2. Válvulas de control de flujo

Estas válvulas controlan el caudal de aceite y se utilizan en los circuitos para controlar, por ejemplo, la velocidad con que se mueve un cilindro hidráulico. Para controlar el flujo puede servir una válvula de aguja ordinaria. Algunos modelos mantienen el flujo constante independientemente de la presión que reina aguas arriba de la válvula, pues, además del elemento estrangulador ajustable, llevan una válvula reductora de presión. Si la caída de presión en el elemento estrangulador de la válvula es excesiva (flujo demasiado elevado), se reduce el flujo de entrada, porque se eleva el émbolo de la válvula reductora de presión.

28.8.3. Válvulas de control de dirección

A este grupo pertenecen en primer lugar las *válvulas de retención* (Fig. 28-15), cuyo funcionamiento es análogo al de una válvula de seguridad (véase Fig. 28-13),

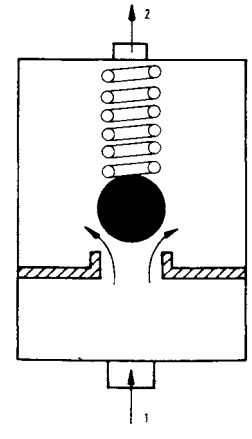


FIG. 28-15. *Válvula de retención.* El flujo siempre es posible de 1 a 2 e imposible de 2 a 1.

y que bloquean el paso del aceite en un sentido; pero no en el sentido contrario. Como se ve fácilmente en el esquema el flujo es siempre posible de 1 a 2; pero no de 2 a 1.

Las restantes válvulas de control de dirección se clasifican, *según que el elemento de cierre tenga movimiento de traslación o de rotación*, en

— válvulas de corredera (Fig. 28-16) y
— válvulas rotativas o rotóricas (Fig. 28-17).

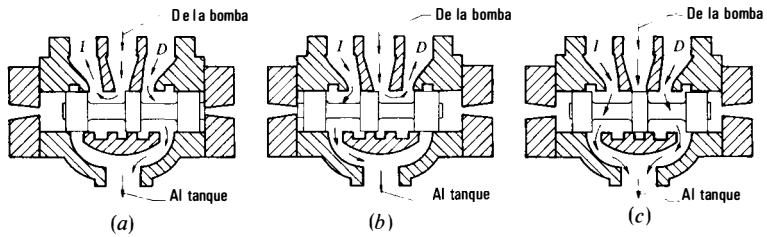


FIG. 28-16. *Válvula de 3 posiciones y 4 salidas* con accionamiento por presión piloto (orificios laterales a ambos lados) 1.ª posición: (*a*) Bomba conectada al extremo izquierdo de un cilindro hidráulico (no dibujado), extremo derecho del cilindro conectado a tanque; 2.ª posición: (*b*) Extremo izquierdo conectado a tanque; bomba conectada a extremo derecho. 3.ª posición: (*c*) Extremos izquierdo y derecho conectados a tanque.

Unas y otras se clasifican a su vez *según el número de posiciones del elemento móvil* y el número de salidas. Así, por ejemplo, la válvula de corredera de la Fig. 28-16 es una *válvula de tres posiciones y cuatro salidas* (Figs. 28-16 *a*, *b* y *c*).

Otro criterio para clasificar tanto las válvulas de corredera como las rotativas es *según el método de accionamiento del elemento móvil: manuales* (accionamiento a mano por palanca, volantes, etc.), *mecánicas* (accionamiento por leva), *eléctricas* (accionamiento por solenoide), etc. Otros accionamientos empleados son: accionamiento por resorte, accionamiento por aceite o aire: *válvulas piloto*. Es frecuente el accionamiento combinado: cierre por resorte y apertura por solenoide, cierre por resorte y apertura por presión piloto de aire, etc.

Las válvulas oleoneumáticas (fluido principal aceite, fluido piloto aire) son muy frecuentes.

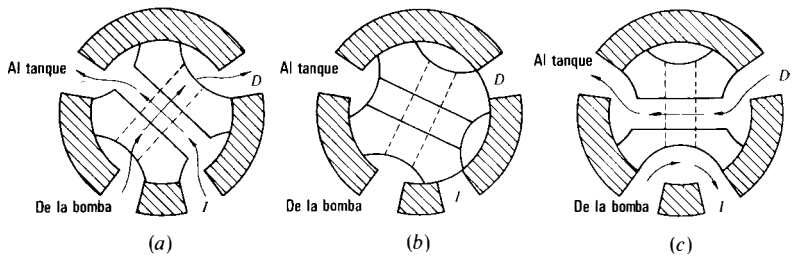


FIG. 28-17. *Válvula rotórica de 3 posiciones y 4 salidas.* Las conexiones son las mismas que en la Fig. 28-16: Bomba, tanque, extremos izquierdo y derecho de un cilindro hidráulico.

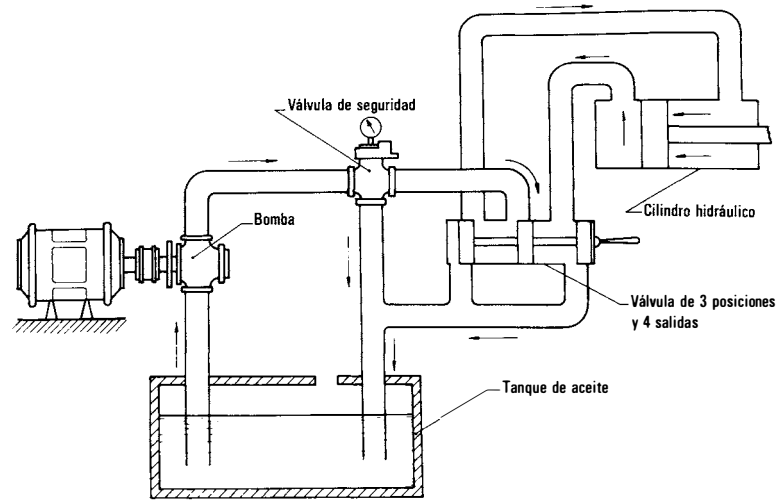


FIG. 28-18. Circuito hidráulico con válvula de 3 posiciones y 4 salidas. La válvula está en la posición de la Fig. 28-16 (*b*).

Finalmente, las válvulas se llaman *normalmente abiertas* o *normalmente cerradas*, según que en su posición normal (por ejemplo si no se aplica a los extremos la presión piloto en la válvula de la Fig. 28-16), esté abierta o cerrada.

En la Fig. 28-18 se ha dibujado un circuito que incorpora la válvula de la Fig. 28-16. Es fácil estudiando ambas figuras entender tanto el funcionamiento del circuito como el de la válvula. En la Fig. 28-18 el cilindro se mueve hacia la izquierda. La válvula se encuentra en la posición de la Fig. 28-16 *a*. La válvula de corredera del circuito es de accionamiento por leva. La de la Fig. 28-16 es de accionamiento por piloto de aire (o aceite). En la Fig. (*a*) la presión de aceite actúa en la izquierda y la válvula está desplazada a la derecha, etc.

En la Fig. 28-17 se ha dibujado una *válvula rotórica* de tres posiciones y cuatro salidas. Esta válvula podría sustituir a la válvula de corredera en el circuito de la Fig. 28-18. Estudiando las Figs. 28-17 *a*, *b*, *c* en conexión con la Fig. 28-18 se entenderá el funcionamiento de esta válvula.

28.9. SIMBOLOS

Con frecuencia los circuitos hidráulicos son muy complejos. El dibujo del circuito en la forma realizada en la Fig. 28-18 es muy laborioso. Para simplificar se utilizan símbolos, algunos de los cuales se representan en la Figura 28-19, recomendados por la ISO, que son prácticamente internacionales.

Así, el circuito de la Fig. 28-20 *a*, para el movimiento de la tabla de una cepilladora se convierte con el uso de estos símbolos en el esquema simplificado de la Fig. 28-20 *b*.

Bomba desplazamiento fijo. Flujo en una dirección.		Válvula control dirección, 3 puertas, 2 posiciones. Control por presión a ambos lados.	
Idem. Flujo en ambas direcciones.		Válvula control dirección, 5 puertas, 2 posiciones. Control por presión en ambos lados.	
Bomba desplazamiento variable. Flujo en una sola dirección.		Válvula estranguladora. Control de dirección.	
Idem. Flujo en ambas direcciones.		Válvula de retención.	
Motor hidráulico desplazamiento fijo. Flujo en una dirección.		Idem. Con resorte.	
Idem. Flujo en dos direcciones.		Válvula de retención con restricción.	
Motor hidráulico desplazamiento variable. Flujo en una dirección.		Válvula de seguridad.	
Idem. Flujo en dos direcciones.		Idem. Con control piloto.	
Cilindro simple efecto sin especificar fuerza de retorno.		Válvula de secuencia.	
Idem. Retorno por resorte.		Acumulador.	
Cilindro doble efecto. Vástago a un lado solamente.		Calentador	
Idem. Vástago a ambos lados.		Control por palanca.	
Válvula control dirección, 2 puertas y dos posiciones. Acciónamiento manual.		Control por resorte.	
Idem. Retorno por resorte.		Control por rodillo.	

FIG. 28-19. Selección de *símbolos ISO* empleados en los circuitos hidráulicos (1).

(1) ISO Recomendation, ISO/K 1219-1970 (F/E). Graphical symbols for hidraulic and pneumatic equipment and accesories for fluid power transmission.

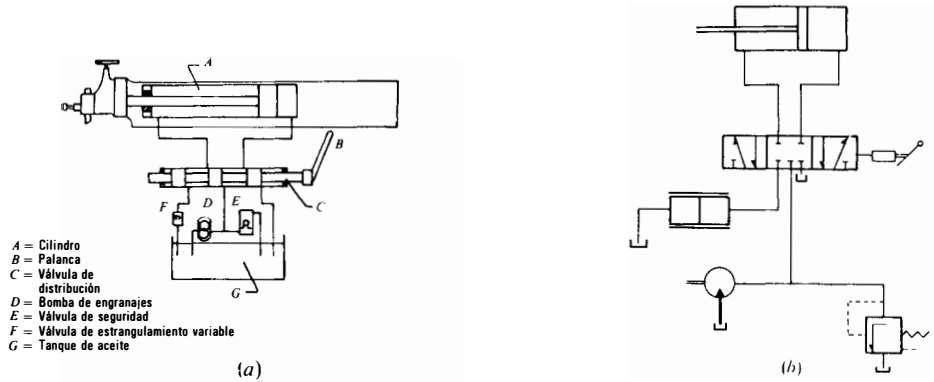


FIG. 28-20. El *esquema hidráulico de una cepilladora* (*a*) se reduce gracias a los símbolos de la Fig. 28-19, al esquema simplificado (*b*).

28.10. CIRCUITOS

Aducimos sólo tres ejemplos que demuestran suficientemente cómo pueden combinarse las componentes hidráulicas para realizar un circuito, con miras a conseguir un fin determinado.

Circuito primero: Control de compuertas-vertedero de un embalse mediante flotador.

El circuito de la Fig. 28-21 es un circuito con acumulador. El flotador 1 gobierna automáticamente las compuertas según el nivel de agua en el embalse. La presión de aceite se consigue mediante una bomba de engranajes movida por un motor eléctrico que funciona intermitentemente. Otra bomba mucho más pequeña de engranajes que funciona continuamente accionada por el eje de la turbina —en este caso una turbina Pelton— compensa las fugas en los cilindros 6, que acabarían por bajar las compuertas. Cuando el nivel es normal las dos válvulas de corredera 5 están cerradas. Es fácil instalar un interruptor accionado por una leva instalada en el acumulador mismo, que para la bomba principal cuando el acumulador se ha cargado. Las compuertas 2 bajan por su propio peso y son elevadas por la presión de aceite que actúa en los cilindros 6. Si, por ejemplo, el nivel del embalse al descender el flotador 1, baja, las correderas 5 de las válvulas 3 bajan también. El aceite entra por los conductos 4 a través de la válvula 3 a los cilindros 6 que empujan a los émbolos 7, los cuales elevan las compuertas. Las palancas 8 realizan la función de servomecanismo, que veremos más adelante (Sec. 29-4): estas palancas accionadas por las compuertas mismas cierran las válvulas de corredera para que no siga entrando aceite y no continúe más allá de lo debido la elevación de las compuertas.

Circuito segundo: Movimiento de un cilindro a dos velocidades.

La doble velocidad en el circuito representado en la Fig. 28-22 se consigue mediante una *válvula de control de flujo* que incorpora en sí una válvula estran-

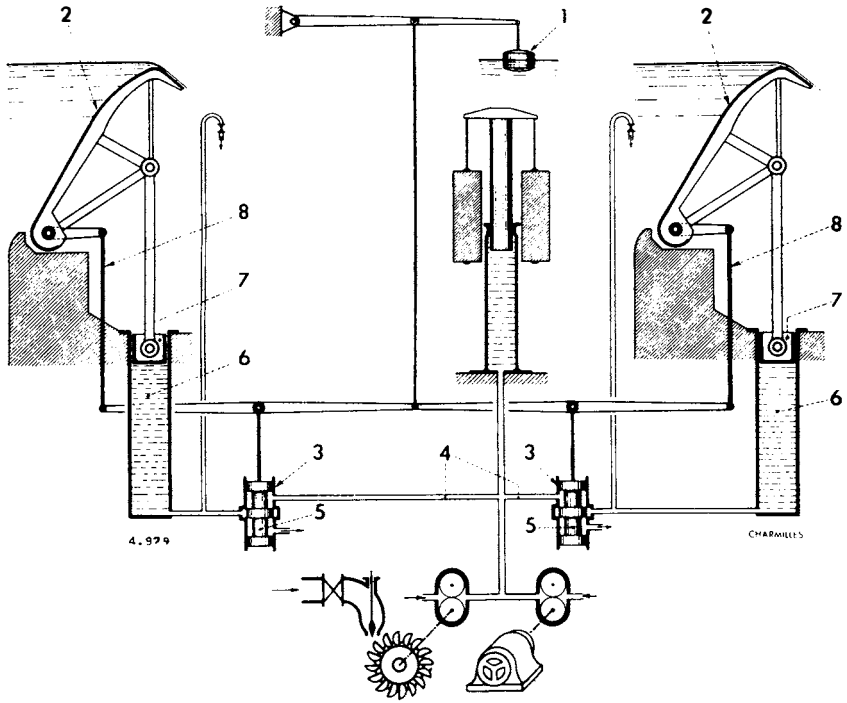


FIG. 28-21. Accionamiento hidráulico por aceite a presión y dos servomotores (6) de dos compuertas del aliviadero de un embalse.

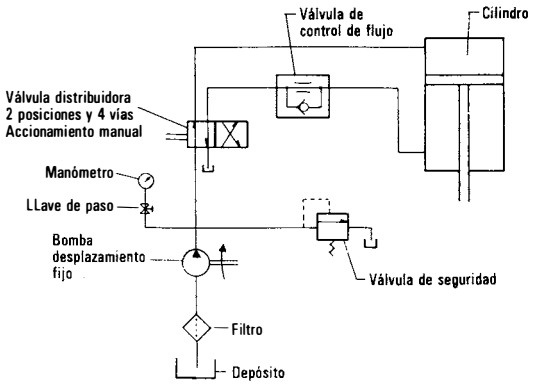


FIG. 28-22. Circuito para movimiento a dos velocidades.

guladora de paso regulable y una válvula de retención. Así se controla la velocidad en una dirección, obligando al fluido a pasar por la válvula estranguladora; manteniéndose flujo libre a través de la válvula de retención (velocidad grande) en la dirección opuesta.

El tanque de aceite con el filtro, motor eléctrico y bomba de desplazamiento fijo o variable, el manómetro con llave de paso y válvula de seguridad que protege el circuito contra las sobrepresiones es normal en estos circuitos, y puede verse repetido en la Fig. 28-23.

Al accionar manualmente la válvula de dos posiciones y cuatro salidas el aceite entra por el extremo ciego del cilindro (parte superior); el cilindro realiza la operación asignada (barnizado, vulcanizado, etc.) a una velocidad regulada por la válvula de control de flujo hasta que se alcanza el fin de carrera del cilindro. Entonces manualmente se acciona la válvula de corredera y el aceite corre libremente a través de dicha válvula; pero por el paso inferior, que es una válvula de retención con paso libre de izquierda a derecha; con lo que, entrando por el lado del vástago del cilindro, obliga a retroceder a éste a gran velocidad, completando así el ciclo.

Circuito tercero: Secuencia de funcionamiento de dos cilindros.

La Fig. 28-23 muestra un circuito muy frecuente en las máquinas-herramientas con el que puede obtenerse esta secuencia. En el circuito el cilindro 1 sirve para amordazar la pieza y el cilindro 2 para realizar la operación. Una vez colocada la pieza el operario manualmente acciona la válvula de corredera de dos posiciones y cuatro salidas, y el aceite a presión entra en el extremo ciego del cilindro 1, saliendo el aceite situado en el otro extremo al tanque a través de la válvula de secuencia 2. El cilindro 1 amordaza la pieza. Cuando éste termina su carrera (la pieza está ya amordazada) la presión va aumentando hasta que se abre la válvula de secuencia 1, y el aceite fluye al extremo ciego del cilindro 2 que realiza el trabajo; mientras que el aceite escapa por el otro extremo del cilindro al tanque, a través de la válvula de corredera. Terminada la operación, el operario vuelve manualmente esta última válvula a su posición primera. El aceite va ahora al extremo del vástago del cilindro 2, mientras desagua por el extremo ciego del mismo cilindro al tanque, a través de la válvula de secuencia 1, con lo que el cilindro 2 retrocede. Entonces la presión se va incrementando hasta que se abre la válvula de secuencia 2 y el aceite va ahora al extremo del vástago del cilindro de sujeción mientras que el extremo ciego del mismo cilindro desagua a través de la válvula de corredera, abriendo las mordazas y dejando libre la pieza. El operario retira la pieza, y queda todo preparado para el ciclo siguiente.

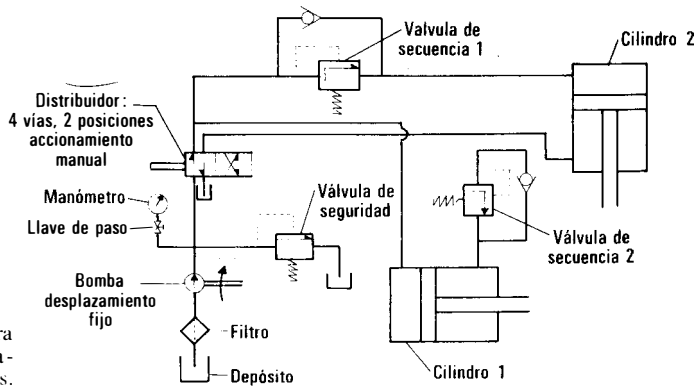


FIG. 28-23. Circuito para secuencia de funcionamiento de dos cilindros.

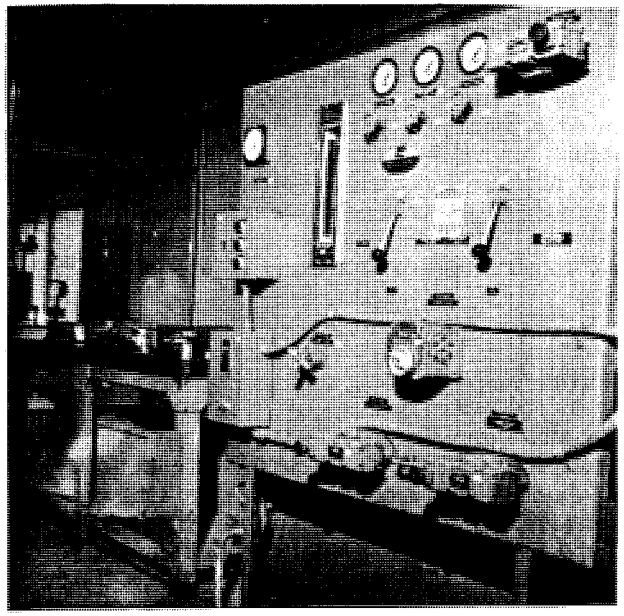


FIG. 28-24. En el *banco Racine de controles hidráulicos* del laboratorio de potencia fluida del L.E.M. del I.C.A.I. se establecen y miden caudales y presiones de aceite hasta aproximadamente 100 bar y se evalúan características de componentes y circuitos hidráulicos cuyo montaje sobre mesa ranurada se facilita también mediante el uso de mangueras de enchufe rápido.

En la Fig. 28-24 puede verse el banco de pruebas de componentes y circuitos hidráulicos del Laboratorio de Potencia Fluida del *LEM* del I.C.A.I.

28.11. AUTOMATISMO

Utilizando válvulas de secuencia (Sec. 28.8.1.3), ejes de levas y válvulas de solenoide y piloto se pueden realizar circuitos automáticos que funcionen con poca o ninguna intervención humana según el siguiente grado de complejidad creciente:

a) *Secuencias de medio ciclo:* una sola acción humana inicia una serie de operaciones *a*, *b*, *c*, ..., *m*, que se suceden precisamente en este orden. Terminada la serie la máquina se para y el sistema no se encuentra en la posición inicial. Es necesaria otra nueva intervención humana para volver al punto de partida. Ejemplo: actuación hidráulica del tren de aterrizaje de un avión con apertura de las puertas inferiores del mismo.

b) *Secuencias de un ciclo:* una sola acción humana inicia una serie de operaciones *a*, *b*, *c*, ..., *m*, en este orden. Terminada la serie la máquina se para y el sistema queda listo para empezar de nuevo; es decir, se ha realizado un ciclo completo. Ejemplo: máquina de moldear a inyección: se cierra el molde, se acerca el inyector, se hace la inyección, se retira el inyector y se abre el molde.

c) *Secuencias de varios ciclos:* una sola acción humana da comienzo por su orden a las operaciones *a*, *b*, *c*, ..., *m*, y después (sin intervención humana) se repite el ciclo de operaciones *a*, *b*, *c*, ..., *m* hasta *n* ciclos. Al cabo de *n* ciclos la máquina se para automáticamente. Al fin del ciclo *n* puede ser necesario descargar la máquina. *Ejemplo:* máquina para efectuar *n* remaches en una rueda; realizándose un ciclo de *m* operaciones en cada remache, y terminando los *n* ciclos cuando la rueda ha dado una vuelta completa; en ese instante la máquina se para automáticamente.

d) *Automatismo completo:* una sola acción humana da comienzo por su orden a las operaciones *a*, *b*, *c*, ..., *m*, y luego, sin intervención humana, se realiza la misma secuencia *a*, *b*, *c*, ..., *m*, y así *indefinidamepte* hasta que la máquina se para por una nueva acción humana. *Ejemplo:* máquina *transfer* de operación automática continua para mecanizado de bloques de motores.

28.12. SERVOMECANISMOS HIDRAULICOS

Una transmisión *controlada humanamente* requiere un operario cuya función es observar el fenómeno, notar cualquier desviación del resultado deseado, y ajustar el control de manera que se obtenga dicho resultado. De esta manera el operario mantiene entre límites lo más estrechos posibles la diferencia entre la *entrada* y la *salida*. Esta diferencia se llama *error*.

Un *servomecanismo* realiza esta función *automáticamente;* es decir, un servomecanismo controla una variable, la *salida*, haciendo que siga fielmente la dirección que le marca otra variable controlada, la *entrada*, midiendo la diferencia entre las dos, el *error*, y haciendo que esta diferencia altere la *salida* de manera que el *error* tienda hacia cero.

Esto se consigue *retroalimentando* mecánica, hidráulica, neumática o eléctricamente el *resultado* a un aparato que lo compara con el resultado que se buscaba, y que automáticamente ajusta el control de manera que el *error* se reduzca a un mínimo. Este lazo de unión entre el resultado y la *señal* dada por medio del proceso de *retroalimentación* es la primera característica esencial

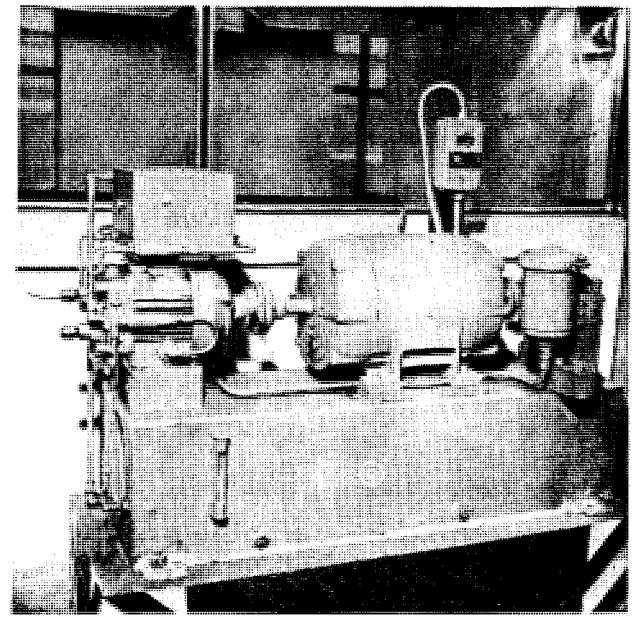


FIG. 28-25. Banco de ensayo de una *servotransmisión electrohidráulica* en el laboratorio de potencia fluida del L.E.M. del I.C.A.I. 1. Sistema electrónico por corriente portadora de alta frecuencia que controla el desplazamiento de la bomba. 2. Bomba de émbolos axiales de desplazamiento variable. 3. Motor eléctrico de accionamiento. 4. Tanque de aceite.

de un servomecanismo. Una segunda característica es la *amplificación* de potencia. Esta amplificación se consigue eléctricamente por medio de válvulas electrónicas e hidráulicamente mediante válvulas hidráulicas. En resumen:

Un servomecanismo es un amplificador de potencia cuyo error está controlado.

Estos dos elementos los hemos visto ya en la Fig. 28-21 (n. 8: servocontrol, y n. 3: válvula amplificadora) y los veremos de nuevo en los esquemas de las Secs. 29.5, 29.6 y 29.7.

Mencionemos finalmente las máquinas-herramientas que utilizan el sistema llamado *control numérico*. El fabricado por la Bendix Aviation Corporation, en Estados Unidos, utiliza una cinta metálica, recubierta de plástico, que resiste el mal trato y puede almacenarse indefinidamente. La preparación o perforación de esta cinta, a partir del dibujo de la pieza que se quiere mecanizar es sencilla, previamente tabuladas las tres coordenadas de un número suficiente de puntos del dibujo. La máquina *lee* la cinta con una célula fotoeléctrica. A la cinta se lleva por el mismo sistema de perforaciones toda la información precisa para el mecanizado más eficiente: velocidades de corte, velocidades de avance, ..., así como tolerancias, etc. Este sistema requiere, por supuesto, un *servomecanismo de retroalimentación* que realice cualquier corrección necesaria automáticamente.

PROBLEMAS

28-1. *Una transmisión hidráulica consta de dos cilindros que actúan uno como bomba y otro como motor*[1] *accionado el primero por un motor eléctrico, y transmitiéndose el trabajo del segundo a un eje que gira por el mecanismo de biela y manivela. Desplazamiento de la bomba, 40 cm³; desplazamiento del motor, 25 cm³; velocidad de la bomba, 1.800 rpm. La bomba trabaja a 35 bar.*

Calcular:

a) velocidad del motor;
b) par de accionamiento de la bomba y par útil en el motor;
c) potencia de entrada en la transmisión y potencia de salida.

a) Aplicando la Ec. (28-5)

$$n_m = \frac{D_b}{D_m} n_b = \frac{40}{25} \cdot 1.800$$
$$= 2.880 \text{ rpm}$$

b) Par de accionamiento de la bomba:

La potencia de accionamiento de la bomba coincidirá con la potencia útil de la bomba si no hay pérdidas, es decir

$$P_{ab} = Qp$$

Por otra parte,

$$Q = \frac{D_d n_b}{60}$$

Luego

$$P_{ab} = \frac{D_b n_b p}{60} = \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 1.800 \cdot 35 \cdot 10^5}{60}$$
$$= 4.200 \text{ W}$$

Además

$$M_b = \frac{P_{ab}}{\omega} = \frac{Qp}{\omega} = \frac{D_b p}{2\pi} = \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot 10^5}{2 \cdot \pi}$$
$$= 22{,}2817 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Par útil en el motor:

$$M_b n_b = M_m n_b$$

ya que, si no hay rozamientos, la potencia útil del motor es igual a la potencia útil de la bomba. Por tanto

$$M_m = \frac{n_b}{n_m} M_b = \frac{1.800}{2.880} \cdot 22{,}2817$$
$$= 13{,}9261 \text{ m} \cdot \text{N}$$

c) La potencia de entrada es la potencia de la bomba, ya calculada,

$$P_{ab} = 4{,}2 \text{ kW}$$

La potencia de salida es la potencia útil desarrollada por el motor, que será:

$$P_{am} = M_m \omega_m = \frac{2\pi n_m M_m}{60} =$$
$$= 4.200 \text{ W} = 4{,}2 \text{ kW}$$

con lo cual se comprueba que $P_{am} = P_{ab}$ en ausencia de pérdidas.

28-2. *En la Fig. 28-2: la carga $W_1 = 1.000$ N; relación de áreas de los émbolos, 100 : 1. La carga es elevada 10 mm.*

Calcular:

a) la fuerza F necesaria para levantar esta carga;
b) recorrido que debería realizar el émbolo más pequeño;
c) trabajo realizado por la fuerza F, que se comparará con el trabajo ejercido sobre la carga W_1.

28-3. *Una bomba de desplazamiento fijo suministra un caudal de aceite a presión de 19 l/min a un cilindro hidráulico o motor de doble acción de 110 mm de diámetro interior y cuyo vástago tiene 50 mm de diámetro.*

Calcular la velocidad del cilindro en la carrera de trabajo y en la carrera de retorno.

(Se supondrá que, como sucede normalmente, en la carrera de trabajo el aceite a presión actúa sobre el lado del vástago.)

28-4. *En una transmisión de bomba y motor de aceite a presión la bomba tiene un desplazamiento de 10 cm³/radián y gira a una velocidad de 1.200 rpm, proporcionando una presión de 30 bar. El desplazamiento del motor es de 20 cm³/rev.*

Calcular:

a) la velocidad del motor;
b) el par de accionamiento de la bomba y el par que proporciona el motor;
c) la potencia de entrada y salida del sistema.

28-5. *El motor eléctrico de accionamiento de un cilindro hidráulico, que trabaja como bomba a una presión de 150 bar, gira a 1.450 rpm desarrollando un par de 100 m · N. El rendimiento total de la bomba es 70 %.*

Calcular el caudal de la bomba.

28-6. *En el esquema de la Fig. 28-2 se limita a 5 mm la carrera del émbolo grande de elevación; W_1 = 100 N y relación de áreas de los cilindros 800 : 1.*

Calcular:

a) fuerza que hay que aplicar en el vástago del émbolo pequeño;
b) recorrido que debería tener el émbolo pequeño;
c) trabajo.

28-7. *El motor de aceite a presión de una transmisión hidroestática tiene un rendimiento volumétrico de 95 % y un rendimiento mecánico de 90 %, gira a 1.000 rpm y absorbe un caudal de aceite de 60 l/min, trabajando a una presión de 150 bar.*

Calcular:

a) el par útil del motor;
b) la potencia útil del mismo.

29. *Regulación de las turbinas hidráulicas*

29.1. INTRODUCCION

La gran mayoría de las turbinas hidráulicas accionan alternadores en las centrales hidroeléctricas. Estos grupos han de girar a velocidad constante, ya que la velocidad del grupo está relacionada con la frecuencia de la corriente por la Ec. (22-8), a saber:

$$n = \frac{60f}{z}$$

y la frecuencia de la corriente debe ser constante (en Europa, 50 cps), exigiendo la tendencia moderna en la utilización de la energía eléctrica una constancia cada vez mayor en la misma. Así un grupo cuyo alternador tenga 20 pares de polos deberá girar (en Europa) a una velocidad de 150 rpm.

Ahora bien, según la 2.ª *ley de Newton*, en el movimiento de rotación,

$$I\alpha = M = M_m - M_r \qquad (29\text{-}1)$$

donde α — aceleración angular
M — suma algebraica de los momentos que actúan sobre el rotor del grupo
M_m — momento motor o momento hidráulico
M_r — momento resistente creciente con la carga.

Según la Ec. (29-1)

— si $M = 0$, $\alpha = 0$ y $n = C$
$M_m = M_r$: el par motor es igual al par resistente;
— si M_r (carga del alternador) disminuye, sin variar, M_m, $M_m > M_r$, $\alpha > 0$, el grupo se acelera. Para evitarlo hay que disminuir el par motor M_m, cerrando el distribuidor de la turbina.

— si M_r (carga del alternador) aumenta, $M_m < M_r$, $\alpha < 0$, el grupo se decelera. Para evitarlo hay que aumentar M_m, abriendo el distribuidor de la turbina.

Regular una turbina es ir cerrando o abriendo el distribuidor siempre que disminuya o aumente la carga a fin de que el grupo gire siempre a velocidad constante.

La regulación puede hacerse *manual o automáticamente*. En los grupos hidroeléctricos, incluso en los pequeños (microcentrales), la regulación suele hacerse siempre automáticamente.

El estudio de la regulación electrónica o electrohidráulica, así como el de la regulación global de una red nacional conectada a las principales centrales eléctricas del país no pertenece a este libro. Aquí trataremos solamente de los problemas fundamentales y esquemas básicos, referentes a la regulación hidráulica de un solo grupo. Este estudio, además de servir de introducción al tema general de la regulación, ayudará a entender multitud de esquemas prácticos realizados en muchas centrales (1).

En los sistemas de regulación automática que vamos a estudiar no es posible mantener una velocidad del grupo rigurosamente constante. Es preciso admitir un *error*, ya que este error es el que se aprovecha para hacer la corrección. Este error relativo se denomina *estatismo*, ϵ, y se define así:

$$\epsilon = \frac{n_v - n_m}{\bar{n}} \qquad (29\text{-}2)$$

donde n_v — velocidad de marcha en vacío o *velocidad máxima;*
n_m — velocidad de marcha en carga máxima o *velocidad mínima;*
$\bar{n} = \frac{n_v + n_m}{2}$ — *velocidad media.*

En los reguladores de las turbinas normalmente $\epsilon < 0{,}04$. En muchos esquemas el estatismo del regulador puede modificarse a voluntad. Cuanto mayor es el estatismo el sistema es más *estable*, pero la marcha del grupo es menos uniforme. La regulación del estatismo es un compromiso entre ambos extremos.

Es fácil conseguir, complicando más el esquema de regulación, además del fin principal, o regulación de la velocidad del grupo, otros fines particulares. Así, por ejemplo, si una central de bombeo de agua fluyente (véase Sec. 21.4.1) consta de dos grupos: una turbina alimentada con el agua del río y otra con el agua de un embalse superior; mediante un esquema de regulación apropiado, se puede conseguir que inicie el funcionamiento la turbina primera y sólo si aumenta la carga, y no es suficiente el caudal del río, la segunda.

(1) Para el estudio de la regulación eléctrica y electrohidráulica, véase C. Mataix, *Turbomáquinas hidráulicas*, Madrid, 1975, Ediciones I.C.A.I., 1.371 págs. (págs. 1079-1104).

29.2. REGULACION TAQUIMETRICA

El cerebro de la *regulación taquimétrica* es el regulador del cual existen muchos tipos, siendo el más conocido el *regulador de bolas* que se representa en la Fig. 29-1. El eje del regulador se mueve en sincronismo con la máquina. Al girar el eje, la fuerza centrífuga hace subir las bolas y estando el manguito del regulador:

— *En la posición 1*, la turbina tiene la carga y velocidad nominal.
— *En la posición 2*, la velocidad de la turbina ha aumentado, porque la carga ha disminuido.
— *En la posición 3*, la velocidad de la turbina ha disminuido, porque la carga ha aumentado.

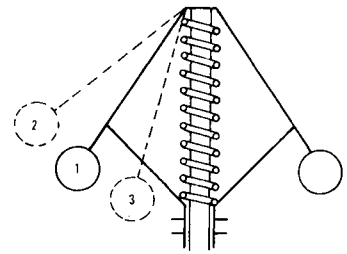


FIG. 29-1. *Regulador* de Watt.

Aunque el regulador de bolas actúa sobre el distribuidor de la turbina, abriéndolo o cerrándolo según los casos, como explicaremos más adelante, repetimos que la turbina no girará siempre a velocidad rigurosamente constante, sino que es preciso admitir un error . Las bolas pueden ocupar cualquier posición entre las dos posiciones extremas de la figura; además, observando el regulador en la central: si las bolas ocupan la posición 1 es señal de que la máquina está trabajando en carga nominal; si ocupan la posición 2 la carga es inferior y si ocupan la posición 3 la carga es superior a la carga nominal.

29.3. REGULACION DIRECTA

Con el esquema de la Fig. 29-2 se comprenderá qué se entiende por *regulación directa*. En la figura la fuerza del manguito actúa directamente, o por medio de una simple articulación, sobre el distribuidor Fink de una turbina de reacción.

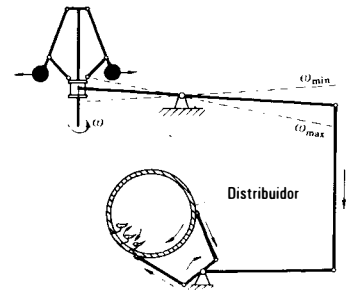


FIG. 29-2. Esquema de *regulación directa*. En la regulación de turbinas hidráulicas este esquema no suele aplicarse porque la fuerza centrífuga de las bolas es insuficiente para accionar el distribuidor: hace falta amplificación.

Este esquema no se aplica jamás a la regulación de las turbinas hidráulicas porque, además de tener otros inconvenientes, la fuerza del manguito del regulador apenas puede alcanzar 5 N, mientras que la fuerza necesaria para accionar el distribuidor muchas veces es del orden de varias decenas de millones de N. Es necesario *amplificar* esta fuerza, lo cual se consigue con la regulación indirecta.

29.4. REGULACION INDIRECTA CON AMPLIFICACION SIN RETROALIMENTACION

El esquema de la Fig. 29-3 tiene una válvula de corredera (véase Sec. 28.8.3) que desempeña el mismo papel que una válvula electrónica amplificadora. En la *regulación indirecta* la débil fuerza del manguito sólo sirve para mover la corredera de esta válvula. La fuerza de maniobra del distribuidor la ejerce un cilindro hidráulico que suele llamarse *servomotor*, porque es un motor hidráulico que forma parte de un servomecanismo cuya energía procede de la presión de aceite creada por un grupo moto-bomba de desplazamiento positivo (véase Sec. (27.3.2) no representado en la figura. Si la carga de la turbina disminuye, se acelera la turbina, suben las bolas del regulador, sube el manguito, baja la corredera de la válvula y entra aceite a presión por la izquierda del émbolo del servomotor, con lo que el distribuidor se cierra y el par motor vuelve a ser igual al par resistente.

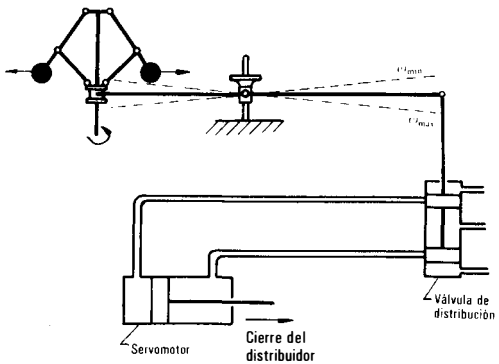


FIG. 29-3. La regulación indirecta sin *retroalimentación* constituye un esquema prácticamente irrealizable.

Este sistema tiene *amplificación;* pero le falta la *retroalimentación* y, por tanto, no constituye un servomecanismo hidráulico, según lo dicho en la Sección 28.12, y siendo al parecer tan sencillo es irrealizable.

En efecto, la Fig. 29-4, que representa las curvas de aceleraciones y de velocidades en función del tiempo que se obtendrían con este esquema de regulación, demuestra la imposibilidad de su aplicación.

Veamos qué sucede cuando tiene lugar una perturbación producida, por ejemplo, al disminuir bruscamente la carga de la turbina.

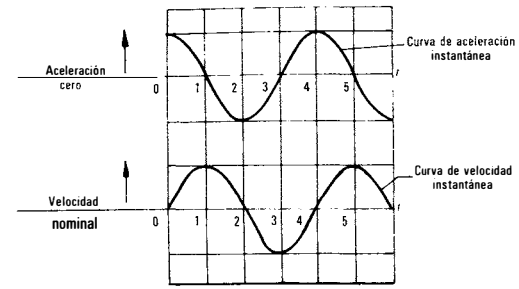


FIG. 29-4. Curvas de la aceleración y velocidad del grupo en función del tiempo. Si el distribuidor está demasiado abierto, la aceleración es positiva, y negativa si está demasiado cerrado. Si la velocidad es mayor o menor que la normal, la válvula de distribución permanece abierta: el esquilibrio es imposible.

Tiempo de régimen permanente anterior a la perturbación

Supongamos que antes de la perturbación las bolas del regulador se encuentran en una posición media y que el émbolo del servomotor en la Fig. 29-3 se encuentra hacia la mitad. El distribuidor deja pasar justamente el caudal que corresponde a la carga nominal de la turbina. (Aceleración cero, velocidad nominal.)

Tiempo posterior a la perturbación

Instante 0: La turbina se queda en este instante sin carga. La aceleración adquiere un valor positivo. La velocidad del grupo va aumentando. Las bolas del regulador suben y la corredera también. El servomotor se desplaza hacia la derecha. El distribuidor se va cerrando. El par motor va disminuyendo. La aceleración va disminuyendo hasta alcanzar en el instante 1 el valor 0.
Instante 1: El grupo se halla momentáneamente en equilibrio: $\alpha = 0$, $M = 0$. El caudal de la turbina es el que corresponde a la carga; pero la corredera sigue moviéndose y el aceite sigue entrando. El servomotor continúa cerrando el distribuidor. El par motor se hace ya menor que el par resistente: la aceleración se hace negativa. La velocidad disminuye hasta alcanzar en el instante 2 el valor inicial; precisamente cuando la aceleración alcanza el valor mínimo.
Instante 2: Observando la curva $n = f(t)$ de la figura se concluye que el regulador está en la posición inicial anterior a la perturbación, y por tanto, la válvula de corredera mandada por él obtura el paso del aceite. Observando, por el contrario, la curva de la aceleración se concluye que el servomotor está demasiado cerrado, que el grupo, por tanto, se decelera, y como consecuencia la velocidad disminuye hasta alcanzar en el instante 3 el valor mínimo.

Es decir, las dos curvas de aceleración y velocidad son curvas sinusoidales; pero la curva de velocidad está retrasada 1/4 de período. Por tanto, al variar la carga nunca coincide un 0 de aceleración (al que corresponde la posición de equilibrio del servomotor: par motor igual a par resistente; entra el agua que necesita la turbina) con el valor inicial de la velocidad. Ahora bien, sólo para el valor primitivo de la velocidad la corredera obtura la válvula; para cualquier otro valor la válvula deja entrar aceite a presión por uno u otro lado del servomotor. El sistema según se dice en estos casos «bombea», es decir, está en oscilación permanente. *El esquema de la Fig. 29-3 es irrealizable.*

29.5. REGULACION INDIRECTA CON AMPLIFICACION Y RETROALIMENTACION: SERVOMECANISMO DE REGULACION

El esquema de la Fig. 29-5 tiene *amplificación y retroalimentación*, es decir, las dos condiciones necesarias para que se dé un *servomecanismo* (véase Sección 28.12). El vástago del servomotor lleva una leva inclinada sobre la cual desliza el rodillo que se mantiene en contacto por el resorte de la figura. Supongamos de nuevo que baja repentinamente la carga. La velocidad aumenta y la corredera de la válvula se moverá hacia abajo al subir el manguito del regulador, ya que el punto A está temporalmente fijo. El servomotor se mueve hacia la izquierda y cierra el distribuidor. Mientras tanto el mecanismo de retroalimentación levanta el punto A. El manguito B ahora actúa como punto de apoyo de la palanca BAC, con lo que el extremo C sube, obturando la válvula de aceite.

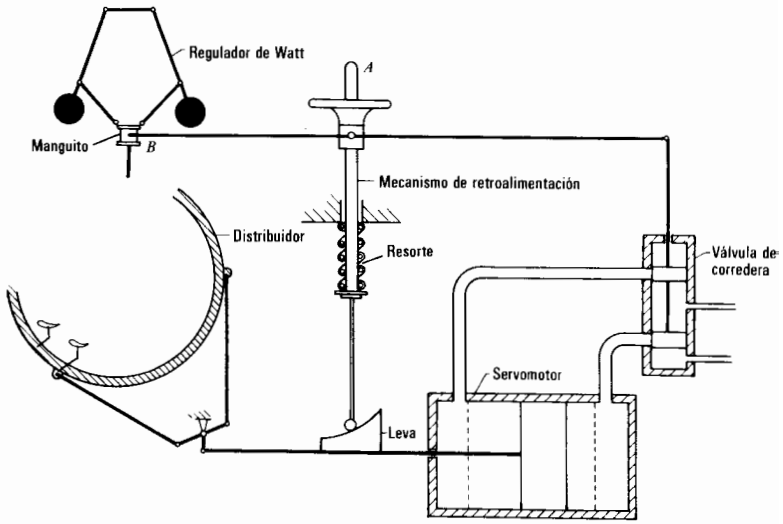


FIG. 29-5. *Regulación indirecta* con amplificación y retroalimentación.

De esta manera la posición de los tres elementos: manguito del regulador, corredera de la válvula y servomotor del distribuidor están coordinados. Por decirlo así, la corredera se abre y se cierra por incrementos, quedando permanentemente obturada la válvula de entrada del aceite a presión cuando el servomotor ocupa la nueva posición de equilibrio correspondiente a la nueva carga, de manera que de nuevo $M = 0$.

En este esquema:

— la corredera puede obturar la válvula para cualquier posición del manguito del regulador, o sea para cualquier carga del grupo. En la Fig. 29-3 la válvula sólo quedaba obturada para una carga.
— a cada carga del grupo corresponde una posición de equilibrio del distribuidor de la turbina y una posición del servomotor.

— a cada carga del grupo corresponde una velocidad de equilibrio del grupo distinta [regulación con error, tanto menor cuanto menor sea el estatismo: Ec. (29-2)] y correspondientemente una posición distinta de las bolas y del manguito regulador.

29.6. REGULACION DE UNA TURBINA DE ACCION

Las turbinas Pelton normalmente tienen *doble regulación:* la del inyector y la del deflector (Fig. 22-2, ns. 2 y 8). Si, por ejemplo, la carga disminuye bruscamente la pantalla deflectora debe bajar instantáneamente para que no se *embale* la turbina [Ec. (29-1): $M_m > M_r$, $\alpha > 0$]; mientras que la válvula de aguja debe cerrar *lentamente* el inyector para que no se produzca el *golpe de ariete* (véase Sec. 22.11.2). Ambos movimientos además han de estar coordinados.

Veamos cómo se realiza esta doble regulación en el esquema de la Fig. 29-6 realizado por la casa Charmilles. Este esquema además de la doble regulación incorpora dos sistemas de seguridad, mandados por las válvulas de aceite A, B y C cuya posición de equilibrio es A_1, B_1 y C_1 y la posición perturbada A_2, B_2, C_2: *si falla la presión de aceite* en el circuito de regulación entran en juego las válvulas A y B, esta última hace bajar el deflector quedando sin par motor la turbina. *Si la velocidad excede un valor máximo* prefijado, entran en juego las válvulas C, A y B, esta última hace bajar el deflector, quedando también sin carga la turbina.

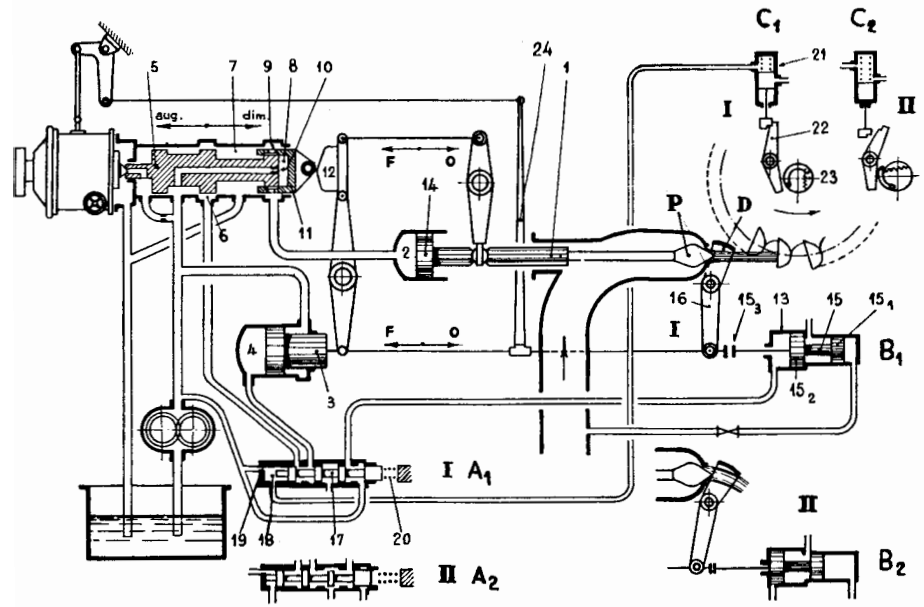


FIG. 29-6. Esquema de *doble regulación hidráulica de una turbina Pelton* realizada por Charmilles, Suiza. El esquema incorpora un doble dispositivo de seguridad: contra el fallo de la presión de aceite y contra el embalamiento de la turbina.

Este esquema tiene una válvula de distribución 5 única para las dos regulaciones. Un servomotor 14 para el movimiento del inyector. Otro servomotor diferencial, 3 (es decir, con émbolo de dos secciones transversales distintas), para el movimiento del deflector. La leva 12 coordina los movimientos de los dos servomotores. La retroalimentación 24 actúa sobre el regulador.

Régimen permanente: a la derecha del émbolo 3 actúa la presión de aceite; pero el émbolo 3 no se mueve, ni el deflector tampoco, porque el aceite que llena el espacio 4 no puede escapar, porque el orificio 6 obtura la salida a través de la válvula de distribución, 5. La válvula de aguja del inyector tampoco se mueve porque, aunque la presión del agua que actúa en 1 tiende a abrir el inyector, para que éste se moviera debería salir el aceite que se encuentra en el espacio 2; pero éste tiene obturada también la salida por la posición que ocupa en este momento la válvula de distribución 5.

Régimen alterado por variación de carga: si, por ejemplo, disminuye bruscamente la carga, aumenta la velocidad y el regulador de velocidad desplaza la corredera del distribuidor 5 hacia la izquierda. El aceite encerrado en 4 logra escapar por 6 y el conducto a la derecha de 6 al tanque de aceite; y el aceite a presión que sigue actuando sobre la cara derecha del cilindro 3 baja instantáneamente el deflector, y *la turbina no se embala.* Por otra parte, el aceite a presión

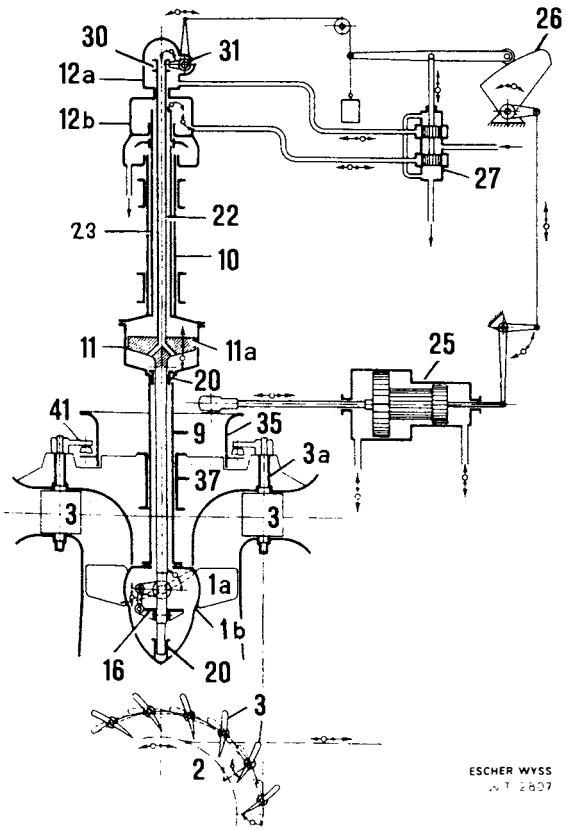


FIG. 29-7. Esquema de la *doble regulación de una turbina Kaplan*, a saber, de los álabes del distribuidor (3) y de los álabes del rodete (1*a*). La leva (26) calculada hidráulicamente busca automáticamente la orientación óptima de los álabes del rodete para cada carga de la turbina (o apertura de los álabes del distribuidor).

de la bomba entra, a velocidad controlada por el orificio estrangulador 10 (que funciona como válvula controladora de flujo o de velocidad: véase Sec. 28.8.2), en la cara izquierda 2 del émbolo 14 y la válvula de aguja *P* se mueve *lentamente* obturando el inyector, con lo cual se ha evitado el *golpe de ariete.*

Fallo de la presión de aceite: A la derecha del émbolo 15_1 de la válvula *B* actúa la presión del agua de la turbina. Si falta la presión de aceite en el punto 18 de la válvula *A* el resorte 20 desplaza la corredera hacia la izquierda, y el espacio a la izquierda del émbolo 15_2 queda en comunicación con el depósito de aceite a través de la válvula *A*, como se ve en la posición A_2. El espacio 4 queda también en comunicación con el tanque a través de la misma válvula *A*, como se ve en la posición A_2. La presión de agua a la derecha de 15_1 desplaza la válvula a la posición B_2 y la pantalla deflectora cae.

Embalamiento de la turbina: En la válvula *C* al aumentar con la velocidad la fuerza centrífuga, ésta supera la compresión del resorte en la polea 23 y se dispara el gatillo en ella embebido moviendo la palanca 22 y desconectando el trinquete, con lo cual el resorte 21 desplaza la corredera a la nueva posición C_2. El punto 18 de la válvula *A* queda sin presión al ponerse en comunicación con el tanque de aceite a través de la válvula *C*, como se muestra en la posición C_2. Estando la válvula *A* de nuevo en la posición A_2, entra en juego, como antes, la válvula *B*, que pasa a la posición B_2, y baja el deflector lo mismo que cuando falla la presión de aceite. El segundo sistema de seguridad está, pues, subordinado al primero.

29.7. REGULACION DE UNA TURBINA DE REACCION

Algunas turbinas Francis tienen *doble regulación:* la del distribuidor y la del orificio compensador (véase Sec. 22.11.2). Otras tienen solamente la regulación del distribuidor. Finalmente, las turbinas Kaplan, como se ve en el esquema de la Fig. 29-7, realizado por Escher Wyss, tienen también una doble regulación: la de los álabes del distribuidor Fink 3 y la de los álabes del rodete 1*a*. Nos contentaremos con explicar la doble regulación de las turbinas Kaplan.

El servomotor 25 mueve los álabes del distribuidor. En la figura se ha omitido el regulador de velocidad, así como la válvula de corredera de este distribuidor. El segundo servomotor 11 alojado en el interior de la misma turbina mueve los álabes del rodete. 27 es la válvula de corredera de este último servomotor. 26 es una leva *calculada hidráulicamente*, que relaciona el movimiento de los álabes del distribuidor, y por tanto la carga de la turbina, con el de los álabes del rodete, para que la turbina funcione siempre con el óptimo rendimiento.

Supongamos que disminuye bruscamente la carga de la turbina. La velocidad tiende a aumentar, el servomotor 25 se desplaza hacia la derecha. El distribuidor 3 se cierra, la leva 26 gira hacia la izquierda. La corredera de la válvula 27 sube, y el aceite a presión entra a través de 27 al *conducto anular interior* concéntrico con el eje de la turbina, y de allí pasando por la cámara 12*a*, a la cara inferior del pistón 11*a*. El aceite que se encuentra encima del émbolo 11*a* puede escapar por el *conducto anular exterior* concéntrico al eje de la turbina y la cámara 12*b* al tanque a través de la válvula 27. El émbolo 11*a* sube y arrastra la cruceta 16, que orienta simultáneamente todos los álabes del rodete, como ya se explicó en la Sec. 22.6.1.

APENDICES

APENDICE 1

TABLAS DE CONVERSION DE UNIDADES DEL ST AL SI Y VICEVERSA

TABLA 1. *UNIDADES DE PRESION*

Unidad	$N/m^2 = Pa$	*bar*	kp/cm^2 = *atm. técn.*	*atm. normal*	*Torr*	*m c.a.*	*mm c.a.* = kp/m^2
1 N/m^2 = Pa	1	10^{-5}	$1{,}01972 \cdot 10^{-5}$	$0{,}98692 \cdot 10^{-5}$	$7{,}55006 \cdot 10^{-2}$	$1{,}01972 \cdot 10^{-4}$	$1{,}01972 \cdot 10^{-4}$
1 bar	10^5	1	1,01972	0,98692	$75{,}5006 \cdot 10^2$	$1{,}1072 \cdot 10$	$1{,}01972 \cdot 10^3$
1 kp/cm^2 = 1 atm. técn.	$0{,}98067 \cdot 10^5$	0,98067	1	0,96784	$7{,}5355 \cdot 10^2$	10	10^4
1 atm. normal	$1{,}01325 \cdot 10^5$	1,01325	1,0332	1	$7{,}60 \cdot 10^2$	$1{,}0332 \cdot 10$	$1{,}0332 \cdot 10^4$
1 Torr	$1{,}3332 \cdot 10^2$	$1{,}3332 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3595 \cdot 10^{-3}$	$1{,}31579 \cdot 10^{-3}$	1	$1{,}3595 \cdot 10^{-2}$	$1{,}3595 \cdot 10$
1 m c.a.	$0{,}98067 \cdot 10^4$	$0{,}98067 \cdot 10^{-1}$	0,1	$0{,}96784 \cdot 10^{-1}$	$7{,}3556 \cdot 10$	1	10^3
1 mm c.a. = 1 kp/m^2	9,8067	$0{,}98067 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	$0{,}96784 \cdot 10^{-4}$	$7{,}3556 \cdot 10^{-2}$	10^{-3}	1

TABLA 2. *UNIDADES DE VISCOSIDAD DINAMICA*

Unidad	*Ns/m² = Pa · s*	*Poise*	*kg/m h*	*kp s/m²*	*kp h/m²*
1 Pa · s = 1 $\frac{Ns}{m^2}$ = 1 kg/ms	1	10	$3{,}600 \cdot 10^{3}$	$1{,}0197 \cdot 10^{-1}$	$2{,}833 \cdot 10^{-5}$
1 Poise	0,1	1	$3{,}600 \cdot 10^{2}$	$1{,}0197 \cdot 10^{-2}$	$2{,}833 \cdot 10^{-6}$
1 kg/mh	$2{,}7778 \cdot 10^{-4}$	$2{,}7778 \cdot 10^{-3}$	1	$2{,}833 \cdot 10^{-5}$	$7{,}868 \cdot 10^{-11}$
1 kp s/m²	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10$	$3{,}5304 \cdot 10^{4}$	1	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$
1 kp h/m²	$3{,}5304 \cdot 10^{4}$	$3{,}5304 \cdot 10^{5}$	$1{,}2709 \cdot 10^{8}$	$3{,}600 \cdot 10^{3}$	1

TABLA 3. *UNIDADES DE VISCOSIDAD CINEMATICA*

Unidad	*m²/s*	*m²/h*	*St = cm²/s*
1 m²/s	1	$3{,}600 \cdot 10^{3}$	10^{4}
1 m²/h	$2{,}7778 \cdot 10^{-4}$	1	2,7778
1 St = 1 cm²/s	10^{-4}	0,36	1

TABLA 4. *UNIDADES DE ENERGIA*

Unidad	*J (Nm, Ws)*	*kp · m*	*kcal*	*kW · h*	*CV · h*	*erg*
1 J (Nm, Ws)	1	0,10197	$2{,}3885 \cdot 10^{-4}$	$2{,}7778 \cdot 10^{-7}$	$3{,}7767 \cdot 10^{-7}$	10^{7}
1 kp · m	9,80665	1	$2{,}3423 \cdot 10^{-3}$	$2{,}7241 \cdot 10^{-6}$	$3{,}70370 \cdot 10^{-6}$	$9{,}8067 \cdot 10^{7}$
1 kcal	$4{,}18684 \cdot 10^{3}$	$4{,}26935 \cdot 10^{2}$	1	$1{,}163 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5812 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1868 \cdot 10^{10}$
1 kW · h	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}67098 \cdot 10^{5}$	$8{,}59845 \cdot 10^{2}$	1	1,35962	$3{,}6 \cdot 10^{13}$
1 CV · h	$2{,}6478 \cdot 10^{6}$	$2{,}7 \cdot 10^{5}$	$6{,}3242 \cdot 10^{2}$	0,7355	1	$2{,}6478 \cdot 10^{13}$
1 erg	10^{-7}	$0{,}10197 \cdot 10^{-7}$	$2{,}388 \cdot 10^{-11}$	$2{,}777 \cdot 10^{-14}$	$3{,}776 \cdot 10^{-14}$	1

TABLA 5. *UNIDADES DE POTENCIA*

Unidad	*W (J/s, Nm/s)*	*kp · m/s*	*kcal/h*	*cal/s*	*erg/s*	*CV*
1 W (J/s, Nm/s)	1	0,1019716	0,859834	0,23884	10^{7}	$1{,}3596 \cdot 10^{-3}$
1 kpm/s	9,80665	1	8,43210	2,34225	$9{,}80665 \cdot 10^{7}$	$1{,}3333 \cdot 10^{-2}$
1 kcal/h	1,163	0,118593	1	0,277778	$1{,}163 \cdot 10^{7}$	$1{,}5812 \cdot 10^{-3}$
1 cal/s	4,1868	0,42693	3,6	1	$4{,}1868 \cdot 10^{7}$	$5{,}69237 \cdot 10^{-3}$
1 erg/s	10^{-7}	$0{,}10197 \cdot 10^{-7}$	$8{,}59838 \cdot 10^{-8}$	$0{,}23884 \cdot 10^{-7}$	1	$1{,}3596 \cdot 10^{-10}$
1 CV	$7{,}35499 \cdot 10^{2}$	75	$6{,}3241 \cdot 10^{2}$	$1{,}7566 \cdot 10^{9}$	$7{,}35499 \cdot 10^{2}$	1

APENDICE 2

PREFIJOS EN EL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Factor	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

APENDICE 3

TABLA DE CONVERSION DE LOS SISTEMAS METRICOS (SI Y ST) AL SISTEMA ANGLOSAJON Y VICEVERSA

Métrico – Anglosajón / *Anglosajón – Métrico*

Longitud

1 mm	= 0,0394	in.	1 in.	= 25,3995	mm
1 m	= 3,2809	ft.	1 ft.	= 304,7945	mm
1 m	= 1,0936	yds.	1 yd.	= 0,9144	m
1 m	= 0,1988	US. rd.	1 US. rd.	= 5,0292	m
1 km	= 3.280,8992	ft.	1 milla terrestre	= 1,6093	km
1 km	= 1.093,6331	yds.	1 milla marítima	= 1,8532	km

1 US. rod = 5,5 yards

Superficie

1 cm^2	= 0,1550	sq. in.	1 sq. in.	= 6,4514	cm^2
1 m^2	= 0,7643	sq. ft.	1 sq. ft.	= 928,9968	cm^2
1 m^2	= 1,1960	sq. yds.	1 sq. yd.	= 0,8361	m^2
1 km^2	= 0,3861	sq. miles	1 sq. mile	= 2,5899	km^2
			1 square foot	= 144	square inches
			1 square yard	= 9	square feet

Nota:
inch. = in. foot = ft. yards = yds. rod = rd. Square = sq. Gallon = gal. Register-ton = R. t. quart = qt. pint = pt. (USA = US. Británico = Imp.)

APENDICE 3 (continuación)

Métrico – Anglosajón / *Anglosajón – Métrico*

Volumen

1 cm^3	= 0,610	cu. in.	1 cu. in.	= 16,3861	cm^3
1 m^3	= 15,3166	cu. ft.	1 cu. ft.	= 28,3153	l
1 m^3	= 220,0970	Imp. gal.	1 Imp. gal.	= 4,5435	l
1 m^3	= 264,2000	US. gal.	1 US. gal.	= 3,7850	l
1 m^3	= 0,3531	R. t.	1 R. t.	= 2,8317	m^3
1 l	= 1,0567	US. qt.	1 US. qt.	= 0,9464	l
1 l	= 2,1164	US. pt.	1 US. pt.	= 0,4732	l
1 l	= 0,8799	Imp. qt.	1 Imp. qt.	= 1,1365	l
1 l	= 1,7596	Imp. pt.	1 Imp. pt.	= 0,5683	l
			1 US. Oil-Barrel	= 158,98	l

Masa

1 g	= 15,4323	gr.	1 gr.	= 0,0648	g
1 g	= 0,5644	dr.	1 dr.	= 1,7718	g
1 g	= 0,0353	oz.	1 oz.	= 28,3495	g
1 kg	= 2,2046	lbs.	1 lb.	= 0,4536	kg
1 t	= 1,1023	sh. tn.	1 sh. tn.	= 0,9072	t
1 t	= 0,9843	l. tn.	1 l. tn.	= 1,0160	t.

Densidad

1 kg/m^3	= 0,0624	lbs/cu. ft.	1 lb/cu. ft.	= 16,0194	kg/m^3
1 kg/dm^3	= 0,0361	lbs/cu. in.	1 lb/cu. in.	= 27,6799	kg/dm^3
1 g/cm^3	= 10,0220	lbs/Imp. gal.	1 lb/Imp. gal.	= 0,0998	g/cm^3
1 g/cm^3	= 8,3472	lbs/US. gal.	1 lb/US. gal.	= 0,1198	g/cm^3

Fuerza

1 N	= 0,2248	lbf.	1 lbf.	= 4,4482	N
1 N	= 7,2307	pdl.	1 pdl.	= 0,1383	N
1 kp	= 2,2046	lbf.	1 lbf.	= 0,4536	kp

1 poundal (pdl.) = 0,0311 poundforce (lbf.)
1 short ton force = 2.000 lbf. = 8.896,4 N

Velocidad

1 m/s	= 3,2809	ft./s	1 ft./s	= 0,3048	m/s
1 m/s	= 196,8540	ft./min.	1 ft./min.	= 0,0051	m/s
1 km/h	= 0,6214	MPH.	1 MPH.	= 1,6093	km/h

Nota:
grain = gr. dram = dr. ounce = oz. poundmass = lb. poundforce = lbf. short ton = US.-ton = sh. tn. long ton = l. tn. cubic = cu. poundal = pdl. miles per hour = MPH.

APENDICE 3 (continuación)

Métrico – Anglosajón			*Anglosajón – Métrico*		
		Presión			
1 N/m^2	=	0,0209 lbf./ft.^{2}	1 lbf./ft.^{2}	=	47,8816 N/m^2
1 N/m^2	=	$1{,}45 \cdot 10^{-4}$ lbf./in.^{2}	1 lbf./in.^{2}	=	6.894,76 N/m^2
1 bar	=	14,5053 p.s.i.	1 p.s.i.	=	$6{,}8947 \cdot 10^{-2}$ bar
1 kp/cm^2	=	14,2248 p.s.i.	1 p.s.i.	=	0,0703 kp/cm^2
1 kp/m^2	=	0,2048 lbf./ft.^{2}	1 lbf/ft.^{2}	=	4,8828 kp/m^2
1 kp/m^2	=	$39{,}371 \cdot 10^{-2}$ in. of H_2O	1 in. of H_2O	=	2,5399 kp/m^2
1 kp/m^2	=	$2{,}906 \cdot 10^{-2}$ in. of Hg	1 in. of Hg	=	34,4160 kp/m^2
		Trabajo, Energía			
1 J	=	0,7376 ft. lbs.	1 ft. lb.	=	1,3558 J
1 J	=	$9{,}4782 \cdot 10^{-4}$ BTU.	1 BTU.	=	1.055,06 J
1 J	=	$3{,}7251 \cdot 10^{-7}$ HPh.	1 HPh.	=	$2{,}6845 \cdot 10^{6}$ J
1 kWh	=	1,3410 HPh.	1 HPh.	=	0,7457 kWh.
1 kpm	=	7,2330 ft. lbs.	1 ft. lb.	=	0,1383 kpm
1 kpm	=	$9{,}2949 \cdot 10^{-3}$ BTU.	1 BTU.	=	107,5859 kpm
		Potencia			
1 W	=	0,7376 ft. lbs/sec.	1 ft. lbs/sec.	=	1,3558 W
1 kW	=	1,3410 HP	1 HP	=	0,7457 kW
1 kW	=	0,9478 BTU./sec.	1 BTU./sec.	=	1,0551 kW
1 CV	=	0,9863 HP	1 HP	=	1,0139 CV
1 kcal/s	=	3.088,02 ft. lbs/sec.	1 ft. lbs/sec.	=	$3{,}2383 \cdot 10^{-4}$ kcal/s

Temperatura

$$X\ (°C) = \left(\frac{9}{5}X + 32\right)\ (°F) \qquad Y\ (°F) = \frac{5}{9}\,(Y - 32)\ (°C)$$

Selección de constantes de conversión

$$4{,}448\ \frac{N}{lb_f} = 1 \qquad 0{,}3048\ \frac{m}{ft} = 1 \qquad 0{,}4536\ \frac{kg}{lb_m} = 1$$

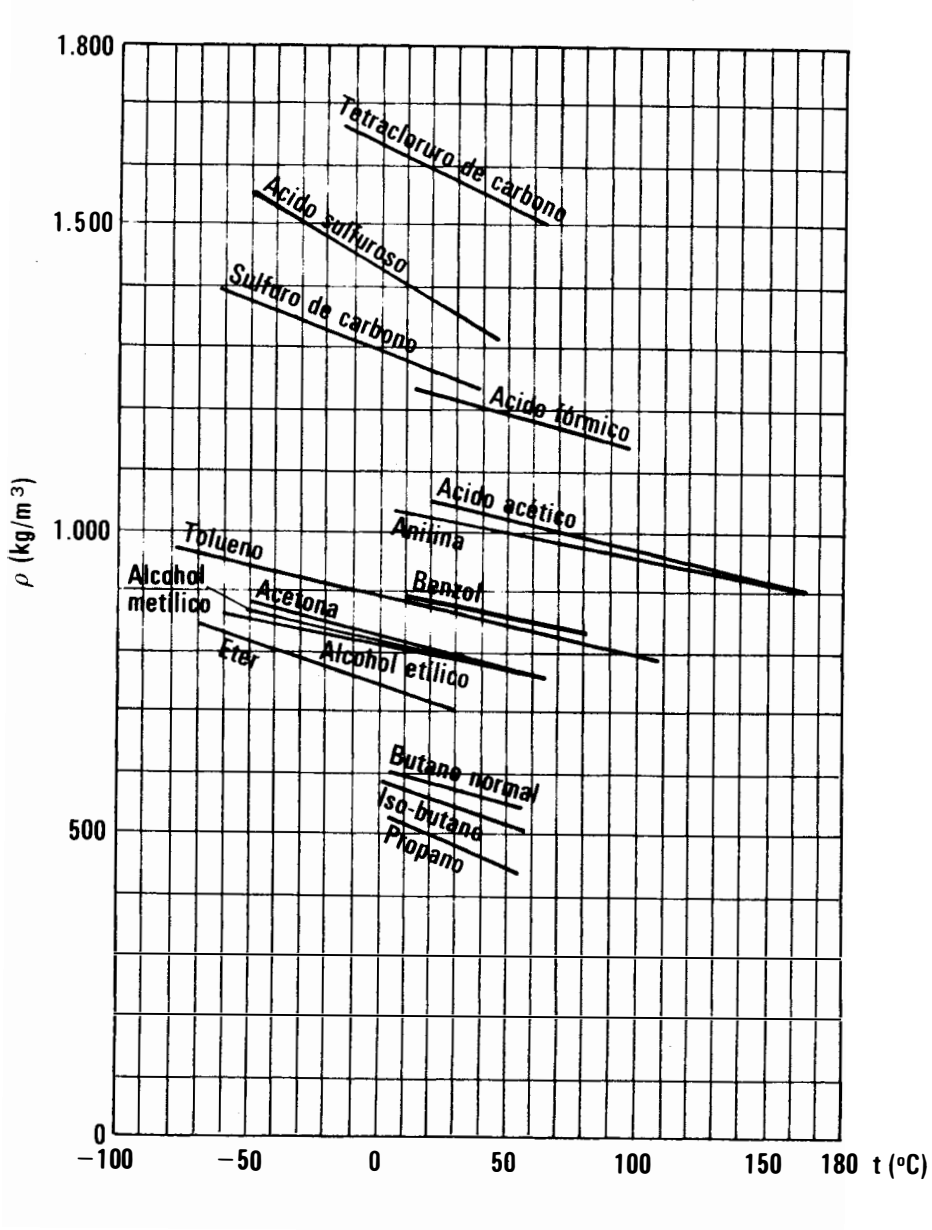
$$14{,}594\ \frac{kg}{slug} = 1 \qquad 6.894{,}76\ \frac{N/m^2}{/in.^2 lb} = 1 \qquad 32{,}174\ \frac{lb_m}{slug} = 1$$

$$448{,}83\ \frac{gal\ US./min}{ft^3/s} = 1$$

Nota:
poundforce per square inch = p.s.i. British Thermal Unit = BTU. Horsepower = HP.

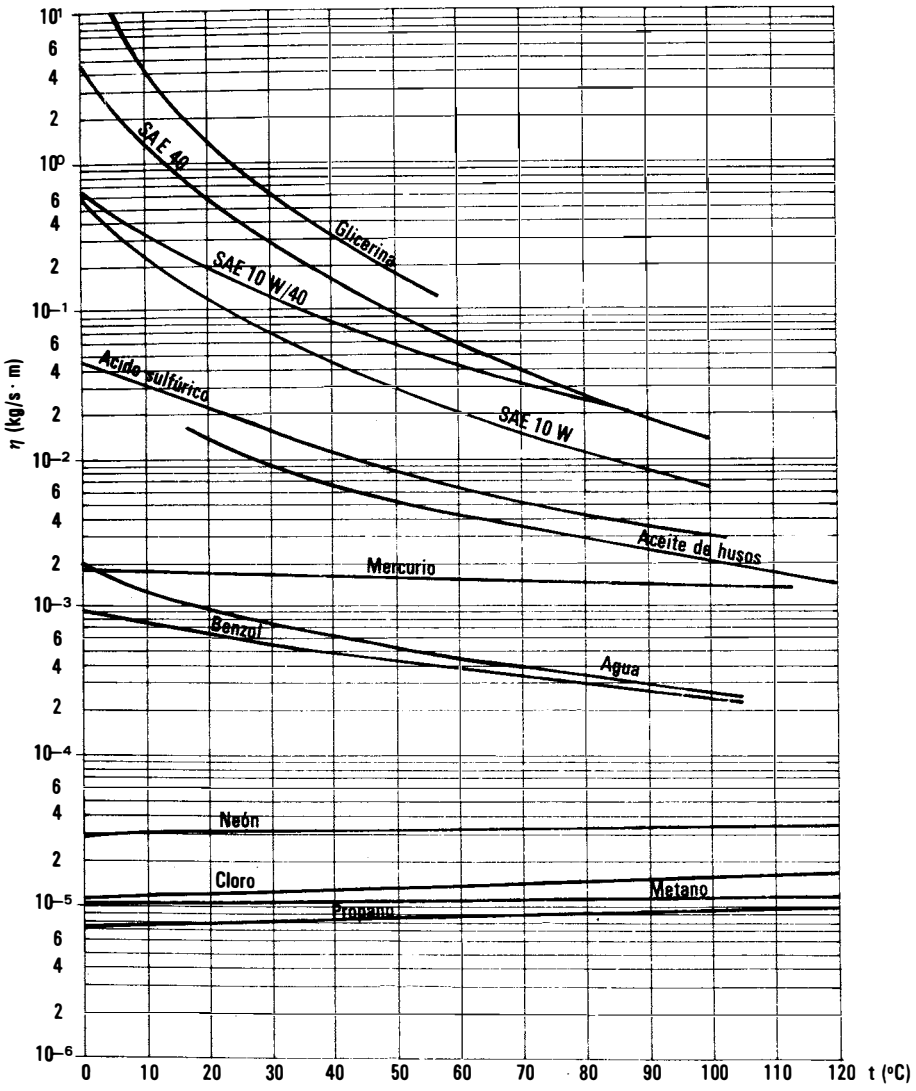
APENDICE 4

DENSIDAD DE ALGUNOS LIQUIDOS EN FUNCION DE LA TEMPERATURA



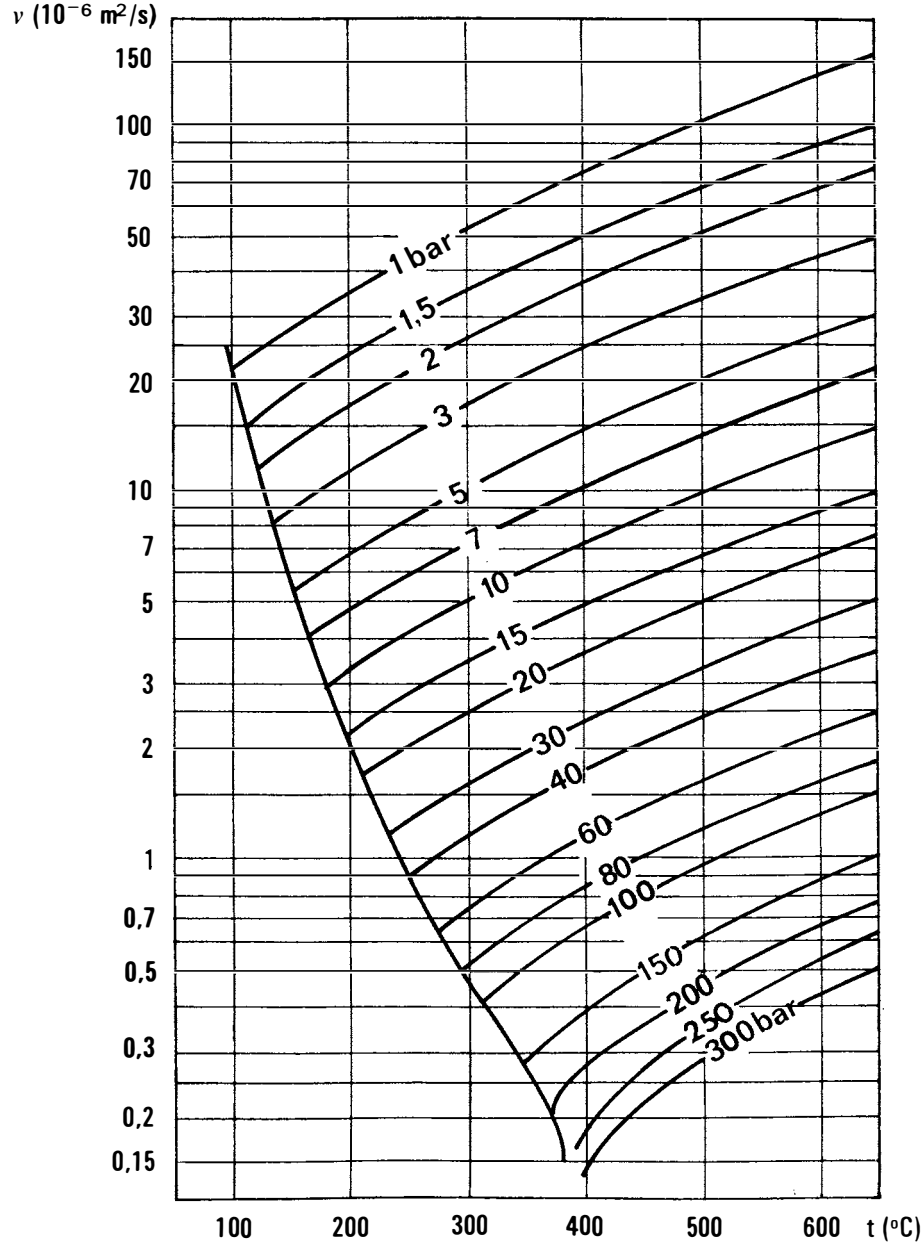
APENDICE 5

VISCOSIDAD DINAMICA DE ALGUNAS SUSTANCIAS EN FUNCION DE LA TEMPERATURA



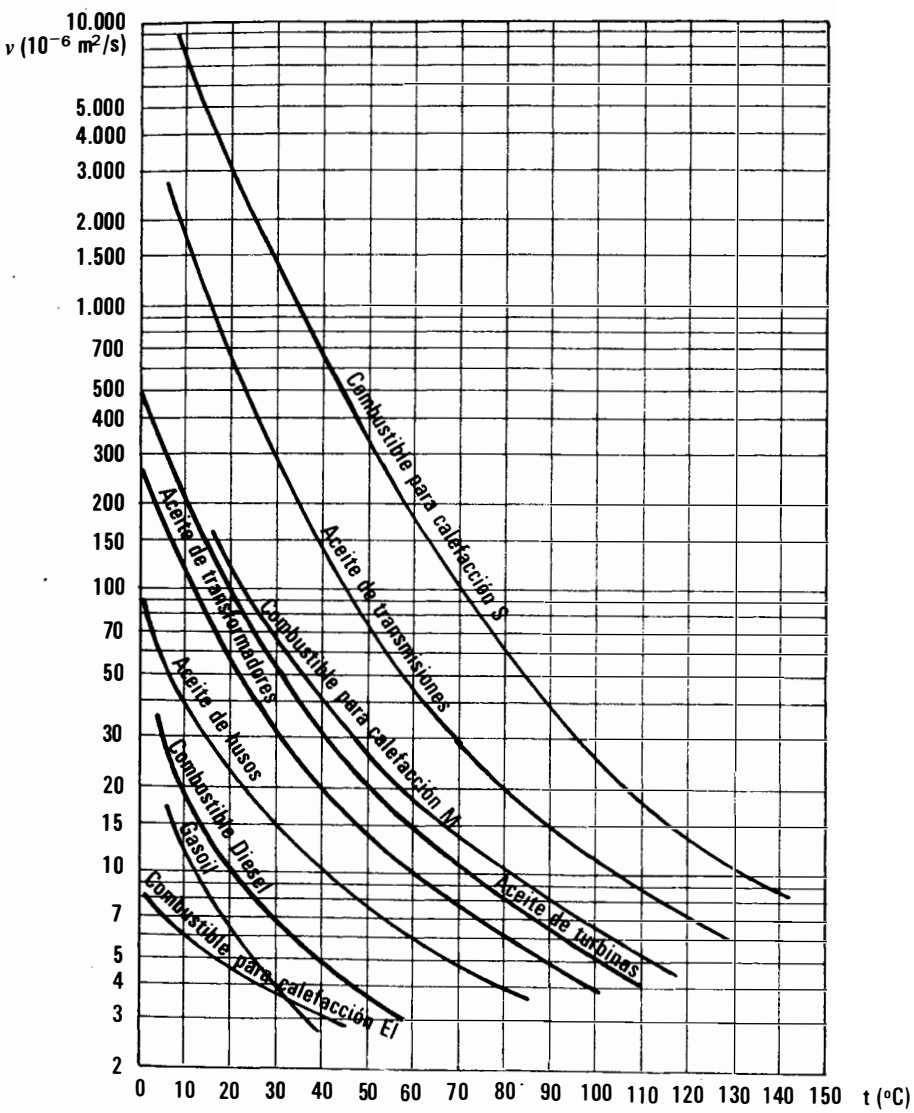
APENDICE 6

VISCOSIDAD CINEMATICA DEL VAPOR DE AGUA EN FUNCION DE LA TEMPERATURA



APENDICE 7

VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS ACEITES EN FUNCION DE LA TEMPERATURA



APENDICE 8

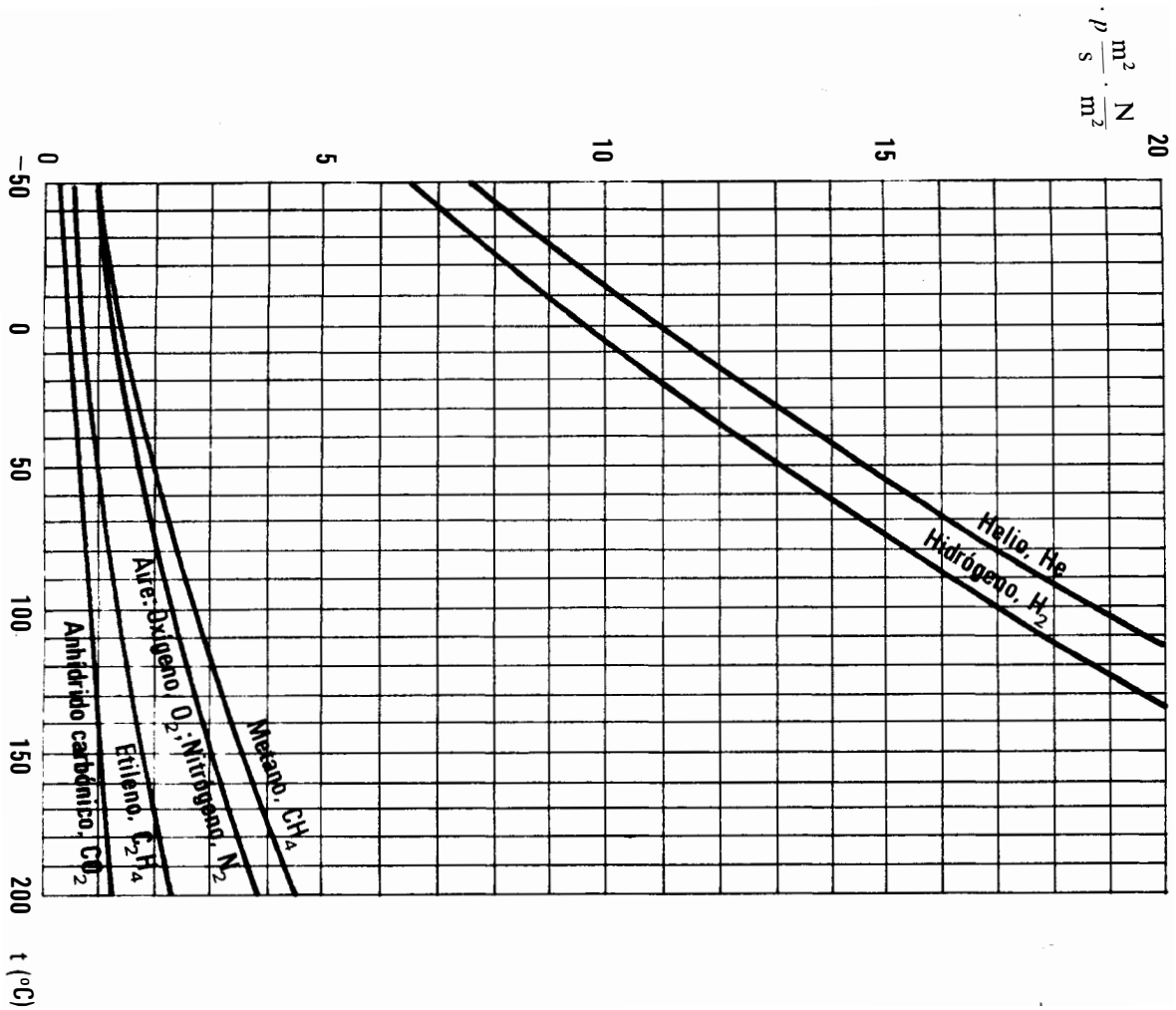
VISCOSIDAD DINAMICA Y CINEMATICA DE ALGUNOS GASES A 1,01325 BAR Y 0° C

Gas	*Constante del gas* R_i *(J/kg · K)*	*Viscosidad*	
		Dinámica $\eta \cdot 10^{-6}$ *(Ns/m²)*	*Cinemática* $\nu \cdot 10^{-6}$ *(m²/s)*
Hidrógeno, H_2	4.123,1	8,50	94,6
Helio, He	2.079,7	18,76	104,8
Amoniaco, NH_3	488,3	9,05	11,8
Nitrógeno, N_2	296,8	16,65	13,5
Aire seco	287,1	17,16	13,3
Oxígeno, O_2	259,9	19,26	13,5
Anhídrido carbónico, CO_2	188,9	13,66	6,9
Anhídrido sulfuroso, SO_2	129,8	11,68	4,0

UNIVERSIDAD DE LEON BIBLIOTECA

APENDICE 9

VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS GASES EN FUNCION DE LA TEMPERATURA



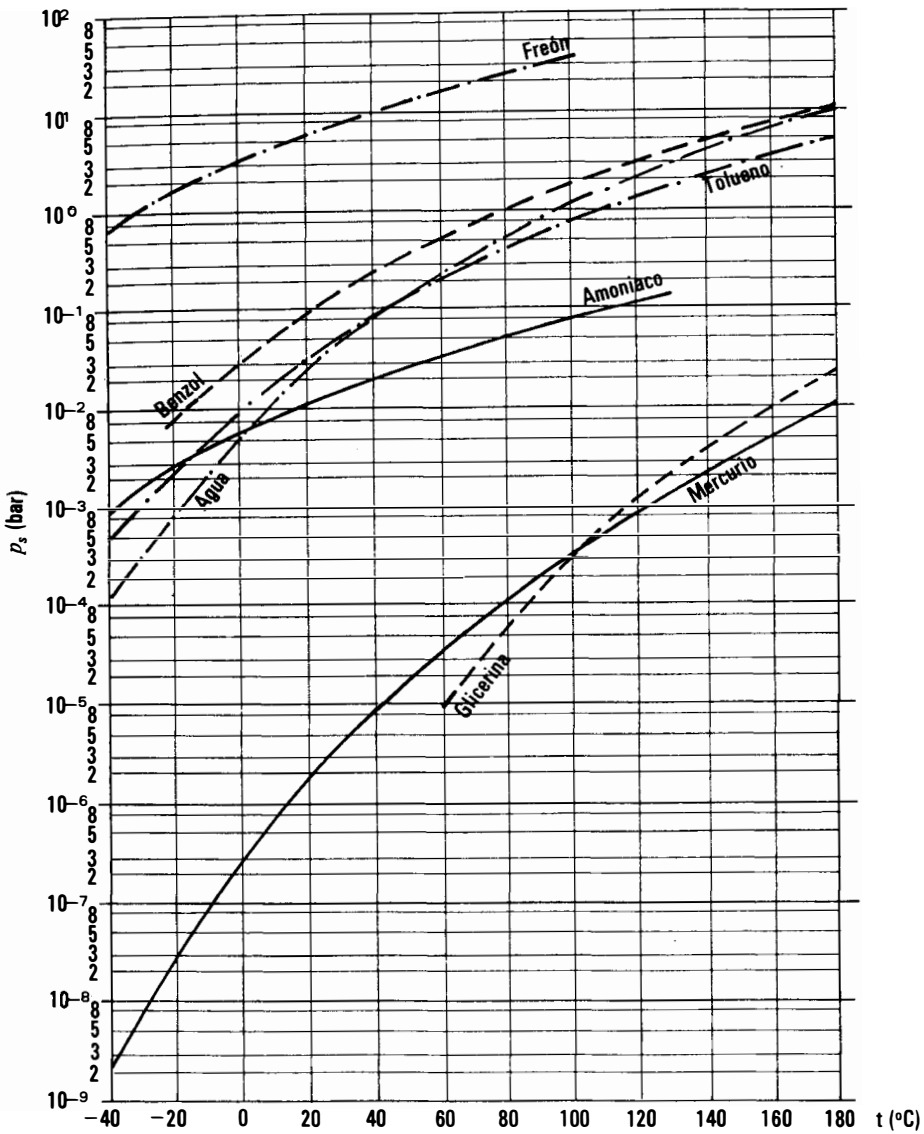
APENDICE 10

TABLAS DE CONVERSION DE UNIDADES °E Y SEGUNDOS REDWOOD Y SAYBOLD AL SI

$10^6 \frac{m^2}{s} = cSt$	*E*	*Redwood*	*Saybold*	$10^6 \frac{m^2}{s} = cSt$	*E*	*Redwood*	*Saybold*	$10^6 \frac{m^2}{s} = cSt$	*E*	*Redwood*	*Saybold*
1,0	1,0	28,5	—	13,0	2,12	61	69,6	30	4,1	125	140,9
1,5	1,06	30	—	13,5	2,17	63	71,5	31	4,2	129	145,3
2,0	1,12	31	—	14,0	2,22	64,5	73,4	32	4,35	133	149,7
2,5	1,17	32	34,4	14,5	2,27	66	75,3	33	4,45	136	154,2
3,0	1,22	33	36	15,0	2,32	68	77,2	34	4,6	140	158,7
3,5	1,26	34,5	37,6	15,5	2,38	70	79,2	35	4,7	144	163,2
4,0	1,30	35,5	39,1	16,0	24,3	71,5	81,1	36	4,85	148	167,7
4,5	1,35	37	40,7	16,5	2,5	73	83,1	37	4,95	152	172,2
5,0	1,40	38	42,3	17,0	2,55	75	85,1	38	5,1	156	176,7
5,5	1,44	39,5	43,9	17,5	2,6	77	87,1	39	5,2	160	181,2
6,0	1,48	41	45,5	18,0	2,65	78,5	89,2	40	5,35	164	185,7
6,5	1,52	42	47,1	18,5	2,7	80	91,2	42	5,6	172	194,7
7,0	1,56	43,5	48,7	19,0	2,75	82	93,3	44	5,85	181	203,8
7,5	1,60	45	50,3	19,5	2,8	84	95,4	46	6,1	189	213,0
8,0	1,65	46	52,0	20	2,9	86	97,5	48	6,45	197	222,2
8,5	1,70	47,5	53,7	21	3,0	90	101,7	50	6,65	205	231,4
9,0	1,75	49	55,4	22	3,1	93	106	52	6,9	213	240,6
9,5	1,79	50,5	57,1	23	3,2	97	110,3	54	7,1	221	249,9
10,0	1,83	52	58,8	24	3,35	101	114,6	56	7,4	229	259,0
10,5	1,88	53,3	60,6	25	3,45	105	118,5	58	7,65	237	268,2
11,0	1,93	54,9	62,3	26	3,6	109	123,3	60	7,9	245	277,4
11,5	1,98	56,4	64	27	3,7	113	127,7	70	9,24	283,5	323,4
12,0	2,02	58	65,9	28	3,85	117	132,1	80	10,56	324	369,6
12,5	2,07	59,7	67,7	29	3,95	121	136,5	90	11,88	364,5	415,8
								100	13,2	405	462

APENDICE 11

CURVAS DE SATURACION DE ALGUNAS SUSTANCIAS



APENDICE 12

MEDIDA DE CAUDALES CON DIAFRAGMAS, TOBERAS Y TUBOS DE VENTURI NORMALIZADOS

Introducción

En el Cap. 6 se expuso la teoría de estos medidores de caudal. Aquí se aducen junto con los esquemas de dimensiones normalizadas, que pueden servir para su construcción, las tablas y curvas para determinar el coeficiente de caudal, C_q, en función del cuadrado de la relación de diámetros, m, y del número de Reynolds, Re, siempre que Re sea inferior a un cierto valor de $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{lim}}$. También se aducen las normas para su instalación. Si se siguen estas normas se garantiza la exactitud de la medida; de lo contrario, será necesario un tarado *in situ*.

La fórmula universal para el caudal en los tres tipos de instrumentos es la Ec. (6-17) deducida en el texto:

$$Q = C_q A_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

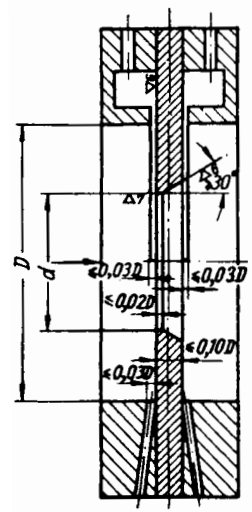


FIG. A. 12-1.

donde C_q, coeficiente de caudal, que depende de m y de Re,

siendo $$m = A_2/A_1,$$

donde A_2, área de la sección más estrecha del medidor;
A_1, área transversal de la tubería.

Diafragma normal

Se utiliza para tuberías de diámetro $D \geq 50$ mm, en que $0{,}05 \leq m \leq 0{,}7$. Las tomas de presiones pueden hacerse de cualquiera de las dos maneras indicadas en la Fig. A. 12-1. Los diafragmas se han de instalar en un tramo recto de tubería, de manera que la longitud de tubería recta antes del diafragma cumpla la condición $l_1 \geq (10 \text{ a } 40)D$ (cuanto mayor es la relación de diámetros d/D, donde d = diámetro del diafragma, D = diámetro de la tubería, tanto mayor deberá ser l_1). La longitud de tubería después del diafragma ha de ser tal que $l_2 \geq 5D$.

En la Fig. A. 12-2 se hallan los valores del coeficiente de caudal C_q de los diafragmas normales en función de Re, para diferentes valores de m, y en la Tabla A. 12-1, los valores de C_q para $\text{Re} > \text{Re}_{\text{lim}}$.

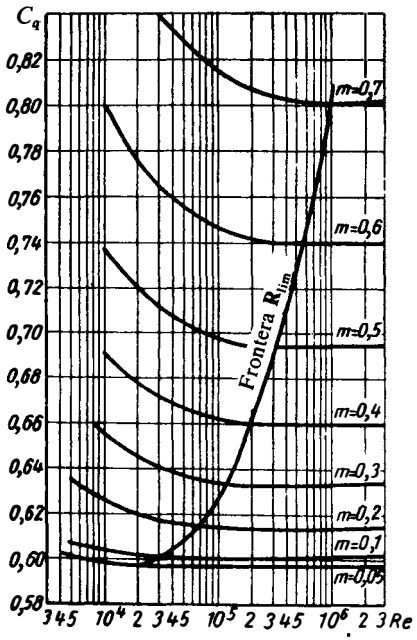


FIG. A. 12-2

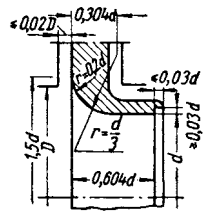


FIG. A. 12-3.

Tobera normal

Se utiliza para tuberías de diámetro $D \geq 50$ mm y $0{,}05 \leq m \leq 0{,}65$. Si $m > 0{,}45$ se construye según la Fig. A. 12-3, y si $m \leq 45$, según la Fig. A. 12-4. Las tomas de presiones y su instalación se hacen como se dijo para los diafragmas. Los valores de C_q se encuentran análogamente en la Fig. A. 12-6 o en la Tabla A. 12-1, según los casos.

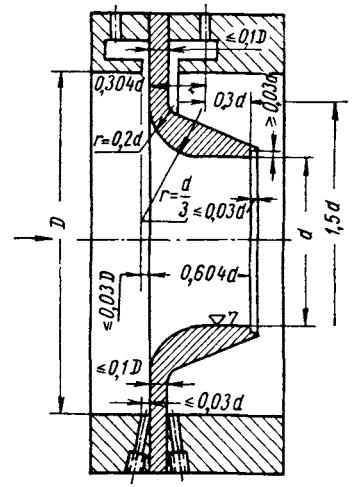


FIG. A. 12-4.

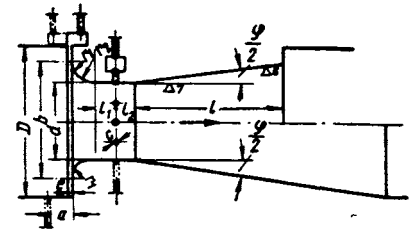


FIG. A. 12-5.

Venturi normal

El tubo de Venturi, según su longitud, puede ser normal, Fig. A. 12-5 (mitad inferior) o corto (mitad superior). En ambos casos la parte convergente tiene la misma longitud. Se utiliza para $D \geq 50$ mm y $d \geq 20$ mm y $0{,}05 \leq m \leq 0{,}6$, $l_1 = 0{,}3d$; $0{,}2d \leq l_2 \leq 0{,}4d$; $c \leq 0{,}13d$; $C_{\text{min}} = 2$ mm; $50 \leq \varphi \leq 30°$.

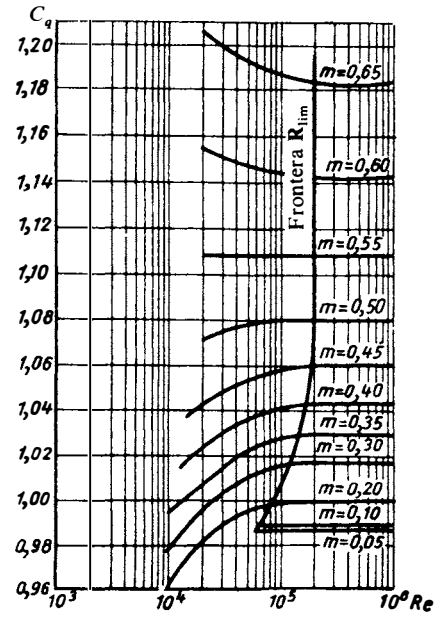


FIG. A. 12-6.

Los valores de C_q se aducen de manera análoga en la Fig. A. 12-6 y en la misma Tabla A. 12-1.

TABLA A. 12-1

VALORES DEL COEFICIENTE DE CAUDAL C_q PARA DIAFRAGMAS, TOBERAS Y TUBOS DE VENTURI NORMALES

$m = A_2/A_1$	*Diafragmas*		*Toberas y tubos de Venturi*	
	C_q	$R_{lim} \cdot 10^{-4}$	C_q	$R_{lim} \cdot 10^{-4}$
0,05	0,598	2,8	0,987	6
0,10	0,602	3,6	0,989	6,5
0,15	0,608	5,4	0,997	7,5
0,20	0,615	7,4	0,999	9
0,25	0,624	10	1,007	11
0,30	0,634	13	1,017	12,5
0,35	0,645	16	1,029	14,5
0,40	0,650	20	1,043	16,5
0,45	0,660	27	1,060	18
0,50	0,695	33	1,081	19
0,55	0,716	43	1,108	20
0,60	0,740	55	1,142	20
0,65	0,768	75	1,183	20
0,70	0,802	110	--	--

APENDICE 13

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS IMPARES

4-9. $p_{T'} - p = 8.388$ N/m²

4-11. $l = 139{,}9$ mm

5-9. $P = 15{,}104$ kW

5-11. $P = 408{,}714$ kW

5-13. $l = 900{,}8$ mm

5-15. $l_{máx} = 17{,}656$ m

6-3. Presión a la salida de la tobera del eyector, $p_2 = 9.447$ N/m²; presión máxima para que fuera posible la elevación, 55.855 N/m²; luego es posible.

6-5. $p_2 = -56.172$ N/m²

7-7. *a)* $Re' = 595{,}8$ (menor que $Re_{crit.}$)

b) $Re'' = 1{,}986 \cdot 10^5$
c) $Re''' = 3{,}972 \cdot 10^6$

9-7. $\frac{k}{d} = 0{,}0118$; $k = 11{,}8$ mm

9-9. *a)* $Q = 0{,}0705$ m³/s ; *b)* Cota sobre el fondo del depósito, 22,268 m

9-11. $v = 1{,}568$ m/s

9-13. $H_r = 4{,}334$ m

9-15. *a)* $H_r' = 5{,}670$ m ; *b)* $H_r'' = 0{,}648$ m

9-17. $Q = 132{,}3$ l/s ; $p = 24.795$ Pa > presión saturación = 5.622 Pa

10-3. $s = 0{,}7$ ‰

10-5. $v = 3{,}069$ m/s

10-7. $h = 0{,}166$ m

11-5. *a)* $P = 2{,}778$ kW ; *b)* $P_a = 3.704$ kW ; *c)* $M = 23{,}74$ mN ; *d)* $p_B = 2{,}073$ bar

11-7. $l = 0{,}649$ m

11-9. $l = 68$ mm

11-11. $l = 40{,}16$ mm

12-5. $Q = 85{,}5$ l/s

12-7. $\Delta z = 14{,}217$ m

12-9. $Q = 219{,}8$ l/s

12-11. $Q = 0{,}0056\ m^3/s$

12-13. *a)* $H_{r1-4} = 18{,}827\ m$; $Q' = 154\ l/s$; $Q'' = 115\ l/s$; $Q''' = 231\ l/s$
b) $\frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100 = 22{,}9\ \%$
c) $d = 524\ mm$

12-15. $Q = 276\ l/s$

12-17. $Q = 31{,}3\ l/s$

13-1. $W_p = 1.230 \cdot 10^4\ N$

14-5. $C_C = 0{,}659$; $C_v = 0{,}982$

14-7. $Q = 160{,}4\ l/s$

14-9. $h = 364\ mm$; $z_C = 1.136\ mm$

14-11. $Q = 1.237\ m^3/s$

14-13. $t = 34\ min\ 45\ s$

14-15. $Q = 239{,}5\ l/s$

15-3. $Q = 5{,}152\ m^3/h$

15-5. $\Delta z_{máx} = 5{,}46\ m$

15-7. *a)* $v' = 6{,}131\ m/s$; *b)* $v'' = 7{,}060\ m/s$

15-9. $t_{min} = 5{,}97\ s$

16-5. $v = 8\ m/s$

16-7. $Q = 3{,}864\ m^3/s$

16-9. *a)* $F_x' = 196{,}3\ N$; *b)* $F_x'' = 392{,}7\ N$

16-11. $F = 1.361{,}4\ N$; ángulo de la fuerza con la horizontal, $\theta = 30°$

16-13. *a)* $\beta = 53°{,}8$; *b)* $c_2 = 7{,}703\ m/s$; *c)* $Y = 1.220{,}3\ J/kg$

16-15. $F = 10.055\ N$

19-9. $P_a = 1{,}102\ kW$

19-11. $H = 93{,}72\ m$

19-13. $P_a = 17{,}477\ kW$

19-15. *a)* $\eta_h = 45{,}8\ \%$; *b)* $\beta_1 = 58°{,}45$; $\beta_2 = 108°{,}46$

19-17. $P_E = 3{,}176\ kW$

19-19. *a)* $H = 51\ m$; *b)* $Q = 25{,}1\ l/s$; *c)* $P_a = 22{,}686\ kW$

19-21. $P_a = 6{,}704\ kW$

19-23. *a)* $d_2 = 383\ mm$; *b)* $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = 8{,}671\ m$; *c)* $Q = 36{,}1\ l/s$;
$b_1 = 37{,}5\ mm$; $\beta_1 = 18°{,}39$; *e)* $\eta_{tot} = 67{,}5\ \%$

19-25. *a)* $H = 61{,}367\ m$; *b)* $P_a = 51{,}640\ kW$

19-27. 1) $\frac{p_B}{\rho g} = 4{,}193\ m$; 2) $\frac{p_C}{\rho g} = 23{,}23\ m$

19-29. *a)* $c_1 = 3{,}430\ m/s$; $u_1 = 9{,}425\ m/s$; $w_1 = 10{,}03\ m/s$; $c_{1u} = 0$;
$c_{1m} = 3{,}430\ m/s$; $\alpha_1 = 90°$; $c_2 = 14{,}62\ m/s$; $u_2 = 18{,}85\ m/s$;
$w_2 = 5{,}146\ m/s$; $c_{2u} = 14{,}39\ m/s$; $c_{2m} = 2{,}573\ m/s$; $\alpha_2 = 10°{,}14$
b) $Q = 58{,}19\ l/s$; *c)* $H_u = 27{,}65\ m$; *d)* $\frac{p_E}{\rho g} = -5{,}319\ m$
e) $E_{eléctrica} = 117{,}293\ kW \cdot h$
f) $\frac{p_S}{\rho g} = 17{,}03\ m$

19-31. *a)* $H = 65{,}53\ m$; *b)* $P_a = 41{,}666\ kW$

19-33. $z_E - z_A = 0{,}028\ m$ (z_A — cota del nivel del agua en el pozo de aspiración)

19-35. *a)* $Q = 83{,}8\ l/s$; *b)* $z_Z - z_A = 30\ m$

19-37. *a)* $\beta_1 = 30°{,}58$; *b)* $\beta_2 = 17°{,}43$

19-39. $H_u = 62{,}390\ m$

19-41. *a)* $d_2 = 256{,}5\ m$; *b)* $\beta_2 = 28°{,}87$

19-43. *a)* $H_{s\,máx} = -5{,}890\ m$
b) La bomba está en carga
c) $H_{r\,S-Z} = 2{,}988\ m$

19-45. *a)* $P_{red} = 1.249{,}8\ kW$; *b)* $P_a = 1.062{,}3\ kW$

20-7. $\Delta p_{tot} = 245{,}25\ Pa$

20-9. $P_a = 142{,}857\ kW$

20-11. $Q = 404{,}5\ l/s$

20-13. $Q = 0{,}25\ m^3/s$

20-15. Escogiendo una velocidad del aire en los conductos de 15 m/s se tiene:
Δp_{tot} del ventilador, 2.562,2 Pa
Diámetros: $d_{AB} = 595\ mm$; $d_{BH} = 243\ mm$; $d_{BC} = 545\ mm$;
$d_{CI} = 343\ mm$; $d_{CD} = 420\ mm$; $d_{DG} = 343\ mm$; $d_{DK} = 243\ mm$

20-17. $P_a = 6{,}154\ kW$

20-19. *a)* $\Delta p_{tot} = 986{,}1\ Pa$
b) $P_a = 4{,}931\ kW$
c) $c_1 = 3\ m/s$
d) $p_1 = -103{,}2\ Pa$

20-21. $P_a = 172{,}450\ kW$

20-23. $P_a = 171{,}836\ kW$

22-7. $c_1 = 41{,}831\ m/s$

22-9. $P_a = 7.510$ kW

u (m/s)	M (m · N)
0	∞
20	$375{,}5 \cdot 10^3$
40	$187{,}8 \cdot 10^3$
60	$125{,}2 \cdot 10^3$
80	$938{,}7 \cdot 10^2$
100	$751{,}0 \cdot 10^2$

22-11. *a)* $V_{min} = 4{,}0824 \cdot 10^{-7}$ m³
b) $d = 1{,}539$ m
c) $P_a = 786{,}473$ kW

22-13. *a)* $D = 640$ mm
b) 1.045 rpm
c) 1,8971 m (0,76 % de H)
d) $P_a = 61{,}239$ kW

22-15. *a)* $Q = 212{,}4$ l/s
b) $D = 786$ mm
c) $d = 90{,}1$ mm
d) $p_E = 5{,}8747$ bar

22-17. *a)* $Q = 22{,}17$ m³/s
b) $p_x = -200$ mbar

22-19. *a)* $P_a = 178{,}444$ kW
b) $\alpha_1 = 14°{,}84$
c) $\beta_1 = 147°{,}89$

22-21. $P = 8{,}726$ kW

22-23. *a)* $P_a = 7{,}358$ kW
b) $P = 9{,}810$ kW

22-25. *a)* $Q = 22{,}403$ m/s
b) $P = 1.046$ kW

22-27. $P = 3.924$ kW
22-29. *a)* 270,29 rpm
b) $\beta_2 = 28°{,}18$

22-31. $P_a = 296{,}309$ kW

22-33. *a)* $H = 115$ m
b) $M_a = 69.614$ m · N (par mecánico) ; $M_h = 73.278$ m · N (par hidráulico)

22-35. $P_a = 649{,}667$ kW

22-37. *a)* $u_1 = 15{,}71$ m/s ; $c_{1m} = 3{,}624$ m/s ; $c_{1u} = 13{,}52$ m/s ; $\beta_1 = 58°{,}86$
$w_1 = 4{,}232$ m/s ; $u_2 = 13{,}20$ m/s ; $w_2 = 14{,}12$ m/s ; $\beta_2 = 20°{,}75$
b) $Q = 0{,}9606$ m³/s
c) $H_u = 21{,}65$ m
d) $H = 27{,}06$ m
e) $p_E = 2{,}243$ bar
f) $P_a = 200{,}319$ kW

22-39. *a)* 390,5 rpm
b) $\beta_2 = 16°{,}65$
c) $P_a = 188{,}6$ kW

25-27. Turbina hidráulica de Sabiñánigo, $n_s = 17{,}21$
Turbina hidráulica de Pontenovo, $n_s = 33{,}16$
Turbina hidráulica de Pintado, $n_s = 127{,}19$
Turbina hidráulica de San Sebastián, $n_s = 157{,}69$

25-29. $\frac{n_{s\,2p}}{n_{s1}} = \sqrt{2}$

26-3. *a)* $F_a = 1.472{,}6$ N : $F_i = 4.712$ N
b) $P = 920{,}5$ W

26-5. *a)* $Q = 56{,}28$ l/min
b) $F = 10.000$ N
c) $P = 9{,}380$ kW

26-7. *a)* $Q_t = 265{,}072$ l/min
b) $P_t = 866$ W
c) $Q = 251{,}83$ l/min

26-9. *a)* $Q = 2{,}88$ m³/h
b) $F = 7.200$ N
c) $P = 7{,}2$ kW

26-11. $\frac{H}{P} = 55{,}612$ m/kW

27-1. *a)* $Q = 250$ l/min
b) $P = 4{,}167$ kW
c) $M = 15{,}92$ m · N

27-3. *a)* $Q = 4.535{,}7$ l/min $D = 1.814{,}4$ cm³/rev.

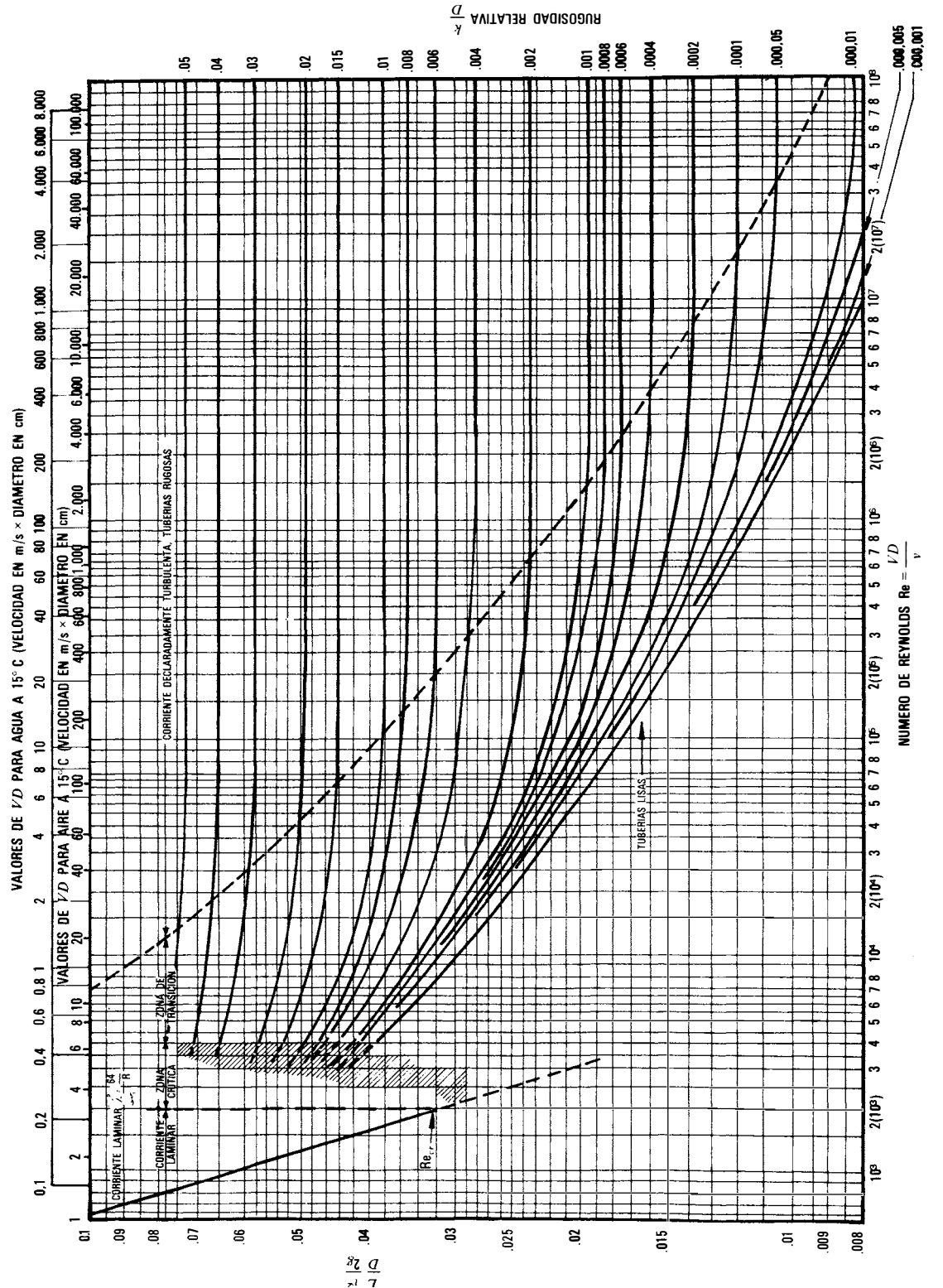
28-3. *a)* $v_t = 1{,}999$ m/min
b) $v_r = 2{,}520$ m/min

28-5. $Q = 42{,}516$ l/min

28-7. *a)* $M = 122{,}47$ m · N
b) $P_a = 12{,}825$ kW

APENDICE 14

DIAGRAMA DE MOODY PARA HALLAR EL COEFICIENTE DE PERDIDAS DE CARGA λ EN TUBERIAS



Bibliografía

A) *Anterior a la primera edición de este libro*

I. *Mecánica de fluidos, hidrodinámica teórica, aerodinámica, capa límite, medidas hidráulicas, historia de la hidráulica.*

H. ADDISON, *Hydraulic Measurements*, Chapman and Hall Ltd., London, 1949, 327 págs.

H. ADDISON, *A Treatise on Applied Hydraulics*, Chapman and Hall Ltd, London, 1954, 724 págs.

R. COMOLET, *Mécanique Expérimentale des Fluides:* tomo I, 244 págs. (1961); tomo II, 442 págs. (1963); tomo III, 357 págs. (1964), Masson et Cie., Editeurs, Paris.

R. L. DAUGHERTY y A. C. INGERSOLL, *Fluid Mechanics with Engineering Applications*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1954, 472 págs.

R. A. DODGE y M. J. THOMPSON, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1937, 495 págs.

J. H. DWINNELL, *Principles of Aerodynamics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1949, 391 páginas.

R. W. HENKE, *Introduction to Fluid Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1966, 232 págs.

J. C. HUNSAKER y B. G. RICHTMIRE, *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1947, 494 págs.

HYDRAULIC INSTITUTE, *Standards of the*, 10ª ed., Hydraulic Institute, New York, 1955.

CH., JAEGER, *Engineering Fluid Mechanics*, Blackie and Son Limited, London, 1956, 529 págs.

M. A. KOPYRIN, *Gidravlika i Gidravliceskie Masini*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo «Vysaja Skola», Moskva, 1961, 303 págs.

L. M. MILNE-THOMSON, *Tratado de hidrodinámica teórica* (traducción del inglés), Aguilar, S. A. Madrid, 1951, 604 págs.

G. MURPHY, CE., *Mechanics of Fluids*, International Textbook Co., Scranton, Pennsylvania, 1952, 309 págs.

L. PRANDTL, *Essentials of Fluid Dynamics* (traducción del alemán), Hafner Publishing Co., New York, 1952, 452 págs.

L. PRANDTL y O. G. TIETJENS, *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics* (traducción del alemán), 1.ª ed., 8.ª impr., McGraw-Hill Book Co., New York, 1934, 270 págs.

L. PRANDTL, *Applied Hydro- and Aeromechanics*, 1.ª ed., 9.ª impr., McGraw-Hill Book Co., New York, 1943, 312 págs.

A. RIBAUX, *Hydraulique appliquée. 1 Canaux et tuyauteries*, 2.ª ed., Editions La Moraine, Genève, 108 págs.

H. ROUSE, *Elementary Mechanics of Fluids*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1945, 376 págs.

H. ROUSE y J. W. HOWE, *Basic Mechanics of Fluids*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953, 245 págs.

H. ROUSE y S. INCE, *History of Hydraulics*, Dover Publications, Inc., New York, 1956, 269 págs.

H. ROUSE (editor), *Advanced Mechanics of Fluids*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958, 443 páginas.

A. SCHÄFER, *Hidráulica y Construcciones Hidráulicas* (traducción del alemán), Editorial Labor, S. A. Barcelona, 1959, 266 págs.

R. V. GILES, *Fluid Mechanics and Hydraulics*, 2.ª *ed.*, Schaum Publishing Co., New York, 1962, 274 páginas.

H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (traducción del alemán), Pergamon Press, New York, 1955, 535 págs.

E. W. SCHODER y F. M. DAWSON, *Hydraulics*, 2.ª ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1934, 429 págs.
V. L. STREETER, *Fluid Mechanics*, 1.ª ed., 3.ª impr., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1951, 366 págs.
V. L. STREETER, *Fluid Dynamics*, 1.ª ed., 2.ª impr., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1948, 263 págs.
H. R. VALLENTINE, *Applied Hydrodynamics*, Butterworths Scientific Publications, London, 1959, 272 páginas.
J. K. VENNARD, *Elementary Fluid Mechanics*, 3.ª ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954, 401 págs.
V. S. JABLONSKIJ, *Kratkij Kurs Tehniceskoj Gidromehaniki*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo Fisiko-matematiceskoj Literatury, Moskva, 1961, 356 págs.

II. *Turbomáquinas en general.*

M. ADOLPH, *Strömungsmachinen, Turbinen, Kreiselpumpen und Verdichter*, Springer-Verlag, Berlin, 1965, 360 págs. (Trad. por C. Mataix, EAPSA, Madrid, 1970.)
A. BETZ, *Einführung in die Theorie der Strömungsmaschinen*, Verlag G. Braun Karlsruhe, Göttingen, 1958, 272 págs.
S. L. DIXON, *Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery*, Pergamon Press, Oxford, 1966, 213 págs.
PFLEIDERER-PETERMANN, *Strömungsmaschinen*, 3.ª ed., Springer-Verlag, Berlin, 1964, 470 págs.
G. T. CSANADY, *Turbomachines*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964, 378 págs.
A. RIBAUX, *Hydraulique appliquée II Machines hydrauliques*, 3.ª ed., Editions La Moraine, Genève, 96 págs.
A. RIBAUX, *Hydraulique appliquée III Turbo-machines*, 3.ª ed., Editions La Moraine, Genève, 176 páginas.
D. G. SHEPHERD, *Principles of Turbomachinery*, The MacMillan Co., New York, 1956, 463 págs.
M. H. VAVRA, *Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960, 609 págs.
G. F. WISLICENUS, *Fluid Mechanics of Turbomachinery*, 2.ª ed.: vol. I, 416 págs.; vol. II, 744 págs. Dover Publications, Inc., New York, 1964.

III. *Bombas y ventiladores*

H. ADDISON, *Centrifugal and other Rotodynamic Pumps*, 2.ª ed., Chapman and Hall, Ltd, London, 1955, 530 págs.
H. ADDISON, *The Pump Users' Handbook*, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., London, 1958, 122 págs.
O. BAK, *Proektirovanie i Rascet Ventiljatorov* (traducción del alemán al ruso), Gosudarstvennoe Naucno-techniceskoe izdatel'stvo literatury po Goronomu delu, Moskva, 1961, 364 págs.
A. H. CHURCH, *Bombas y máquinas soplantes centrífugas* (traducción del inglés), Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1954, 312 págs.
B. ECK, *Ventilatoren*, Springer-Verlag, Berlín, 1962, 558 págs.
V. C. FINCH, *Pump Handbook*, National Press, U.S.A., 1948, 202 págs.
HALBERG, *Hydraulische Grundlagen für den Entwurf von Pumpenanlagen*, Halberg, Ludwigshafen/Rhein, 167 págs.
T. G. HICKS, *Pump Selection and Application*, 5.ª ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1957, 422 págs.
A. DE KOVATS y G. DESMUR, *Pompes, Ventilateurs Compresseurs Centrifuges et Axiaux*, Dunod, Paris, 1953, 336 págs.
B. I. KISELEV, *Nasosy, Kompressory i Ventiljatory*, Gosudarstvennoe Naucno-Tehniceskoe izdatel'stvo literatury po cernoj i cvetnoj metallurgii, Moskva, 1961, 400 págs.
A. A. LOMAKIN, *Centrobeznye i Ocevye Nasosy*, 2.ª ed., Izdatel'stvo «Masinostroenie», Moskva, 1966, 364 págs.
E. MOLLOY, *Modern Pumps*, George Newnes Ltd, London, 1953, 240 págs.
M. MUNIER y R. VIVOT, *Les Electro-Pompes Centrifuges et Leur Commande Automatique*, Editions Eyrolles, Paris, 1962, 191 págs.

C. PFLEIDERER, *Bombas centrífugas y Turbocompresores* (traducción del alemán), Editorial Labor, S. A., Barcelona, 1960, 631 págs.
A. J. STEPANOFF, *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, 2.ª ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957, 462 págs.
SYNDICAT DES CONSTRUCTEURS DE POMPES, *Régles et Recommandations Pour L'Etude, L'Exécution et L'Entretien des Installations de Pompes Hydrauliques*, Syndicat des Constructeurs de Pompes, Paris, 1949, 103 págs.
D. THIN, *Les Pompes et leurs Applications*, Editions Eyrolles, París, 1955, 255 págs.
W. C. OSBORNE y C. G. TURNER, *Woods Guide Pratique de Ventilation* (traducción del inglés), Dunod, Paris, 1956, 238 págs.

IV. *Turbinas hidráulicas. Centrales hidroeléctricas.*

R. BÜCHI, *Le Moderne Turbine Idrauliche ed I Regolatori Di Velocitá, Teoria e Practica*, 4.ª ed.: tomo I, Testo, 918 págs.; tomo II, Atlante, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1957.
W. P. CREAGER y J. D. JUSTIN, *Hydroelectric Handbook*, 2.ª ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1949, 1.151 págs.
R. GINOCCHIO, *Aménagements Hydroélectriques*, Eyrolles, Paris, 1959, 480 págs.
J. G. BROWN (editor), *Hydro-Electric Engineering Practice:* vol. I, *Civil Engineering*, 1.189 págs.; vol. II, *Mechanical and Electrical Engineering*, 740 págs.; vol. III, *Economics, Operation and Maintenance*, 473 págs., Blackie and Son Ltd., London, 1958.
MIROSLAV NECHLEBA, *Hydraulic Turbines*, Constable and Co., Ltd., London, 1957, 636 págs.
E. MOSONYI, *Water Power Development:* vol. I, *Low-Head Power Plants*, 908 págs.; vol. II, *High-Head Power Plants*, 1.139 págs., Budapest, 1957.
A. TENOT, *Turbines Hydrauliques et Régulateurs Automatiques de Vitesse*, Librairie de L'Enseignement Technique, Paris, 1930, 573 págs.
H. VARLET, *Aménagement, Utilisation et Prix de Revient des Usines Hydrauliques*, 2.ª ed., Editions Eyrolles, Paris, 1961, 211 págs.
H. VARLET, *Usines de Retenue, Usines de Plaine*, Editions Eyrolles, Paris, 1962, 341 págs.
G. ZOPPETTI, *Centrales Hidroeléctricas*, Editorial Gustavo Gili, S. A., Barcelona, 1965, 509 págs.

V. *Transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos. Máquinas de desplazamiento positivo. Transmisiones hidrodinámicas.*

H. W. ADAMS, *Aircraft Hydraulics*, 1.ª ed., 6.ª impr., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1943, 159 págs.
TRAINING BUREAU OF NAVAL PERSONNEL, *Basic Hydraulics*, U. S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1952, 314 págs.
S. G. BLOXHAM, *Practical Aircraft Hydraulics*, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd., London, 1947, 146 páginas.
H. G. CONWAY, *Fluid Pressure Mechanisms*, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., London, 1949, 216 páginas.
W. H. CROUSE, *Automotive Transmissions and Power Trains*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1955, 632 págs.
W. ERNST, *Oil Hydraulic Power and its Industrial Applications*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1949, 366 págs.
J. FAISANDIER, *Les Mécanismes Hydrauliques*, Dunod, Paris, 1957, 210 págs.
M. GUILLON, *Etude et Détermination des Systémes Hydrauliques*, Dunod, Paris, 1961, 443 págs.
R. HADEKEL, *Displacement Pumps and Motors*, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., London, 1951, 172 páginas.
R. HADEKEL, *Hydraulic Systems and Equipment*, The University Press, Cambridge, 1954, 224 págs.
P. M. HELDT, *Torque Converters or Transmissions*, 5.ª ed., Chilton Co. Publishers, Philadelphia, 1955, 496 págs.
R. W. HENKE, *Closing the Loop*, Huebner Publications, Inc., Cleveland, 1966, 73 págs.
F. X. KAY, *Pneumatics for Industry*, The Machinery Publishing Co., Ltd, London, 1959, 160 págs.
P. MARSH, *Hydra-Matic Transmission*, Paul-Marsh Co., Detroit, 1956, 264 págs.
I. MCNEIL, *Hydraulic Operation and Control of Machines*, The Ronald Press Co., New York, 1955, 324 págs.

J. J. PIPPENGER, *Fluid-Power Controls*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959, 252 págs.
H. C. TOWN, *Hydraulic and Pneumatic Operation of Machines*, Odhams Press Ltd., London, 1956. 191 págs.
W. E. WILSON, *Positive-Displacement Pumps and Fluid Motors*, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., London, 1950, 250 págs.

B) *Posterior a la 1.ª edición de este libro*

I. *En español*

N. B. WEBBER, *Mecánica de fluidos para ingenieros* (trad.), Bilbao, Urmo 1969, 370 págs.
J. R. D. FRANCIS y P. MINTON, *Problemas de hidráulica y mecánica de fluidos* (trad.), Bilbao, Urmo, 190 págs.
J. M. SAENZ, *Bombas hidráulicas*, CEAC 1966, 160 págs.
J. RAMÍREZ GARCÍA, *Bombas. Instalación y funcionamiento*, 1961, 84 págs.
A. GARDEL, *Cámaras de equilibrio*, Madrid, Dossat 1962, 180 págs.
ASINEL, *Bombas y ventiladores*, Asinel 1973, 152 págs.
RASE y F. HOWARD, *Diseño de tuberías para plantas de proceso* (trad.), Madrid, Blume 1973, 320 páginas.
I. SCHAMES, *Mecánica de los fluidos* (trad. del inglés), Madrid, S. Castillo 1974, 592 págs.
Mecánica de fluidos, Madrid, Euiti 1975, 4 vols., 120 págs.
F. GARCÍA LOZANO, *Propiedades de los fluidos. Hidrostática. Hidrodinámica*, 3 vols., Madrid, Universidad, etc. E.T.S. Ingenieros Agrónomos 1975, 317 págs.
K. ZIESLING, *Circuitos neumáticos* (trad.), Barcelona, Blume 1975, 252 págs.
F. BOIX, *Circuitos neumáticos, eléctricos e hidráulicos*, Marcombo 1975, 128 págs.
J. SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, *Turbomáquinas. Bombas y turbinas. Ventiladores y compresores*, Madrid, autor 1962, 374 págs.
J. AGÜERA SORIANO, *Mecánica de fluidos*, 1976, 260 págs.
U.N.E.D., *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*, U.N.E.D., 6 vols., 1976, 112 págs.
L. M. JIMÉNEZ DE CISNEROS (trad.), *Manual de Oleohidráulica*, Barcelona, Blume, 1975, 714 págs.
A. ANGULO ALVAREZ, *Sistemas hidráulicos* (tomo 1), Madrid, E.T.S. de Ing. de Caminos, 1976, 340 págs.
F. HERNING, *Transporte de fluidos por tuberías* (trad.), Barcelona, Labor 1975, 196 págs.
M. DELGADO FERNÁNDEZ, *Cálculo de chimeneas de equilibrio*, Madrid, E.T.S. de Ing. de Caminos 1976, 72 págs.
J. ANDRÉS DE RODRÍGUEZ-POMATA, *Fundamentos de aire acondicionado*, Madrid, E.T.S. de Ing. Industriales 1976, 108 págs.
V. BATURIN, *Fundamentos de ventilación industrial* (trad.), Barcelona, Labor 1976, 650 págs.
E. MENDILUCE ROSICH, *Golpe de ariete en impulsiones*, Madrid, E.T.S. de Ing. de Caminos 1974, 80 págs.
A. DUERR, *Hidráulica aplicada a las máquinas-herramientas* (trad.), Barcelona, Blume 1975, 220 páginas.
Hidráulica. Apuntes de turbinas, Madrid, E.I.T. 1975, 80 págs.
J. R. TEMEZ PELÁEZ, *Hidráulica básica*, Madrid, Escuela de Obras Públicas 1974, 241 págs.

II. *En alemán*

V. MULTRUS, *Pneumatische Logikelemente und Steurungssysteme. Fluidik* (Elementos lógicos neumáticos y sistemas de control. Fluídica), Mainz, Krausskopff, 1970, 246 págs.
A. BÖGE, *Formeln und Tabellen zur Statik, Dynamik, Hydraulik und Festigkeit Lehre* (Fórmulas y tablas de estática, dinámica, hidráulica y Resistencia), Braunschweig, Vieweg, 1968, 43 págs.
P.-G. FRANKE, *Hydrostatik*, Wiesbaden, Bauverlag, 1970, 47 págs.
W. HAEDER y F. PANNIER, *Physik der Heizungs- und Lüftungs Technik* (Física de la técnica de la calefacción y ventilacion), Berlín, Marhold 1970, 226 págs.
M. KAHRS, *Der Druckverlust in den Rohrleitungen öllhydraulischer Antriebe* (Pérdida de carga en los conductos de los accionamientos hidráulicos), Düsseldorf, VDI, 1970, 36 págs.
J. TIMM, *Hydromechanisches Berechnen. Formeln, Taf., Einsatz von Kleincomputern* (Cálculo hidrodinámico. Fórmulas, tablas, empleo de pequeños computadores), Stuttgart, Teubner, 1970, 148 páginas.

W. HENKEL y OTROS, *Handbuch der Haustechnik, Bd. 2. Lufttechnishe Anlagen, gesundheitstechnische Anlagen, industrielle Förderanlagen* (Manual de la técnica doméstica. Vol. 2. Instalaciones técnicas de ventilación, etc.), 1971, 215 págs.
W. ALBRING, *Angewandte Strömungslehre* (Hidrodinámica aplicada), Dresden, Steinkopff, 1970, 461 páginas.
M. HACKESCHMIDT, *Grundlagen der Strömungstechnik* (Fundamentos de hidrodinámica), Leibzig, D.V. für Grundstoffind, 1970, 326 págs.
H. RICHTER, *Rohrhydraulik* (Hidráulica de las tuberías), Berlín, Springer, 1971, 402 págs.
W. HAEDER y G. REICHOW, *Lexikon der Heizungs-, Lüftungs -und Klimatechik* (Léxico de la técnica de calefacción, ventilación y aire acondicionado), Berlín, Marhold 1971, 42 págs.
G. ENDE, *Kalkulationstafeln für Heizungs-, Lüftungs -und Sanitäranlagen* (Tablas de cálculo de instalaciones de calefacción, ventilación y sanitarias), Düsseldorf, Krammer 1971, 525 págs.
J. THOMA, *Ölhydraulik. Entwurf und Gestaltung hydrostat. Bauteile und Anlagen* (Oleohidráulica. Diseño y construcción de componentes e instalaciones hidrostáticas), München, Hanser 1970, 240 págs.
HAMBURGER FERNLEHRINSTITUT W. SCHULTZ, *Lüftungs-Klima- und Kälteanlagen* (Instalaciones de ventilación, acondicionamiento y de frío), Hamburg, 1970, 63 págs.
H. HART, *Flüssigkeitsdichtmessung mit Hilfe von Kernstrahlung* (Medida de la densidad de un líquido por medio de radiaciones nucleares), Leibzig, Teubner 1972, 288 págs.
A. F. ORLICEK, *Zur Technik der Mengen- und Durchflussmessung von Flüssigkeiten* (Técnicas de medida de flujo másico y volumétrico de líquidos), München, Oldenburg 1971, 456 págs.
E. BECHER, *Übungen zur technischen Strömunglehre* (Problemas de hidrodinámica técnica), Stuttgart, Teubner, 1971. 120 págs.
H. EBERTSHÄUSER, *Anwendungen der Ölhydraulik* (Aplicaciones de la Oleohidráulica), Mainz, Krausskopff, 1972, T. 1, 495 págs., T. 2, 516 págs.
G. ORTMANN, *Logik- und Fluidikssteurungen* (Controles lógicos y fluídicos), Hilden, Ortmann, 1973, 244 págs.
TECH. AKAD. WUPPERTAL, *Fluidik, Bauelemente, Schaltungen* (Fluídica, componentes, conmutaciones), Essen, Vulkan 1970, 112 págs.
G. BAUER, *Ölhydraulik* (Oleohidráulica), Stuttgart, Teubner 1974, 243 págs.
L. A. HAIMERL, *Hydraulik mit Beispielen* (Hidráulica en ejemplos), Stuttgart, Technische Rundsckau 1972, 132 págs.
D. ULMER, *Handbuch der Hydraulik* (Manual de hidráulica), Bad Homburg, Sänger 1973, 155 págs.
C. IHLE, *Lüftung und Luftheizung*[2] (Ventilación y calefacción por aire), Düsseldorf, 205 págs.
TH. KRIST, *Lüftung/Tabellen* (Ventilación/Tablas), Darmstadt, Technik-Tabellen-Verlag 1973, 228 páginas.
J. ZIEREP, *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre* (Leyes de semejanza y reglas de los modelos de Hidrodinámica), Kalrsruhe, Braun 1972, 138 págs.
K. GERSTEN, *Einführung in die Strömungsmechanik* (Introducción a la Mecánica de Fluidos), Düsseldorf, Bertelsmann-Universitäts Verlag 1974, 200 págs.
K. WIEGHARDT, *Theoretische Strömungslehre* (Mecánica de Fluidos teórica), Stuttgart, Teubner 1974, 237 págs.
G. F. BERG, *Einführung in die Hydraulik* (Introducción a la hidráulica), Berlín VEB 1974, 83 págs.
J. V. THOMA, *Einführung in die Ölhydraulik und die hydraulische Systeme*[2] (Introducción a la Oleohidráulica y sistemas hidráulicos), Essen, Girardet 1975, 114 págs.
O. E. FISCHER, *Wärmelehre, Strömungslehre* (Termodinámica, Mecánica de Fluidos), Berlín VEB 1975, 196 págs.
R. EDDLER, *Strömungsmechanik* (Mecánica de Fluidos), Wiesbaden, Akademische Verlagsanstalt 1975, 294 págs.
A. W. RECHTEN, *Fluidik. Grundlagen, Bauelemente, Schaltungen* (Fluídica. Fundamentos, componentes, conmutaciones), Berlín, Springer 1976, 244 págs.
H. ZIERHUT, *Heizungs-und Lüftungstechnik* (Técnica de la calefacción y ventilación), Stuttgart, Klett 1976, 268 págs.
L. BÖSWIRTH, *Technische Strömungslehre* (Mecánica de Fluidos técnica), Hannover, Schroedel, 1975, 211 págs.
N. MAYER, *Handbuch für fluidische Messtechnik* (Manual técnico de medidas fluídicas), Düsseldorf 1977, 615 págs.
K.-D. PAUTZ, *Einsatzmöglichkeiten fluidischer Steurungen* (Posibilidades de utilización de controles fluídicos), Opladen 1977, 246 págs.
R. RITTER, *Einführung in die fluidische Steurungstechnik* (Introducción a la técnica del control fluídico), Düsseldorf 1977, 246 págs.
P. GERRETZ, *Hydrogetriebe: Grundlagen, Bauglieder, Auslegung, Gestaltung* (Convertidores hidrodinámicos: fundamentos, componentes, diseño y construcción), Berlín 1977, 189 págs.

H. LENZ, *Heizung, Klima, Lüftung* (Calefacción, acondicionamiento, ventilación), Stuttgart 1977, 88 págs.
H. SCHULTZ, *Die Pumpen* (Las bombas), Berlín 1977, 505 págs.
C. IHLE, *Lüftung und Luftheizung* (Ventilación y calefacción por aire), Düsseldorf 1977, 238 págs.
E. BECKER, *Technische Strömungslehre* (Mecánica de fluidos técnica), Stuttgart 1977, 152 págs.

III. *En francés*

L. MCNICKLE, Jr., *L'Hydraulique simplifiquée*, París, Dunod 1970.
J. FAISANDIER, *Mécanismes hydrauliques et électrohydrauliques*[3], París, Dunod 1970, 480 págs.
E. BRUN Y OTROS, *Mécanique des fluides*. T. III. Exemples de phénomènes instationaires. Couche limite et écoulements visqueux[2], París, Dunod 1970, 396 págs.
C. FRANÇOIS, *Recueil d'exercices de mécanique des fluides avec solucions*, París, E.N.S.T.A., 1970, 76 págs.
J. LERROUX y P. BAUDUIN, *Mécanique des fluides. Statique. Ecoulements isovolumes. Vide.*, París, Dunod 1972.
M. CARLIER, *Hydraulique générale et appliquée*, París, Eyrolles 1972, 604 págs.
O. GYÖRKE, *Les laboratoires d'hydraulique européens. Etude de synthése*, Unesco 1971, 132 págs.
H. WERLÉ, *Visualisation hydrodinamique d'écoulements instationaires*, Chatillon, O.N.E.R.A. 1971, 42 págs.
M. CHICHA, *Les pompes centrifuges*, Presses de l'Université de Montreal 1971, 310 págs.
M. SEDILLE, *Ventilateurs et compresseurs centrifuges et axiaux*, T. I-II, Maison 1973, 283 + 244 págs.
J. LARRAS, *L'Hydraulique*[2], Presses universitaires 1974, 128 págs.
J. VALEMBOIS, *Memento d'hydraulique practique*[3], París, Eyrolles 1974, 114 págs.
R. BONNEFILLE, *Recueil de problèmes d'hydraulique générale*, París, Eyrolles 1974, 190 págs.
SOCIÉTÉ HYDROTECHNIQUE DE FRANCE, París, Session 16-17 nov. 1972, Six ans d'exploitation de l'usine maréomotrice de la Rance, París, Eyrolles 1973.
C. FÉDIAEVSKI Y OTROS, *Mécanique des fluides*, Moscú, Mir 1974, 599 págs.
E. BALTARETU, *Les pompes centrifuges. Conditions fonctionelles-constructives.* Chaînes de cotes, París, Eyrolles 1975, 87 págs.
SOGREAH, *Les pompes et les petites stations de pompage*, Grenoble, Sogreah.
J. GRAESER, *Abaque pour turbines hydrauliques*, Lausanne, Ed. de la Soc. du Bull. techn. de la Suisse romande, 1974, 15 págs.
A. LENCASTRE, *Manuel d'hydraulique générale*[6] (trad. del portugués), París, Eyrolles 1976, 412 págs.
A. JAUMOTTE, *Descriptions et construction des machines turbomachines, 2 Turbo pompes centrifuges*, nueva ed., Bruxelles, Presses universitaires de Bruxelles 1976, 297 págs.
A. TROSKOLAŃSKI, *Les turbopompes: théorie, tracé et construction*, París, Eyrolles 1977, 410 págs.
R. BRUNET, *Ventilation et chauffage des locaux de travail associés à l'economie et a la récupération d'énergie*, París, INRS 1976, 62 págs.
RESSOURCES ENÉRGÉTIQUES MONDIALES, 1985-2020, *Résumes des rapports sur les ressources, la préservation et la demande réalisés par la Commission de préservation de la Conférence mondiale de l'énergie*, 286 págs., Technip.
R. OUZIAUX y J. PERRIER, *Mécanique des fluides appliquée*, nueva ed., París, Dunod 1978, 464 págs.
P. ROBERT, *L'Energie éolienne*, 160 págs.
J. CLAUDE, *Les servomécanismes hydrauliques et électrohydrauliques*, Entreprise moderne d'edition/ Technique et documentation, 1978, 490 págs.

IV. *En inglés*

P. BRADSCHAW, *Experimental fluid mechanics*[2], Oxford, Pergamon 1970, 219 págs.
H. R. VALLENTINE, *Applied Hydrodynamics*, SI edition, London Butterworth 1969, 296 págs.
N. H. DE NEVERS, *Fluid Mechanics*, London, Addison Wesley 1970, 514 págs.
W. J. DUNCAN Y OTROS, *Mechanics of fluids*, London Arnold 1970, 725 págs.
I. GRANET, *Fluid Mechanics for engineering technology*, New Jersey, Prentice-Hall 1971, 366 págs.
B. S. MASSEY, *Mechanics of fluids*, New York, Van-Nostrand 1971, 508 págs.
W. M. SWANSON, *Fluid Mechanics*, New York, Holt 1970, 749 págs.
H. L. STEWART, *Hydraulic and pneumatic power for production*[3], New York, Industrial Press 1970.
H. L. STEWART y J. M. STORER, *Fluid power*, Indianapolis, Sams 1970, 512 págs.
K. FOSTER y G. A. PARKER, *Fluidics, components and circuitry*, New York, Interscience, 599 págs.

J. J. PIPPENGER y T. G. HICKS, *Industrial hydraulics*[2], New York, McGraw-Hill 1970, 468 págs.
P. O. BLACK, *Pumps*[2], Indianapolis, Audel 1970.
N. CURE y H. J. DAVIES, *Modern Fluid Mechanics*, New York, Van Nostrand 1971, 222 págs.
C. A. BELSTERLING, *Fluidic system design*, New York, Wiley 1971, 232 págs.
J. M. K. DAKE, *Essentials of engineering hydraulics*, New York, Willey 1972, 392 págs.
M. S. YALIN, *Theory of hydraulic models*, London, Macmillan 1971, 266 págs.
H. M. MORRIS y J. M. WIGGERT, *Applied hydraulics in engineering*, New York, Ronald 1972, 629 páginas
T. G. HICKS y T. W. EDWARDS, *Pump application engineering*, New York, McGraw-Hill, 435 págs.
A. H. CHURCH, *Centrifugal pumps and blowers*, Krieger 1972, 308 págs.
J. PORGES, *Handbook of heating, ventilating and air conditioning*[6], London Butterworth, 1971.
G. K. BATCHELOR, *An introduction to fluid dynamics*, London, Cambridge 1973, 615 págs.
T. ALLEN y R. L. DITSWORTH, *Fluid Mechanics*, New York, McGraw-Hill, 1972, 415 págs.
P. C. LU, *Introduction to the mechanics of viscous fluid*, New York, Holt 1973, 440 págs.
R. L. MOTT, *Applied fluid mechanics*, Columbus, Ohio, Merrill 1972, 394 págs.
R. M. OLSON, *Essentials of engineering fluid mechanics*, Intext 1973, 637 págs.
C. R. BURROWS, *Fluid power servomechanisms*, New York, Van Nostrand, 237 págs.
D. MCCLOY y H. R. MARTIN, *The control of fluid Power*, New York, Wiley 1973, 367 págs.
R. C. BINDER, *Fluid Mechanics*[5], New Jersey, Prentice-Hall 1973, 401 págs.
R. K. LINSLEY, *Water-resources engineering*, New York, McGraw-Hill 1972, 690 págs.
J. V. THOMA, *Modern oilhydraulic engineering*, Modern, Surrey, Trade and Technical Press 1972, 331 págs.
F. BRADBURY, *Hydraulic systems and maintenance*, London, Butterworth 1972, 377 págs.
PUMPING MACHINERY, *Design and development*, Modern, Surrey, Trade and Technical Press 1972.
D. BOUTEILLE y D. GUIDOT, *Fluid logic controls and industrial automation*, New York, Wiley 1973, 149 págs.
R. E. BARLETT, *Pumping stations for water and sewage*, New York, Wiley 1974.
R. CRANE, *Numerical methods in fluid dynamics*, London, Pentech Press 1974.
M. C. POTTER y J. F. FOSS, *Fluid mechanics*, Oxford, Ronald 1975, 588 págs.
J. A. ROBERSON y C. T. CROWE, *Engineering fluid mechanics*, Boston, Mass., Houghton 1975, 520 págs.
J. K. VENNARD y R. L. STREET, *Elementary fluid mechanics*[5], New York, Wiley 1975, 740 págs.
J. WILLIAMS, *Fluid mechanics*, London, Allen G., 1974, 107 págs.
H. G. CONWAY, *Fluid pressure mechanisms*[3], New York, Pitman 1974, 235 págs.
J. A. SULLIVAN, *Fluid power*, Reston Va, Reston 1975, 460 págs.
J. M. KIRSHNER y S. KATZ, *Design theory of fluid components*, New York, Academic Press, 479 págs.
G. R. KELLER, *Hydraulic system analysis*[2], Cleveland, Ohio, Hydraulics and Pneumatics Mag. 1974, 201 págs.
T. BEDFORD, *Bedford's basic principles of ventilation and heating*, Lewis 1974, 535 págs.
J. F. DOUGLAS, *Solution of problems in fluid mechanics, all metric ed.*, New York, Pitman 1975, 253 páginas.
J. R. D. FRANCIS, *Fluid mechanics for engineering students; SI units*, Leeds, Arnold 1975, 370 págs.
A. J. RAUDKIVI y R. A. CALLANDER, *Advanced fluid mechanics*, New York, Wiley 1975, 325 págs.
J. STRINGER, *Hydraulic system analysis*, New York, Wiley 1976, 173 págs.
M. B. TUMARKIN, *Hydraulic servomechanisms: structure and kinematics*, British Lib. Lend. Div. 1975, 298 págs.
E. F. BRATER y H. W. KING, *Handbook of hydraulics*, New York, McGraw-Hill 1976.
A. L. SIMON, *Practical hydraulics*, New York, Wiley 1976, 306 págs.
I. J. KARASSIK Y OTROS, *Pump handbook*, New York, McGraw-Hill 1976.
D. J. CROOME-GALE y B. M. ROBERTS, *Airconditioning and ventilation of buildings*, Oxford, Pergamon, 466 págs.
L. R. PRINGLE, *Water plants*, New York, Crowell.
H. ROUSE, *Hydraulics in the United States 1776-1976*, University of Iowa 1976, 238 págs.
H. J. MCDERMOTT, *Handbook of ventilation for contaminant control*, Ann Arbor, Michigan, Ann Arbor Science 1976, 368 págs.
R. A. DUCKWORTH, *Mechanics of fluids*, Harlow, Essex Longman Group 1977, 275 págs.
R. L. DAUGHERTY y J. B. FRANZINI, *Fluid mechanics, with engineering applications*[7], New York, McGraw-Hill, 564 págs.
W. D. WOLANSKI Y OTROS, *Fundamentals of fluid power*, Boston, Mass., Houghton Mifflin 1977, 399 págs.
J.A. FOX, *Hydraulic analysis of unsteady flow in pipe networks*, London, Macmillan, 216 págs.
J. E. NICKUM, *Hydraulic Engineering and water resources in the People's Republic of China*, Stanford Univ. US-China Relations Program, Stanford, Calif. 1977, 122 págs.
D. J. TRITTON, *Physical fluid dynamics*, Van Nostrand 1977, 362 págs.

R. J. GARDE y A. G. MIRJGAOKER, *Engineering fluid mechanics*, Roorkee, India, Nem Chand and Bros 1977, 680 págs.
H. L. STEWARD, *Pumps*[3], Sams and Co. 1977, 465 págs.
J. A. FOX, *An introduction to engineering fluid mechanics*[2], London, Macmillan 1977, 446 págs.
M. A. FLINT y L. BÖSWIRTH, *Fluid mechanics*, Griffin 1978.
T. E. CROLEY, *Hydrologic and hydraulic computations on amall programmable calculators*, University of Iowa Inst. of Hydraulics 1977, 837 págs.
R. E. PIERSON, *Technician's and experimenter's guide to using sun, wind and water power*, Prentice-Hall 1978, 278 págs.

Selección de revistas

Applied energy (Inglaterra).
Archiv für Energiewirtschaft (Alemania).
B.W.K. Brennstoff-Wärme-Kraft (Alemania).
Computers and fluids (Inglaterra).
Energie (Alemania).
Energietechnik (Alemania).
Energiewirtschaftliche Tagesfragen (Alemania).
Energie communications (U.S.A.).
Energy policy (Inglaterra).
Fluid dynamics (traducción del ruso) (U.S.A.).
Gas, Wasser, Abwasser (Suiza).
Heating and ventilating engineer (Inglaterra).
Heating, Refrigerating and air-conditioning (U.S.A.).
Heizung + Lüftung (Alemania).
Heizung, Lüftung/Klimatechnik, Haustechnik (Alemania).
Journal of fluid mechanics (Inglaterra).
Journal of the water ressources planning and managent division, A.S.C.E. (U.S.A.).
KK Die Kälte und Klima Technik (Alemania).
Ki-3, Klima + Kälte Ingenieur (Alemania).
La Houille Blanche (Francia).
Luft und Kälte Technik (Alemania).
Ölhydraulik und pneumatic (Alemania).
Pumps, pompes, pumpen (Inglaterra).
Ressource and energy (Holanda).
The Physics of fluids (U.S.A.).
Wärme-und Stoffübertragung, Thermo and Fluid Dynamics (Alemania).
Water and sewage works (U.S.A.).
Water and wastes engineering (U.S.A.).
Water Power (Inglaterra).
Water research (Inglaterra).
Wind engineering (Inglaterra).
Zeitschrift für Wasser und Abwasser Forschung (Alemania).

Normas DIN

(Entre paréntesis la fecha de publicación de la norma)

DIN 1314 (2-77). — Presión. Conceptos fundamentales. Unidades.
DIN 1342 (12-71). — Viscosidad de fluidos newtonianos.
DIN 5492 (11-65). — Símbolos de mecánica de fluidos.
DIN 13342 (6-76). — Fluidos no newtonianos. Conceptos. Ecuaciones reológicas
DIN 51550 (12-78). — Viscosimetría. Determinación de la viscosidad. Principios generales.
DIN 51562, 53012, 53015, 53017, 53018, 53222. — Viscosimetría.

DIN E 28400 T1 (1-78). — Tecnología del vacío. Nomenclatura y definiciones. Términos generales.
DIN 28400 T1 (1-72), DIN 28400 T3 (1-72), DIN E 28400 T5 (8-73). — Tecnología del vacío.

DIN 4320 (10-71). — Turbinas hidráulicas. Definiciones según funcionamiento y tipo de construcción.
DIN V 24312 (11-77). — Oleohidráulica y neumática. Presión. Presión nominal, vocabulario.
DIN 24331 (1-72). — Oleohidráulica; bombas y motores hidráulicos; desplazamiento positivo; parámetros.
DIN E 24333 (2-77). — Potencia fluida; cilindro hidráulico, 250 bar, dimensiones de montaje.
DIN 24334 (2-66). — Equipo oleohidráulico; cilindros hidráulicos; dimensiones principales.
DIN E 24236 (8-78). — Potencia fluida; cilindro hidráulico, 100 bar, dimensiones de montaje.

DIN 8955 (4-76). — Ventiladores. Conceptos. Ensayos. Potencia.
DIN 28400 T2 (1-72), 28400 T4 (3-76), 28401 (11-76), 28402 (12-76), 28426 T1 (3-76), 28426 T2 (3-76), 28427 (3-76), 28428 (11-78), E 28429 (2-77), E 43690 (4-78), 43690 (1-64). — Técnica de vacío.

DIN E 24163 T1 (2-78). — Instalaciones de ventilación. Ventiladores. Medición de potencia. Características normales.
DIN E 24167 (8-78). — Instalaciones de ventilación. Ventiladores. Exigencias técnicas de seguridad con respecto al contacto de los rodetes, pruebas.

DIN 1944 (10-68). — Mediciones en los ensayos de bombas rotativas.
DIN 4325 (10-71). — Mediciones en los ensayos de bombas de acumulación.
DIN 5437 (2-69). — Bombas de mano; bombas de paletas; dobles y cuádruples.
DIN 5440 (8-78). — Bombas; bombas de refrigeración de máquinas herramientas; caudal nominal; dimensiones.
DIN 14420 (6-61). — Bombas centrífugas para incendios.
DIN E 14420 T1 y T2 (11-76). — Bombas para incendios.
DIN V 24220 T1 y T2 (10-74 y 6-76). — Bombas para quemadores.
DIN 24251 (8-73). — Bombas centrífugas de múltiples escalonamientos; bombas de drenaje; revoluciones nominales 1.500 rpm; altura útil hasta 1.000 m.
DIN 24255 (11-78), 2456 (11-78). — Bombas centrífugas de entrada axial.
DIN 24260 (6-71). — Bombas centrífugas e instalaciones de las mismas.
DIN E 24295 (9-77). — Bombas e instalaciones de las mismas. Exigencias técnicas de seguridad.
DIN E 24296 T1 y T2 (9-76). — Bombas centrífugas. Instrucciones para su construcción.
DIN E 24299 T2 (7-78). — Placa de características de las bombas.
DIN 73356 (7-78), 73365 T1 (5-78), 73365 T4 (5-63). — Bombas de inyección para motores Diesel.

DIN E 24147 T1 (8-78 a DIN E 24147 T12). — Instalaciones de ventilación. Accesorios.
DIN 1946 T1 a T5. — Instalaciones de ventilación diversas.

Indice alfabético

accesorios tubería, 236-253
  nomograma, 248
aceleración, componentes, 96-98
acoplamiento hidrodinámico, 525-526
acumulación por bombeo, centrales, 450-453
acumulador, 582
adherencia, 21
admisión total, 461
agua
  fluyente, centrales, 449
  tabla de saturación, 321-322
ala de avión, 187-189, 278-281
  empuje ascensional, 348-350
álabe, fuerza sobre, 334-336
alcachofa, 244-245, 384-385
altura
  aspiración
    bomba, 398-401
    turbina, 496-500
  bruta, 440
  dinámica del rodete, 366
  geodésica, 110
  equivalente, 37-39, 110
  gráfico de, 114-115
  manométrica, bomba, 386
  piezométrica, 46, 111, 285
  de presión, 110
    del rodete, 366
  de velocidad, 110
  neta, 440, 486-492
    normas internacionales, 487-489
  total, 111
  útil, bomba, 386-390
Allen, método, 303
alimentación de calderas, bombas, 406
Allis Chalmers, 456
American Standard, 528
amplificador, 600
  modo de flujo, 192-193
análisis dimensional, 162, 278-280
Anderson, pantalla hidrométrica, 302-303
anemómetros, 132-134
  eje horizontal, 134
  eje vertical, 133
  hilo caliente, 135
anillos de cierre, 392-393
Arquímedes, 4
  empuje, 305
  principio, 72
arrastre, 346
  coeficiente, 278-281
A.S.M.E., 131
Atmósfera
  local y temporal, 39
  normal, 39
  técnica, 39
automatismo, 598
axial, turbomáquina, 368

balanza
  anular, 60
    de presión, 305-306
Rittmeyer, 151
banco
  cavitación, 400, 499-500
  controles hidráulicos, 598
  ensayo, 545-547
    motores combustión interna, 58
  servotransmisión, 599
banda extensométrica, 66-67
barcos, resistencia, 281-282
barómetros
  cubeta, 51-52
  en U, 51-52
Bazin, 4
  ecuación, 231-232
Bayley, 68
Bendix, 600

Bernoulli, 3, 4
  constante, 113
  (*véase también* ecuación de)
bibliografía, 641-648
Blasius, ecuación, 213, 216-217
Boing, 520
bombas
  bancos ensayo, 545-547
  campo aplicación, 558
  clasificación, 369-370
  en carga, 398
  cavitación, 319
  de cilindro oscilante, 565
  desplazamiento positivo, 369-370, 553-602
  diferencial, 565-566
  de émbolo, 553-571
    comparación con bombas rotodinámicas, 557-559
  ensayo de, 540-543
  leyes de semejanza, 532-536
  rotodinámicas, 369-422
  rotoestáticas, 572-578
  simplex, duplex, triplex, multiplex, 562-564, 567-568
  tipos, 404-406
bombas-turbinas, 463
  de dos velocidades, 454
boquilla de Borda, 286-287
Brahmapoutra, central, 442
Brooks Instrument, 140, 151-153

caja espiral, 370, 382-383, 472
  para medir caudales, 148
  turbinas, 460
cámara
  de agua, 495
  de aire, 562
cámara espiral (*véase* caja espiral)
cambios de unidades, 10
Canal de Experiencias Hidrodinámicas, El Pardo, 165, 167, 324
canal de Venturi, 300-302
canales, pérdidas, 227-235
cantidad de movimiento (*véase* impulso)
capa límite, 4, 186-189, 277
  laminar y turbulenta, 193
captador inductivo, 68
carcasa seccionada, 371
caudal
  definición, 92
  ecuación de dimensiones, 92, 94
  instalado, 447-448
  másico, 94
  medición, 139-155, 288-289, 629-632
  teórico, real, instantáneo, bomba émbolo, 559-562
caudal
  unidades, 92, 94
caudalímetros, 141-155
  de constricción, 142
  electromagnéticos, 153-154
  de flujo cerrado, 141-156
    área de paso constante, 142-151
  área de paso variable, 151-152
  de ultrasonido, 154-155
  cavitación, 318-325
  bombas, 397-403
  turbinas, 496-500
cebado, bomba, 383-384, 404
celeridad onda, 317
centrales hidroeléctricas, 440-459
  de acumulación por bombeo, 450-453, 455, 479
  agua fluyente, 481-482
  Aldeadávila, 441
  Bratsk, 442
  clasificación, 449-459
  coste, 448-449
  Churchill Falls, 442
  españolas, 445-446, 451, 456
  Grand Coulee, 442-443
  Guri, 442
  Itaipú, 442-443
  Krasnoyarsk, 442
  Lünersee, 378
  mareomotrices, 453, 520-523
  de mayor potencia, 443
  de pie de presa, 458
  Sayan Suchensk, 442
  Tennessee, 442
  Villarino, 447, 453
  Vianden, 453
  Ust Ulin, 442
centipoise, 24
centistoke, 25
centro de presión
  sobre superficie curva, 71
  sobre superficie plana, 70
cepilladora, esquema hidráulico, 595
cierre instantáneo, válvula, 315-317
  lento, 317-318
cierres laberínticos, 392-393
cilindro circular en corriente uniforme, 184-187
  empuje ascensional, 344-348
circuito hidráulico en serie, ecuación, 113-114
circuitos hidráulicos y neumáticos, 595-597
circulación, 4, 346-350
Clairaut, 3
codos, fuerza sobre, 333-334
  medidor de caudal, 148
  pérdidas, 241-242

coeficientes
  arrastre, 278-281
  cavitación
    bombas, 401-403
    turbinas, 497
  caudal, 143, 287
    tobera, 146
  contracción, 287
  irregularidad, 567
  pérdidas primarias, 206-219
  pérdidas secundarias, 237
  rugosidad absoluta, 219
  rugosidad, canales, 231-232
  total de pérdidas, 245-247
  velocidad, 287, 469
    sonda esférica, 132
    tubo de Prandtl, 130
    Venturi, 143
cohesión, 21, 28-29
Colebrook-White, ecuación, 215-219
colina rendimientos, 542-545
compresibilidad, 20
  predominio de, 176-177
compresor, 14, 356, 423-424
compuertas, 289-290, 482
  accionamiento hidráulico, 595-596
conductos abiertos, pérdidas, 227-235
configuración de corriente, 170
  (*véase también* régimen de corriente)
contador
  de agua, 140
  desplazamiento positivo, 140
  oval, 140
  de turbina, 140-141
contornos romos y fuselados, 198-201
contracciones bruscas y suaves, 239
control de flujo, 286-288
convertidor
  magnético, 152
  hidrodinámico de par, 525-528
corona directriz, 370
corriente (*véase* régimen)
corrosión, agua del mar, 522
cucharas, 466, 469
curvas características, 540-545
  cavitación, bomba, 400
curvas en concha, 542-545
cuba Danaide, 288-289
curva hidrógrafa, 135

Charmilles, 453, 465, 609
Chausey, 522
Chézy, 4
  ecuación, 230-232
chimenea de equilibrio, 500-501
China
  microcentrales, 456
  potencial hidroeléctrico, 444
Chrysler, 586

D'Alembert, 3-4
  paradoja, 31, 184-187, 276
Danaide, cuba, 288-289
Danfoss, 391
Darcy-Weisbach, ecuación, 206
  en función de R_h, 230
deformación (*véase* resistencia a la)
deflector, 466, 500-501
  regulación, 609-610
densidad
  absoluta, 14-15
    ecuación de dimensiones, 14
    unidades, 14
  agua, 15
  gas, cálculo, 425-429
  líquidos en función de t, 621
  relativa, 16-17
    agua en función de t, 17
    líquidos en función de t, 16
    mercurio en función de t, 16
densímetro, 18
desagüe por orificios, etc., 285-286
desplazador, 555-556, 572
desplazamiento, 559
  positivo, 357-358
    máquinas de, 553-602
    principio, 553-555
desprendimiento de capa límite, 196-201
destructor de energía, 466-467
destructor de energía, 466-467
diafragma, 146
  standard, 146, 629-630, 632
diagrama
  indicador, 563, 565
  Moody, 207, 217-219
  polar, 185
diámetro más económico, 220-221
difusor, bombas, 382-383
dimensiones (*véase* ecuación de)
distorsión de modelos, 168
distribuidor, 460, 462
  Fink, 464, 472-473, 482, 522 (*véase también* inyector)
disolución salina, medición de caudal, 303
doble regulación, 610-611
Drees, 456
Duero, 446

ecuación
  de Bazin, 231-232

ecuación
de Bernoulli, 89-124, 284-285, 289-302, 319, 495
en alturas, 110-111
aplicaciones, 125-160
deducción por ecuaciones de Euler, 101-102
deducción por primer principio, 102-111
fluido real, 112
gas incompresible, 115-116
generalizada, 113-114
gráfico, 247-249
hilo de corriente, 106-107
tubo de corriente, 107-108
de Blasius, 213, 216-217
de Colebrook-White, 215-219
de continuidad, 4, 93-95
fluido compresible, 94-95
fluido incompresible, 94-95
de Chézy, 230-232
de Darcy-Weisbach, 206
en función de R_h, 230
de dimensiones, 7-10
de Euler, 359-366, 385
del gas perfecto, 425-429
primera de Kármán-Prandtl, 213,216-217
segunda de Kármán-Prandtl, 215-217
Kármán-Schoenherr, 277
de Kutter, 232
de Mannig, 232-233
de Newton, 31
de Poiseuille, 209-213, 216-217
de Torricelli, 125-126
ecuaciones diferenciales de Euler, 96-100
energía térmica, 201-202
elementos deprimógenos, 142, 148-151
eje de flotación, 74
embalamiento, 609, 611
embalses españoles, 450
émbolo buzo, 562
embrague fluido, 525-526
empuje
de Arquímedes, 305
ascensional, 344-352
energía
cinética, 106
eólica, 519-520
específica, 102-106
dimensiones, 103
unidades, 103
geodésica, 104
neta, 490-492
de las olas, 523
solar, 519
de presión, 104-105
útil, bomba, 386-390
Engler
grados, 26
viscosímetro, 26
English Electric, 479
ensanchamiento brusco y suave, 238-239
ensayo
bancos, 545-547
bombas, 540-543
entrada y salida, turbina, 486
Entrepeñas, 459
equilibrio
cuerpos sumergidos, 73-75
de líquidos, 75-77
erosión, 498
bomba, 397
escalonamientos, bomba, 380
Escher Wyss, 165, 374, 467, 472, 499-500, 611
esfera de Pitot, 133
estática fluido real e ideal, 36
estatismo, 604
Euler, 3-4
ecuaciones diferenciales, 96-100
(*véanse también* ecuación, número de)
eyector, 138-139

filamento de corriente, 92
ecuación de continuidad, 94
fluido
compresible e incompresible, 31
definición, 13
ideal, 30-31
ideal y real, estática, 36
newtoniano, 21, 24
propiedades, 13-40
real, 183
flotación, 72-75
plano de, 74
eje de, 74
flotador Rittmeyer, 306
fluídica, 3
amplificador modo de flujo, 192-193
flujo laminar y turbulento, 277
natural y antinatural, 201
uniforme, canales, 278
(*véanse también* caudal, régimen)
Fordomatic, 527
fórmula (*véase* ecuación)
Föttinger, 524
Fourneyron, 4
Foxboro, 67, 141, 150, 153-154
freno de turbina, 466
Francis (*véanse* turbinas)
Froude, 3-4 (*véase también* número de)
fuerza
de inercia, 171

fuerza
y masa, 11
propulsiva, 352
sobre un fluido, 95-96

garantía, bombas, 371
gas
definición, 13
perfecto, 425-429
Gilkes, 546
golpe de ariete, 312-318
bombas, 403-405
turbinas, 500-501
gotas, formación, 29
Göttingen, laboratorios, 131
Gould Pumps, 248
gradiente de presiones, 96
grados Engler, 26
conversión a segundos Redwood y Saybolt, 627
grado de reacción, 367
turbinas, 441-463
gráfico
de alturas, 114-115
ecuación de Bernoulli, 247-249
de presiones, 47
gravedad, predominio de, 172-174
standard, 11
grupos binarios, ternarios y cuaternarios 451-453
bulbo, 521-523

Halslske, A.G., 304
Hartman und Braun, 65-66
Hammelrath und Schwenzer, 377
Hardy-Cross, método, 260-262
hélice
cavitación, 324
propulsión, 350-352
(*véase también* turbinas)
hidráulica industrial, 579-602
hidrodinámica
ecuación fundamental, 89-124
hidrostática, 45-85
ecuación fundamental, 45-47
hidrógrafa, 135, 448
hilo de corriente, 92
Honeywell, 150
Hydramatic, 526

impulso, 360
teorema, 329-343
indicador de Watt, 563-565
instrumentación de medida
de caudales, 139-155
de nivel, 306-307
de presiones, 48-68
de velocidades, 127-135
de volumen, 139-141
integrador, 300
de flujo, 141
irrotacional flujo, 30
inyector, 138, 466
Itaipú, 442-443

Joukowski, 4
fórmula, 316-317
fórmula de Kutta-Joukowski, 348-349

Kaplan (*véase* turbinas)
Kármán-Prandtl
primera ecuación, 213, 216-217
segunda ecuación, 215-217
Kármán-Schoenherr, ecuación, 277
kilogramo, 6
K.M.W., 303
Kobe, 564
KSB, 166, 375
Kutta-Joukowski, 348-349
Kutter, ecuación, 232

Laboratorio ensayo de máquinas (*véase* L.E.M.)
Lagrange, 3-4
laminar (*véase* régimen)
Lanchester, 4
Langley Field, 169
Laplace, operador, 111
L.E.M., I.C.A.I., 189, 528, 547
banco controles hidráulicos, 598
banco de servotransmisión, 599
Leonardo da Vinci, 4
ley de los nudos y de las mallas, 260
leyes de semejanza, 530-552
límite compresibilidad, ventiladores, 423-424
líneas de corriente
cilindro circ. en corriente uniforme, 184-187
y trayectoria, 91
líquidos
definición, 13
manométricos, 38-39
longitud equivalente, 247

Mach (*véase* número de)
magnitudes
  adimensionales, 8
  cinemáticas, 8
  dinámicas, 8
  fundamentales, 5
  geométricas, 4
máquinas de fluido
  definición, 355
  historia, 3-4
máquinas hidráulicas, 355-358
  clasificación, 357-358
  desplazamiento positivo, 553-602
    clasificación, 555-557
  de émbolos axiales, 575-576
  de émbolos radiales, 560, 574-575
  de engranajes, 576-577
  de paletas deslizantes, 574, 576-577
  rotoestáticas, 554, 572-578
máquinas térmicas, 356
máquinas tránsfer, 586
manómetros, 48-68
  de flotador, 304
  de líquido, 51-61
    de cubeta, 55
    diferencial, 55-56
    micromanómetro, tubo inclinado, 57
    ventajas e inconvenientes, 60-61
  de raíz cuadrada, 148-151
    tórico, 58, 60
    con Venturi, 143-145
  diferenciales, 130, 149-150
    de diafragma y resorte, 62
  elásticos
    de fuelle, 62
    de tubo de Bourdon, 61-62
      ventajas e inconvenientes, 63
    de émbolo y resorte, 63-64
  en U, 52-53
  industriales, 64
  inferencial, 142
  tarador, 63-64
  tórico, 149
Mannig, ecuación, 232-233
mapa de corriente (*véase* configuración de)
mareas, 520-523
masa y fuerza, 11
mecánica de fluidos
  aplicaciones, 1
  compresibles e incompresibles, 13
  objeto, 1
medición
  de caudales, 288-289, 629-632
    por rayos gamma, 308
    por ultrasonido, 307
  de nivel, 304-308
Megatrón, K.G., 68
menisco, 29-30
Meriam, manómetro, 57-59
metacentro, 73-75
método Hardy-Cross, 260-262
metro, 6
microcentrales, 453
micromanómetro, 57
mm. col. agua, 38
modelos (*véase* leyes de semejanza, teoría de)
molinete hidráulico, 134
molinos de viento (*véase* energía eólica)
momento cinético, 360-361
Moody, diagrama, 217-219
movimiento irrotacional, 169
  (*véase también* régimen)
multiplex, bomba, 566
N.A.S.A., 167, 169, 188-189
Nat. Phys. Lab., 131
Navier, 4
Navier-Stokes, ecuación, 111-112
neumática industrial, 579-602
Newton, 4
  fórmula viscosidad, 21-24
Neyrpic, 164-165, 456, 521
Niágara, 479-480
Nikuradse, rugosidad artificial, 214-219
nivel, medida, 304-308
nomenclatura, xx-xxiii
nonius, 30, 50
normas
  DIN, 650
  internacionales altura neta, 487-489
  ISO, transmisiones hidráulicas, 593-594
NPSH, bomba, 398-403
notación internacional, 364-365
números adimensionales, 162-182
número específico de revoluciones
  bombas, 380-382, 534-535
  cavitación, 401-402
  turbinas, 476-478, 537
número
  de Euler, 162-182, 185, 280-282
  de Froude, 162-164, 168, 172-174, 178-179, 281-282
  de Mach, 162-164, 176-178
  de Reynolds, 26, 162-164, 168, 174-176, 178-179, 194-196, 237, 257, 205-218, 280-282, 350, 530-531, 629
    crítico inferior y superior, 195-196
    en Venturi, 144
  de Weber, 162-164, 177-178
Oil Gear, 585
olas, energía, 523

onda de presión, 313-315
orientación de los álabes, 480
orificio, 283-289
  compensador, 500-501
  piezométrico, 47, 49
  salida por, 125-126
Ossberger, 456, 463
pantalla
  deflectora, 466, 500-501
  higrométrica, Anderson, 302-303
paradoja de D'Alembert, 4, 31, 276
paralelo, tuberías en, 256-257
Pardo, túnel cavitación, 323
Pascal, 4
  unidad, 6, 37
  (*véase también* principio de)
Pelton (*véase* turbinas)
pérdidas
  bombas, 390-397
  coeficiente total, 245-247
  contracción, 239
  codos, 241-242
  y energía térmica, 201-202
  ensanchamiento, 238
  mecánicas, 393-394
    primarias
    tuberías, 203-226, 254-275
    canales, 227-235
  secundarias, 236-254
    coeficiente, 206-219, 237
  turbinas, 492-496
  en válvulas, 242-245
  volumétricas, 390-393, 492-493
perfil de ala de avión (*véase* ala de avión)
peso específico
  y densidad, valor en ST y SI, 19
  ecuación de dimensiones, 15
  unidad, 15
Pitot, tubo de, 126-128, 130
  cilíndrico, 132
  formas diversas, 131-132
  sonda esférica, 132
piezómetro diferencial, 56-57
  (*véase también* orificio piezométrico)
placa plana, corriente uniforme, 193
plano
  flotación, 74
  piezométrico, 47, 49
  referencia, 45
  de representación, turbomáquina, 359
plásticos, bombas, 405-406
Poise, unidad, 24
Poiseuille, 4
  ecuación, 209-213, 216-217
potencia
  accionamiento bombas, 394
  indicada, 563-565
  interna, bombas, 395
  propulsiva, 352
  turbinas, 492-496
    acción, 334-336
  unitaria, 485
  útil, bombas, 395
potencial
  geotérmico, 519
  hidroeléctrico, 441-442, 445
Prandtl, 3, 4, 201
  capa límite, 186-189
  primera ecuación Kármán-Prandtl, 213, 216-217
  segunda ecuación Kármán-Prandtl, 215-217
  tubo de, 128-132
    cilíndrico direccional, 132
    formas diversas, 131-132
    sonda esférica, 132
prefijos en SI, 618
prensaestopas, 391
presas
  Almendra, 453
  (*véase también* embalses)
presión
  absoluta, 39-40
  atmosférica, 39-40
    (*véase también* atmósfera)
  dinámica, 115
    medición, 128-132
  distribución en cilindro, 346-347
    con corriente uniforme, 185-186
  ecuación de dimensiones, 36
  es un escalar, 34
  de estancamiento, 126-127
  estática, 115
  excedente, 39-40
  gradiente de, 96
  gráfico de, 97
  hidrostática, 69-72
    en movimiento uniforme, 100
    sobre superficie curva, 71-72
    sobre superficie plana, 69-71
  media, 33
  propiedades, 33-36
  relativa, 39-40
  de saturación, 30, 321-322, 496
  total, 115
  transmisor neumático, 67
  unidades, 36-39
primer principio, 201-202
principio de Pascal, 579-585
problema de tres recipientes, 258-259

propulsión
a chorro, 337
por hélice, 350-352
punto
estancamiento, 127
de funcionamiento, 540
nominal, 540

radial, turbomáquina, 368
radio hidráulico, 229-230
Rance, 520-522
rayos gamma, medición nivel, 308
Redwood, segundos, 26
régimen de corriente, 89-92
irrotacional, rotacional, 30
laminar y turbulento, 90, 190-196, 205-217
estudio con anemómetro hilo caliente, 135
permanente y variable, 89
uniforme, no uniforme, 89-90
uniforme, canales, 233
registrador de flujo
Venturi, 145
registrador de presión, 67
regulación de turbinas, 603-611
directa e indirecta, 605-606
con y sin retroalimentación, 606-607
taquimétrica, 605
turbina Pelton, 609-610
turbina Kaplan, 610-611
remanso, presión de, 127
rendimiento
bomba émbolo, 565
hidráulico, interno, mecánico, volumétrico y total, bomba, 395-399
propulsión, 352
del prototipo, 531-532
turbinas, 492-496
volumétrico, bombas émbolo, 560
resistencia
barcos, 281-282
a la deformación, 23
de los fluidos, 183-282
de forma, 187, 196-201
fórmula general, 278-281
de presión, 183
de superficie, 1861-87, 203-235
redes, tuberías, 254-275
retroalimentación, 606-609
revistas, selección, 649
Reynolds, 3-4
(*véase también* número de)
ríos mundiales importantes, 441
Rittmeyer, 151, 155, 305
Ritz, 376
rodete, 370, 468, 474, 482-483
rodete
formas, 379-382
turbinas, 462
rotámetro, 151
Rouse, 3
rozamiento de disco, 393-394
(*véase* resistencia
rugosidad, 209, 212-219
absoluta, tabla, 219
coeficiente, canales, 231-232
Rusia, potencial hidroeléctrico, 444

S.A.E., viscosidad, 27
St. Anthony Falls Hydr. Lab., 165, 200
Saint Malo, 521-522
sal, método de Allen, 303
salida de un depósito, coeficiente
brusca, 237-238
suave, 237-238
saturación
curvas de algunas sustancias, 628
mercurio, tabla, 52
Saybolt, segundos, 26
Schavelev, 441
Schoenherr, 277
sección entrada y salida, máquina, 371
secuencias, 598
de dos cilindros, 597
segundo, 6
Redwood, 26
Saybolt, 26
conversión de segundos Saybolt a segundos Redwood y grados Engler, 627
semejanza
dinámica, 162-182, 530-532
con predominio de la compresibilidad, 176-177
con predominio de la gravedad, 172-174
con predominio de la tensión superficial, 177-178
con predominio de la viscosidad, 174-176
geométrica, 168
de modelos, 4, 164-167
(*véase también* leyes de)
sensibilidad, 18
manómetros diferencial, 55
separación capa límite (*véase* desprendimiento)
serie, tuberías en, 255-256
servomecanismos hidráulicos, 599-600, 606
SI al sistema anglosajón y viceversa, 618-620
SI al ST y viceversa, 615
SI, prefijos, 618
Siemens, 304, 428
sifón, 136-138

símbolos transmisiones hidráulicas, 593-594
simplex, duplex, triplex, bombas, 562
sistema
anglosajón al SI y ST y viceversa, 618-620
cegesimal, 5
difusor, bombas, 382-383
Giorgi o MKS, 5
inglés, 5
internacional, SI, 5
técnico, 5
sobrepresión, golpe de ariete, 312-318
Sogreah, 164
sónar, 307-308
solución de problemas impares, 633-638
ST al sistema anglosajón y viceversa, 618-620
ST al SI y viceversa, 615
Stepanoff, 401
Sterling Instruments, 307
Stokes, 4
unidad, 25
Sulzer, 165, 371, 379, 426-427
superficie libre
inclinada, 76
parabólica, 77
sustentación, origen, 349-350

tanques
gravimétricos, 139-140
volumétricos, 139-140
taquigrama de corriente, 191-193
taquímetro, 605
tarado
diafragma, 146
tobera, 146
Venturi, 144
tensión superficial, 28-30
ecuación de dimensiones, 28
medición, 28-29
predominio, 177-178
valores, 29
tensión de vapor, 30
temperatura saturación, 30
tendencias actuales, bombas, 404-406
turbinas, 484-486
teorema
impulso, 329-343
momento cinético, 360-361
teoría de modelos, 161-182
unidimensional, 361
tes, 240
tiempo de desagüe, 290-291
toberas
de medida, 145-146
standard, 146, 630-632
Torr, 37
Torricelli, 4
ecuación de, 125-126
transductor
electrónico, 68
de flujo, electromagnético, 141
de presión, 65-68
bandas extensométricas, 66
de capacidad, 65
inductivo, 65
piezoeléctrico, 65
de resistencia, 65
transmisiones, 579-602
hidrostáticas, 524-555
hidrodinámicas, 524-529
potenciométricas, 66
transmisor mecánico, 67
triángulos de velocidades, 364-365
turbinas Pelton, 467-471
Troskolánski, 132
trayectoria y línea de corriente, 91
tuberías
comerciales, rugosidad, 215-219
forzadas, 460, 462
anclaje, 334
longitud equivalente, 247
más económica, 220-221
redes, 254-275
en derivación, 257-259
en paralelo, 256-257
en serie, 255-256
tubo de aspiración, 460-461, 473-475, 482-484, 495-496
cavitación, 320
tubos capilares, 29-30
control de flujo, 283-289
de corriente, 92
ecuación de continuidad, 95
difusor, 370
piezométrico, 47, 49-50, 128
(*véase también* piezómetro)
tubo de Pitot, 126-128, 130
cilíndrico, 132
formas diversas, 131-132
sonda esférica, 132
tubo de Prandtl, 128-132
cilíndrico, 131-132
formas diversas, 131-132
sonda esférica, 132
tubo standard, 286-287
tubo de Venturi, 142-145
cavitación, 319
standard, 144
(*véase además* canal de Venturi)
túnel
aerodinámico, 165, 189
cavitación, 323
turbinas hidráulicas, 460-518

turbinas hidráulicas
acción, 461-463
bulbo, 452
cavitación, 320
clasificación, 461-464
según n_s, 463-464
curvas características, 543-545
Dériaz, 452, 463, 479-481
ensayo, 543-545
Francis, 453, 463, 471-478, 484-486, 488-489, 543-545
regulación, 611
hélice, 463, 471-478
isogiro, 453
Kaplan, 452, 463, 471-478, 479, 481-486, 488-489, 547
regulación, 610-611
leyes de semejanza, 536-538
Pelton, 463-471, 478, 484-485, 488-489
múltiples, 467
regulación, 609-610
tangenciales, 368
unitarias, 544
turbomáquinas, 357-552
turbulento (*véase* régimen)
turbulencia (*véase* régimen turbulento)

ultrasonido, medición nivel, 307
unidades
derivadas, 6
energía, 617
fundamentales, SI, 6
potencia, 617
viscosidad cinemática, 616
viscosidad dinámica, 616
(*véase también* cambio de, SI y ST, sistema de)

vacuómetro, 53-54
válvulas, 588-593
de aguja, 466
de compuerta, 242
control de dirección, 591-592
control de flujo, 591
control de presión, 589
de macho, 243
mariposa, 242-243
para medir caudal, 148
pérdidas, 242-245
de pie, 244-245, 384-385
reductoras de presión, 589-590
retención, 246, 384-385
rotóricas, 592
de secuencia, 591
de seguridad, 584, 589-590
velocidad
en el infinito, 184
media, 93
ventilación, vertedero, 294
ventiladores, 14, 423-439
clasificación, 424-425
leyes de semejanza, 539-540
Venturi, 4, 200
standard, 631-632
(*véase también* canal de, tubo de)
vertederos, 291-300
pared delgada, 293-295
pared gruesa, 295
rectangular, 295-297
con y sin contracción lateral, 296-297
sifónico, 137
tipos, 292-293, 299-300
triangular, 297-299
viscosidad, 20-27, 36
cinemática, 24-27
agua en función de t
y dinámica de gases, 625
ecuación de dimensiones, 25
de gases en función de t, 626
líquidos diversos, 26
unidades, 25-27
variación en gases y líquidos con p y t, 25
dinámica, 30
aceites en función de t, 624
agua en función de t
ecuación de dimensiones, 24
unidades, 24
variación en gases y líquidos con p y t, 25
predominio de, 174-176
de remolino, 191
viscosímetro Engler, 26
visualización del flujo, 166
Voith, 165-166, 378, 468, 474, 481, 483
volumen
específico, 19
ecuación de dimensiones, 19
valor numérico en ST y SI, 19
unidades, 19
medición, 139-141
voluta, 382-383

Weber (*véase* número de)
Weisbach, 4
Weise und Monski, 376
Wilh. Lambrecht K.G., 130
Worthinton, 372, 373, 377

Zijnen, 132